TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

Magtymguly adyndaky
TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

Baba Kömekow, Orazmämmet Annaorazow,
Hajymuhammet Geldiýew, Azatgeldi Öwezow

Ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistika

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat – 2010

B. Kömekow, O. Annaorazow, H. Geldiýew, A. Öwezow

Ähtimallyklar nazarýeti we matematiki statistika – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda ähtimallyklar nazarýeti we matematiki statistika dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

Giriş

Derňewleriň matematiki usullarynyň toplumy akyl ýetirişiň yl–my metodynyň wajyp bölegidir. Şeýle usullaryň arasynda ähtimallyklar nazaryýetiniň düzgünlerine esaslananlary özleriniň ähmiýetliligi boýun–ça aýratyn üns berilmegine mynasypdyrlar. Sebäbi birentek durmuşy meseleler, şeýle-de tebigy hem tehniki hadysalar özleriniň öwrenilme–ginde gurulýan matematiki modeller tötänliklere esaslanan ýagdaýlaryn-da derňelýän asyl ýagdaýy has-da hakykata ýakyn aňladýandyklary bi–len bellidirler. Şeýlelikde öwrenilen meseleler haçan-da anyk matemati–ki modeller gurmak bilen derňelen ýagdaýynda alynan netijeleriň şol bir şertler toplumynda garalýan ähli meňzeş ýagdaýlarda ulanylyp bilinme–gine mümkinçilik berýär. Ýöne kähalatlarda alynan netijelerden gelip çykýan çaklamalar şek-şübhesiz ynanmaga ikirjiňleme döredýän ýagdaýlaryň hem gabat gelýändigi bellidir. Çünki şeýle çaklamalaryň özleriniň matematikanyň dili bilen aňladylýan statistikanyň kanunlaryna bagly bolmaklary mümkindirler.

Matematikanyň dürli şahalarynyň ösüşleri, täze usullar, hasaplaýyş maşynlarynyň gerimli ulanylyşlary we başgalar matematika bilen dahylly hem öwrenilmegi örän kyn hasap edilen meseleleriň çözülmegine kuwwatly usullary berdi.

Aýdylanlardan şu günki günüň talaplaryny kanagatlandyrjak ukyply hünärmenleri taýýarlamak maksadyna matematikanyň, hususan ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy usullary öwredilen ýagdaýynda ýetilmeginiň mümkindigi gelip çykýar. Şunlukda, geljekki hünärmene mysal üçin, ykdysadyýetçä, ýa bolmasa inženere matematikany öwretmek köre-körlük bilen amala aşyrylman, ol ýa başga hünärdäki adama öz esasy işinde kömekçi, şol hünäri kämil ele almaga serişde bolar ýaly öwredilmelidir.

Şu gollanma hem köpsanly dürli hünärli adamlar üçin ähtimallyklar nazaryýetiniň zerur düşünjeleri öwredilende üns bermeli wezipeleri belläp geçmek, çalymdaş meseleler çözülende ulanylýan düzgünleri, formulalary hem-de käbir çözülişleriň ýerine ýetirilişini getirmek, öwrenýänleriň özlerini barlamagyna mümkinçilik döretmek üçin degişli ýumuşlaryň toplumyny bermek maksady bilen döredi. Şunlukda, köplenç ýagdaýda uniwersitetiň taýýarlaýan şu günki matematik bolmadyk hünärlilerinden fizikler, biologlar, psihologlar, geograflar, himikler bilen bilelikde ykdysadyýetçiler hem-de dürli tehniki hünärleri edinýänler göz öňünde tutulandygyna garamazdan, gollanmadan matematik talyplar hem-de ýokary we ýörite okuw mekdepleriniň, şeýle hem, orta mekdepleriň okuwçylary we mugallymlary ähtimallyklar nazaryýetiniň ulanylyşlaryna degişli bolan peýdaly usuly maslahatlary taparlar diýip tama edýäris.

Pikir ýöretmeleriň jedelsiz kabul edilmegine garaşylýan däldir we ediljek tekliplere hem-de belliklere ünsli seljerilmeler bilen çemeleşmäge taýýardygymyzy aýtmagy borjumyz hasap edýäris.

Birinji bölüm
Kombinatorikanyň ýönekeý düşünjeleri

Ylmy we amaly döredijiligimizde çözülişlerinde tükenikli san–daky elementlerden dürli kombinasiýalary düzmek hem–de olaryň sanyny hasaplamak zerur bolan meseleler ýygy–ýygydan duş gel–ýärler. Olar kombinatoriki meseleler diýlip atlandyrylyp, matema–tikanyň şeýle meseleleri öwrenýän şahasyna bolsa **kombinatorika** diýilýär. „Kombinatorika” sözi „birleşdirmek, utgaşdyrmak” diýilmegini aňladýan combinare diýen latyn sözünden gelip çykandyr. Kombinatorikanyň usullary fizikada, himiýada, biologiýada, ykdysadyýetde hem–de bilimleriň başga ugurlarynda giňden ulanylýarlar.

Käbir kombinatoriki meselelere garalyň.

Mysal 1. 1, 2, 3, 4 – ilkinji dört sany natural sanlardan, olaryň her birini bir gezekden köp ulanmazdan, düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny tapmaly.

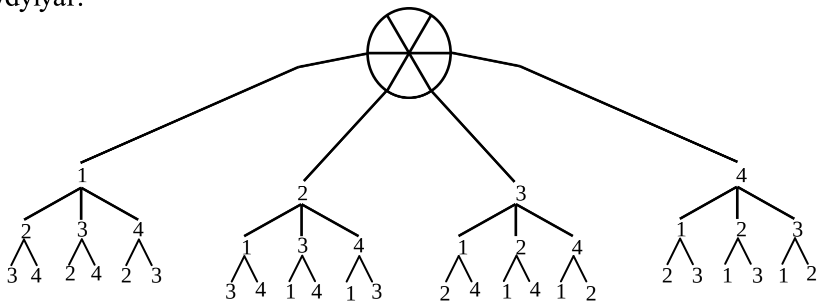
Çözülişi. Aýdylan üçbelgili sanlaryň ählisini ýazyp çykalyň. Goý birinji orunda 1 duran bolsun. Onda ikinji orunda galan 2,3,4 san–laryň islendiginiň ýazylmagy mümkindir. Mysal üçin, ikinji orun–da 2 ýazylan hasap edeliň. Onda üçünji orunda galan 3 we 4 san–laryň islendik biri ýazylar.Şeýlelikde, ýa 123, ýa–da 124 alynarlar. Eger–de ikinji orunda 3 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda ýa 2 ýa–da 4 ýazylar. Şoňa görä–de, bu ýagdaýda 132 ýa–da 134 sanlar alynarlar. Eger–de ikinji orunda 4 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda ýa 2, ýa–da 3 ýazylmagy mümkin bolup, bu ýagdaýda 142, ýa–da 143 sanlar alynarlar.

Diýmek ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň 1 bilen başlaýanlarynyň ählisi alty sany bolup, olar

123; 124; 132; 134; 142; 143 sanlardyr

Edil şuňa meňzeşlikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan, düzmek mümkin bolan sanlaryň 2, 3 we 4 bilen başlanýanlary hem alynýarlar.

Şeýlelikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan, düzmek mümkin bolan ähli üçbelgili sanlar:
123,124,132,134,142,143,
213,214,231,234,241,243,
312,314,321,324,341,342,
412,413,421,423,431,432,
Bu diýildigi 1,2,3,4 sanlardan, olary gaýtalap ulanmazdan, 24 sany üçbelgili sanlary düzmek mümkindir.
Bu sanlaryň saýlanyp tapylyşy aşakdaky suratda görkezilýän şekilde aňladylýar. Bu şekile adatça mümkin **wariantlaryň daragty** diýlip aýdylýar.



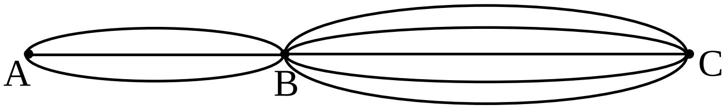
Getirlen şekilden hem görnüşi ýaly, ilkinji dört sany natural sanlardan, olary gaýtalamazdan, ýazmak mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny kesgitlemegi, olary ýokarda görkezilişi ýaly ýazyp oturmazdan, ýerne ýetirmek mümkindir. Hakykatdan hem, ol sanlaryň birinji orunda duran sanyny dört sany dürli usulda saýlamak mümkindir. Eger–de birinji orundaky san saýlanan bolsa, ikinji orundaky san deregine galan üç sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, üç sany dürli mümkinçiligiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda, üçünji orundaky san deregine birinji we ikinji orunlara alynan sanlardan galan iki sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, ony saýlap almagyň iki mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar.

Şeýlelikde, aýdylýan görnüşdäki üçbelgili sanlaryň ählisiniň sany 4·3·2 köpeltmek hasylyna, ýagny 24–e deňdir. Bizi gyzyklandyrýan sowalyň jogabyny tapmagyň bu usulyna kombinatorikada **köpeltmek düzgüni** diýlip aýdylýar. Bu düzgün umumy görnüşde, indiki ýaly aňladylýar: **Goý n sany elementlerden k sany elementleri yzly–yzyna saýlap almaly bolsun. Eger–de birinji elementiň n_1, ikinji elementi n_2, üçünji elementi n_3 we şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen k–njy elementi n_k sany dürli usullarda saýlap almak mümkin bolsa aýdylan k sany elementleri**

saýlap almak mümkinçilikleriniň sany $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$ köpeltmek hasylyna deňdir.

Mysal 2. A şäherden B şäher 3 sany , B şäherden C şähere 5 sany dürli ýollar bilen barmak mümkin bolsa, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen näçe sany dürli ýollar eltýärler?

Çözülişi. A şäherden B şähere eltýän ýoly üç sany usullar bilen saýlamak mümkin, B şäherden C şähere ýoly 5 sany dürli usulda saýlamak mümkin bolup, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen $3 \cdot 5 = 15$ sany usullarda barmak mümkindir.



Mysal 3. Ýurtda birinjilik üçin 16 sany futbol toparlary ýaryşa gatnaşýar. Altyn we kümüş medallaryň näçe sany dürli usullar bilen eýelenmekleri mümkin?

Çözülişi. Altyn medaly 16 komandanyň islendik biri alar.Altyn medalyň eýesi anyklanan soň, kümüş medaly galan 15 koman–danyň islendik biri alar. Şeýlelikde, altyn we kümüş medallaryň eýeleriniň ähli mümkin bolanlarynyň sany $16 \cdot 15 = 240$ bolar.

Mysal 4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlary ulanyp näçe sany 4 belgili sany düzmek mümkin, eger–de

a) sanlaryň hiç biri bir gezekden artyk gaýtalanmasa;

b) sanlaryň gaýtalanyp ulanylmaklary hem mümkin bolsa;

ç) düzülýän san täk bolmaly bolsa (sanlaryň gaýtalanmaklary hem mümkin)?

Çözülişi.

a) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$;

b) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$;

ç) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$;

Mysallar

1. Stadionda 12 sany girelge bar. Janköýeriň girelgeleriň birinden girip başga birinden çykmagynyň näçe sany dürli usullary bar?

2. Küşt ýaryşynda 12 adam gatnaşýar. Olaryň hersi galanlarynyň her biri bilen bir döw oýnaýarlar. Ähli bolup näçe döw oýnaýarlar?

3. Synpdaky bar bolan 25 sany okuwçylar özara suratlaryny çalyşmakçy bolýarlar. Munuň üçin näçe sany surat gerek bolar?

4. Ýurtda birinjilik üçin futbol ýaryşyna 12 sany toparlar gatnaşýar.Olaryň her biri galanlarynyň her biri bilen hem olaryň, hem özleriniň meýdanynda bir oýundan oýnaýarlar. Ýaryşda jemi näçe duşuşyk geçirler?
5. Tennisçileriň türgenleşigine 12 adam gatnaşýar. Olaryň birmeňzeş derejedäki türgenler bolandyklaryna görä, ýaryşa gatnaşmaly 3 adamy bije bilen saýlamagy şertleşýärler. Ähli mümkin bolan şeýle saýlap almaklaryň sanyny tapyň.

Çalşyrmalar

Elementleriniň sany tükenikli bolan köplügiň elementlerinden düzmek mümkin bolan ýönekeý kombinasiýalaryň biri hem çalşyrmadyr.

Eger–de üç sany okuwçy nyzama durmaly bolsa, olaryň dürli usullar bilen durmaklary mümkindir. Hakykatdan hem, okuwçy–lary a,b,c harplar bilen belgiläp, olaryň nyzamda a,b,c; a,c,b; b,a,c; b,c,a; c,a,b; c,b,a; görnüşlerde ýerleşip durmaklaryny alyp bileris. Getirlen hatara durmalaryň her biri üç sany elementden **çalşyrma** diýlip atlandyrylýar.

Kesgitleme. *n* sany elementleriň belli bir tertipde ýerleşip gelmekleriniň islendigine *n* sany elementlerden çalşyrma diýilýär.

Adatça, n elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sany P_n görnüşde belgilenýär hem–de „n–den P" diýlip okalýar.

Ýokardaky mysaldan görnüşi ýaly $P_3=6$. Ýöne ony tapmak üçin çalşyrmalary ýazyp oturmagyň hiç zerurlygy ýokdur. Çünki nyzamda birinji oruna üç sany okuwçynyň islendik biriniň alyn–magy mümkin bolup, birinji orunda durjak okuwçyny saýlamagyň üç sany mümkinçiligi, birinji orundaky okuwçynyň saýlanylan her bir ýagdaýynda, ikinji oruna galan iki okuwçynyň islendik biriniň alynmagy mümkin bolup, ol ikinji orundaky durjak okuwçyny saýlamagyň iki sany mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda ilkinji iki orunlarda durjak okuwçylar saýlanylan ýagdaýda üçünji orun üçin galan diňe bir okuwçynyň alynmagy mümkin bolup, ol üçünji orun üçin ýekeje saýlanylmak mümkin–çiliginiň bardygyny aňladýar. Şeýlelikde, üç sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sany, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä, $3{\cdot}2{\cdot}1=6$ köpeltmek hasylna deň bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde, n sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyny tapmagyň düzgünini hem almak mümkindir.

Goý n sany elementler berlen bolsun. Birinji orunda olaryň islendigini goýmak mümkindir. Birinji elementiň her bir alyn–masyna degişli ikinji orunyň elementi deregine beýleki (n–1) sany elementleriň islendigini almak mümkindir. Ilkinji iki elementleriň alynmalarynyň her biri üçin üçünji element deregine galan (n–2) sany elementleriň islendigini almak mümkindir we ş.m.

Şeýlelikde, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)...2 \cdot 1$$

bolýandygy alnar.

Ilkinji n sany natural sanlaryň köpeltmek hasylynyň

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... (n-2)(n-1)n$$

belgilemesinden peýdalanmak bilen

$$P_n = n!$$

ýaly ýazyp bileris.

Mysal1. 4 sany kitaby tekjede näçe sany dürli usul bilen goýup bolar?

Çözülişi. 4 sany kitaplary tekjede goýmagyň dürli usullarynyň sany 4 sany elementlerden düzmek mümkin bolan ähli çalşyrmalaryň sanyna deň, ýagny

$$P_4=4!=1·2·3·4=24$$

bolar.

Mysal 2. 5 sany okuwçyny bäş adamlyk oturgyçda näçe sany dürli usul bilen oturtmak bolar?

Çözülişi. 5 sany okuwçynyň bäş adamlyk oturgyçda dürli usulda ýerleşip oturmaklarynyň sany 5 sany elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyna deň, ýagny

$$P_5=5!=1·2·3·4·5=120$$

bolar.

Mysal 3. Arasynda 5 sany okuw kitaplary bolan 9 sany kitaplar bar bolsa, okuw kitaplaryny ýanaşyk ýerleşdirmek bilen bu kitaplary näçe sany dürli usullar bilen tekjä goýmak bolar?

Çözülişi. Ilki bilen ähli okuw kitaplaryny bitewilikde bir kitap ýaly gararys.

Onda tekjede dokuz däl–de bäş sany kitaplary ýerleşdirip goýmaklyk alynar. Belli bolşy ýaly bäş sany kitaplary $P_5=5!$ sany dürli usullar bilen ýerleşdirip goýmak mümkindir. Ýöne şeýle goýulmalaryň her birinde okuw kitaplaryny $P_5=5!$ sany dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Şeýlelikde, kitaplary aýdylan görnüşde tekjede goýmalaryň gözlenilýän sany $P_5·P_5=(5!)^2$ bolar. Diýmek, 5!=120 bolmak bilen, gözlenilýän san $(5!)^2=(120)^2=14400$ bolar.

Mysallar

1. 0, 1, 3, 5 sanlardan, sanlary gaýtalanmaýan, dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp boljakdygyny kesgitläň.

2. 0, 1, 3, 5 sanlardan, sanlary gaýtalanmaýan, jübüt dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp bolar?
3. Aman jaň etmekçi bolanda telefon belginiň soňky üç sany sanlarynyň 2,3,6 sanlardygyny, ýöne olaryň haýsy tertipde gelýändiklerni unudandygyny bilip galýar. Şol sanlaryň tertibini tötänden saýlap almakçy bolup, iň bir şowsuz synanşyklarynda näçe gezek synanyşmaly boljakdygy hakynda iňkise gidýär. Amanyň iň şowsuz ýagdaýda näçe gezek synanyşyk etmeli boljagyny tapyň.
4. 2, 3, 5, 6 sanlardan, olary bir gezekden artyk ulanmazdan, näçe sany
a) 5000–den uly; ç) 3000–den uly;
b) 5250–den uly d) 6000–den uly
sanlary ýazyp bolar?
5. 5 sany oglan we 5 sany gyz teatrda bir hataryň 1–10 orunlarny näçe sany dürli uslullar bilen eýelemekleri mümkin? Eger–de oglanlar şol orunlaryň täk, gyzlar bolsa olaryň jübüt belgili orunlarny eýelemeli bolsalar dürli usullaryň sany näçe bolar?
6. 30! sanyň 90–a bölünýändigini ýa–da bölünmeýändigini kesgitläň.
7. 14! san 136–a bölünýärmi ýa–da ýok?
8. 7!·6 we 6!·7 sanlaryň haýsy biriniň uludygyny kesgitläň.
9. (m+1)!·m we m!·(m+1) sanlaryň haýsy biriniň beýlekisinden uludygyny we näçe esse uludygyny kesgitlemeli.
10. 30! sanyň 96–a bölünýändigini ýa–da bölünmeýändigini kesgitläň.

