TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

Geldiýew Berdimyrat

Diskret matematika we matematiki logika

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat -2010

Bu okuw gollanmasynda diskret matematika we matematiki logika barada maglumatlar getirilýär. Kitap ýokary okuw mekdepleriniň matematika fakultetleriniň talyplary üçin niýetlenen.

GIRIŞ

Diskret matematika matematikanyň öz gözbaşyny gadym wagtlardan alyp gaýdyan bir bölegidir. Oňa mahsus bolan häsiýetleriň esasysy diskretlikdir. Diskret matematika giň manyda matematikanyň sanlar nazaryýeti, algebra, matematiki logika ýaly birnäçe kämilleşen bölümlerini we **XX** asyryň ortalarynda elektron hasaplaýjy maşynlaryň ulanylmagy bilen ýüze çykýan çylşyrymly dolandyryjy ulgamlary öwrenmeklik meselesini öňde goýan ylmy-tehniki öňe gidişlik bilen baglanyşykly güýçli depgin bilen ösen täze bölümleri özünde saklaýar. Dar manyda diskret matematika funksional ulgamlar nazaryýeti, graflar we torlar nazaryýeti, kodlama nazaryýeti, kombinator derňew ýaly birnäçe täze bölümler bilen çäklenýär.

Bu günki gün diskret matematika diňe bir matematiki kibernetikanyň esasy bolmakdan başga-da matematiki bilimiň hem wajyp bölegidir.

Umumy ỳa-da formal logika diỳip atlandyrylỳan logika ylmy gadymy döwürde ỳüze çykan hem-de oỳlanmagyň, pikirlenmegiň, dünỳä akyl ỳetirmegiň kanunlaryny, formalaryny we tärlerini, şeỳle akyl ỳetirişiň serişdesi hökmünde dili öwrenỳän ylymdyr.Islendik matematiki nazaryỳeti beỳan edenimizde biz köplenç logikadan peỳdalanỳarys. Logikanyň kömegi bilen teoremalar aksiomalardan getirilip çykarylỳar.

Matematiki logika häzirki zaman matematikasynyň özbaşdak bölümi hökmünde **XIX** we **XX** asyrlaryň sepgidinde döreýär.Matematiki logika umumy logikanyň bir şahasy bolup,onda oỳlanmagyň kanunlary formulalaryň kömegi bilen berilỳär. Matematiki logika baradaky ideỳany ilkinji bolup XVII asyrda nemes matematigi Leỳbnis aỳdypdyr. Bu ylmyň ösüşi XIX asyrda iňlis alymy Dž. Buluň “Logikanyň matematiki analizi” işi 1847-nji ỳylda çapdan çykandan soň başlanypdyr. Matematiki logikanyň kämilleşen bölüm hökmünde emele gelmegi matematikany esaslandyrmaklygyň esasy gazanan netijesi diýip hasap etmek bolar. Matematiki logikanyň gazanan üstünligi bolsa onuň häzirkizaman aksiomatik usuly işläp düzenliginden ybaratdyr. Bu aksiomatik usul üç alamat bilen häsiýetlendirilỳär:

1) Ol ya-da beýleki nazaryýetiň başlangyç ýagdaýlarynyň formirlenişi (aksiomalar).
2) Berlen nazaryýetiň yzygider gurulmagy üçin gerek bolan logiki serişdeleriň anyk formirlenişi (getirip çykarmalar düzgüni).
3) Garalýan nazaryýetiň ähli ýagdaýlaryny (teoremalaryny)beýan etmek üçin emeli gurlan formal dilleriň ulanylyşy.

Aksiomatik usulyň birinji alamaty klassyky aksiomatik usuly häsiýetlendirýär, beýleki ikisi bolsa nazaryýetleri beýan etmeklikde maksimal takyklygy we anyklygy gazanmaklyk ugrunda soňraky ädimler bolup durýarlar.

Laýyk belgilemeleriň girizilmegi we ulanylmagy matematikanyň bütin taryhynda örän wajyp we öndümli işleriň biri bolupdy. Yöne matematiki belgilemeler diňe formal dilleriň elementleri bolup duryardy. Matematiki logikada bolsa häzirkizaman matematikasynyň ähli esasy ýagdaỳlaryny diýen ýaly formulirlemäge mümkinçilik berýän örän baý formal diller döredildi.

Bu diller we olar bilen işlemekligiň tejribesi uniwersal hasaplaýjy maşynlaryň döredilmegine getirdi.

Matematiki logikanyň esasy öwrenýän obýekti dürli hasaplaýyşlar bolup durýar. Hasaplaýyş düşünjesine hasaplaýyş dili, hasaplaýyş aksiomalary, getirip çykarma düzgünleri ýaly esasy düzüjiler girýärler. Hasaplaýyş düşünjesi subut düşünjesiniň berk matematiki kesgitlemesini bermäge mümkinçilik berýär. Matematiki logikanyň gazanan üstünlikleriniň ýene biri algoritm düşünjesiniň kesgitlemesini berenligidir. Nemes matematigi W.G. Leýbnis (1646-1716) ähli matematiki problemalary çözýän uniwersal algoritmi tapmaklyk pikirini öňe sürýär. 1936-njy ýylda A.Çyorç beýle algoritmi gurup bolmaýandygyny subut edýär. Algoritmler nazaryýetini işläp düzmeklik we algoritmik problemalary çözmeklik işine E.Post, A.Tyuring, S.Klini, A.I.Malsew, P.S.Nowikow, A.A.Markow we başga-da birnäçe alymlar uly goşant goşdylar.

Hasaplaýyşlar matematikanyň we beýleki ylymlaryň köp bölümlerini formallaşdyrmaga mümkinçilik berýärler. Pikir aýtmalar we predikatlar hasaplaýyşlary logikanyň, formallaşdyrylmalarydyrlar. Logikany formallaşdyrmaklyga edilen ilkinji synaglar Aristoteliň we Dž.. Bulyň ady bilen baglanyşyklydyr. Logikanyň formal dillerini işläp düzmeklige italýan matematigi Peanonyň goşan goşandy uludyr.

XX asyryň ortalarynda elektron hasaplaỳjy maşynlaryň (EHM) ỳüze çykmagy bilen matematiki logika has çalt ösüp başlady.Sebäbi, hasaplaỳyş tehnikasynyň soňraky ösüşi matematiki logikanyň apparatyny ösdürmek we ony giňden ulanmak bilen baglanyşykly bolup çykdy.

Matematiki logika köplükler nazaryỳeti bilen hem berk baglanyşyklydyr.Köplükler nazaryỳeti matematiki logikany düşündirmek üçin iň bajyp sistemadyr.Pikir aỳtmalar algebrasynda öwrenilỳän inkär etme, konỳunksiỳa, dizỳunksiỳa amallary köplükler nazaryỳetinde öwrenilỳän doldurgyç, kesişme we birleşme amallary bilen özara baglanyşyklydyrlar we olar birmeňzeşräk kanunlar sistemasyna boỳun egỳärler. Şeỳle baglanyşyk esasynda matematiki logikanyň dilinde goỳlan käbir meseleleri köplükler nazaryỳetiniň diline we tersine geçirip, şol nazaryỳetiň usullary bilen çözüp bolỳar.

§1. Köplükler nazaryỳetiniñ esasy düşünjeleri

` **1.Köplük düşünjesi** .

Köplükler nazaryýeti nemes matematigi **Georg Kantor (1845-1918)** tarapyndan döredildi we giň gerim bilen ösdi. Bu nazaryýetiň ideýalary we usullary diňe bir matamatikanyň pudaklarynda däl, eýsem beýleki ylymlaryň hem köpüsinde ulanylýar. Matematiki logika hem köplükler nazaryýeti bilen baglanyşyklydyr, has dogrusy, diskret matematika we matematiki logika nazaryýetlerini köplükler nazaryýetine ýüzlenmezden beýan etmek mümkin däldir.

Matematiki derňew dersi öwrenilende köplükler nazaryỳetine degişli käbir maglumatlar berilỳär.Ỳöne bu maglumatlar diskret matematikany we matematiki logikany öwrenmek üçin ỳeterlik däldir.Ondan başga-da matematiki logikada san köplükleri bilen bilelikde başga-da düpli elementlerden, mysal üçin, piker aỳtmalardan, logiki mümkinçiliklerden, logiki bahalardan we beỳleki dürli zatlardan emele getirilen köplükler ulanylỳar.Diskret matematika we matematiki logika nazaryỳetlerini köplükler nazaryỳetiniň esasy düşünjelerini ulanmazdan beỳan etmek mümkin däldir.

Köplükler nazaryỳetiniň esasy ideỳalaryna aỳdyň düşünmeklik mekdep we ỳokary matematikanyň köp meselelerine aỳdyňlyk girizỳär, okuwçylaryň we talyplaryň goỳberỳän häsiỳetli ỳalňyşlyklarynyň azalmagyna getirỳär we olary matematikanyň has çylşyrymly bölümlerini öwrenmäge taỳynlaỳar.

“Köplük” düşünjesi häzirki zaman matematikasynyň esasy düşünjeleriniň biridir. Ol ỳönekeỳ we ilkinji düşünje bolany üçin, başga düşünjeleriň kömegi bilen kesgitlenmeỳär-de mysallaryň üsti bilen düşündirilỳär.Köplük diỳlende biz, bir ỳa-da birnäçe umumy häsiỳetleri ỳa-da nyşanlary boỳunça birikdirilen kesgitli obỳektleriň toplumyny göz öňüne getirỳäris.

Köplük kesgitlenmedik düşünjedir. Köplügi emele getirýän obýektlere köplügiň elementleri diýilýär. Elementleriniň sany boýunça tükenikli we tükeniksiz köplükler bolýarlar. Hiç bir elementi özünde saklamaýan köplüge boş köplük diýilýär we Ø bilen belgilenýär.

Mysallara seredeliň.

Birden ona çenli natural sanlaryň köplügi, otagda outran talyplaryň köplügi, kitaphanadaky ähli kitaplaryň köplügi, $(x+1)(x+2)(x+3)=0$ deňlemäniň kökleriniň köplügi-tükenikli köplükleriň mysallarydyr.

Göni çyzykdaky ähli nokatlaryň köplügi,ähli hakyky sanlaryň köplügi-tükeniksiz köplükleriň mysallarydyr.

Kwadratlary otrisatel san bolan ähli bitin sanlaryň köplügi, birden kiçi bolan natural sanlaryň köplügi-boş köplüklerdir.

Köplükleri adatça latyn elipbiýiniň baş harplary bilen, elementlrini bolsa setir harplary bilen belgileýärler.

$x \in A$ ýazgy x elementiň A köplüge degişlidigini aňladýar. $x \notin A$ ýa-da $x \overline{\in} A$ ýazgylar x elementiň A köplüge degişli däldigini aňladýar. Tükenikli köplük öz elementleriniň sanawy bilen berlip bilner. Köplügi onuň hemme elementlerine mahsus bolan tapawutlandyryjy häsiýeti beýan etmek usuly bilen hem bermek bolar.

Mysal üçin

1)A={*x/x*-bitin san.}-hemme bitin sanlaryň köplügi.

2) $A = \{x / x \prec 0\}$- noldan kiçi ähli hakyky sanlaryň köplügi.

3) $A = \{x / a \leq x \leq b\}$ a we b sanlar bilen bilelikde şol sanlaryň arasyndaky ähli hakyky sanlaryň köplügi

Kesgitleme. Goỳ A we B boş bolmadyk köplükler bolsunlar**.**Eger B köplügiň her bir elementi şol bir wagtda A köplügiň hem elementi bolsa, onda B köplüge A köplügiň bölek köplügi diýilýär we $B \subset A$ ỳa-da $A \supset B$ görnüşde belgilenỳär.”B köplük A köplügiň bölegidir” ỳa-da “A köplük B köplügi öz içine alỳar” diỳip okalỳar.

Eger B köplük A köplügiň ozone-de deň bolup biljek bolsa, onda $B \subseteq A$ belgi ulanylỳar. **Mysallara seredeliň.**

1) Goỳ A- uniwersitetiň ähli talyplarynyň köplügi, B – uniwersitetiň matematika fakultetiniň ähli talyplarynyň köplügi, C – matematika fakultetiniň 5-nji ỳyl ähli talyplarynyň köplügi bolsun. Onda $C \subset B \subset A$ $(A \supset B \supset C)$ bolar.

2) Eger N – ähli natural sanlaryň köplügi, Z – ähli bitin sanlaryň köplügi, Q – ähli rasional sanlaryň köplügi we R – ähli hakyky sanlaryň köplügi bolsa, onda $N \subset Z \subset Q \subset R$ bolar.

Bölek köplükleriň iki häsiỳetini belläliň.

1) $A \subseteq A$, ỳagny her bir köplük özüniň bölek köplügi bolup durỳandyr (refleksiwlik häsiỳet).

2) Eger $A \subseteq B,\ B \subseteq C$ bolsa, onda $A \subseteq C$ (tranzitiwlik häsiỳet).

Kesgitleme. Eger A köplügiň her bir elementi şol bir wagtda B köplügiň hem elementi bolup durỳan bolsa we tersine, B köplügiň her bir elementi A köplügiň hem elementi bolup durỳan bolsa, onda ol köplüklere deň köplükler diỳilỳär we A=B bilen bellenỳär.

Başga sözler bilen aỳdanymyzda,eger şol bir wagtda $B \subseteq A$ we $A \subseteq B$ gatnaşyklar ýerine ýetýän bolsa, onda A we B köplüklere deň köplükler diýilýär we A=B bilen belgilenýär.Köplükleriň deňlik gatnaşygy aşakdaky şertleri kanagatlandyrỳar:

1) A=A (refleksiwlik häsiỳet);

2) Eger A=B bolsa, onda B=A (orun çalşyrma häsiỳet);

3) Eger A=B bolsa we B=C bolsa, onda A=C (tranzitiwlik häsiỳet).

Köplükleriň elementleriniň ỳazylyş tertibiniň ähmiỳeti ỳokdur. Mysal üçin $\{1,2,3,\} we \{3,2,1\}$ ỳazgylar şol bir köplügi aňladỳarlar: $\{1,2,3,\} = \{3,2,1\}$

A köplügiň hemme bölek köplükleriniň köplügini P(A) bilen belgileýärler we A köplügiň buleany diýip atlandyrýarlar.

A köplügiň elementleriniň sanyny N(A) bilen belgileýärler.

Boş köplügiň diňe bir bölek köplügi bar bolup ol hem onuň öžüdir.

Boş köplük islendik A köplügiň we islendik A köplük özüniň bölek köplügidir:

$\varnothing \subseteq A,\ A \subseteq A.$

Bu häsiỳetler köplügiň bölek köplükleriniň sanyny hasaplamagy aňsatlaşdyrỳar.

A köplügiň özüne we boş köplüge deň bolmadyk bölek köplükleriniň hemmesine A köplügiň öz bölek köplükleri diỳilỳär.

Bir elementli A={a} köplügiň diňe iki sany bölek köplügi bardyr, ýagny P(A)={0,{a}}. Iki elementli A={a_1,a_2} köplügiň 2^2=4 sany bölek köplügi bardyr, ýagny P(A)={0,{a_1},{a_2},A}. Umuman, n elementli A={$a_1,\dots,a_n$} köplügiň 2^n bölek köplügi bardyr.

2. Köplükler üsünde amallar. Eỳler-Wỳenniň diagrammalary.

Indi köplükler üstünde amallara garalyň.Köplükler üstünde ỳerine ỳetirilỳän amallar bar bolup, şol amallaryň kömegi bilen berlen köplüklerden täze köplükleri emele getirip bolỳar.Goỳ A,B,C,D,… köplükler berlen bolsunlar we olaryň ählisi başga bir umumy köplügiň (bu köplügi M bilen belläliň) bölek köplükleri bolsunlar: $A, B, C, D, ... \subset M$.Şeỳle ỳagdaỳda, A,B,C,D,… köplüklerden emele getirilen täze köplükler ỳene-de şol M köplügiň bölek köplügi bolỳar. Amallary ỳerine ỳetirmek üçin çyzgylardan peỳdalanalyň.Köplükleri çyzgyda görkezmek üçin Eỳler-Wỳenniň diagrammalaryny peỳdalanalyň. M köplügi gönüburçluk bilen, A,B,C,D köplükleri M köplügiň içinde çyzylan tegelekler görnüşinde aňladalyň. M we A,B,C,D köplükleriň elementlerini çyzgyda nokatlar bilen aňladalyň.Şeỳle diagrammalar, öwrenilỳän amallaryň netijelerini aỳdyň görkezỳär. Köplükler üstünde amallaryň netijesinde emele getirilen täze köplügi çyzgyda inçejik kese ỳa-da dik çyzyklaryň kömegi bilen görkezeris.

Köplügiň doldurgyjy.

Kesgitleme. Goý A;B$\subset$M bolsun. Berlen A köplügiň doldurgyjy diýip M köplügiň A köplüge degişli bolmadyk elementleriniň köplügine aýdylýar we $\overline{A}$ bilen belgilenýär. $\overline{A}$ köplük A köplügiň üstüni M köplüge çenli doldurỳar. $\overline{A}$ köplügiň doldurgyjy $\overline{\overline{A}} = A$ köplük bolar.A we $\overline{A}$ köplükleriň her biri beỳlekisiniň doldurgyjydyr, köplügiň harp belgisiniň üstündäki doldurgyç amalynyň iki sany belgisini (diỳmek şol belgileriň islendik jübüt sanysyny) taşlap ỳazyp bolỳar.

Mysallar.

1) Goỳ M= $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{6,7,8\}$, $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, C=Ø bolsun.Onda $\overline{A} = \{6,7,8,9,10\}$, $\overline{B} = \{1,2,3,4,5,9,10\}$, $\overline{C} = M, \overline{D} = 0.$

2) Goỳ M- ähli natural sanlaryň köplügi, A – ähli täk natural sanlaryň köplügi bolsun. Onda $\overline{A}$ - ähli jübüt natural sanlaryň köplügi bolar: $\overline{A} = \{2,4,6,8,...\}$.

Iki köplügiň birleşmesi.

Kesgitleme. Berlen A we B iki köplügiň birleşmesi (jemi) diýip bu köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan elementlerden ybarat köplüge aýdylýar we $A \cup B$ ýa-da A+B bilen belgilenýär.

Eger A we B köplükleriň umumy elementleri bar bolsa, onda $A \cup B$ köplükde şol elementler diňe bir gezek hasaba alynỳar.

Mysallar.

1) Goỳ $M = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,3\}, B = \{2,3\}, C = \{4,5\}$ bolsun. Onda

$A \cup B =$
$\{1,2,3,\} = A,\ A \cup C = \{1,2,3,4,5\} = M, B \cup C = \{2,3,4,5\}.$

2) Eger $A = \{x / -5 \le x \le 10\},\ B = \{x / 0 \prec x \prec 50\}$ bolsa, onda $A \cup B = \{x / -5 \le x \succ 50\}.$

Iki köplügiň kesişmesi.

Kesgitleme. Berlen A we B iki köplügiň kesişmesi (köpeltmek hasyly) diýip şol bir wagtda bu köplükleriň ikisine-de degişli bolan elementlerden ybarat köplüge aýdylýar we A$\cap$B ýa-da AB bilen belgilenýär.

Mysallar.

1) Goỳ $M = \{1,2,3,4,5,6,7,\}, A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5,6\}, C = \{4,5\}, D = \{6,7\}, E =$ Ø bolsun. Onda

$A \cap B = \{3\},\ A \cap C = \varnothing, A \cap D = \varnothing,$

$B \cap C = \{4,5\}, B \cap D = \{6\},\ C \cap D = \varnothing,$

$A \cap \varnothing = B \cap \varnothing = C \cap \varnothing = D \cap \varnothing = \varnothing.$

$M \cap A = A,\ M \cap B = B,\ M \cap C = C,\ M \cap D = D, M \cap E = \varnothing.$

Iki köplügiň tapawudy.

Kesgitleme. Berlen A we B köplükleriň tapawudy diýip A köplüge degişli bolup, B köplüge degişli bolmadyk elementlerden ybarat köplüge aýdylýar we A\B bilen belgilenýär.

Mysallar. Goỳ

$M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ A = \{1,2\},\ B = \{2,3,4,5\},\ C = \{3,4\},\ D = \{5\}$

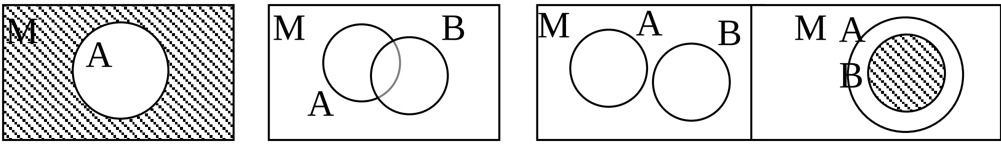
, E=Ø bolsun. Onda:

$A \setminus B = \{1\}, A \setminus C = \{1,2\} = A, A \setminus D = \{1,2\} = A, A \setminus E = A, B \setminus C = \{2,5\}, B \setminus$

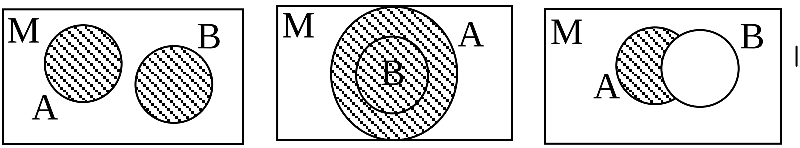
$C \setminus D = \{3,4\} = C, C \setminus E = \{3,4\} = C, D \setminus E = D, M \setminus A = \{3,4,5,6,7,8\}, A \setminus M$

Umuman aỳdanymyzda A\B$\neq$ B\A. Eger A=B bolsa, onda A\B=B\A=Ø.

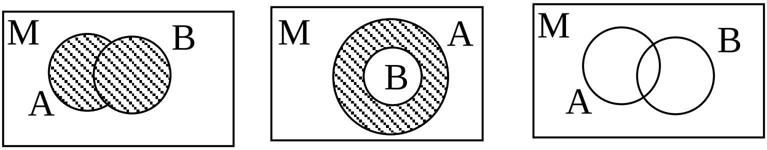
Kesgitleme. Berlen A we B köplükleriň simmetrik tapawudy diýip A\B we B\A köplükleriň birleşmesine (jemine) aýdylýar we $A\Delta B$ bilen belgilenýär. Bu amallary **Eýler-Wýenniň** diagrammalarynda getireliň



$\overline{A}$ $A\Delta B$ A$\cap$B=Ø A$\cap$B=B



$A \cup B$ $A \cup B$=A A\B



$A \cup B$ A\B A$\cap$B

3. Köplükler üstünde ỳerine ỳetirilỳän amallar üçin kanunlar.

Sanlar üstünde ỳerine ỳetirilỳän goşmak we köpeltmek amallarynyň belli bolan orun çalşyrma, utgaşdyrma we paỳlaşdyrma kanunlaryna boỳun egişleri ỳaly, bölek köplükler algebrasyndaky doldurgyç, kesişme we birleşme amallary ỳokarda agzalan kanunlara we başga-da birnäçe kanunlara boỳun egỳändir.Şol kanunlaryň birnäçesine seredeliň.