Ýerleşdirmeler

Goý 4 sany şar hem–de 3 sany boş öýjük bar bolsun. Şarlary *a*, *b*, *c*, *d* harplar bilen belgiläliň. Berlen şarlardan üçüsini boş öýjüklere dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Eger–de *a* şary birinji öýjüge, *b* şary ikinji öýjüge, *c* şary bolsa üçünji öýjüge ýerleşdirsek şarlaryň tertipleşdirlen üçlükleriniň birini alarys:

a	*b*	*c*

Birinji, ikinji hem–de üçünji şarlary dürli saýlamak bilen şarlaryň dürli tertipleşdirlen üçlüklerini alarys
Mysal üçin

a	*c*	*b*

b	*a*	*c*

d	*c*	*b*

Dört sany elementleriň tertipleşdirlen üçlüginiň her birine dört sany elementlerden üç elementli **ýerleşdirme** diýip aýdylýar.

Kesgitleme. ***n sany elementlerden $k(k \le n)$ elementli ýerleşdirme diýlip, şol n elementlerden kesgitli tertipde alynan k sany elementleriň islendik köplügine aýdylýar.***

n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň sany, adatça, A_n^k görnüşinde belgilenýär hem–de „*A n*–den *k* boýunça” diýlip okalýar

Kesgitlemeden görnüşi ýaly n sany elementlerden k elementli iki sany ýerleşdirmeler ýa elementleri boýunça, ýa–da elementleriniň tertipleri bilen tapawutlanýan bolsalar, olar dürli ýerleşdirmeler hasap edilýärler.

Eger–de a,b,c,d–dört sany elementlerden ähli üç elementli ýerleşdirmeleri ýazyp çykmakçy bolsak bu elementleriň her birini yzygiderlikli ýagdaýda birinji orunda ýerleşdirmek bilen alarys:

abc, abd, acb, acd, adb, adc,
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb,

Şeýlelikde, $A_4^3 = 24$ bolýar. Munuň şeýledigini indiki ýaly pikir ýöredip hem alyp bileris: birinji element deregine berlen dört sany elementleriň islendigini almak mümkin bolup, ol dört sany usul bilen saýlanylyp biliner. Birinji elementiň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin ikinji element deregine beýleki üç elementiň islendik birini almak mümkindir. Bu diýildigi onuň üç sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini aňladýar. Şuňa meňzeşlikde ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýynda üçünji element ornuna galan iki elementleriň islendik birini almak mümkin bolup, ol üçünji elementi iki sany dürli usulda saýlap bolýandygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä taparys:

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Edil şuňa meňzeşlikde n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň $(k \le n \ \ bolanda)$ sanyny hem tapmak mümkindir. Şeýle ýerleşdirmede birinji element n sany dürli usulda saýlanylyp biliner. Ol saýlanylandan soň, ikinji element deregine galan (n–1) sany elementleriň islendiginiň alynmagy mümkin bolup, şol elementiň (n–1) sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini alarys. Soňra ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin üçünji element deregine galan (n–2) elementleriň islendigini almak mümkin bolup, şol elementiň (n–2) sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinjekdigi alynar. Şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen ahyrsoňunda k–njy element deregine ilkinji (k–1) sany elementler deregine saýlanylanlardan galan n–(k–1) sany elementleriň islendiginiň alynmagynyň mümkindigini, şoňa görä–de ol elementiň n–(k–1) sany dürli usulda saýlanylmak mümkinçiliginiň bardygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgüninden

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

bolýandygy alynar. Bu formuladan görnüşi ýaly A_n^k –nyň, ýagny *n* sany elementlerden *k* elementli ýerleşdirmeleriň sanynyň iň ulusy *n* bolan *k* sany yzygiderli natural sanlaryň köpeltmek hasylna deňdigini alarys.

Hususan,

$$A_n^{n-1} = n(n-1)(n-2)...(n-(n-1)) = n\cdot(n-1)(n-2)...1 =$$
$$= 1\cdot 2...\cdot(n-2)(n-1)\cdot n = n!$$

bolýandygyny alarys. Hakykatdan hem, n sany elementlerden n elementli ýerleşdirmeler biri–birinden diňe elementleriň tertipleri bilen tapawutlanýarlar, şoňa görä–de olar n sany elementlerden çalşyrmalar bolup

$$A_n^n = P_n = n!$$

bolýandyklary alynar.

Mysal 1. 25 sany ýygnaga gatnaşyjylaryň arasyndan ýygnagyň başlygyny hem–de kätibini näçe sany usul bilen saýlap bolar ?

Çözülişi. Ýygnagyň başlygy deregine 25 sany gatnaşyjylaryň islendik biriniň saýlanylmagy mümkin bolup, ol 25 sany dürli usullar bilen saýlanylyp biliner. Eger–de başlyk saýlanylan bolsa, onda kätip deregine galan 24 adamyň islendiginiň saýlanylmagy mümkindir. Bu diýildigi kätibiň 24 sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinýändigini aňladýar. Şeýlelikde, biz 25 sany elementlerden 2 elementli ýerleşdirmeler sanyny alarys:

$$A_{25}^2 = 25\cdot 24 = 600\,.$$

Mysal 2. Tekizligiň bäş sany nokatlaryny latyn harplarynda belgilemekçi bolup, olary näçe sany dürli usullar bilen ýerne ýetirmek mümkin diýip oýlanýarlar. Eger–de latyn elipbiýi 26 sany harplardan durýan bolsa, şol belgilemeleriň näçe sany dürli mümkinçilikleri bardyr?

Çözülişi. Tekizligiň bäş sany nokatlarynyň belgilemeleri biri–birinden ýa belgilemede ulanylan harplar bilen , ýa–da şol bir harplarda olaryň belgilenilen nokatlary bilen tapawutlanýandyrlar. Şeýlelikde belgilemeleriň dürli mümkinçilikleriniň sanynyň 26 sany elementlerden 5 elementli ýerleşdirmeleriň sany bilen gabat gelmelidigini, ýagny

$$A_{26}^{5} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 8923200$$

bolýandygyny alarys.

Mysallar

1. Eger–de 100 m aralyga 10 sany ylgaýjy ýaryşýan bolsa, birinji, ikinji hem–de üçünji orunlaryň eýelenmeklerniň dürli mümkinçiliklerniň sany näçe bolar?
2. Aman, Berdi, Gurban üçüsi konsert diňlemäge gelenlerinde dört sany boş orun galan eken. Olaryň näçe sany dürli usullar bilen oturmaklary mümkin?
3. 5 sany okuwçynyň synp otagyndaky 15 sany kompýuteri näçe sany dürli usullarda eýelemekleri mümkin?
4. Konkursa gatnaşyjy 20 sany aýdymçylaryň birinji, ikinji we üçünji bolup çykyş etjeklerini näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?
5. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sanlardan olaryň hiç birini hem bir gezekden artyk ulanman dört belgili sanlaryň näçesini ýazyp bolar?

Utgaşdyrmalar

Dükanda galan dürli reňkli 5 sany çişirlen şarlardan Aman üçüsini bilelikde baglap baýramçylyk gezelenjine çykmakçy bolýar. Onuň şeýle şarlar üçlügini näçe sany dürli usullarda saýlap almak mümkinçiliginiň bardygyny öwreneliň. Şol şarlary a,b,c,d,e harplar bilen belgiläliň.

Şarlar üçlüginde a şar bar bolan halatynda indiki şarlar üçlükleriniň alynmaklary mümkin:

$$abc, abd, abe, acd, ace, ade$$

Eger–de şarlar üçlüginde a şar bolman b şar bar bolsa

$$bcd, bce, bde$$

üçlükleri alynarlar.

Eger–de Amanyň saýlan şarlarynyň arasynda a şar hem, b şar hem ýok bolsalar, onda

$$cde$$

şarlardan durýan ýekeje üçlük saýlanan bolar.

Şeýlelikde, biz 5 sany dürli reňkli şarlardan üçüsini saýlap almagyň ähli bolup biläýjek mümkinçiliklerini görkezdik. Bu diýildigi, 5 sany dürli reňkli şarlardan 3–sini näçe sany dürli mümkinçilikler bilen **utgaşdyryp** alyp boljakdygyny kesgitledik.

Kesgitleme. Berlen *n* sany elementleriň köplüginden alnan *k* sany elementleriň islendik köplügi *n* sany elementlerden *k* elementli utgaşdyrma diýlip aýdylýar.

Utgaşdyrmalarda, ýerleşdirmelerden tapawutlylykda, elementleriň ýerleşiş tertibi ähmiýete eýe däldir, ýagny *n* sany elementlerden iki sany *k* elementli utgaşdyrmalar biri–birinden hiç bolmanda bir elementi bilen tapawutlanýarlar.

n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalaryň sany C_n^k görnüşinde belgilenýär hem–de „C *n*–den *k* boýunça" diýlip okalýar.

$k \le n$ bolanda n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalar sanyny hasaplamagyň düzgünini öwreneliň.

Ýokarda getirlen mysalda $C_5^3 = 10$ bolupdy. C_5^3 sanyň A_5^3 hem–de P_3 sanlar bilen arabaglanşygyny tapalyň.

Şol mysalda 5 sany a,b,c,d,e elementlerden üç elementli *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde* utgaşdyrmalar alnypdy. Her bir utgaşdyrmada ähli mümkin bolan çalşyrmalary ýerne ýetireliň . Ol utgaşdyrmalaryň her birinde alnyp bilinjek çalşyrmalaryň sany

$$P_3 = 3! = 6$$

bolar. Ol çalşyrmalar netijesinde 5 sany elementlerden 3 elementli ýerleşdirmeleriň ählisi alynar. Şol ýerleşdirmeleriň sany A_5^3 bolup, olar biri–birinden ýa elementlerniň tertibi, ýa–da hiç bolmanda bir elementli bilen tapawutlanýandyrlar.

Diýmek,

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$$

deňlik alnyp, şoňa görä

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}$$

bolýandygy tapylar.

Umumy ýagdaýda hem ýokardaky ýaly hereket ederis. Goý *n* sany elementleri bolan köplügiň elementlerinden *k* elementli ähli utgaşdyrmalar alynan bolsun. Şeýle utgaşdyrmalar sanyny C_n^k görnüşinde belgiläpdik. Her bir utgaşdyrmada P_k sany çalşyrma alnyp bilner. Bu çalşyrmalar netijesinde *n* elementlerden *k* elementli ýerleşdirmeleriň ähliisi alnyp, olaryň sany A_n^k .

Şeýlelikde

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k \ ,$$

ýa–da başgaça

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

bolýandygy alynar. Bu deňligiň sag tarapynda sanawjynyň hem–de maýdalawjynyň ornuna olaryň aňlatmalaryny goýmak bilen

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot k}$$

formula eýe bolarys. Eger–de soňky deňligiň sag tarapynda drobuň sanawjysyny hem, maýdalawjysyny hem $n \neq k$ hasap etmek bilen $(n-k)!$ köpeltmek hasylna köpeltsek, her bir k üçin

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

bolýandygyny taparys.

Eger–de kesgitlemä görä, 0!=1 diýip hasap etsek, onda

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

formula n=k bolan ýagdaýynda hem ulanylyp biliner:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1$$

Mysal 1. Matematikadan okuwçylaryň etrap olimpiadasyny geçirmeklige çagyrlan 20 sany mekdep mugallymlaryndan 5–isini saýlap almakçy boldular. Olary näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

Çözülişi. Her bir saýlanan düzüm başgasyndan hiç bolmanda bir mugallym bilen tapawutlanmalydyr. Onda biz 20 sany elementlerden 5 elementli utgaşdyrmalary almak meselesine eýe bolarys, olaryň sany bolsa

$$C_{20}^5 = \frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 16\cdot 17\cdot 3\cdot 19 = 15504$$

bolar.

Diýmek, 20 sany çagyrlan mugallymlardan 5 sanysyny 15504 sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin.

Mysal 2. Tekjede goýulan 12 sany „Algebra” hem–de 8 sany „Geometriýa” kitaplaryndan 5 sany „Algebra” we 3 sany „Geometriýa” kitaplaryny almaly bolsa, olary näçe sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkin?

Çözülişi. 5 sany „Algebra" kitaplaryny bar bolan 12 sany „Algebra" kitaplarynyň arasyndan C_{12}^{5} sany düri usullar bilen, 3 sany „Geometriýa" kitaplarny bolsa 8 sany şeýle kitaplaryň arasyndan C_{8}^{3} sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkindir. „Algebra" kitaplarynyň her bir saýlamasyna „Geometriýa" kitaplarynyň C_{8}^{3} sany saýlamalarynyň islendigi degişli bolup biler. Şoňa görä–de mysalda aýdylan kitaplar $C_{12}^{5}\cdot C_{8}^{3}$ sany usullar bilen alynmaklary mümkindir.

$$C_{12}^{5}\cdot C_{8}^{3}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=8\cdot 9\cdot 11\cdot 7\cdot 8=44352$$

bolýandygyna görä, kitaplaryň aýdylan görnüşdäki saýlanylmaklarynyň mümkinçiliklerniň sany 44352 bolar.

Mysallar

1. Synpda 18 sany oglan hem–de 8 sany gyz bolanlarynda timarlaýyş işine 5 oglan we 3 gyzy näçe sany usul bilen saýlap almak mümkin?

2. Syýahata çykan 14 adamdan düşelgede galmaly iki sany nobatçylary näçe usulda saýlamak mümkin?

3. Tekjede duran 12 kitabyň biri rusça–türkmençe sözlük, galanlary bolsa rus dilindäki çeper eserler. Eger–de okyja

a) sözlük zerur bolanda

b) sözlük derkar däl bolanda

näçe sany usulda 4 sany kitaplary saýlap almak mümkinçiligi bar?

4. Mekdep bagyna serenjam bermek üçin 12 sany okuwçy kömege geldi. Olaryň 3–isini baglaryň düýbüni ýumşatmaga, galanlarynyň 4–isini gülleri tertibe getirmäge ulanmaly. Olary näçe sany usulda saýlamak mümkin?

5. Kitaphana täze gelen 10 kitapdan 6 sanysyny näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

Ikinji bölüm
Tötän wakalar
I bap. Ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleri
§1. Ähtimallygyň kesgitlemeleri

Bu bapda synaglar hem-de wakalar, wakalaryň görnüşleri, wakanyň ähtimallygyny kesgitlemegiň klassyky, statistiki hem–de geometriki usullaryna, otnositel ýygylyk düşünjelerine seredilýär. Şunlukda waka

düşünjesiniň synag netijesi görnüşinde kesgitlenýändigine ünsi çekmek gerek. Ähtimallyk klassyky kesgitlenende $P(A)=\frac{m}{n}$ deňlik bilen hasaplanylyp, $m-A$ wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän, n bolsa synagyň ähli elementar netijeleriniň sanydyr. Şunlukda agzalan usulyň ulanylyp bilinmegi üçin synagyň elementar netijeleriniň sanynyň tükenikli bolup, birmeňzeş mümkinçilikli we doly topary emele getirmelidiklerini bellemelidir. Şeýle hem bu kesgitlemäniň ulanylyp bilinmeýän ýagdaýlaryny hem nygtamalydyr we çykalgany agzap geçmelidir. Şunlukda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini synagyň elementar netijeleriniň sanynyň tükenikli bolan ýagdaýynda ulanylyp bilinýändigini nazara almak bilen onuň ulanylyş örüsiniň çäklidigine üns bermek zerurdyr. Şeýle hem, synagyň elementar netijeleriniň deňmümkinçilidiklerini tassyklamak hem bu usulyň iň bir agyr taraplarynyň biri hökmünde görkezilmelidir. Çünki bu talap käbir meselelerde, mysal üçin, oýnalýan kuby oklamak bilen baglanyşykly meselelerde kubuň dogry şekillidigini hem–de onuň ýasalan serişdesiniň birjynslydygyny talap etmek bilen, aňsat kanagatlandyrylýan bolandygyna garamazdan, örän köp meselelerde ol talabyň ýerine ýetmegini üpjün edýän şertleri kesgitlemek örän kyndyr. Şoňa görä–de ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi bilen birlikde onuň beýleki kesgitlemelerinden hem peýdalanýarlar. Wakanyň otnositel
ýygylygy bolsa

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

formula bilen hasaplanyp, n-ähli geçirilen synaglaryň, m bolsa olaryň arasynda A wakanyň ýüze çykanlarynyň sanydyr.

Wakanyň ähtimallygynyň statistiki kesgitlemesinde onuň deregine otnositel ýygylygy ýa–da oňa ýakyn san alynýar.

Ýöne ähtimallygyň statistiki kesgitlemesi hakynda diňe

1) Her birinde A wakanyň ýüze çykmagy ýa–da çykmazlygy mümkin bolan synaglaryň islendik sanyny geçirip bolýan;

2) Köp sanly synaglaryň her bir tapgyrynda A wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygy durnukly bolan ýagdaýlarda gürrüň etmek mümkindir.

Ähtimallygyň statistiki kesgitlemesiniň esasy kemçiligi onuň ýeke–täk tapylmaýanlygydyr. Getirilen formulalardaky m, n harplaryň olaryň her birinde bütinleý başga zatlary aňladýandyklaryny bellemelidir.

Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesiniň ulanylyp bilinmeýän, netijeleriniň sany tükeniksiz köp bolan synaglar bilen baglanyşykly meselelerde wakanyň ähtimallygyny hasaplamagyň geometriki usuly ulanylýar.

Goý l kesim käbir L kesimiň bölegi bolsun. L kesime nokat tötän oklanýan bolsun. Şunlukda oklanýän nokat L kesimiň islendik nokadyna düşüp bilýär, nokadyň l kesime düşmeginiň ähtimallygy bu kesimiň uzynlygyna proporsional, ýöne onuň L kesimiň niresinde ýerleşendigine bagly däldir. Şu talaplarda nokadyň l kesime düşmeginiň ähtimallygy

$$P = \frac{l - in\ uzynlygy}{L - in\ uzynlygy}$$

ýaly tapylýar.