1. $$\left.\begin{aligned} A\cap B=B\cap A \\ A\cup B=B\cup A \end{aligned}\right\}$$ -orun çalşyrma kanunlary

2. $$\left.\begin{aligned} A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \end{aligned}\right\}$$ -utgaşdyrma kanunlary.

3. $$\left.\begin{aligned} (A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \\ (A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \end{aligned}\right\}$$ -paýlaşdyrma kanunlary.

4. $$\left.\begin{aligned} A\cap A=A \\ A\cup A=A \end{aligned}\right\}$$ -idempotentlik kanunlary.

5. $$\left.\begin{aligned} A\cap(A\cup B)=A \\ A\cup(A\cap B)=A \end{aligned}\right\}$$ -siňdirme kanunlary.

6. Eger $A \subset M$ bolsa, $A \cap M = A$

7. $A \cup M = M$

8. $A \cap \varnothing = \varnothing$

9. $A \cup \varnothing = A$

10. $\overline{\overline{A}} = A$-iki gezek doldurma kanuny.

11. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

12. $A \cup \overline{A} = M$

13. $\overline{M} = \varnothing$

14. $\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\}$- de Morganyň kanunlary.

15. $M \setminus A = \overline{A}$

16. $A \setminus M = \varnothing$

17. $A \setminus A = \varnothing$

18. $A \setminus \varnothing = A$

19. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

20. $M \setminus A = \overline{A}$

21. $A \setminus M = \varnothing$

22. A\Ø=A
23. Ø\A=Ø
24. A\A=Ø

4.Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly.

Eger a we b berlen elementler bolsa, onda olardan iki elementli $\{a,b\}$ köplügi emele getirip bolỳar. Şol elementlerden ỳene-de iki sany: a) birinji elementi a, ikinji elementi b bolan we (a,b) görnüşde bellenỳän tertipleşdirilen jübüti hem-de b) birinji elementi b, ikinji elementi a bolan we (b,a) görnüşde bellenỳän tertipleşdirilen jübüti emele getirip bolỳar. Eger $a \neq b$ bolsa, (a,b) we (b,a) tertipleşdirilen jübütler dürlidir: $(a,b) = (b,a)$.
Iki sany , (a,b) we (c,d) tertipleşdirilen jübütleriň deň bolmagy üçin olaryň degişli elementleri deň bolmalydyr: a=c, b=d. Berlen üç a,b,c elementlerden üç elementli $\{a,b,c\}$ köplükden başga-da 6-sany tertipleşdirilen üçlükleri emele getirip bolỳar:
(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Eger a=b=c bolsa, onda bu üçlükleriň hemmesi özara deňdir. Eger a,b,c elementler iki-ikiden özara deň däl bolsalar, onda bu üçlükleriň hemmesi dürlidir.
Indi n-sany $a_1, a_2, ... a_n$ elementlerden emele getirip boljak köplüklere seredeliň. Şol elementlerden n-elementli $\{a_1, a_2, ... a_n\}$ köplügi emele getirip bolỳar. $a_1, a_2, ... a_n$ elementleri her dürli tertipde ỳerleşdirenimizde-de şol bir köplügi alarys.
Şeỳlelikde n-sany, jübüt-jübütden dürli bolan elementlerden n! sany tertipleşdirilen köplükleri emele getirip bolỳar. $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, ... a_n = b_n$ bolanda $(a_1, a_2, ... a_n)$ we $(b_1, b_2, ... b_n)$ köplükler özara deň bolup bilỳärler.
Indi $x \in R, y \in R$ hakyky sanlardan emele getirilen (x,y) tertipleşdirilen jübütlere seredeliň.Şeỳle jübütleriň her birine berlen gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä tekizligiň bir we diňe bir sany nokady degişlidir we tersine, tekizligiň her bir nokadyna hakyky sanlaryň bir sany tertipleşdirilen jübüti degişlidir.

Hakyky sanlardan emele getirilen her bir (x,y,z) tertipleşdirilen üçlük üç ölçegli guňişligiň bir we diňe bir sany nokadyny kesgitleỳär.
Kesgitleme.Berlen A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diỳip, birinji elementi A köplükden, ikinji elementi B köplükden alnan, tertipleşdirilen (a,b) jübütleriň ählisinioplumyna aỳdylỳar we ol A x B bilen bellenỳär:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}.$$

Eger A=B bolsa, onda bu deňligi aşakdaky görnüşde ỳazmak bolar:

$$A \times A = A^2 = \{(a,b) / a,b \in A\}.$$

Bu deňlige A köplügiň dekart kwadraty diỳilỳär.
Mysallar.
1).Goỳ $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ bolsun.Onda
$A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$ we

$B\times A=\{(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_3,a_1),(b_3,a_2)\}$ bolar.
Bu ỳerden görnüşi ỳaly iki köplügiň dekart köpeltmek hasylyny emele getirmek amaly kommutatiw däldir.
2).Eger $A=\{a_1,a_2\}$ bolsa, onda
$A^2=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2)\}$ bolar.
Kesgitleme. Berlen A,B we C köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diỳip, birinji elementi A köplükden, ikinji elementi B köplükden, üçünji elementi C köplükden alnan tertipleşdirilen (a,b.c) üçlükleriň ählisiniň toplumyna aỳdylỳar we ol $A\times B\times C$
Bilen bellenỳär:
$$A\times B\times C=\{(a,b,c)/\,a\in A,b\in B,c\in C\}.$$
Eger A=B=C bolsa, onda bu deňlikden alarys:
$$A\times A\times A=A^3=\{(a,b,c)/\,a,b,c\in A\}.$$
Bu deňlige A köplügiň dekart kuby diỳilỳär.
Mysallar.
1) Goỳ $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$, $C=\{c_1,c_2\}$ bolsun. Onda

$A\times B\times C=\{(a_1,b_1,c_1),(a_1,b_1,c_2),(a_1,b_2,c_1),(a_1,b_2,c_2),(a_2,b_1,c_1),(a_2,b_1,c_2),(a_2,b_2,$

bolar.

2) Goỳ $A=\{a_1,a_2\}$ bolsun. Onda

$$A^3 = \{(a_1, a_1, a_1), (a_1, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_2), (a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_1), (a_2, a_2, a_2)\}$$

bolar.

Kesgitleme. $A_1, A_2, ... A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diỳip, birinji elementi A_1 köplükden, ikinji elementi A_2 köplükden, we şuňa meňzeş n-nji elementi A_n köplükden alnan elementleriň tertipleşdirilen köplükleriniň hemmesiniň toplumyna aỳdylỳar we ol $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ bilen bellenỳär:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ... a_n) / a_i \in A_i, i = 1,2,..., n\}.$$

Eger $A_1 = A_2 = ... = A_n$ bolsa, onda A köplügiň n dekart derejesini alarys:

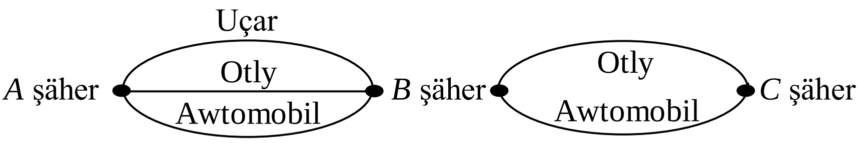
$$A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) / a_1, a_2, ... a_n \in A\}.$$

§ 2. Kombinatorikanyñ elementleri.

1. Köpeltmek düzgüni. Kombinatorika diskret matematikanyñ bölümleriniñ biri bolup,ol ähtimallyklar nazaryýetinde, matematiki logikada,sanlar nazaryýetinde, hasaplaýyş tehnikasynda we kibernetikada giñden ulanylýandygy bilen möhüm ähmiýete eýedir.Amalyýetde köplenç käbir hereketi amala aşyrmagyñ mümkin bolan ýagdaýlaryny hasaplamagyñ usullarynyñ sanyny anyklamak bilen baglanyşykly meseleler bilen iş salyşmaly bolýar.Şeýle meselelere kombinatoriki meseleler diýilýär.

Kombinatoriki hasaplamalary geçirmek bilen ylmyñ dürli pudaklarynýñ wekilleri iş salyşmaly bolýarlar.Mysal üçin, himik molekulalardaky atomlaryñ mümkin bolan baglanyşyklarynyñ görnüşlerini anyklamaly bolanda, biolog belok birleşmelerindäki aminokislotalaryñ mümkin bolan dürli gezekleşmeler yzygiderliklerini hasaplanda, agranom ekin meýdanlarynda ekişiñ dürli usullaryny öwrenende, dispetçer ulaglaryñ ugurlar boýunça hereketleriniñ grafigini düzende, müdiriñ okuw işleri boýunça orunbasary sapaklaryñ tertibini düzende we şuña meñzeş ýagdaýlarda kombinatoriki hasaplamalary geçirmeli bolýarlar.

Eger *A* hereketi *n* usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa we bu usullaryñ her biri üçin *B* hereketi *m* usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa,onda görkezilen tertipde *A* we *B* hereketleri $n \times m$ usul bilen amala aşyrmak bolar. Kombinatorikanyñ bu esasy düzgünine köpeltmek düzgüni diýilýär. Mysal üçin, *A* şäherden *B* şähere uçarda,otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa, *B* şäherden *C* şähere otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa,onda *A* şäherden *C* şähere $3 \times 2 = 6$ usul bilen barmak bolar (1-nji surat).



1-nji surat.

2. Çalşyrmalar.

Kesgitleme. 1-den *n*-e çenli natural sanlaryň köpeltmek hasy-lyna *n*-faktorial diýilýär we *n*! bilen belgilenýär.

Mysal üçin, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Kesgitlemeden peýdalanyp, bu sany $5! = 4!\cdot 5 = 3!\cdot 4\cdot 5 = 2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 1!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ deñlikler görnüşinde hem ýazmak bolar.Şol sebäpli, islendik natural n san üçin

$$n! = (n-1)!\cdot n$$

deňlik adalatlydyr.

Mysal. Eger her bir sifr sanda diňe bir gezek gelỳän bolsa 1,2,3 sanlardan näçe sany üçbelgili san düzüp bolỳar?

$$n! = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Bellik. 0! = 1 diýlip kabul edilýär.

Goý, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementler berlen bolsun. Bu elementleriň islendik tertipde ýazylan yzygiderligine çalşyrma diýilýär. Bu ele-mentleriñ islendik ikisinden, mysal üçin, a_1 we a_2 elementlerden a_1, a_2 we a_2, a_1 görnüşli $2! = 1\cdot 2 = 2$ sany çalşyrma düzmek bolar. Şuña meñzeşlikde, berlen elementleriñ islendik üçüsinden, mysal üçin, a_1, a_2 we a_3 elementlerden a_1, a_2, a_3; a_1, a_3, a_2; a_2, a_1, a_3; a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2; a_3, a_2, a_1 görnüşli $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ sany çalşyr-ma düzmek bolar. Bu pikir ýöretmäni dowam edip, *n* elementden $n!$ sany çalşyrma düzmek boljakdygyna göz ýetirmek bolar.

3. Utgaşdyrmalar.

Kesgitleme. n elementli köplügiň k elementli erkin bölek köp-lügine n elementden k element boýunça utgaşdyrma diýilýär.

Şeýle utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

(1)

ululyga deňdir.

Mysal. Gutyda 10 sany detal bar. Gutydan iki detaly näçe usul bilen saỳlap alyp bolỳar?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

4) Ýerleşdirmeler.

Kesgitleme. Her bir elementine 1-den n-e çenli käbir san (elementiň nomeri) degişli edilen n elementli köplüge tertipleşdirilen diýilýär.

Kesgitleme. n elementli köplügiň tertipleşdirilen k elementli bö-lek köplügine n elementden k element boýunça ýerleşdirme diýilýär.

Şeýle ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

ululyga deňdir.

§ 3 Pikir aýtmalar algebrasy.

1. Pikir aỳtmalar.

Pikir aỳtmalar algebrasy matematiki logikanyň esasy bölümleriniň biridir.
Kesgitleme Çyndygy ýa-da ýalandygy barada belli bir tassyklama aýtmagyň manysy bar bolan her bir sözleme pikir aýtma diýilýär.
Pikir aỳtmalar çyn ỳa-da ỳalan bolup bilerler, käbir pikir aỳtmalaryň çyndygy ỳa-da ỳalandygy häzirlikçe bize belli däl bolmagy hem mümkindir. Kimiň, nirede we haçan aỳdỳanlygyna baglylykda çyndygy ỳa-da ỳalandygy üỳtgäp durỳan piker aỳtmalar hem bolup bilerler.

Bu kesgitlemeden her bir sözlemiň pikir aýtma däldigi gelip çykýar. Mysal üçin, sorag ýa-da ýüzlenme sözlemleri pikir aýtmalar däldirler.Pikir aýtmalary latyn elipbiýiniň A,B,C,… baş harplary bilen ýa-da $a,b,c,\ldots$ setir harplary bilen belgileýärler.Çyndygy ýa-da ýalandygy belli däl bolan, ýagny üýtgeýän ýönekeý pikir aýtmalary $x,y,z,\ldots$ harplar bilen belgileýärler.Harplar bilen bellenenden soň, bizi, piker aỳtmalaryň manylary däl-de, diňe olaryň çyn ỳa-da ỳalan bolup bilmek häsiỳetleri gyzyklandyrỳar.

Mysallar.

1.5- ỳönekeỳ sandyr.

2.Şu gün 5-nji maỳ.

3.Häzir ỳagyş ỳagỳar.

4.11- jübüt sandyr.

5. e-sanyň ỳazgysyndaky 1000-nji orunda duran sifr 5-dir.

6. Jübüt sanlar ikä bölünỳändir.

7.3x3=9.

1,6 we 7 mysallardaky piker aỳtmalar hemişe çyndyr, 4 mysaldaky ỳalan piker aỳtmadyr,2 we 3 mysallardaky sözlemleriň çyndygy ỳa-da ỳalandygy, olaryň aỳdylỳan wagtyna baglylykda üỳtgäp durỳar. 5-nji mysaldaky pikir aỳtmanyň çyndygyny ỳa-da ỳalandygyny biz häzir bilemzok. Emma şoňa garamazdan, ony piker aỳtma diỳip hasap edỳäris, sebäbi ỳörite barlap görmek usuly bilen ondaky tassyklamanyň çyndygyny ỳa-da ỳalandygyny anyklap bolỳar.Her bir sözleme piker aỳtma diỳip bolmaỳar.Mysal üçin, sorag ỳa-da ỳüzlenme sözlemler piker aỳtma däldir, sebäbi olaryň çyndygy ỳa-da ỳalandygy barada belli bir zat aỳtmak mümkin däl. Mysal üçin: "Ỳaşasyn agzybirlik", " Siziň ỳaşyňyz näçe?".

Şeỳlelikde her bir pikir aỳtma ỳa çyn ỳa-da ỳalan bolmalydyr.Hiç bir piker aỳtma şol bir wagtda hem çyn, hem ỳalan bolup bilmez. Bir harp bilen belgilenen ilkinji pikir aýtmalara ýönekeý ýa-da elementar pikir aýtmalar diýilýär.Başgaça, pikir aýtmanyň hiç bir bölegi aýratyn pikir aýtma bolmasa, onda oňa ýönekeý pikir aýtma diýilýär.

Indi pikir aýtmanyň çynlyk bahasy diýlen düşünjäni girizeliň. Pikir aýtmalaryň çynlyk bahalaryny "çyn" we "ýalan"sözler bilen ýa-da degişlilikde "1" we "0" sifrler bilen belgileýärler.Eger "a" harp bilen bellenen piker aỳtma çyn bolsa, onda ony a=ç ỳa-da a=1 diỳip, tersine bolan ỳagdaỳda a=ỳa ỳa-da a=0 diỳip belleỳäris. Pikir aýtmalaryň çynlyk bahalarynyň 1 we 0 sifrler bilen belgilenmegi hasaplaýyş matematikasy we elektron hasaplaýjy maşynlar üçin programmirleme nazaryýetinde ýüze çykýan zerurlyk bilen esaslandyrylýar. Bu nazaryýetlerde matematiki logikanyň apparaty giňden ulanylýar, şunlukda san görnüşinde berilýän maglumatlar ikilik hasaplaýyş ulgamynda 1 we 0 sifrleriň kömegi bilen ýazylýar.

Pikir aỳtmalar algebrasyndaky esasy mesele ỳönekeỳ pikir aỳtmalaryň we olardan emele getirilỳän çylşyrymly pikir aỳtmalaryň çyndygynyň we ỳalandygynyň arasyndaky özara baglanyşygy öwrenmekden ybaratdyr.

Berlen pikir aýtmalardan olara görä çylşyrymly täze pikir aýtmalary emele getirmegiň serişdelerine logiki baglanyşyklar ýa-da logiki amallar diýilýär. Emele getirilen çylşyrymly pikir aýtmalaryň çyndygy ýa-da ýalandygy olaryň düzümine girýän ýönekeý pikir aýtmalaryň çyndygyna ýa-da ýalandygyna baglydyr. Bu baglylygy has aýdyň görkezmeklik maksady bilen her amala degişli tablisany ýazýarlar. Bu tablisany "Çynlyk tablisa" diýip atlandyrýarlar. Ol tablisa logiki amalyň sözler bilen berlen kesgitlemesiniň simwollar arkaly ýazylyşydyr. Şunlukda, ol tablisa amalyň ýerine ýetirilişiniň düzgünini berýär.

2. Pikir aỳtmalar üstünde logiki amallar.

Indi logiki amallara garalyň

.

1) Pikir aýtmany inkär etme.

Kesgitleme. Berlen *a* pikir aýtmanyň inkär etmesi diýip, şol pikir aýtma çyn bolanda ýalan bolan we ýalan bolanda çyn bolan pikir aýtma aýdylýar we ol $\bar{a}$ görnüşde belgilenýär we "*a* däl" diýlip okalýar.

Indi bu amala degişli çynlyk tablisany getireliň.

a	$\bar{a}$
ç	ýa
ýa	ç

Indi bu tablisany sifrler arkaly ýazalyň:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Berlen pikir aỳtmany yzygiderli jübüt gezek inkär edenimizden soň ỳene şol pikir aỳtmanyň özüni alỳarys.

2) Iki pikir aýtmanyň konýunksiýasy (logiki köpeltmek hasyly)

Kesgitleme. Berlen a we b iki pikir aýtmanyň konýunksiýasy diýip,şol pikir aýtmalaryň ikisi hem şol bir wagtda çyn bolanda çyn bolỳan we beýleki ýagdaýlarda ýalan bolỳan täze bir pikir aýtma aýdylýar we $a \wedge b$ ýa-da *ab* ýa-da *a*&b görnüşde belgileniýär hem-de “*a* we b”diýlip okalýar.

Indi bu kesgitlemäni tablisa görnüşinde simwollar arkaly ýazalyň:

a	b	$a \wedge b$
ç	ç	ç
ç	ýa	ýa
ýa	ç	ýa
ýa	ýa	ýa

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Mysallar. $a \wedge$ ỳa=ỳa, $a \wedge$ ç=a, $a \wedge a = a$, $a \wedge \bar{a} =$ỳa.
Bu amalyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly

$$a \wedge b = \min(a,b)$$

3) Iki pikir aýtmanyň dizýunksiýasy (logiki jemi)

Kesgitleme a we b iki pikir aýtmanyň dizýunksiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň ikisi hem bir wagtda ýalan bolanda ýalan bolan we beýleki ýagdaýlarda çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we ol $a \vee b$ görnüşde belgilenýär, hem-de “a ya-da b” diýlip okalýar.
Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	$a \vee b$
ç	ç	ç
ç	ýa	ç
ýa	ç	ç
ýa	ýa	ýa

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Dizýunksiýa amalynyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly

$$a \vee b = \max(a,b)$$

Mysallar. $a \vee 0 = a,\ a \vee 1 = 1,\ a \vee a = a,\ a \vee \bar{a} = 1$.

<u>4) Iki pikir aýtmanyň implikasiýasy</u> (gelip çykma amaly)

<u>**Kesgitlme.**</u> a we b iki pikir aýtmanyň implikasiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň birinjisiniň çyn bolup, ikinjisiniň ýalan bolan ýagdaýynda ýalan bolan, beýleki ýagdaýlarda bolsa çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we ol $a \to b, a \subset b$ ýa-da $a \Rightarrow b$ görnüşlerde belgilenýär hem-de “a-dan b gelip çykýar” diýlip okalýar. Bu ýerde “a” pikir aýtma implikasiýanyň şerti , “b” pikir aýtma bolsa implikasiýanyň netijesi diýilýär.

Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	$a \to$b
ç	ç	ç
ç	ýa	ýa
ýa	ç	ç
ýa	ýa	ç

a	b	$a \to$b
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Mysallar. $a \to 0 = \bar{a}$, $a \to 1 = 1$, $a \to a = 1$, $a \to \bar{a} = \bar{a}$.
Matematiki subut etmelerde implikasiỳanyňähmiỳeti aşakdakydan ybaratdyr: $a \to b$ implikasiỳanyň we onuň şertiniň çyndygyndan, onuň netijesiniň çyndygy gelip çykỳar.

5) Iki pikir aýtmanyň ekwiwalentligi (deňgüýçliligi)

Kesgitleme. a we b pikir aýtmalaryň ekwiwalentligi diýip, şol pikir aýtmalaryň çynlyk bahalary meňzeş bolanda çyn bolan, beýleki ýagdaýlarda bolsa ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we $a \leftrightarrow b$ ýa-da $a \equiv b$ ýa-da a~b bilen belgilenýär.
Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	$a \leftrightarrow b$
ç	ç	ç
ç	ýa	ýa
ýa	ç	ýa
ýa	ýa	ç

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Mysallar. $a \Leftrightarrow 0 = \overline{a},\ a \Leftrightarrow 1 = a,\ a \Leftrightarrow a = 1, a \Leftrightarrow \overline{a} = 0.$
Matematiki subut etmelerde ekwiwalentligiň hem-de onuň agzalarynyň biriniň çyndygyndan ỳa-da ỳalandygyndan, beỳleki agzanyň degişlilikde çyndygy ỳa-da ỳalandygy barada netije çykaryp bolỳar.

<u>6) Şeffer ştrihi</u>

<u>Kegitleme</u>. “a” we “b” iki pikir aýtmanyň Şeffer ştrihi diýip, şol pikir aýtmalaryň ikisi hem bir wagtda çyn bolanda ýalan bolan, beýleki ýagdaýlarda bolsa çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we a/b bilen belgilenýär.
Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	*a/b*
ç	ç	ýa
ç	ýa	ç
ýa	ç	ç
ýa	ýa	ç

a	b	$a/$b
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Tablisadan görnüşi ýaly iki pikir aỳtmanyň Şeffer ştrihi şol piker aỳtmalaryň konỳunksiỳasynyň inkär etmesine deňdir:

$$a/\text{b}=\overline{a \wedge b}.$$

Mysallar.a/0=1, a/1=$\bar{a}$, a/a=$\bar{a}$, a/$\bar{a}$=1.