Umumy ýagdaýda tötän oklanan nokadyň G oblastyň g bölegine düşmeginiň ähtimallygy

$$P = \frac{m(g)}{m(G)}$$

deňlige görä hasaplanýar. Bu ýerde m bilen ölçeg belgilenendir.

Şunlukda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinde hökmany wakanyň ähtimallygynyň bire, mümkin däl wakanyň ähtimallygynyň bolsa, nola deň bolýandyklaryny, şeýle hem, ters tassyklamalaryň-da adalatlydyklaryny bellemek bilen, tötän oklanan nokadyň G oblastyň belli bir nokadyna düşmeginiň ähtimallygynyň, geometriki kesgitlemeden, nola deňdigine garamazdan, ol wakanyň mümkin däldigi hakynda netije çykaryp bolmaýandygyna üns berilmelidir.

Mysallar

1. Nyşana ok atylanda ýüze çykmagy mümkin wakalar: “nyşanany urmak” hem-de “nyşana degmezlik” bolup biler. Şunlukda nyşana we oňa ok atmak şertler toplumy bolup hyzmat edýär.

2. Şaýylyk oklananda “ýüz” ýa-da “arka” taraplarynyň düşmegi wakalardyr. Şaýylygyň oklanmagy bolsa şertler toplumy.

3. Abonent telefon nomeriniň bir sifrini ýatdan çykarandygyny bilse–de ony çen bilen aýlaýar. Ýatdan çykan sifriň dogry saýlanan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly. Bu ýerde synag bolup sifri saýlamak hyzmat edýär. Onuň 10 sany dürli usul bilen saýlanylyp bilinýänliginden ähli elementar netijeleriň sanynyň 10 we olaryň doly topary emele getirýändikleri düşnüklidir. Ýöne gyzyklandyrýan wakanyň ýüze çykmagyna ol netijeleriň diňe biri (ýatdan çykan sifr saýlananda) ýardam berýär.

4. Tehniki barlag bölümi taýýar önümler üýşmeginden tötänden alynan 90 sanysynyň arasynda 3 sany kemislisiniň bardygyny bilipdir. Kemisli önümiň duşmagynyň otnositel ýygylygy $W(A)=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$ ýaly kesgitlener.

5. Tekizlikde radiuslary 3 sm we 10 sm bolan konsentrik töwerekler çyzylypdyr. Uly tegele tötän oklanan nokadyň:

a) kiçi tegelege;

b) çyzylan towerekleriň emele getiren halkasyna

düşmeginiň ähtimallyklaryny tapmaly bolsa:

a) $m(g)=3^2\pi\, sm^2=9\pi\, sm^2,\ m(G)=10^2\pi\, sm^2=100\pi\, sm^2$ bolup,

gözlenilýän ähtimallyk $p=0{,}09$;

b) $m(g)=100\pi\, sm^2-9\pi\, sm^2=91\pi\, sm^2,\ m(G)=100\pi\, sm^2$ bolup,

gözlenilýän ähtimallyk $p=0{,}91$.

Ýumuşlar

1. Gutyda bar bolan 100 sany galamlaryň 13–si gara; 17–si gyzyl; 20–si gök; galanlary bolsa ýaşyl reňkli bolanda ondan tötänden alynan galamyň ýaşyl reňkli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

2. Oýnalýan kubjagaz oklananda 3–e bölünýän oçkonyň düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

3. 6 sany dürli kitaplar tötänden tekjede ýerleşdirilipdir. Olaryň arasyndaky käbir iki sany kitabyň ýanaşyk goýulan bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

4. Tüpeňden nyşana atylanda okuň nyşana degmeginiň otnositel ýygylygy 0,6 bolup, ähli atylan oklaryň sanynyň 100 sanydygy belli bolsa, näçe okuň nyşana degendigini tapmaly.

5. Şaýylyk 2 gezek yzly-yzyna oklananda hiç bolmanda bir gezek “arka” tarapynyň düşmeginiň ähtimallygyny hasaplaň.

6. Gutyda 6 sany birmeňzeş kubjagazlar bar. Kubjagazlaryň her biriniň ähli granlarynda A,K,M,T,Ü,Ş harplaryň biri ýazylan .Yzly–yzyna bir–birden tötänden alnyp, hatara goýlan, 4 sany kubjagazlarda KÜŞT sözüni okap bolmagynyň ähtimallygyny hasaplaň.

7. Ähli granlary reňklenen kub birmeňzeş ölçegli müň sany kubjagazlara böleklenen we olar kemsiz garyşdyrylan.Olaryň arasyndan tötän alnan kubjagazyň hiç bir granynyň hem reňlenen bolmazlygynyň ähtimallygyny tapyň.

8.Gulpda umumy okda bäş sany disk bolup, olaryň her biri, hersinde bir harp ýazylan, bäş sany sektorlara bölünen. Her bir disk gulpa görä käbir sektory bilen gabat gelýän belli bir ýagdaýda ýerleşende gulp açylýar. Diskleriň tötänden ýerleşdirilen bir ýagdaýynda gulpyň açylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

9. Depeleri(0,0),(0,1),(1,0),(1,1) bolan kwadrata tötänden M(α, β) nokat oklanýar. Nokadyň kwadratda tutuşlygyna saklanýan islendik oblasta düşmekliginiň ähtimallygy diňe onuň meýdanyna bagly bolup, oňa proporsionaldyr diýip hasap edip, islendik $0 \le x,\ y \le 1$ ululyklar üçin $P\{\alpha < x;\ \beta < y\}$ähtimallygy tapyň

10. *Ox* sanlar okunyň uzunlygy *L* bolan *OA* kesimine tötänden *B*(*x*) nokat goýulýar. *OB* we *BA* kesimleriň kiçisiniň uzynlygynyň $\frac{1}{3}L$ –den uly bolmaklygynyň ähtimallygyny tapmaly. Şunlukda nokadyň kesime düşmekliginiň ähtimallygy onuň uzynlygyna proporsional bolup, kesimiň sanlar okunda ýerleşişine bagly däl diýlip hasap edilýär.

11. Iki sany dost 12^{00} we 13^{00} aralygynda bir ýerde duşuşmaklygy gepleşipdirler. Ol gepleşige görä öň gelen beýlekä 20 minut garaşyp, şol wagt dowamynda ol gelmese, gitmeli eken. Dostlaryň her biri görkezilen wagt aralygynda geljek wagtyny tötänden saýlaýan ýagdaýynda olaryň duşuşyp bilmekleriniň ähtimallygyny tapyň. (Bu mesele **duşuşyk meselesi** ady bilen bellidir).

12. Tekizlikde biri – birinden 2 *a* aralykda bolan parallel çyzyklar bilen çyzylyp çykylan. Tekizlige radiusy *r*<*a* bolan şaýlyk tötänden oklanýar. Şaýlygyň parallel çyzyklaryň hiç birini hem kesmezliginiň ähtimallygyny tapyň.

II bap. Ähtimallygy hasaplamagyň käbir düzgünleri

§2. Esasy teoremalar

1. Sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň teoremasy.

Iki sany sygyşmaýan wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Netije. Birnäçe sany jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_1).$$

2. Sygyşýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň teoremasy.

Iki sany sygyşýan wakalaryň hiç bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň jeminden birlikde ýüze çykmaklarynyň ähtimallygynyň aýrylmagyna deňdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Bu tassyklama islendik tükenikli sandaky wakalar üçin hem dogrudyr.

3. Baglanyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmegiň teoremasy.

Iki sany baglanyşyksyz wakalaryň birlikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Netije. Toplumy bilen baglanyşyksyz wakalaryň birnäçesiniň birlikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(A_1\cdot A_2 ... A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)...P(A_n).$$

4. Baglanyşykly wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmegiň teoremasy.

Iki sany baglanyşykly wakalaryň kesgitlemesinden, olaryň islendik biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň beýlekisiniň ýüze çykandygyna ýa–da çykmandygyna baglydygy alynýar. Şoňa görä–de $P_B(A)$ şertli ähtimallyk diýip A wakanyň, B waka ýüze çykanlygynda hasaplanylýan, ähtimallygyna aýdylýar. Ony hasaplamaga $P(B)>0$ bolanda

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

düzgün adalatlydyr.

Iki sany baglanyşykly wakalaryň birlikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekisiniň birinjisi ýüze çykanlygynda hasaplanylýan şertli ähtimallygyna köpeltmek hasylyna deňdir:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Netije. Birnäçe wakalaryň birlikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy olaryň biriniň ähtimallygynyň galanlarynyň şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylyna deňdir. Şunlukda soňky her bir wakanyň ähtimallygy ondan öňdäkileriň ýuze çykanlygy şertde hasaplanýandyr:

$$P(A_1\cdot A_2 ... A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n),$$

bu ýerde $P_{A_1 A_2 ... A_{k-1}}(A_k)$ – A_k wakanyň $A_1 \cdot A_2 ... A_{k-1}$ wakalaryň ýüze çykanlygy şertdäki ähtimallygy.

Mysallar

1. Gutyda bar bolan 10 sany detallaryň 4-si reňklenen. Ýygnaýjynyň tötänden alan 3 detalynyň hiç bolmanda biriniň reňklenen bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.. **1-nji usul.** Hiç bolmanda bir detalyň reňklenen bolmagy diýilen talap (A) olaryň biriniň reňklenen (A_1), ikisiniň reňklenen (A_2), üçüsiniň reňklenen (A_3) bolmagyny aňladýan sygyşmaýan A_1, A_2, A_3 wakalaryň islendigi ýüze çykanda amala aşar. Şonuň üçin-de gyzyklanýan wakamyzy $A = A_1 + A_2 + A_3$ – sygyşmaýan wakalaryň jemi görnüşinde aňladyp bileris. Onda ähtimallyklary goşmagyň teoremasyndan $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ deňlik alynar. Deňligiň sag tarapyndaky goşulyjylary hasaplasak:

$$P(A_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{6!}{2!4!} : \frac{10!}{3!7!} = 4 \cdot 15 : 120 = \frac{1}{2};$$

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{6!}{1!5!} : 120 = 6 \cdot 6 : 120 = 36 : 120 = 0{,}3;$$

$$P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4!}{3!1!} : 120 = 4 : 120 = \frac{1}{30}.$$

Şeýlelikde, tapylan bahalary ýokarky formulada goýup gözlenilýän ähtimallygy alarys:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{15 + 9 + 1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

2-nji usul. Tötänden alynan 3 detalyň hiç bolmanda biriniň reňklenen bolmgyny aňladýan A we olaryň hiç biriniň hem reňklenen bolmazlygyny aňladýan $\overline{A}$ wakalary garşylykly bolup, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ häsiýete eýedirler. Alynan detalyň hiç biriniň reňksiz bolmagynyň ähtimallygy $P(\overline{A}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{6!}{3!3!} \Big/ 120 = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ bolar.Onda gözlenilýän ähtimallyk ýokardaky deňlikden $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ gatnaşyga görä tapylar.

2. Heläkçilik bolanda duýdurar ýaly biri-birinden baglanyşyksyz işleýän iki sany duýduryjy ornaşdyrylan. Heläkçilikli ýagdaýy olaryň birinjisiniň duýdurmagynyň ähtimallygy 0,95-e, ikinjisiniň duýdurmagynyňky bolsa, 0,9-a deň. Heläkçiligi olaryň diňe biriniň duýdurmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. $A_i\,(i=1,2)$ bilen heläkçilikli ýagdaýy i-nji duýduryjynyň duýdurmagyny aňladýan wakany belgilesek, bizi gyzyklandyrýan – heläkçiligi duýduryjylaryň diňe biriniň duýdurmagyny aňladýan A waka $A=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$ görnüşde ýazylyp biliner. Bu ýerde $A_1\overline{A}_2$ we $\overline{A}_1A_2$ goşulyjylaryň sygyşmaýandyklary düşnüklidir, sebäbi olaryň birinjisi, A_1-iň ýüze çykmagyny talap edýän bolsa, ikinjisi oňa garşylykly $\overline{A}_1$ wakanyň ýüze çykmagyny talap edýändir. Bu diýildigi, ol goşulyjylaryň birlikde ýüze çykyp bilmeýän wakalardygyny görkezýär. Şeýle hem A_1 we A_2 wakalar meseläniň şertinden baglanyşyksyzdyrlar. Onda ilki bilen sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmagyň, soňra bolsa baglanyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmegiň teoremalaryndan peýdalanyp taparys:

$$P(A)=P\left(A_1\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=$$
$$=0{,}95\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}05=0{,}095+0{,}045=0{,}14.$$

Biz bu ýerde A we B wakalar baglanyşyksyz bolanlarynda A we $\overline{B}$ hem–de $\overline{A}$ we $\overline{B}$ wakalaryň hem baglanyşyksyzdyklaryndan peýdalanýarys.

3. Gutydaky 6 sany detalyň 3-si aýratyn talaba görä (ýokary ygtybarlykly) ýasalan. Ýygnaýjynyň tötänden alan iki detalynyň hem ýokary ygtybarlykly bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. $A_i\,(i=1,2)$ bilen i-nji alynan detalyň ýokary ygtybarlykly bolmagyny aňladýan wakany belgilesek $P(A_1)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2},\; P_{A_1}(A_2)=\dfrac{2}{5}$ bolar. Onda gözlenilýän ähtimallyk

$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$ görnüşde tapylar. Görşümiz ýaly bu mysalyň çözülişinde gyzyklandyrýan wakanyň $A_1\cdot A_2$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazylyp bilinýänligini aňmalydyrys.

Ýumuşlar

1. Iki tüpeňden zalp bilen bir gezek atylanda nyşana bir okuň degmeginiň ähtimallygy 0,38–e deň. Eger–de tüpeňleriň birinden atylan okuň nyşana

degmeginiň ähtimallygy 0,8–e deň bolsa şeýle ähtimallygy ikinji tüpeň üçin tapyň.
2. Nahalhanada ýetişdirilen alma nahallarynyň talaba laýyklygynyň ähtimallygy 0,9–e deň. Üýşmekden tötänden alynan iki nahalyň diňe biriniň talaba laýyk bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.
3. Biolaboratoriýada geçirilýän ölçegleriň her birinde nätakyklyk goýberilmeginiň mümkin derejeden aşmagynyň ähtimallygy 0,4–e deň. Geçirilen üç sany baglanyşyksyz ölçegleriň diňe birinde goýberlen nätakyklygyň derejesiniň mümkin hasap edilýäninden ýokary bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.
4. Taýýar önümler üýşmeginden haryt öwreniji ýokary hillilerini saýlaýar. Tötän alynan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,85–e deň. Barlanylan üç önümiň diňe ikisiniň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.
5. Käbir enjam biri–birinden baglanyşyksyz işleýän üç sany elementden durýar. Olaryň käbir t wagt dowamynda bozulman işlemeginiň ähtimallyklary degişlilikde 0,7; 0,8 we 0,9 bolsun. Görkezilen t wagt dowamynda enjamyň

a) diňe bir elementiniň;
b) diňe iki elementiniň;
ç) ähli üç elementiniň
bozulman işlemekleriniň ähtimallyklaryny tapmaly.

6. Ders synagynyň sowalnamalarynyň ählisi 50 bolup, olaryň arasynda 5 sanysy talyplaryň "bagtly" hasap edýänleri. Synaga ilkinji giren üç talybyň ählisine–de "bagtly" sowalnamalardan düşmeginiň ähtimallygyny hasaplaň.
7. Umumy okuwa gatnaşmaly 20 talybyň 10–sy geograf, 5–si ekolog, 5–si bolsa meteorolog. Olaryň umumy žurnalyndan üç sany talybyň familiýasyny tötänden alyp, höwesekler aşa köp bolan turistik topara almaşak edilipdir. Olaryň ählisiniň hem geograf bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.
8. Talyp maksatnamada öwrenilýän 25 soragyň 20-sini özleşdiripdir. Synagçy mugallymyň beren üç soragyna hem talybyň jogap bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.
9. Talyp käbir kitaby gözläp kitaphanalaryň üçüsine aýlanyp çykmakçy bolýar. Her bir kitaphana üçin gözlenilýän kitabyň onuň fondunda bar bolmagy hem, bolmazlygy hem deň ähtimallykly. Kitap bar bolaýanda-da onuň okyjynyň elinde bolmaklygy we bolmazlygy deňähtimallykly wakalar diýip hasap edip, kitaphanalar biri–birinden baglanyşyksyzlykda kitap bilen

üpjün edilýän ýagdaýynda talybyň kitaby tapmaklygy ähtimalmy ýa–da tapmazlygy diýlen sowala jogap beriň.
10. Aslynda ogul dogulmagynyň ähtimallygynyň $\approx 0{,}51$bolup, dogulan ekiz çagalaryň bir jynsly bolmaklarynyň ähtimallalygynyň bolsa $\approx 0{,}64$bolýandygy gözegçiliklerde kesgitlenipdir. Ekiz doglanlaryň birinjisiniň oguldugy belli bolanda ikinjisiniň hem ogul bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

§3. Hiç bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy

Goý, $A_1, A_2, ..., A_n$ **toplumy bilen baglanyşyksyz** wakalar bolsun. Onda olaryň **hiç bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy** bir-den ol wakalaryň garşylykly $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ wakalarynyň ähtimallyklary–nyň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_{.n})$. Eger-de $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň ählisiniň ähtimallyklary meňzeş bolsa, onda aýdylan ähti–mallyk $1 - P^n(\overline{A}_1)$ görnüşde hasaplanylýar. Bu tassyklamadan peýdala–nylanda şertdäki “toplumy bilen baglanyşyksyz” diýilen talaba ünsi çekmelidir.

Mysal. Enjam biri-birinden baglanyşyksyzlykda işleýän üç sany elementden durýar. Olaryň hatardan çykmalarynyň ähtimallyklary degişlilikde 0,07; 0,05; 0,06. Eger-de bu elementleriň hiç bolmanda biriniň hatardan çykmagy enjamyň bozulmagyna alyp gelýän bolsa, enjamyň hatardan çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $A_i \, (i = 1,2,3)$ bilen i-nji elementiniň hatardan çykmagyny aňladýan wakany belgilesek, meseläniň şertinden olaryň toplumy bilen baglanyşyksyzdyklary gelip çykýandyr.