7) Lukaşewiç peýkamy

Kesgitleme. a we b iki pikir aýtmanyň Lukaşewiç peýkamy diýip şol pikir aýtmalaryň ikisiniň hem bir wagtda ýalan bolan ýagdaýynda çyn bolan, beýleki ýagdaýlarda bolsa ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we $a \downarrow b$ bilen belgilenýär.
Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	$a \downarrow b$
ç	ç	ýa
ç	ýa	ýa
ýa	ç	ýa
ýa	ýa	ç

a	b	$a \downarrow b$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tablisadan görnüşi ýaly iki piker aỳtmanyň Lukasewiç peỳkamy şol piker aỳtmalaryň dizỳunksiỳasynyň inkär etmesine deňdir:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b}$$

Mysallar. $a \downarrow 0 = \overline{a},\ a \downarrow 1 = 0,\ a \downarrow a = \overline{a},\ a \downarrow \overline{a} = 0$

<u>8) 2-niň moduly boýunça jem.</u>

<u>**Kesgitleme**</u> “a”we “b” iki pikir aýtmanyň “2-niň moduly boýunça jemi” diýip şol pikir aýtmalaryň çynlyk bahalary dürli bolanda çyn bolan, beýleki ýagdaýlarda bolsa ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we a+b ýa-da $a \oplus b$ bilen belgilenýär.

Bu amala degişli çynlyk tablisany ýazalyň:

a	b	a+b
ç	ç	ýa
ç	ýa	ç
ýa	ç	ç
ýa	ýa	ýa

a	b	a+b
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tablisadan görnüşi ýaly, iki pikir aýtmanyň “2-niň moduly boýunça jemi” şol pikir aýtmalaryň ekwiwalentliginiň inkär etmesine deňdir:

$$a + b = \overline{a \leftrightarrow b}$$

Indi konýunksiýa we dizýunksiýa amallaryny n-sany agzalar üçin umumylaşdyralyň.

Kesgitleme. Berlen $a_1, a_2, ..., a_n$ pikir aýtmalaryň konýunksiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň hemmesi bir wagtda çyn bolanda çyn bolan we beýleki ýagdaýlarda ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we ol şeýle belgilenýär:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, eger köpeldijileriň iň bolmanda biri ýalan bolsa, onda konýunksiýa ýalandyr.

Kesgitleme. Berlen $a_1, a_2, ..., a_n$ pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň hemmesi bir wagtda ýalan bolanda ýalan bolan we beýleki ýagdaýlarda çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar we ol şeýle belgilenýär:

$$a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n .$$

Bu kesgitlemeden görnüşi ỳaly, eger goşujylaryň iň bolmanda biri çyn bolsa, onda dizỳunksiỳa çyndyr.

Ỳokarda seredilip geçilen logiki amallar ähli piker aỳtmalaryň köplüginde kesgitlenendir we olary diňe ỳönekeỳ däl, eỳsem çylşyrymly pikir aỳtmalaryň üstünde hem ỳerine ỳetirip bolỳar. Bu amallar özara baglanyşyklydyr.Inkär etme amalyna bir orunly ỳa-da unar amal, beỳleki amallara bolsa iki orunly ỳa-da binary amal diỳilỳär.

Iki orunly logiki amallaryň piker aỳtmalary baglanyşdyryş güỳji dürli-dürli hasap edilỳär. Konỳunksiỳa dizỳunksiỳa görä, dizỳunksiỳa implikasiỳa görä, implikasiỳa bolsa ekwiwalentlige görä piker aỳtmalary has güỳçli baglanyşdyrỳar diỳip hasap edilỳär.Şeỳlelikde ỳaỳsyz ỳazylan logiki aňlatmada ilki bilen ỳönekeỳ pikir aỳtmalaryň üstündäki inkär etme amallar, soňra konỳunksiỳa, ondan soň dizỳunksiỳa, implikasiỳa we ekwiwalentlik amallar ỳerine ỳetirilỳär.

§4. Logiki amallaryň arasyndaky baglanyşyklar.

Ozal belläp geçişimiz ýaly, logiki amallar özara baglanyşyklydyrlar. Bu baglanyşyklar ýörite formulalaryň, ýagny amallaryň käbirlerini beýlekileriniň üsti bilen aňlatmak formulalarynyň kömegi bilen berilýär. Şeýle formulalaryň birnäçesini getirip çykaralyň.

$$a \to b = \bar{a} \vee b \qquad (1).$$

Bu formula implikasiýa amalyny dizýunksiýa we inkär etme amallarynyň üsti bilen aňladýar. Ekwiwalentlik amalynyň kesgitlemesi esasynda ýazyp bileris.

$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

Bu ýerde (1) formulany ulanyp alarys:

$$a \leftrightarrow b = (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}). \qquad (2)$$

Bu formula ekwiwalentlik amalyny ýerine ýetirmekligi konýunksiýa, dizýunksiýa we inkär etme amallaryny ýerine ýetirmeklige syrykdyrýar. Şeffer we Lukaşewiç amallarynyň tablisalaryndan şeýle formula gelip çykýar:

$$a / a = \bar{a} \qquad (3)$$

$$a \downarrow a = \bar{a} \qquad (4)$$

(3) formula Şeffer amalyny inkär etme amaly bilen baglanyşdyrýar. Şeffer amalynyň kesgitlemesinden belli bolşy ýaly:

$$a / b = \overline{a \wedge b} \qquad (5)$$

Bu deňgüýçliligiň iki tarapy hem inkär edilse deňgüýçlilik üýtgemez:

$$a \wedge b = \overline{a / b}$$

Bu deňgüýçliligiň sag tarapyna (3) formulany ulanyp alarys:

$$a \wedge b = (a/b)/(a/b). \qquad (6)$$

(6) formula konýunksiýany Şeffer amaly bilen baglanyşdyrýar.

Indi (5) deňgüýçliligiň sag tarapyna de-Morganyň 1-nji kanunyny ulanyp alarys:

$$a/b = \overline{a} \vee \overline{b}.$$

Deňgüýçliligiň simmetriklik häsiýeti esasynda ýazyp bileris:

$$\overline{a} \vee \overline{b} = a/b.$$

Bu deňgüýçliligiň iki tarapynda hem her bir pikir aýtma onuň inkär etmesi bilen çalşyrylsa deňgüýçlilik üýtgemeýär. Diýmek "a" pikir aýtmany "$\overline{a}$" pikir aýtma bilen, "b" pikir aýtmany "$\overline{b}$" pikir aýtma bilen çalşyryp ýazyp bileris:

$$a \vee b = \overline{a}/\overline{b}.$$

Soňky deňgüýçliligiň çep tarapyna (3) formulany iki gezek ulanyp dizýunksiýany Şeffer amaly bilen baglanyşdyrýan formulany alarys:

$$a \vee b = (a/a)/(b/b). \qquad (7)$$

Şeýlelikde (3), (6) we (7) formulalar inkär etme, konýunksiýa we dizýunksiýa amallaryny Şeffer amaly bilen baglanyşdyrýar.

Lukaşewiç amalynyň kesgitlemesi esasynda ýazyp bileris:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b}. \qquad (8)$$

Indi edil (6) we (7) formulalaryň getirilip çykarylyşy ýaly edip, aşakdaky formulalary alarys:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} \quad \text{ýa-da} \quad \overline{a \downarrow b} = a \vee b$$

(4) formulany ulanyp alarys:

$$a \vee b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b). \quad (9)$$

(8) deňgüýçliligiň sag tarapyna de-Morganyň 2-nji kanunyny ulanyp ýazyp bileris:

$$a \downarrow b = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

ýa-da

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = a \downarrow b$$

Indi “a”-ny "$\bar{a}$" bilen, “b”-ny "$\bar{b}$" bilen çalşyryp alarys:

$$\bar{\bar{a}} \wedge \bar{\bar{b}} = \bar{a} \downarrow \bar{b}$$

ýa-da

$$a \wedge b = \bar{a} \downarrow \bar{b}$$

(4) formulany iki gezek ulanyp ýazyp bileris:

$$a \wedge b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b). \quad (10)$$

(4), (9) we (10) formulalar inkär etme, dizýunksiýa we konýunksiýa amallaryny Lukaşewiç amaly bilen baglanyşdyrýar.

<u>Mysallar:</u>

Logiki formulalaryň deňgüýçlilik kanunlaryny we (1)-(10) formulalary ulanyp aşakdaky formulalary ýönekeýleşdirmeli.

1).

$$[(x \to y) \to \bar{y}] \to x = \overline{\overline{[\overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{y}]}} \vee x = [\left(\overline{\overline{\bar{x} \vee y}}\right) \wedge \bar{\bar{y}}] \vee x =$$
$$= [(\bar{x} \vee y) \wedge y] \vee x = [(\bar{x} \vee y) \vee x] \wedge [y \vee x] = [\bar{x} \vee x \vee y] \wedge [y \vee x] =$$
$$= [c] \wedge [y \vee x] = y \vee x = x \vee y.$$

2).

$$(x \leftrightarrow \bar{y}) \vee y = \left[\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \wedge (x \vee y) \right] \vee y = \left[\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \vee y \right] \vee \left[(x \vee y) \vee y\right.$$

$$= \left[(\bar{x} \vee (\bar{y} \vee y)\right] \wedge \left[(x \vee (y \vee y)\right] = [\bar{x} \vee c] \wedge [x \vee y] =$$

$$= c \wedge [x \vee y] = [x \vee y] = x \vee y$$

3).

$$[(x / y) \wedge \bar{\bar{y}}] = [(\overline{x \wedge y}) \wedge \bar{\bar{y}}] = [(\overline{x \wedge y}) \wedge y] = [(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y] =$$

$$= (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge y) = (\bar{x} \wedge y) \vee ya = (\bar{x} \wedge y) = \bar{x} \wedge y$$

4).

$$(x / y) \vee (x \downarrow y) = (\overline{x \wedge y}) \vee (x \downarrow y) = \overline{(x \wedge y)} \vee \overline{(x \vee y)} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) =$$

$$= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y}) = \left[\bar{y} \vee (\bar{x} \vee \bar{x})\right] \wedge \left[\bar{x} \vee (\bar{y} \vee \bar{y})\right] =$$

$$\left[\bar{y} \vee \bar{x}\right] \wedge \left[\bar{x} \vee \bar{y}\right] = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \wedge y}.$$

§5. Logika algebrasynyň formulalary.

Matematikada bolşy ýaly matematiki logikada hem logiki ululyklar (hemişelik ululyk we üýtgeýän ululyk), aňlatmalar, formulalar we funksiýalar düşinjeleri bardyr.

“Çyn” we “ ýalan” sözleri belleýän “ç” we “ýa” harplara, hem-de şol manyny aňladýan “1” we “0” sifrlere logiki hemişelikler diýilýär. Diňe iki dürli bahalary alyp bilýän üýtgeýän ululyga logiki üýtgeýän ululyk diýilýär.Mysal üçin $x,y,z,\ldots$üýtgeýän pikir aýtmalar logiki üýtgeýän ululyklaryň mysallarydyrlar. Olar diňe iki dürli bahalara (“çyn” ýa-da “ ýalan”) eýe bolup bilýärler.

Her bir hemişelige we ýönekeý pikir aýtma ýa-da olardan emele getirilen her bir çylşyrymly pikir aýtma logiki aňlatma diýilýär.

Indi formula düşünjesini kesgitläliň.

Kesgitleme. Logiki hemişeliklerden we logiki üýtgeýän ululyklardan logiki amallaryň $"-","\wedge","\vee","\rightarrow","\leftrightarrow"$ belgileriniň hem-de ýaýlaryň kömegi bilen emele getirilen her bir aňlatma logiki formula diýilýär.

Formulalaryň mysallary: ç, ýa, x, $x_1 \vee x_2, \overline{x_1 \wedge x_2}$ we ş.m. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ logiki üýtgeýänlerden emele getirilen formulany umumy görnüşde

$$F(x_1,\ldots,x_n),\ F_1(x_1,\ldots,x_n),\ F_2(x_1,\ldots x_n),\ldots$$

bilen belgileýärler.

Üytgeýan ululyklaryň hemme dürli bahalarynda formulanyň çyn bolmagy ýa-da ýalan bolmagy mümkin, ýa-da şol ululyklaryň bahalarynyň käbir toplumynda formula çyn bolup , beýlekilerinde ýalan bolmagy mümkin. Şeýlelikde, logiki formulalar aşakdaky üç synpa bölünýärler:

Kesgitleme: Eger $F(x_1,\ldots,x_n)$ formula $x_1,\ldots,x_n$ üýtgeýän ululyklaryň hemme dürli bahalarynda çyn bolsa, onda oňa toždestwolaýyn çyn formula ýa-da **tawtologiýa** diýilýär we

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\text{ç} \quad \text{ýa-da} \quad \models F(x_1,\ldots,x_n)$$

bilen belgilenýär.

Mysal üçin :

$$F_1\ (x) = x \vee \bar{x}; \quad F_2(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2)}.$$

formulalar tawtologiýadyrlar.

Kesgitleme Eger F(x_1 ,...,x_n) formula $x_1,...,x_n$ üýtgeýän ululyklaryň hemme dürli bahalarynda ýalan bolsa, onda oňa toždestwolaýyn ýalan ýa-da ýerine ýetmeýän formula diýilýar we

$$F(x_1,...,x_n) = ýa$$

bilen belgilenýär. Mysal üçin:

$$F_1(x) = x \wedge \bar{x}; \quad F_2(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)}.$$

formulalar toždestwolaýyn ýalandyrlar.

<u>Kesgitleme:</u> Eger F(x_1 ,...,x_n) formula $x_1,...,x_n$ üýtgeýänleriň käbir bahalarynda çyn bolup, beýlekilerinde ýalan bolsa, onda bu formula ýerine ýetýän formula diýilýär. Başgaça aýdanymyzda toždestwolaýyn çyn we toždestwolaýyn ýalan bolmadyk her bir formula ýerine ýetýän formula diýilýär. Mysal üçin:

$$F_1(x) = x, \quad F_2(x) = \bar{x}\ ; \quad F_3(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2}.$$

formulalar ýerine ýetýän formulalardyrlar.

Logiki amallaryň kömegi bilen ilki başda berlen birnäçe ýönekeý formulalardan tükeniksiz köp dürli-dürli täze formulalary emele getirip bolýar.

Her bir logiki formula kesgitli funksiýany berýändir.

Formulanyň özbaşdak formula bolup biljek her bir bölegine bölek ýa-da içki formula diýilýär. Mysal üçin. $\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \wedge x_1$ formulanyň x_1, x_2, $\bar{x}_1, \bar{x}_1 \vee x_2, \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}$ bölek formulalary bardyr.

Eger her bir formula özüniň bölek formulasy bolup bilýär diýip hasap etsek, onda $\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \wedge x_1$ formula hem berlen formulanyň bölek formulasydyr. Berlen formulanyň $(\bar{x}_1, (\bar{x}_1 \vee, \vee x_2, \vee x_2), \wedge, x_2), \wedge x_1$ ýaly bölekleri formula däldir.

Köpagzaly konýuksiýanyň (logiki köpeltmegiň) we dizýunksiýanyň (logiki jemiň) aşakdaky gysga we ykjam ýazylyş görnüşleri bardyr :

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \text{ ýa-da } x_1 \vee \ldots \vee x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \text{ ýa-da } x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

Propozisional üýtgeýänler düşünjesini girizeliň we olary *X*,Y,Z,… harplar bilen belgiläliň. Bu üýtgeýänleriň ornuna islendik pikir aýtmany goýup bolýandyr. Propozisional üýgeýänleriň, logiki amallaryň belgileriniň we ýaýlaryň kömegi bilen, sözler bilen aýdylan islendik pikir aýtmany onuň gurluşyny beýan edýän formula bilen çalşyryp bolýar. Mysal üçin “Eger 100 san 2 we 5 sanlara bölünýän bolsa, onda 100 san 10 sana hem bölünýändir” diýlen pikir aýtmany $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ görnüşde ýazmak bolar.

Ilki bilen pikir aýtmalar logikasynda ulanmakçy bolýan dürli simwollarmyzyň toplumyny bereliň.Bu topluma pikir aýtmalar toplumynyň alfawiti diýilýär.

1). X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i,…(i-natural san)-propozisional üýtgeýänleri belgilemek üçin ulanylýan simwollar;

2). ç, ýa – “çyn” ýa-da “ýalan” diýilýän logiki hemişelikleri belgileýän simwollar;

3). $\wedge, \vee, -, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow$ logiki amallaryň simwollary;

4). (,)-ýaýlar.

Indi logiki formula düşünjesine has takyk kesgitleme bereliň.

Induktiw kesgitleme.

1) Her bir propozisional üýtgeýän ululyk –formuladyr.
2) ç, ýa simwollar –formuladyr.
3) Eger F formula bolsa, onda $\bar{F}$ hem formuladyr.
4) Eger F_1 we F_2 formula bolsalar, onda $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2), (F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ hem formuladyr.
5) Pikir aýtmalar logikasynda 1)-4) punktlardan başga hiç hilli formula ýokdyr.

1) we 2) punktlarda ýönekeý formulalar kesgitlenýär.3)we 4)punktlarda berlen islendik formulalardan täze formulalary emele getirmegiň düzgünleri berilýär.

Şeýle kesgitlemelere induktiw kesgitlemeler diýilýär. Induktiw kesgitleme nazaryýetiň başlangyç obýektlerine käbir amallary ulanmak bilen şol nazaryýetiň täze obýeklerini gurmaga mümkinçilik berýär. Her bir induktiw kesgitlemäniň göni punktlary we gytaklaýyn punktlary bolýar. Göni punktlarda mundan beýläk kesgitlenýän adalga bilen atlandyrylýan obýektler berilýär.Gytaklaýyn punktlarda şeýle obýektleriň göni punktlarda berlen obýektler bilen gutarýandygy aýdylýar.

Göni punktlaryň içinde bazis punktlar we induktiw punktlar bolýar. Bazis punktlarda mundan beýläk kesgitlenýän adalga bilen atlandyrylýan käbir obýektler görkezilýär. Induktiw punktlarda bolsa bazis punktlarda kesgitlenen islendik obýektlerde we geljekde kesgitlenýän adalgalar bilen atlandyrmaly bolan täze obýektleri emele getirmegiň düzgünleri berilýär.

Formulalarda çepki ýaýlaryň sany sagky ýaýlaryň sanyna deň bolmaly.

Induktiw kesgitleme esasynda islendik mukdarda köp formulalary emele getirip bolýar. Mysal üçin eger X,Y,Z formulalar bolsalar, onda $X \wedge Y, Y \rightarrow Z, X \vee Y, \overline{X \wedge Y}$ – we ş.m. formuladyrlar.

Induktiw kesgitlemäniň punktlaryndaky şertler berjaý edilmän gurulan aňlatmalar formula däldirler. Mysal üçin:

$(X \rightarrow Y) \wedge$- formula däl, sebäbi konýunksiýanyň ikinji agzasy ýok.

$X \vee \rightarrow Y$ – formula däl, sebäbi iki sany logiki amalyň belgisi ýanaşyk gelýär.

Formulalaryň ýazgylaryny ýönekeýleşdirmek maksady bilen aşakdakylary kabul edeliň:

1) Ýaýlardaky amallaryň ýerine ýetiriliş tetibini berjaý edeliň.
2) Inkär etme amalynyň belgisiniň aşagynda duran formulany ýaýlaryň içine alman ýazalyň.
3) Formulany tutuşlygyna öz içine alýan iň daşky ýaýy taşlap ýazalyň.
4) Konýunksiýa amalynyň belgisini taşlap ýazalyň. Mysal üçin, $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ formulany $X_1X_2 \ldots X_n$ görnüşde ýazalyň.

Okalanda formulany onuň içindäki iň soňky ýerine ýetirilýän amalyň ady boýunça atlandyrmak bolar. Mysal üçin, $X \vee Y \rightarrow Z$ formula implikasiýadyr, $X \wedge (Y \rightarrow Z)$ formula konýünksiýadyr.

Mysallar. Çep tarapda formulalaryň ýaýlar bilen ýazylyşy berilýär, sag tarapda bolsa ýaýsyz ýazylyşy berilýär.

Ýokarda agzalan düzgunler esasynda formulalardaky amallaryň ýerine ýetiriliş tertibi formulalardaky ýaýlaryň birnäçesi taşlananda hem üýtgemeýär.

$X \to ((Y \wedge Z) \vee Y)$, $X \to YZ \vee Y$;

$$(X \vee Y) \to (\overline{X} \vee Y) \;,$$

$$X \vee Y \to \overline{X} \vee Y \;;$$

$$(((X \wedge Y) \vee Z) \to \overline{Y}) \leftrightarrow \overline{X} \;,$$

$$XY \vee Z \to \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X} \;;$$

$$X \leftrightarrow (Y \to (Z \vee (\overline{X} \wedge \overline{Z}))) \;,$$

$$X \leftrightarrow Y \to Z \vee \overline{X}\,\overline{Z} \;;$$

$$(((X \wedge Y) \vee Z) \to ((\overline{X} \vee Y) \to \overline{Z})),$$

$$XY \vee Z \to (\overline{X} \vee Y \to \overline{Z}).$$

Tawtologiýalar.

Bilşimiz ýaly, her bir toždestwolaýyn çyn formula tawtologiýa diýilýär. Tawtologiýalaryň hemmesi formuladyr, emma formulalaryň her biri tawtologiýa däldir.

Berlen formulanyň tawtologiýadygyny ýa-da däldigini onuň çynlyk tablisasyndan bilip bolýar. Onuň tawtologiýa däldigini anyklamak üçin, onuň içindäki üýtgeýänleriň bahalarynyň iň bolmanda bir toplumynda şol formulanyň ýalandygyny görkezmek ýeterlikdir.

Matematiki logikada meseleleri çözmekde formulalar üstünde köp sanly özgertmeleri geçirmeli bolýar we bu işde käbir formulalary toždestwolaýyn çyn formulalar bilen çalşyrmak meseläni çözmegi ýönekeýleşdirýär we çaltlandyrýar. Matematikada toždestwolar nähili rol oýnaýan bolsalar, matematiki logikada hem tawtologiýalar edil şonuň ýaly rol oýnaýar.Tawtologiýalar sözlemleriň logiki gurluşyny aňladýarlar we diňe şeyle gurluşyň güýji bilen çyn formula hökmünde logikada uly rol oýnaýarlar.

Tawtologiýany tapmak we derňemek pikir aýtmalar algebrasyndaky esasy meseleleriň biridir, sebäbi olar logiki subut etmelerde ulanylýan logiki oýlanmagyň kanunlaryny aňladýarlar.