Şeýlelikde, gözlenilýän ähtimallyk ýokarky düzgüne görä
$$P = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}93 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}94 = 1 - 0{,}83049 = 0{,}16951$$
ýaly tapylýar.

Ýumuşlar

1. Köprüniň bozulmagy üçin bir awiabombanyň oňa düşmegi ýeterlik. Eger–de köprä düşmesiniň ähtimallyklary 0,4; 0,5; 0,2; 0,6 bolan dört sany awiabomba taşlanan bolsa köprüniň hatardan çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.
2. Üç sany biolog käbir fiziki ululygy biri–birinden baglanyşyksyz ölçeýärler. Olaryň birinjisiniň guralyň görkezenini hasaba alanynda ýalňyşlyk goýbermeginiň ähtimallygy 0,1–e deň. Şu ähtimallyk ikinji hem

üçünji barlagçylar üçin degişlilikde 0,12 we 0,25 bolsun. Bir gezekki ölçegde olaryň hiç bolmanda biriniň ýalňyşlyk goýbermeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

3.Bäş gezek ok atylanda hiç bolmanda bir gezek nyşananyň urulmagy–nyň ähtimallygy 0,9999. Atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

4. Iki sany mergenleriň her biriniň nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,5 –e deň. Olaryň her biri gezekli – gezegine iki ok atýarlar. Nyşanany ilki urana baýrak berilýär. Mergenleriň baýrak almaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

5. Ýaryşa gatnaşýan alty sany sportsmeniň iki metr belentlikden towusmaklarynyň ähtimallyklary degişlikde 0,7; 0,8; 0,7; 0,9; 0,9; 0,8 bolanlarynda, birinji synanşykda olaryň hiç bolmanda biriniň synanyşygynyň şowly bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

§4. Doly ähtimallyk formulasy

Doly topary emele getirýän, çaklamalar diýilip atlandyrylýan iki bir sygyşmaýan ýöne biriniň ýüze çykmagy hökmany bolan $H_1, H_2, ..., H_n$ wakalaryň biriniň ýüze çykmagy bilen amala aşýan A wakanyň ähtimallygy çaklamalaryň ähtimallyklarynyň A wakanyň degişli şertli ähtimallygyna köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

Bu deňlige bolsa **doly ähtimallygyň formulasy** diýilýär. Bu düzgünden peýdalanyp mysal işlenende çaklamalaryň doly topary emele getirmelidigine ünsi çekmelidir.

Mysal. Hasaplaýyş laboratoriýasynda 6 sany klawişli awtomat we 4 sany ýarymawtomat bar. Käbir hasaplama döwründe awtomatyň hatardan çykmazlygynyň ähtimallygy 0,95–e, ýarymawtomat üçin bolsa, şol ähtimallyk 0,8–e deň. Talyp tötänden saýlanan maşynda hasaplamany ýerine ýetirende onuň bozulman işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. A bilen hasaplama tamamlanýança maşynyň bozul–mazlygyny, B_1 bilen saýlanan maşynyň klawişli awtomat, B_2 bilen bolsa garşylykly, ýagny saýlanan maşynyň ýarymawtomat bolmagyny, aňlad–ýan wakalary belgiläliň. Saýlanýan maşynyň tötänliginden B_1 we B_2 çaklamalar üçin $P(B_1) = 0{,}6;\ P(B_2) = 0{,}4$, şeýle hem, şerte görä $P_{B_1}(A) = 0{,}95;\quad P_{B_2}(A) = 0{,}8$ bolýandyklaryny alarys. Onda doly ähtimallygyň formulasyndan

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}57 + 0{,}32 = 0{,}89$ bolar.

Ýumuşlar

1. n sany şary özünde saklaýan guta bir ak şar goşulýar, soňra ondan tötänden bir şar alynýar. Gutynyň ilkibaşda düzümi hakynda mümkin çaklamalaryň ählisi birmeňzeş mümkinçilikli hasap etmek bilen alynan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplaň.

2. Üýşmekdäki bäş tüpeňiň üçüsi dürbili. Dürbili tüpeňden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,95–e, dürbisiz tüpeň üçin bolsa şol ähtimallyk 0,7–ä deň. Üýşmekden tötänden bir tüpeň alynyp atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

3. Her birinde 7 gara we 3 ak şary özünde saklaýan üç sany gutynyň birinjisinden tötän bir şar alynyp ikinjä goşulýar, soňra ikinjiden birini tötän alyp üçünjä goşýarlar. Üçünjiden tötän alynan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

4. Birinji gapyrjakly 20 radiolampanyň 18–si standart, ikinjidäki 10 radiolampanyň bolsa 9–sy standart. Ikinji gapyrjakdan bir radiolampany alyp, birinjä goşýarlar. Birinjiden tötänden alynan lampanyň standart bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

5. Birinji gutydaky 15 şaryň 5-si ak, ikinji gutydaky 30 şaryň bolsa 15-si ak. Gutylaryň hersinden bir şar alnyp, soňra ol alnan şarlaryň ikisinden birini tötän alýarlar. Alnan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

§5. Baýýes formulalary

A waka doly topary emele getirýän sygyşmaýan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ wakalaryň (çaklamalaryň) biriniň ýüze çykmagy bilen amala aşyp bilýän bolsun. Haýsydyr bir pikir ýöretmeler arkaly, ýa bolmasa öwrenilýän meseläniň özünden çaklamalaryň ähtimallyklary (aprior) kesgitlenipdir diýeliň. Synag netijesinde A waka ýüze çykandygy belli bolandan soň çaklamalaryň ähtimallyklaryny (aposterior) hasaplap öňki kesgitlenilen ähtimallyklar bilen deňeşdirmek uly ähmiýete eýedir. Şol aposterior ähtimallyklary hasaplamak üçin ulanylýan

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

bu ýerde $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A),$

formulalar **Baýýes formulalary** ady bilen bellidirler.

Mysal. Üýşmekdäki 10 sany tüpeňiň 4-si dürbili. Atyjy dürbili tüpeňden atanda nyşanynyň urulmagynyň ähtimallygy 0,95-e, dürbisiz tüpeňden atanda şol ähtimallyk 0,8-e deň. Atyjy üýşmekden tötänden tüpeň alyp atanda nyşana urulypdyr. Onuň dürbili tüpeňi alany ähtimalmy, dürbisiz?

Çözülişi. A bilen nyşananyň urulmagyny, H_1 bilen üýşmekden dürbili, H_2 bilen bolsa, oňa garşylykly, ýagny dürbisiz tüpeňiň alynanlygyny aňladýan wakalary belgiläliň. Onda şertden $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}6$ bolýandygyny görýäris. Şeýle hem meseleden $P_{H_1}(A)=0{,}95$; $P_{H_2}(A)=0{,}8$ berlenleri peýdalansak

$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}8=$

$=0{,}38+0{,}48=0{,}86$ bahany taparys. Onda Baýýes formulalaryndan

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}38}{0{,}86}=\frac{19}{43} \quad \text{we}$$

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}48}{0{,}86}=\frac{24}{43}$$

bolup, $P_A(H_1)<P_A(H_2)$ deňsizlikden atyjynyň dürbisiz tüpeňden peýdalanan bolmagynyň has ähtimaldygy gelip çykýar.

Ýumuşlar

1. Ýörite hassahana getirilýän näsaglaryň ortaça 50%-i K, 25%-i L, 15%-i M we 10%-i N keselliler. K kesselliniň doly sagalyp çykmagynyň ähtimallygy 0,7–ä, şol ähtimallyk L,M we N keselliler üçin, degişlilikde 0,6–a; 0,8–e; 0,9–a deň. Hassahana getirilen käbir näsagyň doly sagalyp çykanlygy belli ýagdaýynda onuň K kesel bilen kesellän bolmagyň ähtimallygyny tapyň.

2. Taýýar önümiň standartlygy ýa–da däldigi iki sany haryt öwrenijileriň haýsy hem bolsa biri tarapyndan kesgitlenilýär.Önümiň birinji haryt öwrenijä düşmeginiň ähtimallygy 0,55–e, ikinjä düşmeginiňki bolsa 0,45–e deň. Standart önümiň standarta dogry gelýär diýilip birinji haryt öwreniji tarapyndan hasap edilmeginiň ähtimallygy 0,9–a, şol ähtimallyk ikinji haryt öwreniji üçin 0,98–e deň. Standart önüm barlanylyp standart diýilen netije çykarylandygy belli. Ony ikinji haryt öwrenijiniň barlanlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

3. Umumy konweýere gelýän detaly iki sany awtomat öndürýär. Olaryň birinjisiniň öndürijiligi ikinjisiniňkä garanda iki esse. Birinji awtomatyň öndürýän detallarynyň ortaça 60%-i ýokary hilli, ikinjisiniňki bolsa 84%-i ýokary hilli önümler. Konweýerden tötän alynan detal ýokary hilli bolup çykýar. Ony ikinji awtomatyň öndüreni ähtimalmy, birinjiniň?
4. Enjamyň biri – birinden baglanyşyksyz işleýän dört sany bloklarynyň ikisi hatardan çykypdyr. Eger–de bloklaryň hatardan çykmaklarynyň ähtimallyklary degişlilikde p_1=0,2, p_2=0,1, p_3=0,4, p_4=0,3 bolanlarynda birinji we ikinji bloklaryň bozulan bolmaklarynyň ähtimallyklaryny tapmaly.
5. Käbir pudakda öndürilýän önümiň 30%-i birinji, 25%-i ikinji, galan, bölegi bolsa üçünji fabriklerde taýýarlanýar. Ol fabriklerde öndürilen önümleriň degişlilikde 1%; 1,5%; 2% bölekleri talaby kanagatlandyrmaýan kemisli önümler. Alyjynyň satyn alan harydy şeýle kemisli önümlerden bolup çykypdyr. Ol harydyň birinji fabrikde öndürilen bolup çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

III bap. Gaýtalanýan synaglar

§6. Gaýtalanýan synaglar bilen baglanyşykly düzgünler

Her birinde käbir *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýlekileriniň islendiginiň netijesine bagly bolmaýan synaglar geçirilýän bolsa olara *A* waka görä **baglanyşyksyz synaglar** diýilip aýdylýar. Olaryň arasynda synaglaryň ählisinde A wakanyň ähtimallygynyň üýtgewsiz galýanlary aýratyn ähmiýete eýe bolup, şolary öwrenýäris.

Bernulli shemasy ady bilen tanalýan baglanyşyksyz synaglaryň shemasy örän köp ulanylyşlaryň esasynda duran nazary shema bolup taýýar senagat önümleriniň hilini barlamakda has-da peýdalydyr. Şeýle hem Bernulli shemasy ähtimallyklar nazaryýetiniň iň bir sada matematiki modelleriniň biridir. Muňa mysal bolup şaýylyk oklamalaryň yzygiderligi hyzmat edýär. Ýöne şunuň bilen birlikde bu model ideýa babatda örän baýdyr.

1. Bernulli formulasy. Her birinde ýüze çykmagynyň ähtimallygy *p* (0<*p*<1) bolan wakanyň *n* sany baglanyşyksyz synaglarda laýyk *k* gezek ýüze çykmagynyň (haýsy synaglardadygynyň tapawudy ýok) ähtimallygy

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ bu ýerde } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad q + p = 1$$

deňlige görä hasaplanylýar. Ýazylan formula **Bernulli formulasy** ady bilen meşhurdyr.

Bernulli formulasyndan n sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň a) k-dan az; b) k -dan köp; ç) k-dan az bolmadyk; g) k-dan köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallyklarynyň degişlilikde indiki deňliklere görä hasaplanmalydyklary alynýar:

$$P_n(<k)=\sum_{m=0}^{k-1}P_n(m);$$

$$P_n(>k)=\sum_{m=k+1}^{n}P_n(m);$$

$$P_n(\geq k)=\sum_{m=k}^{n}P_n(m);$$

$$P_n(\leq k)=\sum_{m=0}^{k}P_n(m).$$

Mysal. Iki sany deň güýçli garşydaşlar küşt oýnaýarlar. Deňme-deň tamamlanan oýunlary hasaba almanyňda

a) iki döwden birini utmakmy ýa-da dört döwden ikisini utmak;

b) dört döwden ikiden az bolmadygyny utmakmy ýa-da bäş döwden üçden az bolmadygyny utmak has ähtimal?

Çözülişi. Deňgüýçli küştçiler oýnaýandyklary üçin utmak hem-de utulmak deň ähtimallykly wakalardyr, ýagny $p=q=\frac{1}{2}$. Ähli döwlerde utmak hem-de utulmak wakalarynyň ähtimallyklary üýtgemeýärler we utmaklygyň haýsy tertipdäki synaglarda amala aşýandygyna bagly däldir. Bu diýildigi Bernulli formulasynyň ulanarlyklydygyny aňladýar.

a) Iki döwden birini utmaklygyň ähtimallygy $P_2(1)=C_2^1\cdot p\cdot q=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Dört döwden ikisini utmaklygyň ähtimallygy bolsa

$$P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Diýmek, $P_2(1)>P_4(2)$, ýagny iki döwden birini utmak dört döwden ikisini utmaklykdan has ähtimal.

b) $P_4(\geq 2)=1-P_4(0)-P_4(1)$ we $P_5(\geq 3)=1-P_5(0)-P_5(1)-P_5(2)$ bolandyklary üçin

$$P_4(0)=C_4^0\cdot p^0\cdot q^4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16};\qquad P_4(1)=C_4^1\cdot p\cdot q^3=\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4};$$

$$P_5(0)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32};\qquad P_5(1)=C_5^1\cdot p\cdot q^4=5\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{32};$$

$P_5(2)=C_5^2\cdot p^2\cdot q^3=\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{1}{32}=\frac{10}{32}$ bolup, bu ýerden $P_4(\geq 2)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$

we $P_5(\geq 3)=1-\frac{1}{32}-\frac{5}{32}-\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$ bahalary hasaba alsak,

$P_4(\geq 2)>P_5(\geq 3)$ netijä, ýagny dört döwden ikiden az bolmadygyny utmaklygyň bäş döwden üçden az bolmadygyny utmaklykdan has ähtimaldygy hakyndaky netijä gelýäris.

Ýumuşlar

1. Şaýylyk bäş gezek oklananda:
a) ikiden az;
b) ikiden az bolmadyk
gezek "arka" tarapynyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

2. Sehde 6 sany stanok bar. Olaryň her biriniň berlen mömentde işleýän bolmagynyň ähtimallygy 0,8–e deň. Berlen momentde:
a) 3 sany stanogyň;
b) ähli stanoklaryň
işleýän bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

3. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,3–e deň bolanynda 5 sany şeýle synaglarda onuň üçden az bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

4. Käbir *B* waka *A* waka ikiden az bolmadyk gezek ýüze çykanda amala aşýar. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,4–e deň bolanda geçirilen 6 sany şeýle synaglar netijesinde *B* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

5. Maşgalada 5 çaga bar. Olaryň arasynda
a) üç sany gyz;
b) üçden az bolmadyk gyz;
ç) üçden az gyz
bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. Gyz dogulmagynyň ähtimallygy 0,49-a deň hasap edýäris.

§7. Laplasyň lokal hem-de integral teoremalary

Laplasyň lokal teoremasy. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy $p(0<p<1)$ bolan n sany baglanyşyksyz synaglaryň (haýsy birindedigi tapawudy ýok) laýyk k sanysynda şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy takmynan (n näçe uly bolsa şonça takyk) $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ ululyga deňdir.

$$\text{Bu ýerde } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad .$$

Şunlukda, $\varphi(x)$ funksiýanyň bahasyny tapmak üçin, onuň jübütdigini nazara almak bilen, x-iň položitel bahalary üçin onuň bahalarynyň bar bolan tablisasyndan peýdalanýarlar.

Laplasyň integral teoremasy. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p ($0<p<1$) bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda şol wakanyň k_1-den az bolmadyk, k_2-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P_n(k_1;k_2)$ takmynan $\phi(x'') - \phi(x')$ tapawuda deňdir. Bu ýerde

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ - Laplas funksiýasy bolup,}$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

x-iň [0;5] kesimdäki ähli bahalary üçin $\phi(x)$ funksiýasynyň bahalarynyň tablisasy bar bolup, ähli $x>5$ nokatlarda $\phi(x) = 0{,}5$ hasap edilýär. Laplas funksiýasynyň täkliginden, ýagny $\phi(-x) = -\phi(x)$ deňlikden peýdalanmak bilen x-iň otrisatel bahalary üçin hem $\phi(x)$-iň bahalaryny şol tablisany ulanmak bilen tapýarlar.

Mysallar

1. Synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,25 bolanda geçirilen 200 sany baglanyşyksyz synaglarda onuň laýyk 40 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä n=200, k=40, p=0,25, q=0,75. n=200 ýeterlik uly hasap etmek bilen Laplasyň lokal teoremasyndan peýdalansak $P_{200}(40) = \frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\varphi(x)$, bu ýerde

$$x = \frac{40 - 200\cdot 0{,}25}{\sqrt{200\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}} = \frac{40-50}{\sqrt{37{,}5}} = \frac{-10}{6{,}123724} = -1{,}632993.$$

Tablisa görä, $\varphi(-1{,}632993) = 0{,}1057$ bolanlygyndan taparys:

$P_{200}(40) = 0{,}1642.$

2. 100 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň bolanda onuň 70-den az däl, 80-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Şerte görä n=100; p=0,8; q=0,2; k_1=70; k_2=80. Onda

$$x' = \frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{4} = -2{,}5; \qquad x'' = \frac{80-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = 0$$

bolany üçin $\phi(-x) = -\phi(x)$ gatnasykdan we Laplas funksiýasynyň bahalarynyň tablisasyndan peýdalansak $\phi(-2{,}5) = -0{,}4938$ we $\phi(0) = 0$ eýe bolarys. Şeýlelikde, gözlenilýän ähtimallyk $P_{100}(70;80) = 0 - (-0{,}4938) = 0{,}4938$ bolar.