Tawtologiýalar tükeniksiz köpdir.

Pikir aýtmalar algebrasynda kanun hökmünde ulanylýan esasy tawtologiýalary getireliň.

Goý P, P_1, P_2, P_3-propozisional üýtgeýänler bolsunlar. Bu üýtgeýanler islendik pikir aýtmalary ýa-da olaryň çynlyk bahalaryny özleriniň çynlyk bahalary hökmünde kabul edip bilýärler.

1) $P \vee \overline{P}$-üçunji pikir aýtmanyň ýoklyk kanuny.

2) $\overline{(P \wedge \overline{P})}$ gapma-garşylygy inkär etme kanuny.

3) $\overline{\overline{P}} \leftrightarrow P$ inkär etmäni inkär etme kanuny.

4) $\left.\begin{array}{l}(P \wedge P) \leftrightarrow P \\ (P \vee P) \leftrightarrow P\end{array}\right\}$-idempotentlik kanunlary.

5) $\left.\begin{array}{l}(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_1 \\ P_1 \rightarrow (P_1 \vee P_2)\end{array}\right\}$-ýönekeýleşdirme kanunlary.

6) $\left.\begin{array}{l}(P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow (P_2 \wedge P_1) \\ (P_1 \vee P_2) \leftrightarrow (P_2 \vee P_1\end{array}\right\}$-orun çalşyrma kanunlary.

7) $\left.\begin{array}{l}[(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3] \leftrightarrow [P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)\\ [(P_1 \vee P_2) \vee P_3] \leftrightarrow [P_1 \vee (P_2 \vee P_3)\end{array}\right\}$-utgaşdyrma

kanunylary.

8) $\left.\begin{array}{l}[P_1 \wedge (P_2 \vee P_3)] \leftrightarrow [(P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)]\\ [P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)] \leftrightarrow [(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)]\end{array}\right\}$-paýlaşdyrma

kanunlary.

9) $\left.\begin{array}{l}\overline{(P_1 \wedge P_2)} \leftrightarrow (\overline{P_1} \vee \overline{P_2})\\ \overline{(P_1 \vee P_2)} \leftrightarrow (\overline{P_1} \wedge \overline{P_2})\end{array}\right\}$-de-Morganyň kanunlary.

10) P→P-toždestwo kanuny

11) $(P_1 \to P_2) \leftrightarrow (\overline{P_2} \to \overline{P_1})$-kontrapozisiýa kanuny.

12) $[(P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_3)] \leftrightarrow (P_1 \to P_3)$-tirkeşikli netijeleme düzgüni.

13) $P \leftrightarrow P$-refleksiw kanun.

14) $(P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_2 \leftrightarrow P_1)$-simmetriýa kanuny.

15) $[(P_1 \leftrightarrow P_2) \wedge (P_2 \leftrightarrow P_3)] \to (P_1 \leftrightarrow P_3)$-tranzitiw kanun.

16) $(P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (\overline{P_1} \leftrightarrow \overline{P_2})$-gapma-garşylyk kanuny.

Bu kanunlaryň her biriniň dogrydygyny barlap görmekligiň birnäçe usuly bardyr:

1) Ekwiwalentligiň iki tarapy üçin hem çynlyk tablisalary gurmak we olaryň jogap sütünlerini deňeşdirmek usuly. Bu usuly öň öwrenipdik. Eger çynlyk tablisa formulanyň tutuş özi üçin gurlan bolsa, onda berlen kanunyň dogry bolmagy üçin şol tablisanyň jogap sütüninde diňe "çyn" bahalar bolmalydyr.

2) Deňgüýçliligiň bir tarapyny çyn (ýalan) hasap edip, şol ýagdaýda onuň beýleki tarapynyň hem çyn (ýalan) bolýandygyny getirip çykarmak usuly.
3) Logiki formulalaryň deňgüýçlilik kanunlary esasynda berlen kanuny ýönekeýleşdirip, onuň çyna deň bolýandygyny görkezmek usuly.

Mysallar.

1) Ýokarda getirilen usullarynyň ikinjisini we üçünjisini ulanyp $(P_1 \to P_2) \leftrightarrow \overline{(P_1 \wedge \overline{P_2})}$ formulanyň toždestwolaýyn çyndygyny görkeziň.

2-nji usul. Goý berlen formulanyň çep tarapy çyn bolsun:$P_1 \to P_2$=ç.

Onda implikasiýa amalynyň kesgitlemesi esasynda aşakdaky ýagdaýlar bolup biler:

a) P_1=ç, P_2=ç; bolsun, onda :

$$\overline{(c \wedge \overline{c})} = \overline{(c \wedge ya)} = \overline{(ya)} = ç$$

bolar.

b) P_1=ýa, P_2=ç; bolsun, onda:

$$\overline{(ya \wedge \overline{c})} = \overline{(ya \wedge ya)} = \overline{(ya)} = ç$$

bolar.

c) P_1=ýa, P_2=ýa; bolsun, onda:

$$\overline{(ya \wedge \overline{ya})} = \overline{(ya \wedge c)} = \overline{(ya)} = ç$$

bolar

Şeýlelikde, eger $P_1 \to P_2$=ç bolsa , onda $\overline{(P_1 \wedge \overline{P_2})} = ç$ bolar.

Goý indi $P_1 \to P_2$=ýa bolsun . Bu ýagdaýda diňe P_1=ç, P_2=ýa bolup biler.Bu bahalary formulanyň sag tarapyna goýup alarys:

$$\overline{(c \wedge \overline{ya})} = \overline{(c \wedge c)} = \overline{(c)} = \text{ýa}.$$

Diýmek, eger $P_1 \to P_2$=ýa bolsa ,onda $\overline{(P_1 \wedge \overline{P_2})} = \text{ýa}$. Şeýlelikde berlen formulanyň toždestwolaýyn çyndygyny subut etdik.

<u>3-nji usul.</u> $(P_1 \to P_2) \leftrightarrow \overline{(P_1 \wedge \overline{P_2})}$ formulanyň çep tarapyny oňa deňgüýçli bolan $\overline{P_1} \vee P_2$ formula bilen çalşyralyň we sag tarapyna de-Morganyň 1-nji kanunyny ulanalyň;

$$\overline{(P_1} \vee P_2) \leftrightarrow (\overline{P_1} \vee \overline{\overline{P_2}})$$

ýa-da

$$(\overline{P_1} \vee P_2) \leftrightarrow (\overline{P_1} \vee P_2)$$

Deňgüýçliligiň çep we sag tarapynda biri-birine deň bolan formulalar emele geldi. Ekwiwalentlik amalynyň kesgitlemesi esasynda islendik formula öz-özüne ekwiwalentdir. Diýmek,

$$(\overline{P_1} \vee P_2) \leftrightarrow (\overline{P_1} \vee P_2) = \text{ç}$$

Kanunyň dogrudygy subut edildi.

2) de-Morganyň

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \quad \text{we} \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

kanunlaryny ulanyp, aşakdaky deňgüýçliligi subut etmeli:

$$\overline{(a_1 \wedge \ldots \wedge a_6)} = \overline{a_1} \vee \ldots \vee \overline{a_6}.$$

de-Morganyň ýönekeý kanunlaryny ulanyp bilmek üçin berlen formulada inkär etme amalynyň belgisiniň aşagynda duran formulany öňürti diňe iki agzanyň konýunksiýasyna ýa-da dizýunksiýasyna getirmeli we soňra şol kanunlary yzygiderli birnäçe gezek ulanmaly. Ýazyp bileris:

$$\overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_6)} = \overline{[a_1 \wedge (a_2 \wedge ... \wedge a_6)]} = \overline{a_1} \wedge \overline{(a_2 \wedge ... \wedge a_6)} =$$
$$= \overline{a_1} \vee \overline{[a_2 \wedge (a_3 \wedge ... \wedge a_6)]} = \overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \overline{(a_3 \wedge ... \wedge a_6)} = ... =$$
$$= \overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \bar{a}_3 \vee \bar{a}_4 \vee \overline{(a_5 \wedge a_6)} = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{a}_3 \vee \bar{a}_4 \vee \bar{a}_5 \vee \bar{a}_6$$

Ýa-da şeýle çemeleşse bolar:

$$\overline{(a_1 \wedge ... \wedge a_6)} = \overline{[(a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3 \wedge ... \wedge a_6)]} = \overline{(a_1 \wedge a_2)} \vee \overline{(a_3 \wedge ... \wedge a_6)} =$$
$$\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \overline{[(a_3 \wedge a_4) \wedge (a_5 \wedge a_6)]} = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \overline{(a_3 \wedge a_4)} \vee \overline{(a_5 \wedge a_6)} =$$
$$= \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{a}_3 \vee \bar{a}_4 \vee \bar{a}_5 \vee \bar{a}_6.$$

§6.Logiki funksiỳalar.

1. Bul funksiỳalary.

Goý U={u_1, u_2 ,…,u_n,… }üýtgeýän ululyklaryň berlen alfawiti bolsun. Argumentleri E^2={0;1}köplükde kesgitlenen f$(\alpha_1,...,\alpha_n) \in E^2$ funksiýalara garalyň. Bu ýerde $\alpha_i \in E^2, i = \overline{1,n}.$ Bu funksiýalara logika algebrasynyň funksiýalary ýa-da bul funksiýalary diýilýär. Ýönekeýlik üçin $f\left(U_{i_1},...U_{i_n}\right)$ýazga derek *f(x₁,…,x_n)* ýazgyny ulanalyň. *f(x₁,…,x_n)* funksiýanyň kesgitlemesinden bu funksiýanyň berilmegi üçin argumentleriň her bir bahalar toplumyna funksiýanyň haýsy bahalarynyň degişlidigini görkezmekligiň ýeterlikdigi gelip çykýar.

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 ,…,0, 0	f(0 ,…, 0, 0)
0 ,…,0, 1	f(0 ,…, 0, 1)
0 ,…, 1, 0	f(0 ,…, 1, 0)
---------------	--------------------
1 ,…, 1, 1	f(1 ,…, 1, 1)

n üýtgeýän ululyklaryň dürli 2^n bahalary kabul edýändiklerini görmek kyn däldir.

Logika algebrasynyň hemme funksiýalarynyň ulgamyny P_2 bilen belgiläliň. Eger $x_1, \ldots, x_n$ n sany üýtgeýän ululyk fiksirlense, onda dürli tablisalar diňe sag tarapky sütüniň bahalary bilen biri-birinden tapawutlanarlar.

Teorema. P_2 ulgamyň üýtgeýän n sany ululyga bagly bolan hemme funksiýalarynyň $P_2(n)$ sany 2^{2^n} -e deň.

Ýokarda girizilen funksiýa düşünjesi kämil däl, sebäbi ol az argumentden funksiýalara köp argumentden funksiýalar hökmünde garamaga mümkinçilik bermeýär. Bu ýetmezçiligi aýyrmak üçin aşakdaky kesgitlemäni girizeliň:

Kesgitleme1. Eger $x_1, ..., x_{i-1}$, $x_{i+1}, ..., x_n$ argumentleriň şeýle bir $\alpha_1,...,\alpha_{i-1},...,\alpha_{i+1},...,\alpha_n$ bahalary bar bolup:

$$f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) \neq f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$$

bolsa,onda $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in P_2$ funksiýa x_i argumente ähmiýetli bagly diýilýär.

Bu ýagdaýda x_i argumente ähmiýetli diýilýär.Eger x_i ähmiýetli bolmasa,onda oňa ähmiýetsiz ýa-da fiktiw argument diýilýär.

Goý x_i üýtgeýän $f(x_1, ..., x_n)$ funksiýa üçin ähmiýetsiz üýtgeýän ululyk bolsun. Bu funksiýa üçin ýazylan tablisada $(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ görnüşli hemme setirleri we x_i üýtgeýän ululyga degişli sütüni çyzyp täze bir tablisa guralyň. Beýle gurlan tablisa käbir $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ funksiýany kesgitleýär. Bu ýagdaýda g funksiýa f funksiýadan x_i ähmiýetsiz üýtgeýän ululygyň aýrylmagy bilen alynýar diýilýär, ýa-da f funksiýa g funksiýadan x_i ähmiýetsiz ululygyň girizilmegi bilen alynýar diýilýär.

Kesgitleme 2. Eger ähmiýetsiz argumentleri girizmek ýa-da aýyrmak arkaly f_1 funksiýadan f_2 funksiýa alynýan bolsa, onda $f_1(x_1, ..., x_n)$we $f_2(x_1, ..., x_n)$ funksiýalara deň diýilýär we $f_1 \equiv f_2$ ýaly belgilenýär.

Ahmiýetli üýtgeýän ululyga eýe bolmadyk funksiýalaryň iki görnüşi bar:

1.Toždestwolaýyn 0-a deň bolan funksiýalar.

2.Toždestwolaýyn 1-e deň bolan funksiýalar.

Bu funksiýalara, ýagny 0 we 1 hemişeliklere üýtgeýän ululyklaryň boş köplüginden funksiýalar hökmünde garaýarlar:

Elementar funksiýalar diýlip atlandyrylýan funksiýalaryň sanawyny getireliň:

1) $f_1(x)=0$- nul hemişelik.

2) $f_2(x)=1$- bir hemişelik.

3) $f_3(x)=x$- toždestwolaýyn funksiýa.

4) $f_4(x)=\overline{x}$- x-y inkär etme (x däl)

5) $f_5(x_1,x_2)=(x_1 \wedge x_2)$- x_1 we x_2-niň konýunksiýasy.($x_1$we x_2).

6) $f_6(x_1,x_2)=(x_1 \vee x_2)$- x_1 we x_2 -niň dizýunksiýasy.(x_1 ýa-da x_2).

7) $f_7(x_1,x_2)=(x_1 \rightarrow x_2)$- x_1 we x_2 -niň implikasiýasy. (x_1-den x_2-i gelip çykýar.)Bu funksiýa logiki gelip çykma diýilýär

8) $f_8(x_1,x_2)=(x_1 \leftrightarrow x_2)$-$x_1$we x_2 –niň ekwiwalentligi (ekwiwalensiýa)

9) $f_9(x_1,x_2)=(x_1+x_2)$- x_1 we x_2-niň mod 2 boýunça jemi

10) $f_{10}(x_1,x_2)=(x_1|x_2)$-Şeffer funksiýasy (ştrihi).

11) $f_{11}(x_1,x_2)=(x_1 \downarrow x_2)$-Lukaşewiç funksiýasy (Pirs peýkamy)

Bu funksiýalaryň bahalaryny tablisalarda getireliň.

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

1	x_2	$(x_1 \wedge x_2)$	$(x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \rightarrow x_2)$	$(x_1 \leftrightarrow x_2)$	(x_1+x_2)	(x_1/x_2)	$(x_1 \downarrow x_2)$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

2. Funksiýalaryň formulalar arkaly amala aşmasy.

Elementar algebrada bolşy ýaly "elementar" funksiýalardan peýdalanyp formulalary düzmek bolar.

Kesgitleme 1. Goý B P_2 ulgamyň funksiýalarynyň käbir bölek köpligi bolsun.

a)<u>Induksiýanyň bazisi</u>. Her bir $f(x\ ,...,x\ ) \in$ B funksiýa B üstünde formula diýilýär.

b)<u>Induktiw geçiş.</u>Goý $f(x\ ,...,x\ ) \in$ B bolsun.

$A_1,\ldots A_n$ aňlatmalar ýa B üstünde formulalar, ýa-da U alfawite degişli üýtgeýän ululyklaryň simwollary bolsunlar. Onda $f(A_1,...,A_n\ )$aňlatma B üstünde formula diýilýär.

<u>Mysal 1.</u> Goý B "elementar"funksiýalar köplügi bolsun. Onda:

1)$\{[(x_1 \cdot x_2) + x_1] + x_2\}$.

2) $[\bar{x}_1 \cdot (x_2 + x_3)]$

3) $\{\overline{x_1 \vee [(x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_2)]}\}$

aňlatmalar B üstünde formulalardyrlar.

Formulalary kwadrat ýaýly harplar bilen belgiläliň. Şunlukda ýaý içinde formulalary düzýän funksiýalar ýazylýar. Mysal üçin $U[f_1,...,f_n]$ ýazgy U formulanyň

$f_1,\dots,f_n$ funksiýalardan düzülendigini aňladýar. Formulalary düzýän üýtgeýän ululyklary görkezmeli bolanda $U(x_1,\dots,x_n)$ ýazgyny ýazýarlar.

Goý $B=\{f_1(x_1,\dots,x_n),\dots f_s(x_1,\dots,x_n)\}$köplük üstünde $U=U[f_1,\dots,f_s]$ formula berlen bolsun.

Goý $D=\{g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_s(x_1,\dots,x_n)\}$funksiýalar köplügi bolsun. Bu ýerde g funksiýalar f funksiýalar bilen şol bir üýtgeýän ululyklara eýe.

Kesgitleme2. Goý $B=B[g_1,\dots,g_s]$ formula U formuladan

$$\begin{pmatrix} f_1\cdots & f_s \\ g_1\cdots & g_s \end{pmatrix}$$

çalşyrma netijesinde alnan bolsun. Onda B formula U formula bilen şol bir gurluşa eýe diýilýär.

Mysal 2.

1) $B=\{\bar{x}_1,(x_1\cdot x_2)\}$, $\quad U=[x_1\cdot\overline{(x_2\cdot x_3)}]$

2) $D=\{\bar{x}_1,(x_1\to x_2)\}$, $\quad B=[x_1\to\overline{(x_2\to x_3)}]$

Görnüşi ýaly U we B şol bir gurluşa eýe. Mundan beýläk formulalaryň gurluşlaryny C bilen belgiläris we $U=C[f,\dots,f]$ görnüşde ýazarys.

Kesgitleme 3. Goý $U(x_1,\dots,x_n)$ B üstünde formula bolsun we $f(x_1,\dots,x_n)\in P_2$ bolsun.

a)Induksiýanyň bazisi. Eger $U(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)$, $f\in B$ bolsa, onda $U(x_1,\dots,x_n)$formula $f(x_1,\dots,x_n)$funksiýany degişli edeliň.

b)Induktiw geçiş. Goý $U(x_1,\dots,x_n)=f_0(A_1,\dots,A_n)$bolsun. Bu ýerde A_i $i=\overline{1,n}$ ýa B üstünde formulalar, ýa-da $x_{j(i)}$ üýtgeýän ululygyň simwollary. Onda A_i formula

(simwola) $f_i \in P_2$ funksiýa ýa-da $f_i = x_{j(i)}$ toždestwo funksiýasy degişli edilendir.
$U(x_1,\ldots,x_n)$formula $f(x_1,\ldots,x_n)=f_0(f_1,\ldots,f_m)$funksiýany degişli edeliň.
Eger U formula f funksiýa degişli bolsa, onda U formula f funksiýany amala aşyrýar diýilýär.

U formula degişli bolan f funksiýa B köplügiň funksiýalarynyň superpozisiýasy diýilýär. $f \in B$ funksiýany almaklyk prosesine superpozisiýa operasiýasy diýilýär.

Mysal 3. Goý $f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2,x_3)$, $f_3(x_1,x_2,x_3)$ mysal 1-iň formulalaryna degişli bolan funksiýalar bolsunlar.

1) $(((x_1 \cdot x_2) + x_1) + x_2)$ formula üç ädimde gurulýar:

$$(x_1 \cdot x_2), ((x_1 \cdot x_2) + x_1), (((x_1 \cdot x_2) + x_1) + x_2)$$

Bu bölek formulalara degişli funksiýalary tablisada getireliň.

x_1	x_2	$(x_1 \cdot x_2)$	$((x_1 \cdot x_2) + x_1)$	$(((x_1 \cdot x_2) + x_1) + x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Soňky sütün $f_1(x_1,x_2)$funksiýany kesgitleýär.
$f_1(x_1,x_2)=max(x_1,x_2)$bolýandygyny görmek kyn däldir.
2) $f_2(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1(x_2 + x_3))$ funksiýany bir ädimde guralyň.

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3)

$f_3(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))})$ funksiýany tapmaklyk üçin x_1,x_2,x_3 üýtgeýän ululyklaryň f_3=1 bolýan bahalarynyň toplumyny tapalyň.Onuň üçin: $\{x_1 \vee [(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}$=0 bolýan ýagdaýlary tapmak ýeterlik. Bu ýagdaýlar $x_1=0$ we $[(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]=0$ bolanda bolýar.Soňky deňligiň ýerine ýetmegi üçin $(x_2 \to x_3)$ we $(x_3 \to x_2)$ formulalaryň iň bolmanda biriniň nula öwrülmegi ýeterlik. Bu formulalar $x_2=1, x_3=0$ *ýa-da* $x_2=0, x_3=1$ bolanda nula öwrülýärler. Şeýlelikde (001)we (010) toplumlarda f_3 (x_1, x_2, x_3)=0.Ony tablisada görkezeliň:

x_1	x_2	x_3	$f_3(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3.Bul funksiỳalarynyň häsiỳetleri.

Belli bolşy ýaly, B üstünde her bir formula bul funksiýasy degişli, özi hem dürli formulalara deň funksiýalar hem degişli bolup bilerler.

Kesgitleme 1. Eger B üstünde U_1 we U_2 formulara degişli f_{U_1} we f_{U_2} funksiýalar deň bolsalar,onda U_1 we U_2 formulalara deňgüýçli diýilýär we $U_1=U_2$ ýaly belgilenýär.

Mysal üçin

1) $0=(x\cdot\bar{x})$

2) $(x_1\cdot(x_2+x_3))=\{\overline{x_1\vee[(x_2\to x_3)(x_3\to x_2)]}\}$

3) $(x\to y)=(\bar{y}\to\bar{x})$

formulalar deňgüýçlidirler.

Elementar funksiýalaryň käbir köplüginiň häsiýetlerini häsiýetlendirýän deňgüýçlilikleriň (toždestwolaryň) sanawyny getireliň. ($x_1 \wedge x_2$), ($x_1 \vee x_2$), ($x_1 + x_2$) funksiýalaryň islendigini $(x_1 \circ x_2)$ bilen belgiläliň.

1) $((x_1 \circ x_2)$ funksiýa orun calşyrma häsiýetine eýedir:

$$(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$$

2) $(x_1 \circ x_2)$ funksiya utgaşdyrma häsiýetine eýedir:

$$((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$$

3)Konýunksiýa we dizýunksiýa üçin paýlaşdyrma kanuny ýerine ýetýär:

$$((x_1 \vee x_2) \cdot x_3 = ((x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3))$$

$$((x_1 \cdot x_2) \vee x_3) = ((x_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3))$$

4) $\overline{\overline{x}} = x, (\overline{x_1 \cdot x_2}) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2), (\overline{x_1 \vee x_2}) = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2).$

5) Konýunksiýa we dizýunksiýa üçin aşakdaky deňlikler adalatlydyrlar:

$$(x \cdot x) = x \qquad (x \vee x) = x$$

$$(x \cdot \overline{x}) = 0 \qquad (x \vee \overline{x}) = 1$$

$$(x \cdot 0) = 0 \qquad (x \vee 0) = x$$

$$(x \cdot 1) = x \qquad (x \vee 1) = 1$$

<u>Bellik 1</u>. Eger ýaý bolmasa ilki köpeltmek soňra goşmak amaly ýerine ýetirilýär.