Ýumuşlar

1. Tüpeňden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,7 bolanda 2100 gezek atylanda nyşananyň laýyk 1600 gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapyň.

2. Eger baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykma–gynyň ähtimallygy 0,6 bolsa, geçirilen şeýle synaglaryň 100–sinde şol wakanyň laýyk 70 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

3. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8–e deň. 0,9 ähtimallyk bilen wakanyň 60–dan az bolmadyk gezek ýüze çykmaklygyny tama eder ýaly näçe sany synag geçirilmelidigini kesgitlemeli.

4. 400 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmaklygynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Wakanyň a) 250-den az bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň;

b) 300-den az bolmadyk we 320-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

5. Şaýylyk 150 gezek oklanýar. Şaýylygyň “arka” tarapynyň 100-den az bolmadyk we 120-den bolsa köp bolmadyk gezek düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

§8. Baglanyşyksyz synaglarda otnositel ýygylygyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň bahasy

n sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p(0<p<1) bolanda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň bu wakanyň hemişelik ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň položitel ε sandan uly bolmazlygynyň ähtimallygy $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ takmynan $2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ ululyga, ýagny Laplas funksiýasynyň $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nokatdaky bahasynyň ikeldilmegine deňdir.

Mysal. 400 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,01-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $n=400;\ p=0{,}8;\ q=0{,}2;\ \varepsilon=0{,}01$. Onda $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\le 0{,}01\right)$ ähtimallyk ýokarda aýdylan tassyklama görä

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\le 0{,}01\right)\approx 2\phi\left(0{,}01\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383$$

bolar. Şeýlelikde, soralýan ähtimallyk takmynan 0,383-e deň.

Ýumuşlar

1.625 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5–e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,02–den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

2. 1000 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8–e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,04–den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

3. 1600 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5–e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,01–den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

4. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,7–ä deň. 2500 sany baglanyşyksyz synaglarda bu waka–nyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absol–ýut ululygynyň 0,8 ähtimallyk bilen garaşylýan ululygyny kesgitläň.

5. "Arka" tarapynyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň $p=0{,}5$ ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,04-den uly bolmazlygynyň ähtimallygynyň 0,6-dan kiçi bolmazlygy üçin şaýylygy näçe gezek oklamalydygyny tapyň.

§9. Baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň mümkingadar sany

Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p (0<p<1) bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda bu wakanyň k_0 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy synagyň beýleki mümkin bolan netijeleriniň ähtimallygyndan kiçi bolmasa k_0 sana baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň **mümkingadar sany** diýilip aýdylýar. k_0 mümkingadar sany $np-q \le k_0 < (n+1)\cdot p$ ikigat deňsizlikler bilen kesgitlenip $(p+q=1)$:

a) $np-q$ drob bolsa, k_0 ýeke-täkdir;

b) $np-q$ bitin bolsa, k_0 we k_0+1 sanlar mümkingadardyrlar;

ç) np bitin bolsa, $k_0 = np$ san ýeke-täk mümkingadardyr.

Mysal. Tehniki gözegçilik bölümi 10 sany detaldan durýan üýşmegi barlaýar. Detalyň standart bolmagynyň ähtimallygy 0,76-a deň. Standart hasap ediljek detallaryň mümkingadar sanyny tapyň.

Çözülişi. Şerte görä $n=10$; $p=0{,}76$; $q=0{,}24$, onda $np-q \le k_0 < (n+1)\cdot p$ deňsizliklerde berlenleri orunlaryna goýup alarys: $10\cdot 0{,}76-0{,}24 \le k_0 < (10+1)\cdot 0{,}76$, ýagny $7{,}36 \le k_0 < 8{,}36$.

Bu ýerden k_0-yň bitin sandygyna görä, $k_0 = 8$ bolýandygyny taparys.

Ýumuşlar

1. 20 sany taýýar önümler barlanylýar. Önümiň talaby kanagatlandyrmagynyň ähtimallygy 0,9–a deň. Talaby kanagatlandyrjak önümleriň mümkingadar sanyny anyklamaly.

2. Haryt öwreniji harytlaryň 24 sany görnüşini gözden geçirýär. Harytlaryň her bir görnüşiniň satuwa ýaramlylygynyň ähtimallygy 0,6–a deň. Satuwa ýaramly hasap ediljek harytlaryň görnüşleriniň mümkingadar sanyny tapyň.

3. Nahalhanadaky ýetişdirilýän alma nahallarynyň umuman alanyňda 10%-i gögeriş almaýar. Täze oturdylan 1000 düýp alma nahalynyň gögeriş aljaklarynyň garaşylýan mümkingadar sanyny tapmaly.

4. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,3–e deň. Wakanyň ýüze çykmagynyň garaşylýan mümkingadar sany 30–a deň bolmagy üçin näçe sany synag geçirilmelidigini tapyň.

5. Eger-de 50 sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmalarynyň garaşylýan mümkingadar sany 30-a deň bolsa, onuň synaglaryň her birinde ýüze çykmagynyň p ähtimallygyny tapyň.

Üçünji bölüm

Tötän ululyklar, olaryň paýlanyşlary

IV bap. Diskret tötän ululyklar

§10. Diskret tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň kanuny. Binomial we Puasson paýlanyş kanunlary

Mümkin bahalary, diňe kesgitli ähtimallyklar bilen kabul edilýän, aýratyn alynan (izolirlenen) sanlar bolan **tötän ululyga diskret** diýilip aýdylýar. Bu diýildigi diskret tötän ululygyň alyp bilýän bahalaryny nomerläp çykyp bolýandygyny aňladýandyr. Başgaça aýdanyňda, diskret tötän ululygyň kabul edip bilýän bahalarynyň iň köp bolanda hasaply sandadygyny aňladýar. Diskret tötän ululygyň ähli alyp bilýän bahalary bilen olaryň degişli ähtimallyklarynyň sanawyna **paýlanyş kanuny** diýilýär. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny birinji setiri kabul edilýän bahalardan, ikinji setiri bolsa şolaryň degişli ähtimallyklaryndan doldurylýan iki setirli tablisa görnüşinde berilip bilner:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

Bu ýerde $p_i = P(X = x_i), \ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Şeýle hem diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny onuň alyp bilýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryny berýän formulalar bilen analitiki görnüşde hem berilýändir.

Kähalatlarda x_i kabul edilýän bahalary degişli p_i ähtimallyklar bolan X tötän ululygyň paýlanyş kanuny gönüburçly koordinatalar sistemasynda $M_i(x_i; p_i)$ nokatlary gurup, soňra göni çyzyklar bilen birleşdirmek arkaly grafiki usulda hem berilýär. Şu usul bilen alynýan figura **paýlanyşyň köpburçlugy** diýilýär. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda bu wakanyň ýüze çykanlarynyň sanyny X diýip belgilesek ol diskret tötän ululyk bolup, onuň paýlanyş kanuny **Binomial paýlanyş** diýilip atlandyrylýar. Ol kanuna görä X ululygyň $k = 0,1,2,...,n$ bahalary almagynyň ähtimallyklary **Bernulli formulasy** diýilýän, $P_n(k)=P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot p^{n-k}$; $p+q=1$ deňlikden kesgitlenýärler.

Eger-de synaglar sany örän uly bolup, olaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň p ähtimallygy hem örän kiçi bolanda, ýokardaky ähtimallyk indiki formula görä takmynan hasaplanýar: $P_n(k)=\lambda^k\cdot e^{-\lambda}/k!$, bu ýerde $\lambda=np$ – öwrenilýän wakanyň n sany baglanyşyksyz synaglardaky ýüze çykmagynyň ortaça sany. Bu ýagdaýda X tötän ululygy **Puasson kanuny** boýunça paýlanan diýilýär.

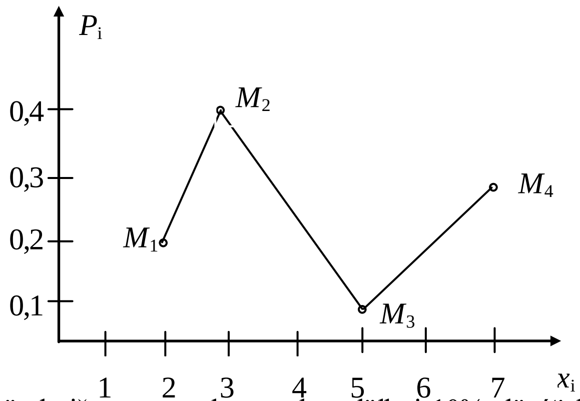
Mysallar

1. X diskret tötän ululygy

X	2	3	5	7
P	0,2	0,4	0,1	0,3

kanun bilen paýlanan. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Çözülişi. Ýokarda aýdylyşy ýaly gönüburçly Dekart koordi–natalar sistemasynda $M_1(2;0,2);M_2(3;0,4);M_3(5;0,1);$ $M_4(7;0,3)$ nokatlary gurup, olary göni çyzyklar bilen birleşdirýäris:



2. Taýýar önümleriň tapgyrynda standart dälleri 10% düzýärler. Tötänden alynan üç sany önümleriň içinde standart dälleriniň X sanynyň Binomial paýlanyş kanunyny ýazyň.

Çözülişi. X diskret tötän ululygynyň ähli alyp biljek bahalarynyň $x_1=0$ (alynan önümleriň ählisi standart), $x_2=1$ (alynan önümleriň içinde biri standart däl), $x_3=2$ (alynan önümleriň ikisi standart däl) we $x_4=3$ (alynan önümleriň ählisi standart däl) boljakdyklary düşnüklidir. Önümleriň standartdygy ýa-da däldigi biri-biriniň hiline bagly däl, ýöne önümleriň her biriniň standart däl bolmagynyň ähtimallygy 0,1-e deňligi sebäpli, X tötän ululygyň binomial paýlanyşa eýedigi hakynda netije çykarmak dogrudyr. Şonuň üçin-de şerte görä $n=3;\ p=0,1;\ q=0,9$ bolýandyklaryny nazara alyp, Bernulli formulasyndan peýdalanyp ýokardaky x_i bahalara degişli ähtimallyklary taparys:

$$P_1 = P(X=0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = (0,9)^3 = 0,729,$$

$$P_2 = P(X=1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^2 = 0,243,$$

$$P_3 = P(X=2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot (0,1)^2 \cdot 0,9 = 0,027,$$

$$P_4 = P(X=3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = (0,1)^3 = 0,001.$$

Şeýlelikde

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

3. Zawodyň önüminiň 500 sanysy ammara iberilýär. Önümiň ýolda zaýalanmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Ýolda laýyk iki önümiň zaýalanmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. n=500 ýeterlik uly, p=0,002 bolsa kiçi bolup, önümleriň zaýalanmagynyň bolsa, baglanyşyksyz wakalary berýänligi üçin Puasson formulasyndan peýdalanýarys. Berlenlerden $\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1$ tapyp gözlenilýän ähtimallygyň

$$P_{500}(2) = e^{-1}/2! = 0,36788/2 = 0,18394$$

bolýandygyny alarys.

Ýumuşlar

1. X Diskret tötän ululygy

a)

X	3	7	10
P	0,2	0,5	0,3

b)

X	2	4	6	7
P	0,1	0,3	0,2	0,4

paýlanyş kanuny bilen berlen. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

2. Şaýylyk iki gezek oklananda “arka” tarapyna düşmeginiň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

3. Enjam baglanyşyksyzlykda işleýän 3 sany elementlerden ybarat bolup, olaryň her biriniň geçirilýän synagda hatardan çykmagynyň ähtimallygy 0,2-ä deň. Synagda hatardan çykan elementleriň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazyň.
4. Ýedi sany detallaryň üýşmeginde 5 sanysy talabalaýyk detallar. Üýşmekden tötänden alynan üç sany detallaryň arasynda talabalaýyklarynyň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.
5. Enjam biri beýlekilerinden baglanyşyksyzlykda işleýän 1000 sany elementden ybarat. Olaryň her biriniň käbir t wagt dowamynda hatardan çykmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Aýdylan t wagt dowamynda laýyk dört sany elementiň bozulmagynyň ähtimallygyny tapyň ($e^{-2} = 0{,}13534$bahadan peýdalanyp bilersiňiz).
6.Ýylmaýjy plitalary çykarýan stanogyň taýýarlan plitalarynyň her biriniň talaby kanagatlandyrmazlygynyň ähtimallygy 0,001-e deň. Taýýarlanan 2000 plitanyň arasynda laýyk dört sany talaby kanagatlandyrmaýan plitalaryň bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

§11. Diskret tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri

Tötän ululygyň ortaça bahasyny häsiýetlendiriji bolup matematiki garaşmasy hyzmat edýändir.

Diňe $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2, ..., p_n$ ähtimallyklar bilen kabul edýän diskret tötän ululygyň **matematiki garaşmasy** diýilip onuň ähli kabul edip bilýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n .$$

Eger-de X tötän ululygyň bahalarynyň sany hasaply bolup, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ hatar absolýut ýygnalýan bolsa, onda onuň matematik garaşmasy $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ deňlik bilen klesgitlenýändir.

Tötän ululygyň matematiki garaşmasy hasaplananda, köplenç halatda, indiki ýönekeý häsiýetlerden we düşünjelerden peýdalanýarlar.

1. Hemişelik C ululygyň (ýeke–täk C bahany kabul edýän tötän ululygyň) matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir:

$$M(C) = C.$$

2. X tötän ululygyň C hemişelik sana köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy bu X tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň C hemişelige köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

Şunlukda **X diskret tötän ululygyň C hemişelik sana köpeltmek hasyly** diýlip, kabul edýän bahalary X–iň her bir bahasyny C sana köpeltmek arkaly alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa X tötän ululygyň degişli bahalarynyň ähtimallyklaryna deň bolan, $C \cdot X$ tötän ululygyna aýdylýandyr.

3. Iki sany baglanyşyksyz X we Y tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Şunlukda, **iki sany tötän ululyklaryň bagalanyşyksyz bolmaklary** diýlip, olaryň biriniň paýlanyş kanunynyň beýlekisiniň kabul edýän bahalaryna bagly bolmazlygyna düşünilýändir. Tersine ýagdaýda, olar baglanyşykly diýilýär. Şeýle hem, **baglanyşyksyz X we Y diskret tötän ululyklaryň $X \cdot Y$ köpeltmek hasyly** diýlip, mümkin bahalary X–iň her bir bahasynyň Y–iň her bir bahasyna köpeltmek hasyllary görnüşinde alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa X we Y tötän ululyklaryň köpeliji bahalarynyň degişli ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deň bolan, diskret tötän ululyga düşünilýändir.

4. Iki sany X we Y tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy goşulyjylaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Şunlukda, **X we Y diskret tötän ululyklaryň $X+Y$ jemi** diýlip, mümkin bahalary X–iň her bir bahasynyň Y–iň her bir bahasy bilen jemi görnüşinde alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa goşulyjylaryň mümkin bahalarynyň degişli ähtimallyklarynyň köpeltmek hasyllary ýaly kesgitlenilýän diskret tötän ululyga düşünilýändir.

Tötän ululygyň bahalarynyň onuň matematiki garaşmasynyň golaýynda seçilişiniň häsiýetlendirijileri bolup, hususan, dispersiýa we orta kwadratik gyşarma hyzmat edýändir. X tötän ululygyň **dispersiýasy** diýilip onuň matematik garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Köplenç ýagdaýlarda dispersiýany hasaplamak üçin $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ formuladan peýdalanmak oňaýlydyr.

Tötän ululygyň orta **kwadratik gyşarmasy** diýilip onuň dispersiýasyndan alynan kwadrat köke aýdylýar: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Tötän ululygyň dispersiýasy hasaplanylanda indiki häsiýetlerden peýdalanmak oňaýly bolýar.

1. Hemişelik C ululygyň (ýeke–täk C bahany kabul edýän tötän ululygyň) dispersiýasy nola deňdir:

$$D(C)=0.$$

2. Tötän ululygyň hemişelik sana köpeltmek hasylynyň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasynyň hemişelik köpelijiniň kwadratyna köpeltmek hasylyna deňdir:

$$D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X).$$

3. Iki sany baglanyşyksyz tötän ululyklaryň jeminiň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4. Iki sany baglanyşyksyz tötän ululyklaryň tapawudynyň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Binomial paýlanyşly X tötän ululygyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy degişlilikde $M(X)=np,\ D(X)=npq$ ululyklardyr, ýagny olaryň birinjisi synaglar sanynyň wakanyň her bir synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygyna, ikinjisi bolsa synaglar sanynyň her bir synagda wakanyň ýüze çykmagynyň hem-de ýüze çykmazlygynyň ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarydyr.

Mysallar

1.

X	1	3	7	9
P	0,2	0,1	0,3	0,4

paýlanyş kanunyna eýe X diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

Çözülişi. Formula görä

$$M(X)=1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}4=0{,}2+0{,}3+2{,}1+3{,}6=6{,}2;$$

$$M(X^2)=1^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+7^2\cdot 0{,}3+9^2\cdot 0{,}4=0{,}2+0{,}9+14{,}7+32{,}4=48{,}2.$$

Şeýlelikde,

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=48{,}2-(6{,}2)^2=48{,}2-38{,}44=9{,}76$ bolup, kesgitlemä görä $\sigma(X)=\sqrt{9{,}76}$.

2. Eger-de $M(X)=2, M(Y)=7$ bolsalar, $Z=2X+5Y$ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapmaly.

Çözülişi. Jemiň matematiki garaşmasynyň goşulyjylaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdigi we hemişelik köpelijiniň matematiki garaşmanyň belgisiniň daşyna çykarylyp bilinýänligi hakyndaky häsiýetlerden

$$M(Z)=M[2X+5Y]=M(2X)+M(5Y)=2M(X)+5M(Y)=$$
$$=2\cdot(-2)+5\cdot 7=-4+35=31.$$

3. X diskret tötän ululygy $x_1=4$ bahany $p_1=0{,}5$; $x_2=6$ bahany $p_2=0{,}3$ we x_3 bahany p_3 ähtimallyklar bilen kabul edýär. $M(X)=8$ bolanda x_3 we p_3 näbellileri tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0{,}5\cdot 4+0{,}3\cdot 6+x_3p_3=8$$

bolanlygyndan hem-de $p_1+p_2+p_3=1$ bolmalydygyndan peýdalansak, $p_3=1-p_1-p_2=0{,}2$ bahany tapyp ornuna goýmak bilen alarys: $M(X)=2+1{,}8+0{,}2\cdot x_3=8$, bu ýerden $0{,}2x_3=8-3{,}8=4{,}2$ ýa-da $0{,}2x_3=4{,}2$. Diýmek, $x_3=21$.

Şunlukda, $x_3=21$, $p_3=0{,}2$.

Ýumuşlar

1. a)

X	-3	0	2	5
P	0,2	0,1	0,4	0,3

b)

X	1	3	4	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny, orta kwadratik gyşarmasyny tapyň.

2. X diskret tötän ululygynyň mümkin bahalary

$x_1=1, x_2=2, x_3=3$ bolup, $M(X)=0{,}3$; $M(X^2)=5{,}9$ san häsiýetlendirijileri belli bolsalar, X-iň mümkin bahalarynyň degişli ähtimallyklaryny tapmaly.

3. $M(X)=0{,}8$ bolan, iki sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň X sanynyň dispersiýasyny hasaplamaly.

4. 9 sany baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklaryň her biriniň

dispersiýasy 36-a deň. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiginiň dispersiýasyny tapmaly.
5. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,7-ä deň bolan 100 sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň X sanynyň dispersiýasyny tapmaly.
6. Her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik bolan baglanyşyksyz synaglar geçirilýär. Üç sany baglanyşyksyz synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň dispersiýasy 0,63-e deň bolanda onuň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.
7. X diskret tötän ululygy $x_1 < x_2$ bolan, diňe iki sany baha kabul edýär. Eger-de $p_1 = P(X = x_1) = 0{,}2; M(X) = 2{,}6$ we $\sigma(X) = 0{,}8$ belli bolsalar, X tötän ululygyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.
8. X tötän ululygy λ parametrli Puasson paýlanyşyna eýe bolsa, onuň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.
9. Diskret tötän ululygyň matematiki garasmasynyň onuň iň kiçi we iň uly bahalarynyň arasyndaky ululykdygyny görkeziň.
10. Eger–de $X_1, X_2, ..., X_n -$ baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan, položitel tötän ululyklar bolsalar, onda

$$M\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}\right) = \frac{1}{n}$$

bolýandygyny subut ediň.

§12. Nazary momentler

X tötän ululygynyň **k-njy tertipli başlangyç momenti** diýilip, X^k tötän ululygynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar: $v_k = M(X^k)$. Hususan, $v_1 = M(X)$.

X tötän ululygynyň **k-njy tertipli merkezi momenti** diýilip, $[X - M(X)]^k$ ululygynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar: $\mu_k = M[X - M(X)]^k$. Hususan, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Mysal.

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini tapmaly.

Çözülişi. Kesgitlemä görä

$\nu_1 = M(X),\ \nu_2 = M(X^2),\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$

bolandyklary üçin ν_1 we ν_2-ni tapmak ýeterlikdir.

$$\nu_1 = 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 1{,}5 + 1{,}5 = 3{,}2,$$

$$\nu_2 = 1^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}5 + 5^2\cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 4{,}5 + 7{,}5 = 12{,}2.$$

Bu ýerden $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 12{,}2 - (3{,}2)^2 = 12{,}2 - 10{,}24 = 1{,}96$.

Ýumuşlar

1. a)

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

b)

X	1	3	4
P	0,2	0,3	0,5

paýlanyşa eýe X tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini tapmaly.

2.

X	2	4
P	0,3	0,7

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini hasaplamaly.

V bap. Uly sanlar kanuny

§13. Çebyşew deňsizligi

X tötän ululygynyň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň ε položitel sandan kiçi bolmagynyň ähtimallygy $1 - D(X)/\varepsilon^2$ ululygyndan kiçi däldir:

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Çebyşew deňsizligi diýilip atlandyrylýan bu deňsizligi oňa ekwiwalent bolan $P\left(|X - M(X)| \ge \varepsilon\right) \le \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ görnüşde hem ýazýandyrlar.

Mysal. Eger $D(X) = 0{,}004$ bolsa, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, $|X - M(X)| < 0{,}2$ deňsizligiň ähtimallygyny bahalamaly.

Çözülişi. Çebyşew deňsizliginden

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}2\right)\geq 1-\frac{D(X)}{(0{,}2)^2}=1-\frac{0{,}004}{0{,}04}=1-\frac{1}{10}=0{,}9 .$$

Diýmek, $P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}2\right)\geq 0{,}9$.

Ýumuşlar

1. $P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 0{,}9$ we $D(X)=0{,}009$ berlen bolsalar, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, ε -ny aşakdan bahalamaly.

2. Synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5-e deň. Çebyşew deňsizligini ulanyp A wakanyň 100 sany baglanyşyksyz synaglarda ýüze çykmagynyň X sanynyň 40-dan uly, 60-dan bolsa kiçi bolmaklygynyň ähtimalygyny bahalamaly.

3. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,25 bolanda, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, geçirilen 800 sany synaglarda A-nyň ýüze çykanlarynyň X sanynyň 150-den uly, 250-den bolsa kiçi bolmaklygynyň ähtimalygyny bahalamaly.

§14. Çebyşew teoremasy

Eger-de jübüt-jübütden baglanyşyksyz $X_1, X_2,..., X_n...$tötän ululyklar tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen (käbir C hemişelik san bilen) dispersiýalara eýe bolsalar, onda ol tötän ululyklaryň orta arifmetigi olaryň matematiki garaşmalarynyň orta arifmetigine ähtimallyk boýunça ýygnalýar, ýagny islendik $\varepsilon>0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)=1$$

gatnasyk ýerine ýetýändir.

Bu teoremadan peýdalanylanda öwrenilýän tötän ululyklar üçin üç sany talabyň (jübüt-jübütden baglanyşyksyzlyk; tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen dispersiýalara eýelik) ýerine ýetýändigine üns bermelidir.

Mysal. Baglanyşyksyz $X_1, X_2,..., X_n...$tötän ululyklar

X_n	a	$-a$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

paýlanyş kanunlary bilen berlen. Bu tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasy ulanarlyklymy?

Çözülişi. Berlen tötän ululyklaryň jübüt-jübütden baglanyşyksyzlyklary olaryň baglanyşyksyzdyklaryndan gelip çykýar. Şeýlelikde bize olaryň tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen dispersiýalara eýediklerini ýa-da däldiklerini barlamak galýar:

Islendik n nomer üçin $M(X_n) = a \cdot \dfrac{n}{2n+1} + (-a) \cdot \dfrac{n+1}{2n+1} = -\dfrac{a}{2n+1}$ bolanlygyndan ähli X_n tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň tükeniklidigini görýäris. Ikinji bir tarapdan

$M\left(X_n^2\right) = a^2 \cdot \dfrac{n}{2n+1} + (-a)^2 \cdot \dfrac{n+1}{2n+1} = a^2$ bolanlygyndan

$$D(X_n) = M(X_n^2) - M^2(X_n) = a^2 - \frac{a^2}{(2n+1)^2} = a^2 \cdot \frac{4n^2+4n}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} \cdot a^2 < a^2$$

bolup, Çebyşew teoremasynyň ähli şertleriniň kanagatlanýandyklaryny alarys. Bu diýildigi berlen tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasynyň ulanarlyklydygyny aňladýar.

Ýumuşlar

1. Baglanyşyksyz $X_1, X_2, ..., X_n ...$ tötän ululyklar

X_n	$-na$	0	na
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

paýlanyş kanunlary bilen berlen. Bu tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasy ulanarlyklymy?

2. Çebyşew teoremasyny baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar üçin formulirläň.

VI bap. Tötän ululyklaryň ähtimallyklarynyň paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary

§15. Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

X tötän ululygyň **paýlanyş funksiýasy** diýilip her bir x nokatdaky bahasy X ululygyň x-den kiçi bahalary almaklygynyň ähtimallygyna deň bolan hakyky bahaly

$$F(x) = P(X < x)$$
funksiýa aýdylýar. Kähalatlarda paýlanyş funksiýasy **paýlanyşyň integral funksiýasy** diýilip hem atlandyrylýar. Paýlanyş funksiýasy birentek ajaýyp häsiýetlere eýedir we olar meseleler çözülende örän peýdalydyrlar:

1. Her bir x nokat üçin $0 \le F(x) \le 1$.

2. Paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny islendik $x_1 < x_2$ nokatlarda $F(x_1) \le F(x_2)$ gatnasyk dogrudyr.

3. Eger-de X tötän ululygyň ähli kabul edýän bahalary (a,b) interwalyndan bolsa, onda

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \text{ bolanda,} \\ 1, & x \ge b \text{ bolanda.} \end{cases}$$

4. Paýlanyş funksiýasy çepden üznüksiz funksiýadyr, ýagny $\lim\limits_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$.

Bu häsiýetlerden gelip çykýan indiki netijeler hem uly ähmiýete eýedirler:

1. X tötän ululygynyň (a,b) interwalyndan bahalar almaklygynyň ähtimallygy $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň şu interwaldaky artdyrmasyna deňdir:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

2. Üznüksiz X tötän ululygyň kesgitli bir, mysal üçin x_1, bahany almaklygynyň ähtimallygy nola deňdir: $P(X = x_1) = 0$.

3. $F(x)$ paýlanyş funksiýasy $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ we $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ predel gatnaşyklara eýedir.

Mysal. X tötän ululygy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \quad \text{bolanda,} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \le \frac{1}{3} \quad \text{bolanda,} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \quad \text{bolanda.} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasyna eýe. Synagda X ululygyň (0;0,3) interwaldan baha almaklygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Belli bolşuna görä X tötän ululygyň (a,b) interwaldan baha almaklygynyň ähtimallygy onuň paýlanyş funksiýasynyň bu interwaldaky artdyrmasyna deňdir:

$$P(0<X<0{,}3)=F(0{,}3)-F(0)=\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0,3}-$$

$$-\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0}=\frac{0{,}9}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0{,}225.$$

Ýumuşlar

1. X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2 \text{ bolanda},\\ 0{,}5x, & 2<x\le 4 \text{ bolanda},\\ 1, & x>4 \text{ bolanda}.\end{cases}$$

bolsa, synagda X tötän ululygyň a) 0,5-den kiçi; b) 3,2-den kiçi; ç) 3,5-den kiçi bolmadyk bahalary almagynyň ähtimallyklaryny tapyň.

2. X tötän ululygy

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ bolanda},\\ x^2, & 0<x\le 1 \text{ bolanda},\\ 1, & x>1 \text{ bolanda}.\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Dört sany baglanyşyksyz synaglarda X ululygyň (0,25; 0,75) interwaldan laýyk üç gezek baha almagynyň ähtimallygyny hasaplaň.

3. X diskret tötän ululygy

X	2	3	5	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

paýlanyş kanuny bilen berlen. X ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapyň we onuň grafigini çyzyň.

§16. Üznüksiz tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň dykyzlygy

Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy üznüksiz, üznüksiz önüme eýe bolan bölek differensirlenýän funksiýa bolsa, oňa **üznüksiz tötän ululyk** diýilýär.

Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyş funksiýasynyň birinji önümine bu ululygyň **ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň dykyzlygy** diýilip aýdylýar: $f(x) = F'(x)$- paýlanyş funksiýasy *F(x)* bolan üznüksiz tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasydyr.

Kähalatda paýlanyş dykyzlygy "differensial funksiýa", "ähtimallyklaryň dykyzlygy", ýa-da bolmasa "dykyzlyk funksiýasy" diýilip hem atlandyrylýar.

Üznüksiz X tötän ululygyň (a,b) interwaldan baha almaklygynyň ähtimallygy $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ deňlik bilen kesgitlenilýär. Paýlanyş dykyzlygy belli bolanda, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ deňlige görä, paýlanyş funksiýasy tapylýar.

Paýlanyş dykyzlygynyň möhüm häsiýetlerinden indikileri belläliň:

1. Paýlanyş dykyzlygy otrisatel däldir, ýagny $f(x) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, hususan tötän ululygyň ähli bahalary (a,b) interwalyndan bolanda

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Mysalar

1. X üznüksiz tötän ululygynyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \quad \text{bolanda}, \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4} \quad \text{bolanda}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4} \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

bolsun. Onuň paýlanyşynyň dykyzlygyny tapmaly.

Çözülişi. Kesgitlemä görä, paýlanyş dykyzlygy paýlanyş funksiýasynyň birinji önümidir.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \quad \text{bolanda}, \\ 2\cos 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4} \quad \text{bolanda}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4} \quad \text{bolanda}. \end{cases}$$

($x=0$ nokatda $F'(x)$ önümiň ýoklugyny belläp geçeliň).

2. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} \alpha\cdot e^{-\alpha x}, & x\in(0,+\infty) \text{ bolanda}, \\ 0, & x\notin(0,+\infty) \text{ bolanda} \end{cases}$$

($\alpha>0$ hemişelik san) paýlanyş dykyzlygy bilen berlen. X tötän ululygyň (1;2) interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Ýokarda agzalan häsiýete görä gözlenilýän ähtimallyk

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \alpha\cdot e^{-\alpha x}dx=\alpha\int_1^2 e^{-\alpha x}dx=\alpha\cdot\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]\Bigg|_1^2=$$

$$=-e^{-\alpha x}\Big|_1^2=-e^{-2\alpha}+e^{-\alpha}=e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}=-e^{-\alpha}\left(1-e^{-\alpha}\right).$$

Ýumuşlar

1. Üznüksiz X tötän ululygy

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \quad \text{bolanda}, \\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \quad \text{bolanda}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Onuň paýlanyş dykyzlygyny tapyň.

2. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad \text{bolanda,}\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi \quad \text{bolanda,}\\ 0, & x>\pi \quad \text{bolanda}\end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe. Onuň a) paýlanyş funksiýasyny; b) synagda X ululygyň $(0,\pi)$ interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny tapyň.

3. X tötän ululygy

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad \text{bolanda,}\\ x, & 0<x\le 1 \quad \text{bolanda,}\\ 1, & x>1 \quad \text{bolanda}\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen, onuň paýlanyş dykyzlygyny tapmaly.

4. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{\pi}{6} \quad \text{bolanda,}\\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3} \quad \text{bolanda,}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3} \quad \text{bolanda}\end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygy bilen berlen, onuň paýlanyş funksiýasyny tapyň.

5. Üznüksiz X tötän ululygynyň paýlanyş dykyzlygy

$$f(x)=\begin{cases}c\sin 2x, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \quad \text{bolanda,}\\ 0, & x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \quad \text{bolanda}\end{cases}$$

bolsun. c hemişelik sany kesgitlemeli.

§17. Üznüksiz tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri

Kabul edýän bahalary bütin OX okunda paýlanan X üznüksiz tötän ululygyň **matematiki garaşmasy** $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ deňlik bilen hasaplanylýar. Bu ýerde $f(x)$– X tötän ululygyň paýlanyş dykyzlygy bolup, integral absolýut ýygnalýar diýilip hasap edilýär. Hususan, X tötän ululygynyň ähli bahalary (a,b) interwalyndan bolanda

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx$$

Diskret tötän ululyklaryň matematiki garaşmasy üçin ýerine ýetýän ähli häsiýetler bu ýagdaýda hem adalatlydyr.

X üznüksiz tötän ululygynyň bahalary bütin OX oky boýunça paýlanan bolsalar we

$Y=\varphi(X)$ bolsa, $M(Y)=M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$ deňlik bilen Y tötän ululygynyň matematiki garaşmasy hasaplanylýar.

X üznüksiz tötän ululygyň **modasy** diýilip onuň paýlanyş dykyzlygyna lokal maksimumy berýän $M_0(x)$ mümkin bahasyna aýdylýar.

X üznüksiz tötän ululygyň **medianasy** diýilip $P[X<M_e(X)]=P[X>M_e(X)]$ deňligi kanagatlandyrýan $M_e(x)$ mümkin bahasyna aýdylýar.

Şeýlelikde, ähli bahalary bütin OX oky boýunça paýlanan X üznüksiz tötän ululygyň **dispersiýasy**

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

deňlikler bilen hasaplanylýar.

Hususan, X tötän ululygynyň ähli bahalary (a,b) interwalyndan bolsa, onuň dispersiýasyny hasaplamak üçin

$$D(X)=\int_a^b[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

deňliklerden peýdalanylýar.

***k*-njy tertipli başlangyç we merkezi momentler** degişlilikde aşakdaky deňliklere görä hasaplanylýarlar:

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx;\quad \mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^k f(x)dx.$$

Hususan, X ululygyň ähli bahalary (a,b) interwalyndan bolanda

$$\nu_k=\int_a^b x^k f(x)dx;\quad \mu_k=\int_a^b[x-M(X)]^k f(x)dx.$$

Mysallar

1. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} c\left(x^2+2x\right), & x\in(0,1) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(0,1) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe.
a) näbelli c hemişeligi;
b) X tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny tapmaly.

Çözülişi. a) paýlanyş dykyzlygynyň $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ häsiýetinden peýdalansak,

$$c\int_0^1\left(x^2+2x\right)dx=c\int_0^1 x^2\,dx+2c\int_0^1 x\,dx=c\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+2c\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=$$

$$=c\left(\frac{1}{3}+1\right)=c\cdot\frac{4}{3}=1$$

deňlige ýagny $c=\dfrac{3}{4}$ baha eýe bolarys. Diýmek paýlanyş dykyzlygy

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}\left(x^2+2x\right), & x\in(0,1) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(0,1) \text{ bolanda} \end{cases}$$

görnüşe geler.

b) $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{3}{4}\int_0^1 x\left(x^2+2x\right)dx=\frac{3}{4}\left[\int_0^1 x^3dx+2\int_0^1 x^2dx\right]=$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+2\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right]=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3+8}{12}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{16}.$$

2. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6, & x\in(2,4) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(2,4) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe, onuň modasyny we medianasyny tapyň.