<u>Bellik2.</u> $((x_1 \circ x_2) \circ x_3), (x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$ formulalara derek formula bolmadyk $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$ aňlatmalardan peýdalanmak bolar.Ýaýlary ýerbe-ýer goýup bu aňlatmany formula öwurmek bolar.

Bellik3. Formulalardaky ýaýlary ýazman hem bolar.
1)-5) sanawdan birnäçe düzgünler gelip cykýar:
a) Eger logiki köpeltmek hasylynda köpelijileriň biri nula deň bolsa, onda logiki köpeltmek hasyly hem nula deňdir.
b) Eger ikiden az bolmadyk köpelijini saklaýan logiki köpeltmek hasylynda 1-e deň bolan köpeliji bar bolsa ony taşlap ýazmak bolar.
ç) Eger ikiden az bolmadyk goşulyjyny saklaýan logiki jemde nula deň bolan goşulyjy bar bolsa ony taşlap ýazmak bolar.
d) Eger logiki jemde goşulyjylaryň biri 1-e deň bolsa, onda logiki jem hem 1-e deňdir.

Mysal 2.

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x$$
$$= x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

Yagny, $x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$. Bu x_1 köpelijiniň köpeltmek hasylyny siňdirme düzgünidir.

4. Ikileỳin funksiỳalar. Ikileỳinlik düzgüni.

Toždestwolary almaklygyn ikileýinlilik prinsipine esaslanan ýene-de bir usuly bar.

Kesgitleme 2. $[f(x_1,\ldots,x_n)]^* = \bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ funksiýa $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiýanyň ikileýin funksiýasy diýilýär.

$\overline{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ funksiýa üçin tablisa *f*($x_1, \ldots, x_n$) üçin düzülen tablisadan funksiýa degişli sütünde 0-y 1 bilen we tersine çalyşmaklyk hem-de ol sütüni tersine ýazmaklyk arkaly alynýar.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$\bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$[f(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})]^* = \bar{f}(\bar{x}_{i_1},\ldots,\bar{x}_{i_n})$ bolany sebäpli bu funksiýa hem$[f(x_1,\ldots,x_n)]^*$ funksiýa ýaly öwürmäni kesgitleýär.Bu öwürmäni f*bilen belgilälin.Onda:

$$[f(x_1,\ldots,x_n)]^*=f^*(x_1,\ldots,x_n).$$

Bellik.

0 funksiýa 1-funksiýa ikileýindir.

1 funksiýa 0-funksiýa ikileýindir.

x funksiýa *x*-funksiýa ikileýindir.

$\bar{x}$ funksiýa $\bar{x}$-funksiýa ikileýindir.

$x_1 \wedge x_2$ funksiýa xv x funksiýa ikileýindir.

x_1v x_2 funksiýa $x_1 \wedge x_2$ funksiýa ikileýindir.

Ikileýinlik özaralyk häsiýetine eýedir. Hakykatdan hem, ikileýinligiň kesgitlemesinden ýazyp bileris:

$$f^{**}=(f^*)^*=f.$$

ýagny f funksiýa f^* funksiýa ikileýindir.

Goý $f(x_1,\dots,x_n)$funksiýa U formula bilen aňladylýan bolsun. Onda $f^*(x_1,\dots,x_n)$ funksiýany amala aşyrýan B formulanyň görnüşi nähilikä diýen sorag ýüze çykýar.

Teorema. Eger:

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=f(f_1(x_{11},\dots,x_{1P_1}),\dots,f_m(x_{m1},\dots,x_{mPm}))$$

bolsa,onda

$$\Phi^*(x_1,\dots,x_n)=f^*(f_1{}^*(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m{}^*(x_1,\dots,x_m)).$$

bolar.

Subudy.

Ýazyp bileris:

$$\Phi^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{\Phi}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)=$$

$$\bar{f}(f_1(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1P_1}),\dots,f_m(\overline{x}_{m1},\dots,\overline{x}_{mP_m}))=$$

$$=\bar{f}(\overline{\overline{f_1}}(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1p_1}),\dots,\overline{\overline{f_m}}(\overline{x}_{m1},\dots,x_{mP_m}))=$$

$$=f^*(f_1^*(x_{11},\dots,x_{1P_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mP_m}))$$

Teorema subut edildi.

Bu teoremadan ikileýinlilik düzgüni gelip çykýar:

Eger $U=C[f_1,\dots,f_s]$formula $f(x_1,\dots,x_n)$funksiýany amala aşyrýan bolsa,onda $C[f^*,\dots,f^*\ ]=U^*$formula $f^*(x_1,\dots,x_n)$funksiýany amala aşyrýar. U*formula U formuladan $f_1,\dots,f_s$ funksiýalary degişlilikde $f^*_1,\dots,f^*_s$ funksiýalar bilen çalyşmak arkaly alynýar we U formula ikileýin diýilýär.

Mysal 3.

1) Eger U=C[$0,1,x,x_1\cdot x_2,x_1\vee x_2$] bolsa, onda U*=C[$1,0,\bar{x},x_1\vee x_2,x_1\cdot x_2$] bolar.

2)Eger U($x_1,x_2)=\left[x_1\cdot x_2\vee\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\right]$ bolsa, onda $U^*(x_1,x_2)=\left[(x_1\vee x_2)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\right]$ bolar.

Ikileýinlilik düzgüninden eger

$$U(x_1,...,x_n)=B(x_1,...,x_n)$$

bolsa,onda

$$U^*(x_1,...,x_n)=B^*(x_1,...,x_n)$$

bolýandygy gelip çykýar.

Mysal 4. $\overline{x_1\cdot x_2}=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2$ deňgüýçlilikden $\overline{x_1\vee x_2}=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$ deňgüýçlilik gelip çykýar.

5.Bul funksiyalarynyň üýtgeýänler boýunça dargadylyşy.

Logika algebrasynyň her bir funksiýasyny formula arkaly aňlatmak bolarmyka diýen sorag ýüze çykýar. Bu soraga jogap bereliň.

Goý $x^\sigma=x\sigma\vee\bar{x}\bar{\sigma}$ bolsun.Bu ýerde σ=0 ýa-da σ=1.Onda

$$x^\sigma=\begin{cases}\bar{x}, & \sigma=0,\\ x, & \sigma=1.\end{cases}$$

$x=\sigma$ bolanda we diňe şonda x =1 bolar.

Teorema1. Logika algebrasynyň her bir $f(x_1,...,x_n)$funksiýasyny $\forall\, m(1\le m\le n)$ üçin

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) =$$

$$\underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\vee} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m, x_{m+1},\ldots,x_n) \quad (1)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde logiki jem $x_1, \ldots, x_n$ üýtgeýänleriň hemme mümkin bolan bahalar toplumy boýunça alynýar.

Subudy.

Uýtgeýänleriň erkin($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$)bahalar toplumynda (1)-iň çep we sag taraplarynyň deňdigini görkezeliň:

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\vee} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m, \alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) =$$

$$= \alpha^{\alpha_1} \cdot \ldots \alpha_m^{\alpha_m} \cdot f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m, \alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1\ldots,\alpha_n)$$

Teorema subut edildi.

(1)-e funksiýanyň $x_1, \ldots, x_n$ üýtgeýänler boýunça dargadylyşy diýilýär.

Netije1. **(Üýtgeýän boýunça dargatma).**

Yazyp bileris:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \quad (2)$$

$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ we $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ funksiýalara dargatmanyň düzüjileri (komponentalary) diýilýär.

§7. Normal görnüşler.

1. Elementar jem we elementar köpeltmek hasyl.

Kesgitleme. Logiki üỳtgeỳän ululyklaryň ỳa-da olaryň inkär etmeleriniň logiki jemine elementar jem diỳilỳär.

Mysallar. 1) $x \vee y$, 2) $x \vee y \vee \bar{z}$

Aşakdaky formula elementar jem diỳip bolmaz:

$x \vee \bar{y} \vee (z \wedge t) \vee t$

Sebäbi, bu formulanyň içinde konỳunksiỳa amalynyň belgisi bar.

Elementar jemiň toždestwolaỳyn çyn bolmagy üçin, onuň içinde, biri beỳlekisiniň inkär etmesi bolan iň bolmanda iki sany goşujylaryň bar bolmagy zerur we ỳeterlikdir.

Kesgitleme. Logiki üỳtgeỳän ululyklaryň ỳa-da olaryň inkär etmeleriniň konỳunksiỳasyna elementar köpeltmek hasyly diỳilỳär.

Mysallar. 1) $x \wedge y$, 2) $x \wedge y \wedge \bar{z}$.

Aşakdaky formula elementar köpeltmek hasyly diỳip bolmaz:

$x \wedge (y \vee z) \wedge \bar{z} \wedge t$, sebäbi, onuň içinde dizỳunksiỳa amalynyň belgisi bar.

Elementar köpeltmek hasylyň toždestwolaỳyn ỳalan bolmagy üçin onuň içinde biri beỳlekisiniň inkär etmesi bolan iň bolmanda iki sany köpelijileriň bar bolmagy zerur we ỳeterlikdir.

2. Normal görnüşler. Kesgitlemeler , teoremalar.

Kesgitleme. Berlen $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulanyň konỳunktiw normal görnüşi diỳip, şol formula deň güỳçli bolan hem-de elementar jemleriň konỳunksiỳasyndan ybarat bolan formula aỳdylỳar:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$$

Bu ỳerde $F_1, F_2, ..., F_n$ formulalar $x_1, x_2, ..., x_n$ üỳtgeỳjilerden emele getirilen elementar jemlerdir. Her bir formulanyň konỳunktiw normal görnüşi bardyr we ol ỳeke-täk däldir

Kesgitleme. Berlen $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulanyň dizỳunktiw normal görnüşi diỳip, şol formula deň güỳçli bolan hem-de elementar köpeltmek hasyllaryň dizỳunksiỳasyndan ybarat bolan formula aỳdylỳar:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1 \vee F_2 \vee ... \vee F_n$$

Bu ỳerde $F_1, F_2, ..., F_n$ formulalar $x_1, x_2, ..., x_n$ üỳtgeỳjilerden emele getirilen elementar köpeltmek hasyllarydyr. Her bir formulanyň dizỳunktiw normal görnüşi bardyr we ol ỳeke-täk däldir.

Teorema 1. Berlen $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulanyň toždestwolaỳyn çyn bolmagy üçin, onuň konỳunktiw normal görnüşiniň her bir köpelijisinde, biri beỳlekisiniň inkär etmesi bolan iň bolmanda iki sany goşulyjylaryň bar bolmagy zerur we ỳeterlikdir.

Teoremanyň subutyny özbaşdak ỳerine ỳetirmeli.

Teorema 2. Berlen $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulanyň toždestwolaỳyn ỳalan bolmagy üçin, onuň dizỳunktiw normal görnüşiniň her bir goşulyjysynda biri beỳlekisiniň inkär etmesi bolan köpelijileriň iň bolmanda iki sanysynyň bar bolmagy zerur we ỳeterlikdir.

Teoremanyň subutyny özbaşdak ỳerine ỳetirmeli.

Mysallar.

1) Deňgüỳçli özgertmeleriň kömegi bilen aşakdaky formulany haỳsy hem bolsa bir konỳunktiw normal görnüşde ỳazmaly.

$$\left(x_1 \to \overline{x_2}\right) \to x_2$$

$(x_1 \to \overline{x_2}\,) \to x_2 =$

$\overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})} \vee x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_2$

2) Deňgüýçli özgertmeleriň kömegi bilen aşakdaky formulany haýsy hem bolsa bir dizýunktiw normal görnüşde ýazmaly.

$$\overline{xy} \vee (x \to y)$$

$$\overline{xy} \vee (x \to y) = \overline{x \wedge y} \vee (\overline{x} \vee y) = (\overline{x} \vee \overline{y}) \vee (\overline{x} \vee y) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x} \vee y = 1$$

3. Kämil normal görnüşler.

Kesgitleme. Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýänlerden emele getirilen elementar jemiň içinde, şol üýtgeýänleriň her biri diňe bir gezek, ýa inkär etme bilen ýa-da şonsuz girýän bolsa, onda oňa kämil elementar jem diýilýär.

Kesgitleme. Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýänlerden emele getirilen elementar köpeltmek hasylyň içinde, şol üýtgeýänleriň her biri diňe bir gezek, ýa inkär etme bilen ýa-da şonsuz girýän bolsa, onda oňa kämil elementar köpeltmek hasyl diýilýär.

Kesgitleme. Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýänlerden emele getirilen konýunktiw normal görnüşiniň her bir köpelijisi, şol üýtgeýänlerden emele getirilen kämil elementar jem bolsa, onda oňa kämil konýunktiw normal görnüş diýilýär.

Başga-ça aýdanymyzda, berlen formulanyň kämil konýunktiw normal görnüşi diýip, onuň aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan konýunktiw normal görnüşine aýdylýar:

a)onuň içinde birmeňzeş köpelijiler bolmaly däldir;

b)hiç bir köpelijiniň içinde birmeňzeş goşulyjylar bolmaly däldir;

ç) hiç bir köpelijiniň içinde üỳtgeỳän özüniň inkär etmesi bilen bile gelmeli däldir;

d)her köpelijiniň içinde hemme üỳtgeỳänler ỳa inkär etme bilen ỳa-da şonsuz bolmalydyr.

Kesgitleme. Eger $x_1, x_2, ..., x_n$ üỳtgeỳänlerden emele getirilen dizỳunktiw normal görnüşiniň her bir goşulyjysy, şol üỳtgeỳänlerden emele getirilen kämil elementar köpeltmek hasyl bolsa, onda oňa kämil dizỳunktiw normal görnüş diỳilỳär.

Başga-ça aỳdanymyzda, berlen formulanyň kämil dizỳunktiw normal görnüşi diỳip, onuň aşakdaky şertleri kanagatlandyrỳan dizỳunktiw normal görnüşine aỳdylỳar:

a)onuň içinde birmeňzeş goşulyjylar bolmaly däldir;

b)goşulyjylaryň içinde birmeňzeş köpelijiler bolmaly däldir;

ç) hiç bir goşulyjynyň içinde üỳtgeỳän özüniň inkär etmesi bilen bile gelmeli däldir;

d)her goşulyjynyň içinde hemme üỳtgeỳänler ỳa inkär etme bilen ỳa-da şonsuz bolmalydyr.

<u>Netije 2</u>. (Hemme n üýtgeýänler boýunça dargatma).

Eger $f(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$ bolsa onda:

$f(x_1, \dots, x_n)=$

$$\bigvee_{(\sigma_1, \dots \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots x_n^{\sigma_n}$$

,

$f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$

ýagny:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (3)$$

formula dogrudyr. (3) formula KDNG diýilýär.

Teorema2. Logika algebrasynyň her bir funksiýasy iňkär etme, konýunksiýa dizýunksiýa arkaly formula görnüşinde aňladylyp biliner .

Subudy. Eger $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0$ bolsa, onda

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1\cdot\bar{x}_1$$

Eger $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0$ bolsa, onda :

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (3)$$

Teorema subut edildi

Şeýlelikde, B köplük hökmünde inkär etmeden, konýunksiýadan we dizýunksiýadan ybarat köplügi alyp logika algebrasynyň islendik funksiýasyny B üstünde formula arkaly bermek bolar .

Teorema 2 islendik funksiýa üçin ony amala aşyrýan formulany KDNG-de gurmaklyga mümkinçilik berýär| . Onuň üçin $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0$ funksiýa degişli tablisada $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$ bolan hemme $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ setirleri belleýäris we her bir beýle setir üçin $x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots x_n^{\sigma_n}$ logiki köpeltmek hasylyny düzýäris, soňra alnan hemme konýunksiýalary dizýunksiýa amaly bilen birikdirýäris .

Mysal 1. $x_1 \to x_2$ funksiýa üçin KDNG-ny ýazmaly.

Çözülişi.

$x_1 \to x_2$ funksiýa üçin tablisana ýazalyň.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

№1 tablisa.

Görnüşi ýaly (0;0),(0;1),(1;1) toplumlar üçin $x_1 \to x_2=1$.Şonuň üçin :

$$x_1 \to x_2 = x_1^0 \wedge x_2^0 \vee x_1^0 \wedge x_2^1 \vee x_1^1 \wedge x_2^1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2$$

Mysal 2.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

tablisa bilen berlen $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiýa üçin KDNG-i ýazmaly .

Çözülşi .

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Belli bolşy ýaly KDNG $\vee\wedge$ görnüşli aňlatmadyr, ýagny köpeltmek hasyllarynyň logiki jemidir. Logika algebrasynyň funksiýasy üçin $\wedge\vee$ görnüşli aňlatmany almak bolarmyka diýen sorag ýüze čykỳar. $f\neq 1$ bolsa bu soraga tassyklaỳjy jogap bermek bolar. Eger $f^*\neq 1$ bolsa, bu funksiýa üçin KDNG-i ýazalyň:

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$\bigvee_{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}$$

$$f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$$

Ikileýinlik formulalar üçin deňgüýçliligi alyp taparys:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$\bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} (x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})=$$

$$\bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} (x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})=$$

$$f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$$

$$f(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)=0$$

$$= \bigwedge_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

$$f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = 0$$

$$f^{**}(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$$

bolýandygy sebäpli gutarnykly ýazyp bileris:

$$f(x_1.......x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1......\sigma_n)\\ f(\sigma_1......\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee,\dots,\vee x_n^{\bar{\sigma}_1}) \qquad (4)$$

(4) formula kämil konýunktiw normal görnüş (KKNG)

diýilýär.**Mysal 3.** $x_1 \rightarrow x_2$ funksiýa üçin KKNG – i ýazmaly.

Çözülişi.

№1 tablisadan ýazyp bileris:

$$x_1 \rightarrow x_2 = x_1^1 \vee x_2^0 = x_1 \vee x_2$$

Mysal 4. №2 tablisa bilen berlen $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiýa üčin KKNG – i ýazmaly.

Çözülişi

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

Görnüşi ýaly, logika algebrasynyň funksiýasyny bermek üçin tablisalar bilen bir hatarda inkär etmeden, konýuňksiýadan we dizýuňksiýadan ybarat bolan funksiýalar köplüginiň üstünde formulalar dilinden hem peýdalanmak bolar. Gabalyk nukdaý nazaryndan formulalar dili tablisalar diline görä gowudyr. Mysal üçin, formula bilen berlen

$$f(x_1....x_n) = x_1 \vee x_2 \vee ...... \vee x_n$$

funksiýa 2n-1 simwoly saklaýar (üýtgeýänleriň simwollarynyň n sanysyny we n-1 sany dizýuksiýa simwolyny). Eger by funksiýa tablisa görnüşinde berilse, onda ol tablisanyň 2^n setiri bolar.

Berlen formulany kämil konỳunktiw normal görnüşe getirmek üçin, deňgüỳçli özgertmeleriň kömegi bilen ony ilki konỳunktiw normal görnüşe getirmeli. Soňra onuň haỳsy köpelijisinde goşulyjy hökmünde käbir üỳtgeỳän ỳetmeỳän bolsa, şol köpelijiniň üstüne, ỳetmeỳän üỳtgeỳän bilen onuň inkär etmesiniň köpeltmek hasylyny goşmaly we ikinji paỳlaşdyrma kanuny esasynda ỳaỳlary açyşdyrmaly. Ondan soň, eger bar bolsa, gaỳtalanỳan köpelijileriniň we goşujylarynyň birinden başgasyny hem-de çyna deň bolan köpelijilerini taşlamaly.Şondan soň kämil konỳunktiw normal görnüşi alỳarys.

Mysal.1. $(x \to \bar{y}) \to y$ formulany KKNG-de ỳazmaly.
Ilki bilen berlen formulany KNG-e getireliň.

$(x \to \bar{y}) \to y =$

$\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \vee y = (x \wedge y) \vee y = (x \vee y) \wedge (y \vee y) = (x \vee y) \wedge y$ - bu konỳunktiw normal görnüşdir.KKNG-I almak üçin y agzasyna $x \wedge \bar{x}$ formulany goşỳarys:

$(x \vee y) \wedge y = (x \vee y) \wedge (y \vee (x \wedge \bar{x})) = (x \vee y) \wedge (y \vee x) \wedge (y \vee \bar{x})$.

Birinji we ikinji köpelijiler meňzeşdir, olardan diňe birini galdyrỳarys:

$$(x \to \bar{y}) \to y = (x \vee y) \wedge (y \vee \bar{x}).$$

Berlen formulany kämil dizỳunktiw normal görnüşe getirmek üçin, deňgüỳçli özgertmeleriň kömegi bilen ony ilki dizỳunktiw normal görnüşe getirmeli. Soňra onuň haỳsy goşulyjysynda köpeliji hökmünde käbir üỳtgeỳän ỳetmeỳän bolsa, şol goşulyjyny, ỳetmeỳän üỳtgeỳän bilen onuň inkär etmesiniň jemine köpeltmeli we birinji paỳlaşdyrma kanuny esasynda ỳaỳlary açyşdyrmaly. Ondan soň, eger bar bolsa, gaỳtalanỳan goşulyjylaryň we köpelijileriniň birinden başgasyny hem-de ỳalana deň bolan goşulyjylaryny taşlamaly.Şondan soň kämil diz ỳunktiw normal görnüşi alỳarys.

Mysal2. $(x\wedge y)\vee\left(\overline{\bar{y}\vee z}\right)$ formulany KDNG-de ỳazmaly.
Ilki bilen berlen formulany DNG-e getireliň.
$(x\wedge y)\vee\left(\overline{\bar{y}\vee z}\right)=(x\wedge y)\vee\left(y\wedge\bar{z}\right)$- bu dizỳunktiw normal görnüşdir, ỳöne KDNG däldir.
Birinji goşulyjyny $z\vee\bar{z}$ formula, ikinji goşulyjyny bolsa $x\vee\bar{x}$ formula köpeldeliň.

$$(x\wedge y)\vee\left(y\wedge\bar{z}\right)=$$
$$(x\wedge y)\wedge\left(z\vee\bar{z}\right)\vee\left(y\wedge\bar{z}\right)\wedge\left(x\vee\bar{x}\right)=(x\wedge y\wedge z)\vee\left(x\wedge y\wedge\bar{z}\right)\vee\left(y\wedge\bar{z}\wedge x\right)\vee\left(y\wedge\right.$$

Ikinji we üçünji goşulyjylar meňzeşdirler, olardan birini taşlap,berlen formulanyň KDNG-ni alarys.

§8.Doly ulgamlar.

1. Doly ulgamyň kesgitlenişi. Doly ulgamlaryň mysallary.

Belli bolşy ýaly logika algebrasynyň her bir funksiýasy $\bar{x}$, $x_1\wedge x_2, x_1\vee x_2$ elementar funksiýalar ulgamy arkaly formula gornuşinde aňladylýar. Beýle häsiýete elementar funksiýalaryň başga-da käbir ulgamlary eýedir.

Keşgitleme 1. Eger işlendik bul funksiýasy P_2-ä degişli $\{f_1,...,f_s,...\}$ funksiýalar ulgamynyň funksiýalary arkaly formula görnüşinde ýazylyp bilinýan bolsa, onda $\{f_1,...,f_s,...\}$ funksiýalar ulgamyna (funksional) doly dililýär.

Doly ulgamlaryň mysallaryny getileriň.

1) Hemme bul funksiýalarynyň P_2 ulgamy doludyr.
2) $B_1 = \{\bar{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ ulgam doludyr.

Şu ýerde bir teorema getireliň.

Teorema 1. Goý

$$B = \{f_1, f_2, ...\} \in P_2 \qquad (1)$$

we

$$G = \{g_1, g_2, ...\} \in P_2 \qquad (2)$$

funksiýalar ulgamlary berlen bolsun. Goý (1) ulgam doly bolsun we onuň her bir funksiýasy (2) ulgamyň funksiýalary arkaly formula gornüşinde aňladylýan bolsun. Onda (2) ulgam doludyr.

Subudy.

(1) ulgam doly bolanlygy sebäpli islendik $h \in P_2$ funksiýany

$$h = C[f_1....,f_2....]$$

formula gornüşinde aňlatmak bolar. Teoremanyň şerti boýunça:

$$f_1 = C_1 [g_1, g_2,...] , f_2 = C_2 [g_1, g_2,...],\dots$$

Onda:

$$h = C[f_1,f_2,...] = C [C_1 [g_1, g_2....], C_2 [g_1, g_2,...],...] = C^1 [g_1, g_2,...].$$

Ýagny h funksiýa G üstünde formula gornüşinde aňladyldy. h funksiýanyň erkinligi sebäpli (2) ulgam doludyr.

<u>Teorema subut edildi.</u>

Indi doly ulgamlaryň sanawyny dowam edeliň.

3) $B_2 = \{ \bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ ulgam doludyr. Oňa göz ýetirmek üçin (1) ulgam hökmünde $B_1 = \{\bar{x}_1, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ ulgamy, (2) ulgam hökmünde bolsa $B_2 = \{ \bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ ulgamy alyp we $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$ deňgüýčlilikden peýdalanyp bolar.

4) $B_3 = \{\bar{x}_1, x_1 \vee x_2\}$ ulgam doludyr. Bu tassyklamany subut etmeklik üçin (1) ulgam hökmünde $B_1 = \{\bar{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ ulgamy, (2) ulgam hökmünde bolsa

$B_3 = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ ulgamy alyp, $x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2}$ deňgüýçlilikden peýdalanmak ýeterlik.

5) $B_4 = \{x_1/x_2\}$ ulgam doludyr. Hakykatdan hem (1) ulgam hökmünde $B_2 = \{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ ulgamy, (2) ulgam hökmünde bolsa $B_4 = \{x_1/x_2\}$ ulgamy alalyň. Ýazyp bileris:

$$x_1 / x_1 = \bar{x}_1, \qquad (x_1 / x_2)/(x_1 / x_2) = \overline{x_1 / x_2} = x_1 \wedge x_2$$

6) $B_5 = \{0,1, x_1 \wedge x_2, x_1+x_2 \pmod 2\}$ ulgam doludyr. Hakykatdan hem (1) ulgam hökmünde $B_2 = \{ \bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ ulgamy, (2) ulgam hökmünde bolsa $B_5 = \{0,1, x_1 \wedge x_2, x_1+x_2\}$ ulgamy alalyň. Ýazyp bileris:

$$x_1+1= \bar{x}_1, \quad x_1 \wedge x_2=x_1 \wedge x_2,$$

0;1 himişeliklerden we $x_1 \wedge x_2$, x_1+x_2 funksiýalardan düzülen formula ýaýlar açylyp käbir özgertmeler geçirilenden soň mod 2 boýunça kopagza öwrülýär.

2.Žegalkin köpagzasy.

Teorema 2. (I.I. Žegalkin). P_2 ulgama degişli her bir funksiýa mod 2 boýnça kopagza görnüşinde aňladylyp bilner. Bu kopagza Žegalkin kopagzasy diýilýär.

$x_{1,\ldots\ldots}x_n$ üýtgeýänlere bagly bolan Žegalkin köpagzalarynyň, ýagny

$$\sum_{(i_1..i_s)} a_{i_1,\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

görnüşli aňlatmalaryň sany 2^{2^n} bolar, sebäbi $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ agzalaryň sany (1,....,n) sanlardan düzülen ($i_1,\ldots\ldots i_s$) bölek koplükleriň sanyna deň, ýagny 2^n – e deň, $a_{i_1},\ldots,a_{i_s}$ koeffisiýentler bolsa ýa nula deň ýa-da bire deň. Bu üýtgeýänlere bagly hemme bul funksiýalarynyň sany hem 2^{2^n} -e deň. Bu ýerden bul funksiýalarynyň Žegalkin köpagzalary arkaly aňladylyşynyň ýeke-täkligi gelip çykýar.

Mysal 1. x_1 we x_2 pikir aýtmalaryň dizýunksiýasyny Žegalkin kopagzasy görnüşinde aňlatmaly.

Çözülişi.

x_1 we x_2 pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy üçin gerekli aňlatmany kesgitsiz koeffisiýentleri bolan kopagza görnüşinde gözläliň:

$$x_1 \vee x_2 = a\, x_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d.$$

$x_1 = x_2 = 0$ bolanda 0 = d bolar.

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ bolanda 1=c bolar.

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ bilanda 1 = b bolar.

$x_1 = x_2 = 1$ bolanda 1=a+b+c bolar. b=1 we c=1 bahalary ornuna goýup a=1 bolýandygyna göz ýetireris. Şeýlelikde:

$$x_1 \vee x_2 = x_1x_2 + x_1 + x_2 .$$

bu dizýunksiýanyň Žegalkin köpagzasy görnüşinde aňladylyşydyr.

§9.Ỳapyk ulgamlar.

1.Ýapyk ulgamyň kesgitlenişi. Ýapyk ulgamlaryň mysallary.

Kesgitleme Goý M köplük P_2 ulgamyň funksiýalarynyň käbir bölek kopligi bolsun. M koplügiň ýapagy diýip bu koplügiň funksiýalary arkaly formula görnüşinde anladylýan hemme bul funksiýalarynyň koplügine aýdylýar we [M] bilen belgilenýär.

Mysal.

1) Eger M=P_2 bolsa, onda [M]=P_2.

2) Eger M={1, x_1+x_2} bolsa, onda [M] hemme çyzykly funksiýalaryň L ulgamydyr, ýagny

$f\{x_1,...x_n\}=C_0+C_1x_1+...+C_nx_n$ (mod 2), c_i=0;1, i= $\overline{0,n}$,

gornüşli funksiýalar ulgamydyr.

Ýapak aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) $M \subseteq [M]$

2) [[M]]=[M]
3) Eger $M_1 \subseteq M_2$ bolsa, onda $[M_1] \subseteq [M_2]$
4) $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_2]$

Kesgitleme. Eger [M] = M bolsa M köplüge, (funksional) ýapyk diýilýär.

Mysal.

1) $M=P_2$ köplük ýapykdyr.
2) $M=\{1,x_1+x_2\}$ köplük ýapyk däldir.
3) L köplük ýapykdyr, sebäbi çyzykly aňlatmalardan düzülen çyzykly aňlatma çyzyklydyr.

Her bir [M] köplük ýapykdyr.

2. T_0 , T_1 **we S ulgamlar.**

Ỳapak we ýapyk synp adalgalarynda dolulygyň öň getirilen kesgitlemesine deňgüýçli kesgitlemäni getireliň:

Kesgitleme. Eger [M] = P_2 bolsa, onda M synp doludyr.

P_2 ulgamda ýapyk synplara garalyň.

1) 0 hemişeligi saklaýan, ýagny f (0, ..., 0) = 0 bolan hemme $f(x_{1,\dots}x_n)$ bul funksiýalarynyň synpyny T_0 bilen belgiläliň. Onda: 0, x, x_1x_2, $x_1 \vee x_2$ $x_1+x_2 \in T_0$, $1 \notin T_0$, $\bar{x} \notin T_0$ bolýandygy aýdyňdyr. $f \in T_0$ funksiýa degişli tablisanyň bir setiri nul bahany saklaýandygy sebäpli T_0 synpa degişli x_1..., x_n üýtgeýänlere bagly bolan bul funksiýalarynyň sany $\frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ bolar. T_0 ýapyk synpdyr. Hakykatdan hem, deňgüýçleýin funksiýanyň T_0 synpa degişlidigi sebäpli T_0 synpyň ýapykdygyny esaslandyrmak üçin f, $f_1,\dots,f_m \in T_0$ bolanda

$\Phi=f(f_1,....,f_m)\in T_0$ bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Ỳazyp bileris:

$$\Phi(0,....,0)=f(f_1(0....,0),....f_m(0....,0))=f(0,....,0)=0$$

2) 1 hemişeligi saklaýan, ýagny f (1,...,1)=1 bolan hemme $f(x_1,...x_n)$ bul funksiýalarynyň synpyny T_1 bilen belgiläliň. 1, x, $x_1\wedge x_2$, x_1vx_2 $\in T_1$, 0, $\bar{x}\notin T_1$ bolýandygy aýdyňdyr.

T_1 synpyň funksiýalarynyň T_0 synpyň funksiýalaryna ikileýinligi sebäpli T_0 synp barada alnan netijeleri T_1 synpa hem geçirmek bolar. T_1 synp ýapykdyr we üýtgeýän n ululyga bagly bolan $\frac{1}{2}\cdot 2^{2^n}$ sany funksiýany özünde saklaýar.

3) Özüne ikileýin funksiýalaryň, ýagny $f^*=f$, $f\in P_2$, bolan funksiýalaryň synpyny S bilen belgiläliň. Mysal üçin x we $\bar{x}$ funksiýalar özüne ikileýindirler.

$$h(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2)\vee(x_1x_3)\vee(x_2x_3)$$

funksiýa özüne ikileýindir. Hakykatdan hem:

$h^*(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2)(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3)=(x_1x_2)\vee(x_1x_3)\vee(x_2x_3)=h(x_1,x_2,x_3)$

Özüne ikileýin funksiýa üçin

$$\bar{f}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)=f(x_1,...,x_n)$$

deňgüýçlilik adalatlydyr.

S synp ýapykdyr. Hakykatdan hem, deňgüýçleýin funksiýanyň S synpa degişlidigi sabäpli f, $f_1,...,f_m\in S$ bolanda $\Phi=f(f_1,...,f_m)\in S$ bolýandygyny görkezmeklik ýeterlikdir. Ỳazyp bileris:

$$\Phi^*=(f^*_1,...,f^*_m)=f(f_1,...,f_m)=\Phi$$

3.Özüne ikileỳin däl funksiỳa baradaky teorema.

Teorema. Eger $f(x_1,...,x_n) \notin S$ bolsa, onda ondan x we $\bar{x}$ funksiýalary goýmak arkaly bir üýtgeýäne bagly özüne ikileýin däl funksiýany, ýagny hemişeligi almak bolar.

Subudy.

Eger $f(x_1,...,x_n) \notin S$ bolsa, onda $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ toplum tapylyp

$$f(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

bolar.

$\varphi_i\ (x)=x^{\alpha_i}$, i=1,...,n funksiýalary girizeliň. Goý $\varphi_i(x)=f(\varphi_1(x),..., \varphi_n(x))$ bolsun. Ỳazyp bileris:

$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0))=f(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n})$

$= f(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(1^{\alpha_1},...,1^{\alpha_n}) =$

$=f(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1))= \varphi(1)$.

Ýagny $\varphi(0)= \varphi(1)$. Diýmek, $\varphi(x)$ funksiýa hemişelik ululykdyr.

Teorema subut edildi.

§10. Monoton funksiýalar ulgamy.

1.Öňden gelme gatnaşygy.

Toplumlar üçin wektorlaýyn ýazgyny ulanalyň: $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ we ş.m.

Kesgitleme. Eger $\alpha_1\le\beta_1,...,\alpha_n\le\beta_n$ bolsa, onda $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ we $\tilde{\beta}=(\beta_1,...,\beta_n)$ toplumlar üčin $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ öňdengelme gatnaşygy ýerine ýetýar diýilýär.

Kesgitleme. Eger islendik $\tilde{\alpha}$ we $\tilde{\beta}$ iki toplum üçin $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ bolanda f($\tilde{\alpha}$)≤f($\tilde{\beta}$) bolsa, $f(x_1,...,x_n)$ funksiýa monoton diýilýär.

0,1,x, x_1x_2, x_1vx_2 monoton funksiýalaryň mysallarydyrlar.

Monoton funksiýalaryň M koplügi ýapykdyr. Hakykatdan hem, M koplügiň deňgüýçleýin funksiýany saklaýandygy sebäpli M köplügiň ýapykdygyny görkezmek üčin f, $f_1,...,f_m$ funksiýalar monoton bolanlarynda $\Phi=f(f_1,...,f_m)$ funksiýanyň hem monotondygyny gorkezmeklik ýeterlikdir. Goý $\tilde{x}=(x_1,...,x_n)$, $\tilde{x}^1=(x_{11},...,x_{1P_1})$,..., $\tilde{x}^m=(x_{m1},...,x_{mP_m})$ degişlilikde Φ, $f_1,...,f_m$ funksiýalaryň üýtgeýänler toplumy bolsun. Şunlykda Φ funksiýanyň üýtgeýänler toplumy diňe $f_1,...,f_m$ funksiýalarda duş gelýän üýtgeýänlerden ybarat bolsun. Goý $\tilde{\alpha}$ we $\tilde{\beta}$ $\tilde{x}$ üýtgeýänleriň n uzynlykly iki bahalar toplumy bolsun. Şunlukda $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ bolsun. Bu toplumlar $x^1,...,x^m$ üýtgeýänlerin $\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_m,\beta_m$ bahalar toplumyny kesgitleýärler, şunlukda $\alpha_1 \leq \beta_1,..., \alpha_m \leq \beta_m$. $f_1,...,f_m$ funksiýalaryň monotonlygy sebäpli.

$$f_1(\tilde{\alpha}^1) \leq f_1(\tilde{\beta}^1),...,f_m(\tilde{\alpha}^m) \leq f_m(\tilde{\beta}^m)$$

deňsizlikler ýerine ýeter. Şonuň üçin:

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1),..,f_m(\tilde{\alpha}^m)) \leq (f_1(\tilde{\beta}^1),...,f_m(\tilde{\beta}^m))$$

bolar. f funksiýasynyň monotonlygy sebäpli ýazyp bileris:

$$\phi(\tilde{\alpha})=f(f_1(\alpha^1),..,f_m(\alpha^m)) \leq f(f_1(\beta^1),...,f_m(\beta^m)) =\phi(\tilde{\beta})$$

Gorşümiz ýaly $\phi(x)$ monoton funksiýadyr. Diýmek M ýapyk koplükdir.

2.Monoton däl funksiỳa baradaky teorema.

Kesgitleme Eger $\tilde{\alpha}$=(α_1,..., α_{i-1}, α_i, α_{i+1},..., α_n) we $\tilde{\beta}$=(α_1,..., α_{i-1}, α_i, α_{i+1},..., α_n) bolsa, onda $\tilde{\alpha}$ we $\tilde{\beta}$ toplumlara i-nji koordinata boýunça goňşy diýilýär.

Teorema (monoton däl funksiýa barada). Eger $f(x_1,...,x_n)\notin$M bolsa, onda 0,1 hemişelikleri we x funksiýany ornuna goýmak arkaly ol funksiýadan 1 argumente bagly monoton däl funksiýany, ýagny $\bar{x}$ funksiýany almak bolar.

Subudy.

Ilki $f\,(\tilde{\alpha})\leq f(\tilde{\beta}\,)$ (1) deňsizlik ýerine ýeter ýaly $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ goňşy toplumlar jübütiniň bardygyny görkeziliň. $f\notin$M bolanlygy sebäpli $\tilde{\alpha}^1\prec\tilde{\beta}^1$ bolanda f($\tilde{\alpha}^1$) > f($\tilde{\beta}^1$) bolar ýaly $\tilde{\alpha}^1$ we $\tilde{\beta}^1$ toplumlar bardyr. Eger $\tilde{\alpha}^1$ we $\tilde{\beta}^1$ toplumlar goňşy bolsalar, onda (1) deňsizlik subut edildi. Goý $\tilde{\alpha}^1$ we $\tilde{\beta}^1$ goňşy däl toplumlar bolsunlar. Onda $\tilde{\beta}^1$ toplum $\tilde{\alpha}^1$ toplumdan k (k>1) sany koordinatalarda tarawutlanýar, şunlukda bu k koordinatalar $\tilde{\alpha}^1$ toplumda 0, $\tilde{\beta}^1$ toplumda bolsa 1 baha eýedirler, Şonuň üčin $\tilde{\alpha}^1$ we $\tilde{\beta}^1$ toplumlaryň arasyna $\tilde{\alpha}^1\leq\tilde{\alpha}^2\leq...\leq\tilde{\alpha}^k\leq\tilde{\beta}^1$bolar ýaly k-1 sany $\tilde{\alpha}^2,...,\tilde{\alpha}^k$ toplumlary goýmak bolar. Ýanaşyk duran toplumlar goňşydyrlar. $f(\tilde{\alpha}^1)>f(\tilde{\beta}^1)$ bolanlygy sebäpli $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$bolan iň bolmanda bir göňşy jübüt üçin $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$bolar. Goý bu jübüt i-nji koordinatalary boýunça goňşy toplumlar bolsunlar, ýagny

$\widetilde{\alpha}$=(α_1,...,α_{i-1},0,α_{i+1},..., α_n), $\widetilde{\beta}$=(α_1,...,α_{i-1},1,α_{i+1},...,α_n)

bolsun. $\varphi(x)$= f(α_1,...,α_{i-1},x, α_{i+1},...,α_n) funksiýany girizeliň. Onda:

$\varphi(0) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)=f(\widetilde{\alpha})>f(\widetilde{\beta})=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)=\varphi(1)$

bolar. Ýagny $\varphi(x) = \bar{x}$.

<u>Teorema subut edildi.</u>

Hemme çyzykly funksiýalaryň synpyny L bilen belgiläliň $x, \bar{x}$, $x_1+x_2 \in$ L, $x_1x_2 \notin$ L, $x_1 \vee x_2 \notin L$ bolýandygy aýdyňdyr. L synpyň ýapykdygy öň görkezilipdi.

3. Çyzykly däl funksiỳa baradaky teorema.

<u>Teorema 2. (çyzykly däl funksiýa barada).</u> Eger $f(x_1,\ldots,x_n) \notin$ L bolsa, onda 0,1 hemişelikleri, $x, \bar{x}$ funksiýalary we $\bar{f}$ funksiýany ornuna goýmak arkaly ondan iki argumente bagly çyzykly däl $x_1 \wedge x_2$ funksiýany almak bolar.

Subudy.

Belli bolşy ýaly

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{(i_1,\ldots i_s)} a_{i_1\ldots i_s}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s} \qquad (2)$$

Žegalkin köpagzasy çyzykly däl, şonuň üçin iň bolmanda iki kopelijini saklaýan agza bardyr. Bu kopelijileriň arasynda x_1 we x_2 bar diýeliň (2) kopagzany ozgerdeliň:

$$\sum_{(i_1,\ldots i_s)} a_{i_1\ldots i_s}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s} = x_1x_2f_1(x_{3,\ldots,}x_n)+x_1f_2(x_{3,\ldots,}x_n)+x_2f_3(x_{3,\ldots,}x_n)+f_4(x_{3,\ldots,}x_n)$$

Kopagzanyň ýeke-täkligi sebäpli $f_1(x_3,...,x_n)\neq 0$. Goý $\alpha_3,...,\alpha_n$ bahalar toplumy üçin $f_1(x_3,...,x_n)=1$ bolsun. Onda:

$$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n) = x_1,x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma$$

bolar. Bu erde α, β, γ 0 ýa-da 1 bahalary kabul edýän hemişelikler.

$$\psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma$$

funksiýany girizeliň. Onda

$$\psi(x_1,x_2)=(x_1+\beta)(x_2+\alpha)+\alpha(x_1+\beta)+\beta(x_2+\alpha)+$$

Teorema subut edildi.

T_0, T_1, S, M, L ýapyr synplar jübüt – jübütden tapawutlydyrlar.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	—	—	+	+
1	—	+	—	+	+
x	—	—	+	—	+

„+” alamaty funksiýanyň degişli synpa degişlidigini anladýar, "—" alamaty bolsa – degişli däldigini aňladýar.

§11. Maksimal ulgamlar.

1. Dolulygyň zerur we ỳeterlik şerti.

Goý $B=\{f_1,f_2,...\}$ funksiýalaryň erkin ulgamy bolsun.

Teorema 1 (Funksional dolulyk barada).

B funksiýalar ulgamynyň doly bolmagy üçin, onüň T_0, T_1, S, M, L ýapyk synplaryň hiç birinde hem tutuşlygyna saklanmazlygy zerur we ýeterlikdir.

Subudy.

Zerurlygy Goý B ulgam doly bolsun, ýagny $B \in P_2$ bolsun. B ulgam T_0, T_1, S, M, L synplaryň haýsy hem birine degişli diýeliň.Ol synpy N bilen belgiläliň. Onda ýapagyň we ýapyk synpyň häsiýetlerinden peýdalanyp ýazyp bileris:

$$P_2 = [B] \subseteq [N] = N$$

Bu mümkin däl.

Yeterligi. Goý B ulgam T_0, T_1, S, M, L synplaryň hiç birine hem tutuşlygyna degişli bolmasyn. Onda B ulgamdan bu häsiýete eýe bolan we 5-den köp bolmadyk funksiýany özünde saklaýan B_1 bolek ulgamy bolüp almak bolýar. Onuň üçin B ulgamdan degişlilikde T_0, T_1, S, M, L synplara degişli bolmadyk f_i , f_j , f_k , f_m , f_l funksiýalary alýarlar we bu funksiýalardan ybarat ulgamy B_1 bilen belgileýärler, ýagny

$$B_1 = \{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\}$$

Bu funksiýalar şol bir üýtgeýänlere bagly diyip hasap etmek bolar. Ilki f_i , f_j , we f_k funksiýalaryň komegi bilen 0 we 1 hemişelikleri guralyň. $f_i \notin T_0$ funksiýa garalyň. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

1) f_i (1,...1)=1. Onda $\varphi(x) = f_i(x,...,x)$ funksiýa 1 hemişelikdir, sebäbi $\varphi(0) = f_i(0,...,0)=1$,

$\varphi(1) = f_i(1,\ldots,1) = 1$. 0 hemişelik $f_j(1,\ldots,1)=0$ deňlikden alynýar.