Çözülişi. $f(x)$ paýlanyş dykyzlygyny

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}(x-3)^2+\frac{3}{4}, & x\in(2,4) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(2,4) \text{ bolanda} \end{cases}$$

görnüşde ýazsak, $x=3$ nokatda onuň maksimuma eýedigini göreris. Bu diýildigi, $M_0(X)=3$ bolup, ony differensial hasaplanyş ýardamynda hem tapmak mümkindir.

Paýlanyş egrisi $x=3$ gönä görä simmetrik bolanlygyndan, X tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň hem-de medianasynyň gabat gelýändiklerini we olaryň 3-e deňdiklerini alarys: $M_0(X)=M_e(X)=3$.

Ýumuşlar

1. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & x\in(0,2) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(0,2) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe. Onuň matematiki garaşmasyny tapmaly.

2. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygy bilen berlen. $Y=\varphi(X)=X^2$ funksiýanyň paýlanyş dykyzlygyny hasaplamazdan, matematiki garaşmasyny tapyň.

3. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}, & x\in(3,5) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(3,5) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe. Onuň modasyny we medianasyny tapmaly.

4. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{25}x, & x\in(0,5) \text{ bolanda,} \\ 0, & x\notin(0,5) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygy bilen berlen. Onuň dispersiýasyny hasaplamaly.

5. Paýlanyş funksiýasy

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2 \quad \text{bolanda,} \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2 \quad \text{bolanda,} \\ 1, & x>2 \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

bolan tötän ululygyň dispersiýasyny hasaplamaly.

6. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(0,1) \quad \text{bolanda,} \\ 0, & x\notin(0,1) \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygy bilen berlen. Onuň birinji, ikinji, üçünji hem-de dördünji tertipli başlangyç we merkezi momentlerini hasaplamaly.

§18. Deňölçegli paýlanyş

Üznüksiz X tötän ululygynyň ähli alyp bilýän bahalarynyň ýerleşen (a,b) interwalynda onuň paýlanyş dykyzlygy $f(x)=\frac{1}{b-a}$ hemişelik sana deň bolup, ol interwalyň daşynda bolsa $f(x)$ nola deň baha eýe ýagdaýynda, X ululygy (a,b) interwalynda **deňölçegli paýlanan** diýilip aýdylýar. Şeýlelikde, (a,b) interwalynda deňölçegli paýlanan tötän ululygyň paýlanyş dykyzlygy

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \quad \text{bolanda,} \\ 0, & x\notin(a,b) \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

deňlikler bilen kesgitlenilýär.

Mysal. (a,b) interwalynda deňölçegli paýlanan X tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny hem-de dispersiýasyny hasaplamaly.

Çözülişi. Bize belli bolan formulalardan

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;\ D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

Şeýlelikde $M(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx+\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_b^{\infty} x\cdot 0dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

$$D(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx+\int_{-\infty}^{a}x^2\cdot 0dx+\int_b^{\infty}x^2\cdot 0dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Diýmek, $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$; $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ýumuşlar

1. (a,b) interwalda deňölçegli paýlanan X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny ýazyň.

2. (2,8) interwalda deňölçegli paýlanan tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny, orta kwadratik gyşarmasyny hasaplaň.

3. Baglanyşyksyz X we Y tötän ululyklary degişlilikde (a,b) we (c,d) interwallarda deňölçegli paýlanan bolsunlar, olaryň $X\cdot Y$ köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

§19. Normal paýlanyş

Üznüksiz X tötän ululygynyň paýlanyşynyň dykyzlygy $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, bu ýerde $a=M(X)$, $\sigma^2=D(X)$, görnüşde bolsa, onda oňa ***(a,σ)* parametrler bilen normal paýlanan** diýilýär. Bu ýagdaýda X tötän ululygynyň (α,β) interwaldan baha almagynyň

ähtimallygy $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - Laplas funksiýasynyň ýardamynda

$$P(\alpha<X<\beta)=\phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

deňlige görä hasaplanylýar.

Şeýle hem, normal paýlanan X tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň käbir $\delta>0$ sandan aşmazlygynyň ähtimallygyny hasaplamak üçin $P(|X-a|<\delta)=2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ düzgün adalatlydyr. Bu ýerden hususan, $a=0$ bolanda $P(|X|<\delta)=2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ deňlik alynar. Mysal işlenende $\phi(x)$ funksiýanyň bahalarynyn tablisasyndan peýdalanýarlar. **Üç sany sigmalar düzgüni** diýilýän $P(|X-a|<3\sigma)=2\phi(3)=0{,}9973$ deňlik amaly ähmiýete eýedir. Normal paýlanyşyň asimmetriýasy, ekssessasy, modasy we medianasy üçin $A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0,\ E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=0,\ M_0=a,\ M_e=a,$ bu ýerde $a=M(X),$ $\sigma^2=D(X)$, bolýandyklaryny belläliň.

Mysallar

1. (10,2) parametrler bilen normal paýlanan X tötän ululygynyň (12,14) interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Belli bolan, $P(\alpha<X<\beta)=\phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ formuladan peýdalansak, $\alpha=12,\ \beta=14,\ a=10,\ \sigma=2$ bahalary ornuna goýmak bilen taparys:

$$P(12<X<14)=\phi(2)-\phi(1)=0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359;$$

$$\phi(2)=0{,}4772 \text{ we } \phi(1)=0{,}3413$$

bahalar tablisadan tapyldy.

2. (20,10) parametrler bilen normal paýlanan X ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň üçden kiçi bolmaklygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä, $a=20,\ \sigma=10,\ \delta=3$ bolanlaryna görä,

$P(|X-a|<\delta)=2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ deňlikden taparys:

$$P(|X-20|<3)=2\phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\phi(0{,}3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358.$$

Ýumuşlar

1. $M(X)=2,\ D(X)=9$ bolanda X – normal paýlanan tötän ululygyň paýlanyş dykyzlygyny ýazmaly.

2. (20,5) parametrler bilen normal paýlanan tötän ululygyň (15,25) interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny hasaplaň.

3. Normal paýlanan X tötän ululygyň matematiki garaşmasy 25-e, onuň (10,15) interwaldan baha almagynyň ähtimallygy bolsa 0,2-ä deň. X ululygyň (35,40) interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny tapyň.
4. Ölçegiň tötän ýalňyşlyklary $a=0$ we $\sigma=20mm$ parametrler bilen normal paýlanan. Geçirilen üç baglanyşyksyz ölçegleriň hiç bolmanda birindäki ýalňyşlygyň absolýut ululygy boýunça 4mm-den aşmazlygynyň ähtimallygyny tapyň.
5. $X-(a,\sigma)$ parametrler bilen normal paýlanan tötän ululyk üçin islendik $t>0$ hemişelikde $P(|X-a|<\sigma\cdot t)=2\phi(t)$ deňligiň dogrudygyny görkeziň.

§20. Görkezijili paýlanyş

Paýlanyş dykyzlygy

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ bolanda,}\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \text{ bolanda}\end{cases} \qquad (\lambda>0 \text{ hemişelik})$$

funksiýa bolan X üznüksiz tötän ululygyna **görkezijili paýlanyşly** diýilýär. $\lambda>0$ hemişelik sana bolsa paýlanyşyň parametri diýilýär. λ parametrli **görkezijili paýlanyşa** eýe X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ bolanda,}\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \text{ bolanda}\end{cases}$$

görnüşde kesgitlenýändir. Bu paýlanyşa eýe bolan X tötän ululygyň (a,b) interwaldan baha almagynyň ähtimallygyny $P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ deňlige görä kesgitlemek mümkindir. Şeýle hem X ululygyň $M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$; $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ san häsiýetlendirijilerine eýedigini belläp geçeliň.

Mysal. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ bolanda,}\\ 3e^{-3x}, & x\geq 0 \text{ bolanda}\end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygy bilen görkezijili paýlanyşa eýe. Synagda X tötän ululygyň (0,13;0,7) interwaldan baha almagynyň ahtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Şerte görä, $\lambda=3;\ a=0{,}13,\ b=0{,}7$ bolandyklaryndan hem-de $P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ deňlikden we e^{-x} funksiýanyň

bahalarynyň tablisasyndan peýdalanyp taparys:

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-0{,}39} - e^{-2{,}1} = 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555.$$

Ýumuşlar:

1. Üznüksiz X tötän ululygy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ bolanda,} \\ 0{,}04e^{-0{,}04x}, & x \geq 0 \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe. Onuň synagda (1;2) interwaldan baha almagynyň atimallygyny tapyň.

2. a) paýlanyş dykyzlygy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ bolanda,} \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0 \text{ bolanda} \end{cases}$$

bolan hem-de

b) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ bolanda,} \\ 1 - e^{-0{,}1x}, & x \geq 0 \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasyna eýe bolan X üznüksiz tötän ululyklarynyň matematiki garaşmasyny tapmaly.

3. X tötän ululygy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ bolanda,} \\ 1 - e^{-0{,}4x}, & x \geq 0 \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasyna eýe. Onuň dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny hasaplaň.

VII bap. Tötän ululykdan we iki sany tötän ululyklardan funksiýanyň paýlanyşy

§21. Tötän ululykdan funksiýa

X tötän ululygyň her bir bahasyna Y tötän ulylygyň bir mümkin bahasy degişli bolsa, onda Y tötän ulylygy X tötän argumentden funksiýa diýilip aýdylýar we $Y = \varphi(X)$ görnüşinde ýazylýar. Eger-de X diskret tötän ululyk bolup, $Y = \varphi(X)$ funksiýasy monoton bolsa X-iň dürli bahalaryna Y tötän ulylygyň hem dürli bahalary degişlidir. Şunlukda, X we Y tötän ululyklaryň degişli bahalarynyň ähtimallyklary deňdirler, ýagny

x_i we $y_i = \varphi(x_i) - X$ we Y tötän ululyklaryň mümkin bolan degişli bahalary bolsalar, $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ deňlik ähli bahalar üçin dogrudyr. Eger $Y = \varphi(X)$ monoton däl funksiýa bolaýsa X-iň dürli bahalaryna Y tötän ulylygyň degişli bahalarynyň birmeňzeş bolmaklary hem mümkindir. Bu ýagdaýda Y -iň şeýle bahalarynyň ähtimallyklary X tötän ulylygyň degişli bahalarynyň ähtimallyklarynyň jemi görnüşinde tapylýar. Eger-de X üznüksiz tötän ululyk bolup, onuň paýlanyşynyň dykyzlygy $f(x)$ bolsa we $y = \varphi(x)$ differensirlenýän, ters funksiýasy $x = \psi(y)$ bolan, artýan ýa-da kemelýän funksiýa bolsa $Y = \varphi(X)$ ululygyň paýlanyşynyň dykyzlygy $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$ deňlikden kesgitlenýär.

Eger-de X-iň bahalarynyň interwalynda $y = \varphi(x)$ funksiýasy monoton bolmasa, bu interwaly her birinde $\varphi(x)$ funksiýa monoton bolar ýaly interwallara bölüp, olaryň her birinde paýlanyşlaryň $g_i(y)$ dykyzlyklaryny tapyp $g(y)$ dykyzlygy $g(y) = \sum g_i(y) -$ olaryň jemi görnüşinde kesgitleýärler. Mysal üçin $\varphi(x)$ funksiýasy iki sany interwalda monoton bolup, olardaky ters funksiýalar $\psi_1(y)$ we $\psi_2(y)$ bolsalar, Y-iň paýlanyş dykyzlygy $g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|$ ýaly kesgitlener.

Mysallar

1. X diskret ululygy

X	1	2	4
P	0,2	0,3	0,5

paýlanyş kanunyna eýe bolanda $Y = 3X$ tötän ululygyň paýlanyş kanunyny tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen $Y = 3X$ tötän ululygynyň mümkin bolan bahalaryny tapalyň. Olar $y_1 = 3 \cdot 1 = 3;\ y_2 = 3 \cdot 2 = 6;\ y_3 = 3 \cdot 4 = 12$ ululyklardyr. X-iň dürli bahalaryna Y-iň dürli bahalarynyň degişlidiklerini görýäris. Indi Y–iň bahalarynyň ähtimallyklaryny tapalyň.

Y -iň $y_1 = 3$ bahasynyň X-iň $x_1 = 1$ bahasynda alynýanlygyndan we $X = x_1 = 1$ wakanyň ähtimallygynyň 0,2-ä deňliginden $Y = y_1 = 3$ wakanyň ähtimallygynyň hem 0,2-ä deň bolmalydygy alynar. Edil şuňa meňzeşlikde $P(Y=6)=P(X=2)=0{,}3$; $P(Y=12)=P(X=4)=0{,}5$ ähtimallyklar alynýarlar. Şeýlelikde Y-iň paýlanyş kanuny

X	3	6	12
P	0,2	0,3	0,5

tablisa bilen beriler.

2. X diskret tötän ululygy

X	-1	1	2
P	0,2	0,3	0,5

paýlanyş kanunyna eýe bolanda $Y=X^2$ tötän ululygynyň paýlanyş kanunyny tapmaly.

Çözülişi. Y-iň mümkin bolan bahalary $y_1=x_1^2=(-1)^2=1$; $y_2=x_2^2=1^2=1$; $y_3=x_3^2=2^2=4$ bolýandyklaryndan X-iň dürli $x_1=-1$ we $x_2=1$ bahalaryna Y-iň birmeňzeş $y_1=y_2=1$ bahalary degişli bolanlary üçin $y=\varphi(x)=x^2$ funksiýasy (-1;2) interwalda monoton däl funksiýadyr) degişli ähtimallyklar

$$P(Y=1)=P[(X=-1)+(X=1)]=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}2+0{,}3=0{,}5;$$

$$P(Y=4)=P(X=2)=0{,}5$$

ululyklardyr. Şeýlelikde, $P(Y=1)$ ähtimallyk tapylanda $X=-1$ we $X=1$ wakalaryň (sygyşmaýan) jeminiň ähtimallygy görnüşinde tapylýandygyna ünsi çekmelidir. Diýmek Y tötän ululygy

Y	1	4
P	0,5	0,5

paýlanyş kanunyna eýedir.

3. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(a,b) \text{ bolanda,} \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe bolanda $Y=2X$ tötän ululygynyň paýlanyş dykyzlygyny tapmaly.

Çözülişi. $y=2x$ funksiýanyň artýanlygyndan we onuň differensirlenýänliginden ýokarda ýazylan $g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$ formuladan peýdalanarys. $x=\psi(y)$ funksiýasy $y=f(x)$-niň tersidir. Şeýlelikde, $\psi(y)=x=\frac{y}{2}$ bolanlygyndan $f[\psi(y)]=f\left(\frac{y}{2}\right)$. Şeýle hem, $\psi'(y)=\frac{1}{2}$ bolýanlygyndan, $|\psi'(y)|=\frac{1}{2}$.

Diýmek, $g(y)=\frac{f(y)}{2}$ aňlatmany alarys. $x\in(a,b)$ bolanda $y\in(2a,2b)$ bolar. Onda $g(y)=\begin{cases}0, & y\notin(2a,\ 2b)\ \ bolanda\\ \frac{1}{2(b-a)}, & y\in(2a,\ 2b)\ \ bolanda\end{cases}$

Ýumuşlar

1. X diskret tötän ululygy

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

paýlanyş kanunyna eýe bolanda $Y=2X+3$ tötän ululygynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

2. X diskret tötän ululygy

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

paýlanyş kanuny bilen berlende $Y=\sin X$ tötän ululygynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

3. X tötän ululygy $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ interwalda deňölçegli paýlanan. $Y=\sin X$ tötän ululygynyň paýlanyşynyň dykyzlygyny tapmaly.

4. X tötän ululygy $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ interwalda deňölçegli paýlanan. $Y=\cos X$ tötän ululygynyň paýlanyşynyň dykyzlygyny tapmaly.

5. X tötän ululygy

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ bolanda,} \\ \cos x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş dykyzlygyna eýe. $Y=X^2$ tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny hasaplamaly.

§22. Iki sany tötän ululyklardan funksiýalar

X we Y tötän ululyklaryň mümkin bolan bahalarynyň her bir jübütine Z tötän ululygyň bir mümkin bahasy degişli bolsa Z ululygyna X we Y **tötän argumentlerden (ululyklardan) funksiýa** diýip aýdýarlar we $Z=\varphi(X,Y)$ görnüşde ýazýarlar. Eger-de X we Y baglanyşyksyz, diskret tötän ululyklar bolsalar, $Z=X+Y$ funksiýanyň paýlanyş kanuny ýazmak üçin ilki bilen Z-iň ähli mümkin bolan bahalaryny X-iň her bir bahasy bilen Y-iň her bir mümkin bolan bahasyny goşmak arkaly alarys. Soňra bolsa bu goşulan bahalaryň ähtimallyklaryny X we Y tötän ululyklaryň goşulýan bahalarynyň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasyly görnüşinde taparys. Eger-de X we Y üznüksiz tötän ululyklar bolsalar $Z=X+Y$ tötän ululygyň paýlanyşynyň dykyzlygy $g(z)$

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \quad \text{ýa-da} \quad g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy$$

formulalaryň islendigi bilen hasaplanyp biliner. Bu ýerde $f_1(x)$ we $f_2(y)$ degişli argumentleriň paýlanyşlarynyň dykyzlyklarydyr. Eger-de X we Y baglanyşyksyz tötän ululyklar $f_1(x)$ we $f_2(y)$ paýlanyş dykyzlyklary bilen berlen bolsalar (X,Y) tötän nokadyň käbir D ýaýlada bolmaklygynyň ähtimallygy

$$P\big[(X,Y)\in D\big]=\iint_{(D)} f_1(x)f_2(y)dxdy$$

deňlik bilen hasaplanýandyr.

Mysal 1. Baglanyşyksyz, diskret X we Y tötän ululyklar

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	3	7
P	0,4	0,6

paýlanyş kanunlary bilen berlen. $Z = X + Y$ tötän ululygyň paýlanyşyny tapmaly.