2) f_i (1,...1)=0. Onda $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)=\bar{x}$ funksiýadyr, sebäbi $\varphi(0)=f_i(0,\ldots0)=1$, $\varphi(1) = f_i(1,\ldots1)=0$.

Indi f_k ($f_k \notin S$) funksiýany alalyň. Onda (umumy okuw 12, teorema) bu funksiýadan hemişeligi almak bolar, $\bar{x}$ funksiýanyň barlygy sebäpli beýleki hemişeligi hem taparys. Şeýlelikde iki ýagdaýda hem 0 we 1 hemişelikleri alarys. Indi 0, 1 hemişelikleriň we $f_m \notin M$ funksiýanyň kömegi bilen $\bar{x}$ funksiÿany guralyň.Onuň üçin monoton däl funksiýa baradaky teoremadan peÿdalanmak ÿeterlik.

Indi 0;1 hemişeliklerden, $\bar{x}$ we f_l funksiÿalardan peÿdalanyp $x_1 \wedge x_2$ funksiÿany guralyň.Onuň üçin çyzykly däl funksiýa baradaky teoremadan peýdalanmak ýeterlik. Şeÿlelikde B_1 üstünde (diýmek B üstünde hem) formulalar arkaly $\bar{x}$ we $x_1 \wedge x_2$ funksiýalar amala aşyryldy.

Teorema subut edildi.

Netije 1. Islendik $m \in P_2$, $m \neq P_2$ ÿapyk synp gurlan synplaryň iň bolmanda birine degişlidir.

2. Maksimal ulgamlar.

Kesgitleme 1. Eger P_2 ulgamyň funksiýalarynyň n synpy doly däl bolsa, emma islendik f $(f \in P_2, f \notin n)$ funksiỳa üçin $n \cup \{f\}$ synp doly bolsa, onda n ulgama maksimal diỳilỳär.

Bu kesgitlemeden maksimal synpyň ỳapyklygy gelip çykýär.

Netije 2. Logika algebrasynda diňe 5 sany maksimal synp bar: T_0,T_1,S,M,L.

Mysal 1. $f_1=x_1x_2$, $f_2=0$, $f_3=1$, $f_4=x_1+x_2+x_3$ (mod 2) funksiỳalar u8lgamy doludyr.

Hakykatdan hem, $f_3 \notin T_0,\ f_2 \notin T_1,\ f_2 \notin S,\ f_4 \notin M,\ f_1 \notin L.$

Onda Teorema 1 boýunça $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ulgam doludyr. Başga tarapdan bolsa funksiýalaryň islendiginiň aýrylmagy ulgamyň doly bolmazlygyna getiriỳär:

$$\{f_2, f_3, f_4\} \subset L \quad , \quad \{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1 \ ,$$

$$\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0 \quad , \quad \{f_1, f_2, f_3\} \subset M \ .$$

Teorema 2. P_2 ulgamda doly bolan her bir B funksiỳalar ulgamyndan dörtden köp bolmadyk funksiỳany saklaỳan bölek ulgamy bölüp almak bolar.

Subudy.

Teorema 1 boýunça B ulgamdan 5-den köp bolmadyk funksiýany saklaýan B_1 bölek ulgamy almak bolỳandygyny görkezipdik. $f_i \notin T_o$ bolýandygy aýdyňdyr. f_i funksiỳa özüne ikileỳin däl, sebäbi $f_i(0,\ldots,0)=f_i(1,\ldots,1)$, ỳa-da monoton däl, sebäbi $f_i(0,\ldots,0)>f_i(1,\ldots,1)$. Şonuň üçin ýa $\{f_i, f_j, f_m, f_l\}$ ulgam ýa-da $\{f_i,f_k,f_l\}$ ulgam doludyr.

Teorema subut edildi.

Mysal 1-den görnüşi ýaly funksiýalaryň sanyny 4-den azaltmak bolmaýar.

P_2 ulgamda ýapyk köplükleri öwrenmeklik meselesinde amerikan matematigi E.Postuň goşandy uludyr. Käbir netijeleri getireliň.

Kesgitleme 2. Eger m ýapyk synpdan bolan $\{f_1,\ldots,f_s,\ldots\}$ funksỳalar ulgamynyň ỳapagy m bilen gabat gelýän bolsa, onda ol ulgama m synpda doly diỳilỳär.

Başgaça aỳdylanda, eger m synpyň her bir funksiýasy $\{f_1,..,f_s,...\}$funksiỳalar ulgamynyň funksiýalary arkaly aňladyp bilinýän bolsa ol ulgama *m* synpda doly diýilỳär.

Kesgitleme3. Eger *m* ýapyk synpa degişli we *m* synpda doly $\{f_1,...,f_s,...\}$funksiýalar ulgamynyň her bir hususy bölek ulgamy doly däl bolsa, onda ol funksiýalar ulgamyna *m* synpyň bazisi diỳilỳär.

Mysal $f_1=x_1x_2$, $f_2=0$, $f_3=1$, $f_4=x_1+x_2+x_3$ fnksiỳalar ulgamy P_2-de bazisdir.

$\{0;1; x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ulgam M synpyň bazisidir.

Teorema 3.(E.Post) P_2 ulgama degişli her bir ýapyk synp tükenikli bazise eỳedir.

Teorema 4.(E.Post) P_2 ulgamda ýapyk synplar köplüginiň kuwwady hasaplydyr.

§12. Logiki deňlemeler.

1. Logiki deňlemeler.

Üýtgeýänleriň çynlyk bahalary boýunça funksiýanyň degişli çynlyk bahasyny tapmaklyk meselesine biz öň garapdyk. Belli bolşy ýaly, bu ýagdaýda amallaryň kesgitlemelerine daýanyp, funksiýadaky amallary yzygider ýerine ýetirmek bilen funksiýanyň degişli bahasy tapylýar. Indi funksiýanyň berlen çynlyk bahalary boýunça argumentleriň çynlyk bahalaryny tapmaklyk meselesine garalyň. Bu mesele logiki deňlemeleri ýa-da deňlemeler ulgamyny çözmeklik bilen baglanyşyklydyr. Bu meseläni iki usul boýunça çözýärler:

1) Logiki pikir ýöretme usuly;

2) Çynlyk tablisa gurmak usuly.
Indi mysallara garalyň.

1) $x \vee y = \bar{x}$ deňlemäni çözmeli. Bu deňlemäni iki usul bilen çözeliň.

1. Berlen deňlemede $\bar{x} \neq 0$, sebäbi eger $\bar{x} = 0$ bolsa, onda x=1 bolar. Bu bahalary deňlemede ornuna goýup alarys: $1 \vee$y=0 ýa-da 1=0. Bu bolup bilmez. Onda $\bar{x} = 1$ bolmaly. Bu bahany berlen deňlemede ornuna goýup $0 \vee$y=1 ýa-da y=1 bahany taparys. Şeýlelikde, berlen deňlemäniň çözüwi x=0 ; y=1 bolar.

2 $x \vee y = \bar{x}$ deňlemäniň çep we sag tarapyndaky formulalar üçin çynlyk tablisalary guralyň.

3

x	y	$x \vee y$	$\bar{x}$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Deňlemäniň çözüwi bolup deňligiň iki tarapyny şol bir wagtda çyna ýa-da ýalana öwürýän bahalar jübüti hyzmat edýär.Tablisadan görnüşi ýaly bu jübüt x=0 , y=1 bolar.

Ýene bir mysala garalyň.

2) x→y=$\bar{y}$ deňlemäni çözmeli.

<u>Çözülişi</u>

1. Goý $\bar{y} = 0$ bolsun.Onda y=1 bolar Bu bahalary berlen deňlemede ornuna goýup alarys:

$$x \to 1 = 0$$

Implikasiýanyň kesgitlemesi esasynda *x*-ň haýsy bahalary kabul edýändigine garamazdan soňky deňlemäniň çep tarapy çyndyr ýagny:

$$x \to 1 = 1$$

Onda 1=0. Bu bolup bilmez. Diýmek, $\bar{y}=1$ bolmaly. Onda y=0 bolar. Bu bahalary berlen deňlemede ornuna goýup alarys:

$$x \to 0 = 1$$

Bu deňlik *x*-ň diňe 0 bahasynda bolup biler. Şeýlelikde, $x \to y = \bar{y}$ deňlemäniň çözüwi $x=0$; y=0 bolar.

2. Berlen deňlemäniň çep we sag taraplaryndaky formulalar üçin çynlyk tablisalary guralyň:

x	y	$x \to y$	$\bar{y}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Bu çynlyk tablisadan görnüşi ýaly $x=0$; y=0 bahalarda $x \to y = \bar{y}$ deňlik dogry deňlige öwrülýär. Diýmek, ol bahalar garalýan deňlemäniň çözüwidir.

2.Logiki deňlemeler sistemasy.

Indi logiki deňlemeler ulgamlaryna garalyň.
Goý

$$\begin{cases} x \vee \bar{y} = 1 \\ (\bar{x} \to y) \wedge x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

deňlemeler ulgamy berlen bolsun. Bu ulgamy iki usul boýunça çözeliň.

1) Ulgamdaky deňlemeleriň her biriniň çözüwlerini tapalyň. Eger olaryň umumy çözüwleri bar bolsa, onda ulgamyň hem çözüwi bardyr. Ilki $x \vee \bar{y} = 1$ deňlemä garalyň. Belli bolşy ýaly, dizýunksiýanyň 1-e deň bolmagy üçin onuň agzalarynyň iň bolmanda biriniň 1-e deň bolmagy zerur we ýeterlikdir:

a) x =1 , $\bar{y} = 1$ ýa-da x=1 , y=0.

b) x =1 , $\bar{y} = 0$ ýa-da x =1 , y=1.

c) x =0 , $\bar{y} = 1$ ýa-da x =0 ,y=0.

Diýmek, $x \vee \bar{y} = 1$ deňlemäniň (1;0) , (1;1) , (0;0) üç sany çözüwi bar. Indi berlen ulgamyň ikinji $(\bar{x} \to y) \wedge x = 0$ deňlemesine garalyň. Konýünksiýanyň nula deň bolmagy üçin köpelijileriň iň bolmanda biriniň nula deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

a) x=0 , $\bar{x} \to y = 0$ ýa-da x=0 , y=0;

b) x=0 , $\bar{x} \to y = 1$ ýa-da x=0 , y=1;

c) x=1 , $\bar{x} \to y = 0$. Bu bolup bilmez.

Ýagny, $(\bar{x} \to y) \wedge x$ deňlemäniň (0;0), (0;1) iki sany çözüwi bar. (1) ulgamyň deňlemelriniň çözüwlerini deňeşdirip, olaryň x=0, y=0 umumy çözüwiniň bardygyny göreris. Ol hem (1) ulgamyň çözüwidir.

2) Deňlemeleriň çep tarapynda duran formulalar üçin çynlyk tablisalary guralyň.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \to y$	$x \vee \bar{y}$	$(\bar{x} \to y) \wedge x$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0

Tablişanyň 4-nji setirinden görnüşi ýaly, diňe *x*=0, y=0 bolanda birinji formula çyn, ikinji formula ýalandyr. Diýmek, *x*=0 , y=0 bahalar (1) ulgamyň cözüwidir.
Goỳ

$$\begin{cases} x \to \bar{y} = 0 \\ (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y = 1 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy berlen bolsun.Bu ulgamy iki usul bilen çözeliň.
1). $x \to \bar{y} = 0$ deňlemäniň çözüwlerini tapalyň.Implikasiỳanyň ỳalan bolmagy üçin $x = 1, \bar{y} = 0$ bolmaly, ỳa-da x=1, y=1. Diỳmek bu deňlemäniň diňe bir çözüwi bar:x=1, y=1.Indi ikinji deňlemäni çözeliň. Köpeltmek hasylyň çyn bolmagy üçin köpelijileriň ikisi hem bir wagtda çyn bolmalydyr.
$y = 1, \bar{x} \vee \bar{y} = 1$ ỳa-da
$y = 1, \bar{x} \vee 0 = 1 \Rightarrow y = 1, \bar{x} = 1 \Rightarrow y = 1, x = 0$.Bu deňlemäniň çözüwi x=0, y=1 bolar. Şeỳlelikde berlen sistemanyň deňlemeleriniň umumy çözüwleri ỳok, diỳmek sistemanyň hem çözüwi ỳokdur.
2).Deňlemeleriň çep tarapyndaky formulalar üçin çynlyk tablisalary guralyň.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \to y$	$x \vee \bar{y}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1

Tablisadan görnüşi ỳaly, argumentleriň bahalarynyň hiç hili toparynda deňlemeleriň ikisi hem bir wagtda kanagatlandyrylmaỳar. Diỳmek, bu sistemadaky deňlemeler kökdeş däldirler, ỳagny sistemanyň çözüwi ỳokdur.

§13. K – bahaly logikanyň funksiýalary.

1.Elementar funksiỳalar. Logiki amallar we olaryň umumylaşdyrmalary.

Tükeniklibahaly logikalar ikibahaly logikanyň umumlaşdyrmasy hökmünde girizilýärler. K-bahaly logikadan käbir maglumatlary getireliň.

Goỳ $U = \{u_1,...,u_m,...\}$ üỳtgeýänleriň alfawiti bolsun.

Argumentleri $E^k = \{0,1,...,k-1\}$ köplükde kesgitlenen

f(u_{i1},…,$u_{i\,n}$)funksiỳalara garaýarlar, şunlukda $\alpha_i \in E^k$

(i=1,…,n) ululyklar üçin $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \in E^k$.

Ỳönekeỳlik üçin U alfawitiň üỳtgeýänleri hökmünde *x,y,z,*…belgilemeleri ulanýarlar we $f(x_1,..x_n)$ funksiỳalara garaỳarlar. Bu funksiýalary tablisa görnüşinde aşakdaky ýaly berilỳär

x_1 . . . x_{n-1} x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 . . . 0 0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0 . . . 0 1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
--------------------------	--------------------------
0 . . . 0 k-1	$f(0, \ldots, 0, k\text{-}1)$
0 . . . 1 0	$f(0, \ldots, 1, 0)$
--------------------------	--------------------------
k-1 . . . k-1 k-1	$f(k\text{-}1, \ldots, k\text{-}1, k\text{-}1)$

Bir üỳgeỳän ululyga bagly funksiỳalar üçin tablisa bilen bir hatarda

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots k-1 \\ i_0 & i_1 & \ldots i_{k-1} \\ & & \end{pmatrix},$$

$$(S(\alpha) = i_\alpha), \quad \alpha = 0,1,\ldots,k-1$$

görnüşde umumylaşdyrylan ornuna goýmany hem ulanýarlar. 0,1,…,k-1 hemişelikleriň we k bahaly logikanyň hemme funksiýalarynyň köplügini P_k bilen belgiläliň. P_k köplügiň $x_1, \ldots x_n$ üỳtgeỳänlere bagly bolan hemme funksiýalarynyň sany k^{k^n} bolar. P_k köplügiň funksiỳalaryny tablisa görnüşde bermeklik n-niň artmagy bilen kynçylyklary döredỳär. Şol sebäpli funksiýalary algoritm görüşinde bermeklikden hem peýdalanýarlar. Mysal üçin: *max* $(x_1, \ldots, x_n)$ ululygy üýtgeýänleriň islendik $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bahalar toplumy üçin olaryň maksimumyny berýän algoritm hökmünde kabul etmek bolar. Bu algoritm P_k köplükde ỳeke-täk funksiýany kesgitleỳär, ol funksiýany hem şol simwol bilen belgileỳärler.

P_k köplükde hem edil P_2-däki ýaly ähmiýetli we ämiýetiz üytgýänler düşünjesini girizýärler. P_k-da "elementar" funksiýalar hökmünde aşakdaky funksiýalara garaýarlar.

1. $\bar{x} = x + 1$(mod k). Bu ỳerde $\bar{x}$ bahalaryň süýşmegi manysynda inkär etmäniň umumylaşdyrmasydyr.

2. $Nx=k-1-x$. Bu ỳerde Nx bahalaryň "şekilleỳin" öwürmesi manysynda inkär etmäniň başga bir umumylaşdyrmasydyr. Nx-belgilemä derek $\sim x$ belgilemäni hem ulanỳarlar.Bu funksiỳa **Lukaşewiç** inkär etmesi diỳilỳär.

3. $I_i(x)=\begin{cases} k-1, & x=i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$

i=$0,\ldots,k-1$

$i \neq k-1$ bolanda $I_i(x)$ funksiỳalar inkär etmäniň käbir häsiỳtleriniň umumylaşdyrmasydyrlar.

4. $J_i(x)=\begin{cases} 1, & x=i \\ 0, & x \neq i \end{cases}$ -bu funksiýa i bahanyň häsiýetlendiriji funksiýasydyr. i$\neq k-1$ bolanda bu funksiýa inkär etmäniň umumylaşdyrmasydyr.

5. min (x_1,x_2)-konýunksiỳanyň umumylaşdyrmasy.

6. x_1 x_2 (mod k)-konýunksiỳanyň başga bir umumylaşdyrmasy.

7. max (x_1,x_2)-dizýunksiỳanyň umumylaşdyrmasy.

8. x_1+x_2 (mod k)

Bu sanawdan görnüşi ýaly, P_2-däki funksiỳalaryň k-bahaly logikada birnäçe meňzeşlikleri bar. P_k-da fomula düşünjesi hem P_2-däki ỳaly kesgilenýär.

Deňgüỳçlilik düşünjesine daýanyp elementar funksiỳlaryň esasy häsiỳetlerini teswirlemek bolar. *min* (x_1,x_2), $x_1\, x_2 \,(mod\ k)$, $max(x_1,x_2)$, $x_1+x_2\ (mod\ k)$ funksiỳlary $(x_1\circ\ x_2)$ bilen belgiläliň. Onda aşakdaky tassyklamalary aýdyp bileris:

1. $(x_1\circ x_2)$ funksiýa orun çalşyrma kanunyna boýun egýär, ỳagny $(x_1\circ x_2)=(x_2\circ x_1)$.
2. $(x_1\circ x_2)$ utgaşdyrma kanunyna boýun egýär, ýagny $((x_1\circ x_2)\circ x_3)=(x_1(x_2\circ x_3))$

Indi elementar funksiýalar ulgamyna degişli käbir düzgünleri getireliň.

3. I simwoly formula “çuňlaşdyrma”düzgüni:

$$I_\sigma(c)=\begin{cases} k-1, & c=\sigma, \\ 0, & c\neq\sigma. \end{cases}$$

$$(\sigma, c=0,1,\ldots,k-1)$$

$$I_\sigma(I_\tau(x))=\begin{cases} I_0(x)\vee\ldots\vee I_{\tau-1}(x)\vee I_{\tau+1}(x)\vee\ldots\vee I_{k-1}(x), & \sigma=0, \\ 0, & 0<\sigma<k-1, \\ I_\tau(x), & \sigma=k-1. \end{cases}$$

$$I_\sigma(x_1x_2)=I_\sigma(x_1)\big(I_\sigma(x_2)\vee\ldots\vee I_{k-1}(x_2)\big)\vee I_\sigma(x_2)\big(I_0(x_1)\vee\ldots\vee I_{k-1}(x_1)\big)$$

$$I_\sigma(x_1\vee x_2)=I_\sigma(x_1)\big(I_0(x_2)\vee\ldots\vee I_\sigma(x_2)\big)\vee I_\sigma(x_2)\big(I_0(x_1)\vee\ldots\vee I_\sigma(x_1)\big).$$

4. Paýlaşdyrma häsiýeti:

$$\left(x_1 \vee x_2\right)\cdot x_3 = (x_1x_3) \vee (x_2x_3),$$
$$(x_1x_2) \vee x_3 = (x_1x_3) \vee (x_2x_3).$$

5. Üýtgeýänleriň “arassa” saklanmaklygyny ýok etmek düzgüni .

$$x = 1\cdot I_1(x) \vee \ldots \vee (k-1)I_{k-1}(x)$$

6. Üýtgeýäni girizmek düzgüni :

$$x_1 = x_1(I_0(x_2) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_2))$$

7. Ỳönkeýleşdirmeler düzgüni:

$$I_\sigma(x)I_\tau(x) = \begin{cases} I_\sigma(x), & \tau = \sigma, \\ 0, & \tau \neq \sigma. \end{cases}$$

$$\sigma\tau = \min(\sigma;\tau); \qquad \sigma \vee \tau = \max(\sigma;\tau),$$
$$(k-1)x = x; \qquad 0 \wedge x = 0,$$
$$(k-1)x = k-1, \qquad 0 \vee x = x$$

Bu düzgünlerden görnüşi ýaly bul funksiỳalarynyň birnäçe umumylaşdyrmalary üçin bul funksiýalarynyň degişli häsiýetleri ỳerine ỳetmeỳär.**Mysal üçin:**

1. *~(~x)=x* , emma $k \geq 3$ bolanda $\bar{\bar{x}} \neq x$.

2. ~ *min* *(x₁,x₂)=max(~x₁,~x₂)*, emma $\overline{\min(x_1, x_2)} \neq \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

K-bahaly logikada **KDNG**

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...\sigma_n)} (I_{\sigma_1}(x_1) \wedge ... \wedge I_{\sigma_n}(x_n)) \wedge f(\sigma_1,...,\sigma_n)$$

(1)

görnüşdedir. Bu görnüş göni barlag arkaly subut edilýär.

2. K – bahaly logikada doly ulgamlar.

1) P_k – doly ulgamdyr.

2) $B_1 = \{0,1,...,k-1, I_0(x),...,I_{k-1}(x), \min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)$

- doly ulgamdyr.

Subudy. Goý $f \in P_k$ erkin funksiýa bolsun. Bu funksiýa üçin

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...\sigma_n)} I_{\sigma_1}(x_1) \cdot ... \cdot I_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma_1,...,\sigma_n)$$

aňlatma (KDNG) adalatlydyr. Bu deňligiň sag tarapyndaky funksiýalar B ulgama degişlidirler

3) $B_2 = \{\bar{x}, \max(x_1,x_2)\}$ - ulgam doludyr.

Subudy.

a) Hemişelikleri gurmak. $\bar{x} = x+1$ funksiýadan *x*+2=(*x*+1)+1, *x*+3=(*x*+2)+1, ...

..., *x*+(k-1=*x*+(k-2)+1, *x*=*x*+k=(*x*+(k-1))+1 funksiýany alarys. Ýazyp bileris

max*x* (*x*, *x*+1, ..., *x*+k-1)=k-1

Bu ýerden $\bar{x}$ funksiýanyň kömegi bilen beýleki hemişelikleri hem alarys.

b) Bir argumente bagly funksiýany gurmak. Ilki $I_i(x)$ $\left(i = \overline{0, k-1}\right)$ funksiýalary alalyň.

Onda

$$I_i(x) = 1 + \max_{\alpha = k-1-i} \{x + \alpha\} \qquad (2)$$

bolar. Hakykatdan hem, eger x=i bolsa onda bu deňligiň çep tarapy (k-1)-e deň bolar. Sag tarapy hem

$$1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{i + \alpha\} = 1 + \max_{i+\alpha \neq k-1} \{i + \alpha\} = 1 + k - 2 = k - 1$$

bolar. Eger $x \neq i$ bolsa onda (2) deňligiň çep tarapy nula deň bolar. Sag tarapy hem

$$1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{x + \alpha\} = 1 + (x + (k-1) - x) = k = 0$$

bolar.

ç) min (x_1 , x_2) funksiýanyň alnyşy. Belli bolşy ýaly ~min (x_1 , x_2)=ma$x$(~x_1 , ~x_2) onda min (x_1 , x_2)= ~ma$x$(~x_1 , ~x_2) bolar. Şonuň üçin B_2 ulgam doludyr.

§14. Predikatlar logikasy.

Argumenti käbir M köplükde kesgitlenen çyn ýa-da ýalan bahalaryň birini Kabul edýän bir argumentli her bir funksiýa bir orunly predikat diýilýär we P(x) görnüşde ýazylýar. M köplüge P(x) predikatyň kesgitleniş ýaýlasy diýilýär.

Diňe çynlyk bahany kabul edýän predikatyň $I_p \subset M$ köplügine P(x) predikatyň çynlyk ýaýlasy diýilýär. Bu ýerde I_p predikatyň çynlyk bahalary.

Eger $I_p = M$ (ýa-da $I_p = \varnothing$) bolsa, onda P(x) predikata M köplükde toždestwolaýyn çyn (ýa-da toždestwolaýyn ýalan) predikat diýilýär.Edil şuňa meňzeşlikde n üýtgeýänli (n orunly) predikata kesgitleme berilýär.

Eger $I_Q \subset I_P$ bolsa, onda P(x) predikat Q(x) predikatyň netijesi bolar.

$Q(x) \rightarrow P(x)$.

Eger $I_Q = I_P$ bolsa, onda P(x) we Q(x) predikatlara deňgüýçli predikatlar diýilýär.

$Q(x) \Leftrightarrow P(x)$.

Mysallara seredeliñ.

Aşakdaky sözlemlerden predikaty saỳlamaly we bir orunly predikatlar üçin, şeỳle hem iki orunly predikatlat üçin çynlyk ỳaỳlany tapmaly.

1) 2x-1=5. Bü sözlem bir orunly predikatdyr, onuñ çynlyk ỳaỳlasy $I_P = \{3\}$.
2) $x^2 + 2x + 1 > 0$.Bu sözlem predikatdyr, onyñ çynlyk ỳaỳlasy $I_P = \{(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)\}$
3) x=3 bolanda $x^3 - 1 = 0$ sözlem predikat bolup bilmez, sebäbi bu ỳalan pikir aỳtmadyr.
4) Bir belgili 2-ä kratny bolan sanlar. Bu predikatdyr, onuñ çynlyk ỳaỳlasy $I_P = \{0,2,4,6,8\}$.
5) $x^2 + y^2 \geq 0$. Bu sözlem iki orunly predikatdyr. Onuñ çynlyk ỳaỳlasy $I_P = \{-\infty;+\infty\}$.

Mesele 2.Aşakdaky predikatlaryñ haỳsylary toždestwolaỳyn çyn predikatdyr.

1) $x^2 + y^2 \geq 0$.
2) $x^2 + y^2 > 0$
3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
4) $(x+1)^2 > x - 1$
5) $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$

Ỳokarda getirilen predikatlaryñ 1), 3), 4) görnüşleri toždestwolaỳyn çyn predikatlardyr. Galan 2) we 5) predikatlar toždestwolaỳyn çyn predikatlar däldirler. 2-nji mysalda x=0, y=0 bolanda deñsizlik ỳerine ỳetmeỳär, 5-nji mysal ähli položitel sanlar üçin ỳerine ỳetenok.

Predikatlar logikasynda piker aỳtmalar algebrasyndaky amallary ulanmak bolar.

Mysal üçin, A(x) we B(x) predikatlaryñ konỳunksiỳasy diỳip, ikisi hem 1 bahany alanda çyn bolỳan, galan ỳagdaỳlarda ỳalan bolỳan täze $A(x) \cap B(x)$ predikata aỳdylỳar.

$$I_{A \cap B} = I_A \cap I_B .$$

Edil şuña meñzeşlikde predikatlaryñ dizỳunksiỳasyna, gelip çykmasyna, inkär etmesine, deñgüỳçliligine kesgitleme bermek bolar.

Mesele 3.Goỳ, P(x) predikat natural sanlaryñ M köplüginde kesgitlenen jübüt sanlaryñ köplügi bolsun, Q(x) predikat bolsa N köplükde kesgitlenen 3-e kratny sanlaryñ köplügi bolsun.

$P(x) \cap Q(x);\ P(x) \cup Q(x);\ \overline{P(x)}; P(x) \rightarrow Q(x)$ predikatlary tapmaly.

$$I_P = \{2,4,6,...2n,...\};\ I_Q = \{3,6,9,...,3n,...\};\ I_{P \cap Q} = I_P \cap I_Q = \{6,12,18,...,6n,...$$

$$I_{P \cup Q} = I_P \cup I_Q = \{2,4,6,...,2n,...\} \cup \{3,6,9,...,3n,...\} = \{2,3,4,6,...,2n,3n,...;\}$$

$$I_P = N \setminus I_P = \{1,3,5,...,2n-1,...\};\ I_{P \rightarrow Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = \{1,3,5,...,2n-1,...\} \cup \{3,6,9$$

Mesele 4.

$M = M_1 \times M_2 \subset R \times R$ köplükde kesgitlenen A(x,y) we B(x,y) predikatlar berlen bolsun.
$A(x,y) \Leftrightarrow B(x,y)$ predikaty kesgitlemeli.

$$I_{A\Leftrightarrow B} = I_{A\to B} \cap I_{B\to A} = (I_{\bar{A}} \cup I_B) \cap (I_{\bar{B}} \cup I_A) = (I_A \cap I_B) \cup (I_{\bar{A}} \cap I_{\bar{B}}) .$$

§15. Graflar.

1. Graf düşünjesi. Baglanyşykly graflar.

Kesgitleme1. m=$\{a_1, a_2, \ldots\}$ köplük we onuň (a_{i_k}, a_{j_k}) obỳektler jübütleriniň n toplumy Г graf diỳlip atlandyrylỳar. m köplügiň obỳektlerine grafyň depeleri diỳilỳär, n toplumyň obýektlerine bolsa grafyň gapyrgalary diýilýär. (a_i, a_j) gapyrgalar a_i we a_j depeleri birikdirỳärler diỳilỳär.

Mysal Goý

m=$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, n=

$$\{(a_1,a_2),(a_2,a_2),(a_4,a_5),(a_5,a_5),(a_5,a_6),(a_6,a_7),(a_5,a_7)\}$$

bolsun .Onda m we n graf emele getirýärler.

Eger m köplük we n toplum tükenikli obýektlerden we jübütlerden ybarat bolsalar, onda Г grafa tükenikli diýilýär.

Goý a_i we a_j Г grafyň erkin depeleri bolsunlar.

Kesgitleme 2. Г grafyň

$$A_{a_i a_j} = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{j_3}), \ldots, (a_{i_{s-1}}, a_{j_s})\}.$$

gapyrgalar ulgamyna a_i we a_j depeleri birikdiýän ýol diýilýär.Soňky ulgamda

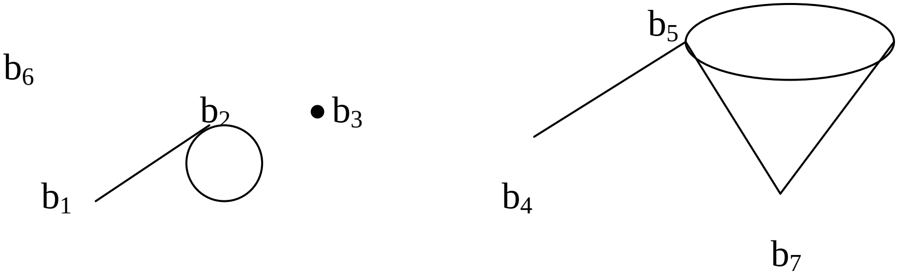
$a_{i_1} = a_i, a_{i_s} = a_j.$ $A_{a_i a_j}$ ýola degişli islendik gapyrga üçin bu ýol şol gapyrganyň üstünden geçýär diýilýär. Eger a depe $A_{a_i a_j}$ ýoluň gapyrgasyna degişli bolsa ,onda $A_{a_i a_j}$ ýol a depeden geçýär diýiýär.

Kesgitleme 3. Eger $a_i = a_j$. bolsa, onda $A_{a\,a_j}$ ýola dolanýan ýol (dolanma) diýilýär. Hususy halda (a_i, a_i) dolanma halka diýilýär.
Kesgitleme 4. Eger **Γ** grafyň islendik dürli iki a_i we a_j depeleri üçin bu depeleri birikdirýän ýol bar bolsa , onda Γ grafa baglanyşykly diýilýär.
Getirilen mysaldaky graf tükeniklidir, baglanyşyksyzdyr hem-de halkany saklaýandyr. Baglanyşykly graf üzňe depeleri saklaýan däldir, ýagny onuň her bir depesi onuň iň bolmanda bir gapyrgasyna degişlidir.
Grafyň aýdyň düşündirilişini bermek üçin Ýewklid giňişliginde kesgitli görnüşli figuralara garaýarlar. Her bir beýle G figura dürli $b_1, b_2, \ldots$ depelerden we her biri käbir (b_i, b_j)depeler jübütini birikdirýän egrilerden ybarat . G figuranyň hiç bir içki nokady başga bir egriniň depesi ýa-da içki nokady bolup bilmeýär diýip hasap edýäris.

2.Grafyň geometrik amala aşmasy. Grafyň Ýewklid giňişliginde amala aşmasy. Izomorf graflar.

Kesgitleme 5. Eger G figuranyň we Γ grafyň depeleriniň arasynda, şeýle hem G figuranyň egrileri bilen Γ grafyň gapyrgalarynyň arasynda $\left(b_{n_i}, b_{n_j}\right) \leftrightarrow \left(a_i, a_j\right)$ bolanda

$b_{n_i} \leftrightarrow a_i, b_{n_i} \leftrightarrow a_j$ bolan özara birbahaly degişlilik bar bolsa, onda G figura Γ grafyň geometrik amala aşmasy diýilýär.
Mysaldaky grafyň geometrik amala aşmasy aşakdaky ýalydyr:



“Islendik grafy Ýewklid giňişliginde amala aşyryp bolýarmyka?”-diýen sorag ýüze çykýar. Bu soraga jogap hökmünde aşakdaky teoremany getireliň.
Teorema. Her bir tükenikli Γ grafy üçölçegli Ýewklid giňişliginde amala aşyrmak bolar.

Subudy.

Goý Γ graf m depeden we h gapyrgadan ybarat bolsun. Käbir gönüni alalyň we onuň ustünden h tekizliklerden ybarat dessäni geçireliň. Gönide $b_1,\dots,b_m$ nokatlary alalyň we olary grafyň degişlilikde $a_1,\dots,a_m$ depelerine degişli edeliň. Γ grafyň her bir gapyrgasyna dessäniň tekizligini degişli edeliň. Γ grafyň (a_i, a_j) gapyrgasyna degişli bolan tekizlikde b_i we b_j depeleri töweregiň dugasy bilen birikdireliň. Γ grafyň hemme gapyrgalary üçin hem bu gurluşy ýerine ýetireliň. Şeýlelikde, Γ grafyň geometrik amala aşmasy bolan figurany alarys.

Teorema subut edildi.

<u>Kesgitleme 6.</u> Eger Γ we $\Gamma^{/}$ graflaryň depeleriniň we gapyrgalarynyň aralarynda degişli gapyrgalar degişli depeleri birikdirýän özara birbahaly degişlilik bar bolsa, onda Γ we $\Gamma^{/}$ graflara izomorf diýilýär.

Abstrakt graf we onuň geometrik amala aşmasy izomorfdyrlar.

Teorema 1 boýunça abstrakt tükenikli graflara derek olaryň amala aşmalaryna garamak bolar.

§16. Torlar we olaryň häsiýetleri.

Graf düşünjesini umumylaşdyralyň.

Kesgitleme. $M = \{a_1, a_2, ...\}$ köplüge we $N = \{E_{0,} E_1, E_2, ...\}$ topluma tor diýilýär we
$M = \{E_0, E_1, E_2, ...\}$ görnüşde belgilenýär.

Bu ýerde $E_i(i=0,1,2,…)$ M-köplügiň elementleriniň käbir toplumlary. $E_i = (a_{\nu_1(c)}, a_{\nu_2(c)}, ...)$ M-köplügiň obýektlerine torlaryň depeleri diýilýär.

E_0 – toplumyň obýektlerine bolsa torlaryň polýuslary diýilýär.

Mysal: Goý $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ deň $N = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ bolsun .

Bu ýerde $E_0 = \{1,2,6\},\ E_1 = \{1,3,3,4,5\},\ E_2 = \{4,4,4,5,6\}\ E_3 = E_4 = \{2,4\},\ E_5 = \{2,5,6,7\}.$

Onda bu köplükleriň obýektleri tor emele getirýär.Tor düşünjesine başgaça kesgitleme
hem bermek bolar.
Grafyň käbir depelerniň bölünen bölegine tor diýilýär.Şol depeleriň bölünen bölegine toryň polýuslary diýilýär.
Eger M-köplügiň obýektleri we N – toplumyň obýektleri tükenikli bolsalar ,onda ol köplükleriň obýektleriniň emele getiren toruna tükenikli tor diýilýär.
Biziň sereden mysalymyz tükenikli torlara degişlidir.Torlar iň bolmanda M-köplüge ýa-da N- köplüge görä tükeniksiz bolsa, onda oňa tükeniksiz tor diýilýär.Tükeniksiz tora hususy ýagdaýda hasaply tor diýilýär.
Graf düşunjesine meňzeşlikde tükenikli we hasaply torlar üçin olaryň geometrik amala aşmasy girizilýär.Onuň üçin belgileme girizeliň.Eger E toplum bolsa <E> belgileme E-köplüge degişli ähli obýektleriň köplugini aňladýar.
Goý $M(E_0, E_1, E_2, \ldots)$ bolsun. Bu tory 3 sany kesişmeýän böleklere böleliň.
1. $M_1 = <E_i>$ torlaryň polýuslarynyň köplügi.
$M_2 = M \setminus \bigcup_{i \geq 0} < E_i >$ polýuslardan tapawutly izolirlenen depeleriň köplügi.
M_3 galan beýleki depeleriň köplügi.
Dürli depelere dürli nokatlary degişli bolan 3 ölçegli ýewklid giňişliginde nokatlary saýlap alalyň.Ol nokatlary M-köplügiň a_i depeleri bilen belgiläliň onda $(a_{v,(i)}, a_{v2(i)} \ldots)$ toplum torlaryň polýuslary bolarlar.

§17.Diskret matematikanyň matematiki kibernetikada käbir ulanyşlary.

Goý $(x_1,\ldots,x_n)$ üýtgeýänleriň elipbiýi bolsun.

Kesgitleme. K= $x_i^{\alpha_1}, \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\alpha_r}$ $(i_i \# i_\mu, \ \nu \# \mu)$ aňlatma elementar konýunksiýa diýilýär.

Bu ýerde r sana elementar konýunksiýanyň rangy diýilýär.

Kesgitleme. M=$\underset{i=1}{\overset{s}{\vee}} K_i (k_i \neq k_j, i \neq j)$ aňlatma dizýunktiw normal görnüş diýilýär.

Bu ýerde $k_i(i=1\ldots S)$, r_i – rangly elementar konýunksiýalardyr.

Dizýunktiw normal görnüş $\forall$ $f(x_1,\ldots,x_n)$ bul funksiýasyny amala aşyrýar.

Biziň bilşimiz ýaly her bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiýa üçin dizýunktiw normal görnüş bardyr.Şeýle dizýunktiw normal görnüş hökmünde, mysal üçin $f(x_1,\ldots,x_n)$; f#0 funksiýa üçin f=M bolar ýaly kämil dizýunktiw normal görnüşi almak bolar.

$$M = \underset{(\delta_1,\ldots\delta_n)}{\vee} x^{\delta_1}, \wedge \ldots \wedge x_n^{\delta_n}$$

$$f(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1$$

Mysal. Çynlyk tablisalary bilen berlen $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiýa seredeliň.

X_1	X_2	X_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	X_1	X_2	X_3	$f(\alpha_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Bu çynlyk tablissa bilen berlen funksiýany aşakdaky ýaly kämil dizýunktiw normal görnüşde ýazalyň.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3)\nu(x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3)\nu(x_1\,\bar{x}_2\,x_3)\nu(x_1\,x_2\,\bar{x}_3)\nu(x_1\,x_2\,x_3)$$

Bu funksiýany aşakdaky ýaly dizýunktiw normal görnüşde ýazmak bolar.

$$f(x_1\,x_2\,x_3)=\quad \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \ \nu\ \ x_1$$

Biziň sereden mysalymyz logika algebrasynyň islendik bul funksiýasyny dizýunktiw normal görnüşde aňladyp bolýandygyny we şeýle görnüşinň ýeke – täk däldigini aňladýar.Şunuň bilen baglanşykda tapawutly amala aşyrmalary saýlanmaklyga mümkinçilik döreýär.

Munuň üçin dizýunktiw normal görnüşiň “çylşyrymlylygyny” häsiýetlendirýän L(M) funksional girizilýär.

L(M) funksional üçin ýerine ýetmeli käbir aksiýomalary talap edeliň.

1.Otrisatel däl aksioma.

Islendik dizýunktiw normal görnüş üçin $L(M)\geq 0$.

2.Monotonlyk aksiomasy.

Goý $M = M^{'} v x_i^{\delta_i} k^{'}$ bolsun, onda $L(M) L(M^{'} v K^{'})$

3.Güberçiklik aksiomasy.

Goý $M = M_1 v M_2$ bolsun we $M_1 M_2$ D.N.G-iň umumy kesişme nokady diýeliň, onda

$L(M) \geq L(M_1) + L(M_2)$.

4.Inwariýantlyk aksiomasy.

Goý $M^{'}$ D.N.G.-ş üýtgeýänleriň atlarynyň üýtgedilmegi bilen M D.N.G.-den alnan bolsun, onda L(M')=L(M).

($x_1, \ldots, x_n$) üýtgeýänleriň üstünde 3^n dürli görnüşli elementar konýuksiýalary gurmak bolar.

Bu ýerden görnüşi ýaly n üýtgeýänli D.N.G.-riň sany 2^{3^n} bolar.

K. f($x_1, \ldots x_n$) funksiýany amala aşyrýan we L(M) minumina eýe bolsun.D.N.G.-şe minomark diýilýär.L_s – indeksli minimuma eýe bolan D.N.G.-şe iň gysga D.N.G.-ş diýilýär.

Biziň sereden mysalymyzda $M = \bar{x}_2 \bar{x}_3 v x_1$ görnüş minimor

Hakykatdan-da D.N.G.-de amala aşýan f(x_1,x_2,x_3) funksiýa x_1,x_2,x_3 üýtgeýänlere baglydyr.Şonuň üçin D.N.G.-ş 3 harpdan kiçi bolup bilmez.

$M = \bar{x}_2 \bar{x}_3 v x_1$ - iň gysga D.N.G.-dir.Goý M- erkin D.N.G.-ş bolsun, we $M = M^{'} v K$, $M = M^{'} v x_1^{\delta_i} k^{'}$ bolsun.

Bu ýerde k-a M-den alnan käbir elemental konýusiýalar.M'- galan elemental kun-dan emele getirlen D.N.G.-ş.

$x_i^{\delta_i}$ - k-dan alnan käbir köpeldiji.

K' - galan köpeldijileriň köpeltmek hasyly.

D.N.G.-şiň öwürmeleriň 2 görnüşine seredeliň.

1. Elemental konýuksiýalary ýok etmek operatory.
2. Köpeldijileri ýok etmek operatory.

K. Ýokarda seredilen 1 we 2 öwürmeleriň kömegi bilen ýönekeýleşdirip bolmaýan D.N.G.-şe çyngysyz kyn D.N.G.-ş diýilýär.

Edebiỳat

1. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary,’’ Aşgabat,2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow.Gysgaça terjimehal. Aşgabat,2007.
3. ,,Halkyň ynam bildireni’’.Aşgabat,2007.
4. Gurbanguly Berdimuhammedow, ,,Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr’’. Aşgabat,2007.
5. ,,Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy.’’ Aşgabat,2007.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhybelentligiň ýurdy,’’Aşgabat,2007.
7. Gurbanguly Berdimuhamedow.Eserler ýygyndysy.Aşgabat,2007.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurdy täzeden galdyrmak baradaky syýasaty.Aşgabat,2007.
9. ,,Parahatçylyk, döredijilik,progress syýasatynyň dabaralanmagy.’’Aşgabat,2007.
10. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumymilli ,,Galkynyş’’ Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary v gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlislerinde sözlän sözi.
11. ,,Täze Galkynyş eýýamy. Wakalaryň senenamasy-2007 ýyl.’’Aşgabat, 2008.
12. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap.Saýlanan eserler. I tom.Aşgabat, 2008.
13. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap.Saýlanan eserler. II tom.Aşgabat, 2009.
14. Türkmenistanyň Prezidentiniň permanlary, kararlary we görkezmeleri, mejlisiniň maglumatlary, namalary. Aşgabat 1991-2009 ýyllar.
15. Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2003.

16. Ахмедов А. Дискрет математика. Ашгабат. Туран. 1992
17. Гаврилов Т.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной
математике . М., Наука, 1997
18. Глушков В.Н. Синтез цифровых автоматов . М. Физматгиз. 1992
19. Клини С. Математическая логика. М. Наука 1993
20. Мендельсон Е. Введение в математическую логику. М. Наука, 1994
21. Васильев Ю.Л. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М. Наука, 1994
22. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М. Наука. 1999
23. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М. Высшая школа 1996
24. Игошин В.И. Сборник задач – практикум по математической логике . М. Просвещение . 1996
25. Калужнин Л.А. Что такое математическая логика? М. Наука,
26. Кобринский Н.Е., Трахденброт Б.А.. Введение в теорию конечных автоматов . М. Наука 1992
27. Никольская И.Л.. Математическая логика. М. Высшая школа . 1991
28. Новиков П.С. Елементы математической логики. М. 1999
29. Пензов Ю.Е. Елементы математической логики и теории множеств.. Сар. ГУ. 1998
30. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М. Наука 1999

MAZMUNY

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN
DÖWLET UNIWERSITETI

Geldiýew Berdimyrat

Diskret matematika we matematiki logika

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat -2010