Çözülişi. $Z = X + Y$ tötän ululygyň ähli mümkin bahalaryny we olaryň degişli ähtimallyklaryny tapalyň:

$$z_1 = 1 + 3 = 4;\ z_2 = 1 + 7 = 8;\ z_3 = 2 + 3 = 5;\ z_4 = 2 + 7 = 9.$$

$$P(Z = z_1) = P(X = 1, Y = 3) = P(X = 1)\cdot P(Y = 3) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$

$$P(Z = z_2) = P(X = 1, Y = 7) = P(X = 1)\cdot P(Y = 7) = 0{,}3\cdot 0{,}6 = 0{,}18;$$

$$P(Z = z_3) = P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2)\cdot P(Y = 3) = 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}28;$$

$$P(Z = z_4) = P(X = 2, Y = 7) = P(X = 2)\cdot P(Y = 7) = 0{,}7\cdot 0{,}6 = 0{,}42.$$

Soňky deňliklerden görnüşi ýaly hasaplamalarda X we Y tötän ululyklaryň baglanyşyksyzdyklaryndan peýdalanylýandyr. Diýmek,

Z	4	5	8	9
P	0,12	0,28	0,18	0,42

Barlagy: 0,12+0,28+0,18+0,42=1

Ýumuşlar

1. Baglanyşyksyz, diskret X we Y tötän ululyklar

a)

X	1	2	6
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

b)

X	4	5
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,2	0,8

paýlanyşlara eýe bolanlarynda $Z = X + Y$ tötän ululygyň paýlanyşyny tapmaly.

2. Baglanyşyksyz X we Y tötän ululyklar $f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$ $(0 \le x < +\infty)$, $f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}$ $(0 \le y < +\infty)$ paýlanyş dykyzlyklaryna eýe bolanlarynda $Z = X + Y$ jemiň paýlanyş dykyzlygyny tapyň.

VIII bap. Iki sany tötän ululyklaryň sistemasy

§23. Iki ölçegli tötän ululygyň paýlanyş kanuny

Iki ölçegli tötän ululyk diýilip, mümkin bolan bahalary (x, y) sanlar jübüti görnüşinde bolan (X, Y) tötän ululyga aýdylýar. Iki ölçegli tötän ululygy XOY tekizlikde tötän nokat ýaly geometriki düşündirmek mümkindir. X we Y düzüjileriň birlikde seredilmegi iki tötän ululygyň sistemasyny berýär. Düzüjileri diskret bolan iki ölçegli ululyga diskret, üznüksiz bolanlarynda bolsa, üznüksiz diýlip aýdylýar. Iki ölçegli tötän ululygyň mümkin bolan bahalary bilen onuň ähtimallyklarynyň arasyndaky degişlilige onuň ähtimallyklarynyň paýlanyş kanuny diýilýär. Diskret iki ölçegli tötän ululygyň paýlanyş kanuny: a) mümkin bolan bahalaryny we degişli ähtimallyklaryny özlerinde saklaýan iki sany setiri bolan tablisa görnüşinde; b) analitiki, mysal üçin, paýlanyş funksiýasy görnüşinde berilmegi mümkindir. **Iki ölçegli tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy** $F(x, y)$ diýlip her bir (x,y) jübüt üçin $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ deňlik bilen kesgitlenilýän hakyky bahaly funksiýa aýdylýar. Bu deňlik geometriki (X, Y) tötän nokadyň depesi (x, y) bolan we ondan çepde hem aşakda ýerlesen tükeniksiz kwadranta düşmekliginiň ähtimallygy ýaly düşündirilip biliner. Paýlanyş funksiýanyň käbir häsiýetlerini belläp geçeliň:

1. Islendik (x, y) üçin $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, y)$ her bir argumenti boýunça kemelmeýän funksiýadyr:

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, eger-de $x_2 > x_1$ bolanda;

$F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$, eger-de $x_2 > x_1$ bolanda.

3. $F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$.

4. $y = +\infty$ bolanda (X, Y) sistemanyň paýlanyş funksiýasy diňe X-iň paýlanyş funksiýasyna, eger-de $x = +\infty$ bolaýsa, onda diňe Y -iň paýlanyş funksiýasyna öwrülýär:

$F(x, +\infty) = F_1(x); F(+\infty, y) = F_2(y)$.

5.
$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$
$$= \left[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)\right] - \left[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right].$$

Üznüksiz iki ölçegli tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň dykyzlygy paýlanyş funksiýasyndan alynan ikinji gatyşyk $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ önüm görnüşinde kesgitlenilýär. Şeýlelikde,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y) dxdy \qquad P\left[(X, Y) \in D\right] = \iint_{(D)} f(x, y) dxdy$$

gatnaşyklar dogrudyr. Şeýle hem,

1) $f(x, y) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy = 1$

häsiýetler ýerine ýetýändirler.

Mysal. Iki ölçegli diskret tötän ululyk

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

paýlanyşa eýe. X we Y düzüjileriň paýlanyş kanunlaryny tapmaly.

Çözülişi. Sütünler boýunça ähtimallyklary jemläp, X-iň mümkin bahalarynyň ähtimallyklaryny alarys:

$P(X = 3) = 0{,}27$; $P(X = 10) = 0{,}43$; $P(X = 12) = 0{,}3$.

Diýmek,

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,3

Edil şuňa meňzeşlikde, ýöne setirler boýunça ähtimallyklary goşup, Y-iň paýlanyşyny taparys:

Y	4	5
P	0,55	0,45

Ýumuşlar

1. Iki ölçegli diskret tötän ululygyň paýlanyşy

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,3	0,11	0,21

tablisa bilen berlen. Düzüjileriň paýlanyşyny tapyň.

2. Eger-de

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \quad \text{ýa}-\text{da} \quad y<0 \quad \text{bolanda}, \\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0 \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy berlen bolsa (X,Y) tötän nokadyň $x=1, x=2,\ y=3,\ y=5$ göniler bilen çäklenen gönüburçlyga düşmeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

3. Eger-de

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \quad \text{ýa}-\text{da} \quad y<0 \quad \text{bolanda}, \\ \left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right) & x>0 \quad hem-de \quad y>0 \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy berlen bolsa (X,Y) sistemanyň ähtimallyklarynyň dykyzlygyny tapmaly.

§24. Iki sany tötän ululyklaryň üznüksiz sistemasynyň san häsiýetlendirijileri

(X,Y) sistemanyň düzüjileriniň paýlanyş dykyzlyklary belli bolanda, olaryň matematiki garaşmasy we dispersiýasy

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x,y)dxdy;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-M(Y)]^2 f_2(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[y-M(Y)]^2 f(x,y)dxdy$$

deňliklere görä hasaplanýarlar.

$$\nu_{k,s}=M\left[X^k Y^s\right]$$

$$\mu_{k,s}=M\left\{[X-M(X)]^k[Y-M(Y)]^s\right\}$$

deňlikler bilen (X,Y) sistemanyň $(k+s)$**-nji tertipdäki baslangyç** we **merkezi momentleri** hasaplanýarlar.

$\mu_{X,Y}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}$ deňlik bilen kesgitlenýän (1+1) tertipdäki merkezi momente **korrelýasion moment**, $r_{XY}=\mu_{XY}/\sigma_X\cdot\sigma_Y$ gatnaşyga bolsa **korrelýasiýa koeffisiýenti** diýilip aýdylýar. Korrelýasiýa koeffisiýenti ölçegsiz ululyk bolup, $|r_{XY}|\le 1$ gatnaşygy kanagatlandyrýar. Ol X we Y ululyklaryň arasyndaky çyzykly baglylygyň derejesini aňladýandyr. Korrelýasiýa koeffisiýenti absolýut ululygy boýunça bire näçe ýakyn bolsa, çyzykly baglanyşyk şonça güýçli, tersine 0-a ýakyn boldugyça, ol şonça gowşak bolýandyr.

Korrelýasion moment noldan tapawutly bolsa, X we Y ululyklaryna **korrelýasiýalaşýan**, tersine ýagdaýda bolsa **korrelýasiýalaşmaýan** tötän ululyklar diýilýär.

Ýumuşlar

1.

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \text{ýa-da} \quad y<0 \quad \text{bolanda,}\\ 36xye^{-\left(x^2+y^2\right)}, & x>0 \quad \text{we} \quad y>0 \quad \text{bolanda}\end{cases}$$

deňlikler bilen (X,Y) sistemanyň paýlanyşynyň dykyzlygy berlen. Düzüjileriň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

2. X we Y tötän ululyklar $Y=aX+b$ görnüşde baglanyşykly. Korrelýasiýa koeffiýentiniň absolýut ululygy boýunça bire deňdigini subut ediň.

§25. Häsiýetlendiriji funksiýalar, olaryň ýönekeý häsiýetleri.

Tötän ululyklaryň öwrenilmeginde olaryň san häsiýetlendirijileri bolan matematiki garaşmanyň dispersiýanyň ähmiýetli orna eýediklerini, şunlukda olaryň additiwlik häsiýetleriniň oňaýly mümkinçilikleri döredýändiklerini göz öňünde tutmak bilen tötän ululyklaryň başga-da bar bolan häsiýetlendirijilerini kesgitlemek hem-de tapmak barada umumy meseläniň goýulmagy we öwrenilmegi tebigydyr. Tötän ululyklaryň häsiýetlendirijileriniň arasyna,matematik garaşmadan hem-de dispersiýadan tapawutlulukda,uçdantutma ähli tötän ululyklar üçin kesgitli tükenikli baha eýe bolýanlarynyň has-da ähmiýetli boljakdyklaryny bellemek gerek.

Bu meseläniň çözülişi tötän ululygyň häsiýetlendiriji funksiýasy düşünjesiniň girizilmeginden durýar.

Kesgitleme ξ tötän ululygyň häsiýetlendiriji funksiýasy diýlip ähli t-hakyky nokatlardaky bahalary

$$f(t) = Me^{it\xi} = M(\cos t\xi + i\sin t\xi)$$

deňlige görä kesgitlenilýän kompleks bahaly *f(t)* funksiýasyna aýdylýar.

Häsiýetlendiriji funksiýanyň kesgitlemesindäki matematiki garaşmanyň barlygy bolsa e^{itx} funksiýanyň üznüksizliginden hem-de onuň $|e^{itx}| = 1$ çäklenenliginden gelip çykýandyr.

Häsiýetlendiriji funksiýalaryň indiki ýönekeý häsiýetlerini belläp geçeliň.

1) $f(0)=1$ hem-de ähli $-\infty<t<+\infty$ nokatlarda $|f(t)| \le 1$ deňsizlik adalatlydyr;
2) $f(-t)=\bar{f}(t)$;
3) *f(t)*- häsiýetlendiriji funksiýa bütin sanlar okunda deňölçegli çäklenendir.

Bu häsiýetleriň ilkinji ikisi häsiýetlendiriji funksiýanyň kesgitlemesinden aňsatlyk bilen alynýandyrlar:

$$f(0) = Me^{i\cdot 0\cdot\xi} = M\cdot 1 = 1;$$

$$f(-t) = Me^{-it\xi} = M(\cos t\xi - i\sin t\xi) = M\cos t\xi - iM\sin t\xi =$$
$$= \overline{M\cos t\xi + iM\sin t\xi} = \bar{f}(t)$$

Getirlen häsiýetleriň üçünjisiniň adalatlydygy indiki deňsizlikden alynar. Goý A>0 san ýeterlik uly bolup, *f(t)* häsiýetlendiriji funksiýa degişli *F(x)*-paýlanyş funksiýasy üçin

$$F(A) - F(-A) \ge 1 - \varepsilon$$

deňsizlik berlen ε>0 san bilen ýerine ýetýän bolsun.

Sanlar okunyň islendik t_1 we t_2 nokatlarynda

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{it_1x} - e^{it_2x}\right| dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) =$$

$$= \int_{-A}^{A} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-A} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) +$$

$$+ \int_{A}^{+\infty} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) =$$

$$= \int_{-A}^{A} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) + 2\underline{P}(|\xi| > A)$$

gatnaşygyň alynýanlygyndan, şoňa görä-de ilki A-ny uly saýlamagyň hasabyna

$$2\underline{P}(|\xi| > A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

edilip bilinjekliginden, soňra bolsa, bu A sany üýtgetmezden $\delta = \delta(\varepsilon)$ sany

$|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ bolanda

$$\left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gatnaşyk ýerine ýeter ýaly saýlamak bilen

$$\int_{-A}^{A} \left|e^{ix(t_1-t_2)} - 1\right| dF(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizligi alyp $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ bolan nokatlar üçin

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$$

bolýandygy alynar.

4) ξ_1,ξ_2- baglanşyksyz tötän ululyklar üçin olaryň $\xi_1+\xi_2$ jeminiň häsiýetlendiriji funksiýasy goşuljylaryň häsiýetlendiriji funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

Hususan, $S=\xi_1+\xi_2+...+\xi_k$ jemiň her bir ξ_k goşuljysy özünden öňde gelýän goşuljylaryň $\xi_1+\xi_2+...+\xi_{k-1}$ jemi bilen baglanşyksyz bolsa,onda S jemiň häsiýetlendirji funksiýasy goşuljylaryň häsiýetlendirji funksiýalarnyň köpeltmek hasylyna deňdir.

Hakykatdan hem, $f_{\xi_1}(t), f_{\xi_2}(t), f_{\xi_1+\xi_2}(t)$-degişlilikde $\xi_1,\xi_2,\xi_1+\xi_2$ tötän ululyklaryň häsiýetlendirji funksiýalary bolsalar

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = Me^{it(\xi_1+\xi_2)} = M\left(e^{it\xi_1}\cdot e^{it\xi_2}\right) = Me^{it\xi_1}\cdot Me^{it\xi_2} =$$
$$= f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)$$

deňlik adalatlydyr.

5) Häsiýetlendiriji funksiýanyň modulynyň kwadraty hem häsiýetlendiriji funksiýadyr.

Hakykatdan hem, ξ we η baglanşyksyz hem-de birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar bolsalar, olaryň ξ-η tapawudynyň häsiýetlendiriji funksiýasy $f_{\xi-\eta}(t)$, kesgitlemä görä

$$f_{\xi-\eta}(t) = Me^{it(\xi-\eta)} = Me^{it\xi}\cdot Me^{-it\eta} = f_\xi(t)\cdot \overline{f_\xi}(t) = \left|f_\xi(t)\right|^2$$

Mysal-1: ξ tötän ululygy matematiki garaşmasy a we dispersiýasy δ^2 bolan normal paýlanyşa eýe bolanda, onuň häsiýetlendirijisi funksiýasy

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}dx$$

deňlige görä hasaplanýar.

$$z = \frac{x-a}{\delta} - it\delta \qquad (x-a = \delta z + it\delta^2)$$

ornuna govma *f(t)*-ni

$$f(t) = e^{-\frac{t^2\delta^2}{2}+iat}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+it\delta}^{+\infty+it\delta} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

görnüşe getirer. Ýöne islendik α-hakyky san bilen

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

bolýandygyna görä,

$$f(t) = e^{iat-\frac{\delta^2 t^2}{2}}$$

alynar.

Mysal-2: ξ tätön ululygy otrisatel bolmadyk bitin san bahalary

$$\underline{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\dots (\lambda > 0\ hemişelik)$$

ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsa, onuň häsiýetlendiriji funksiýasy

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \underline{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

bolar.

Bu ýagdaýda,

$$M\xi = \lambda, \ D\xi = \lambda$$

bolýandyklaryny aňsatlak bilen tapyp bolar.

Mysal-3: ξ ululygy her birinde A wakanyň ýüze çykmagy p bolan n sany baglanşyksyz synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň sany bolsun.

ξ tötän ululygy her biri diňe iki sany 0 ýa-da 1 bahalary degişlilikde q=1-p, p ähtimallyklar bilen kabul edýän n sany baglanşyksyz tötän ululyklaryň jemi görnüşinde aňlatmak mümkindir:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

bu ýerde ξ_k tötän ululygy k-njy synagda A wakanyň ýüze çykandygyna ýa-da çykmandygyna baglylykda 1 ýa-da 0 bahalary kabul edýändir. ξ_k tötän ululygynyň häsiýetlendiriji funksiýasy

$$f_k(t) = Me^{it\xi_k} = e^{it\cdot 0} \cdot q + e^{it\cdot 1} \cdot p = q + pe^{it}$$

bolandygyna görä häsiýetlendiriji funksiýalaryň häsiýetinden

$$f(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(t) = (q + pe^{it})^n$$

ξ tötän ululygyň häsiýetlendiriji funksiýasydygyny alarys.

Öwrülme formulasy.

Öwrülme formulasy diýlip atlandyrylýan indiki tassyklamany getireliň.

Teorema: Goý $f(t)$ we $F(x)$ - ξ tötän ululygyň degişlilikde häsiýetlendiriji hem-de paýlanyş funksiýalary bolsun. Onda $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň her bir üznüksizlik nokatlarynda

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)dt$$

predel gatnaşyk adalatlydyr.

Bu tassyklamadan ýeke-täklik teoremasy diýilýän, amaly ulanylyşyň esasyny berýän indiki tassyklama gelip çykýar.

Teorema: Paýlanyş funksiýasy özüniň häsiýetlendiriji funksiýasy bilen ýeke-täk kesgitlenýär.

Munuň şeýledigini almak üçin öwrülme formulasynyň tassyklamasynda $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň her bir x üznüksizlik nokadynda

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}f(t)dt$$

gatnaşygyň alynýanlygy aňladýar. Bu ýerde y boýunça predel $F(y)$ paýlanyş funksiýasynyň üznüksizlik nokatlarnyň köplügi boýunça alynýar.

Soňky teoremanyň ulanylyşlarynyň käbir mysallaryna garalyň.

Mysal-1: Normal paýlanyşly ξ_1 we ξ_2 baglanşyksyz tötän ululyklaryň $\xi_1+\xi_2$ jemi hem normal paýlanyşa eýedir.

Hakykatdan hem, eger $M\xi_1=a_1$; $D\xi_1=\delta_1^2$; $M\xi_2=a_2$; $D\xi_2=\delta_2^2$ bolsalar, onda ξ_1 we ξ_2 tötän ululyklaryň häsiýetlendiriji funksiýalary, degişlilikde

$$f_1(t)=e^{ia_1t-\frac{\delta_1^2t^2}{2}},\quad f_2(t)=e^{ia_2t-\frac{\delta_2^2t^2}{2}}$$

bolarlar. Onda, häsiýetlendiriji funksiýalaryň häsiýetinden, $\xi_1+\xi_2$ jemiň häsiýetlendiriji funksiýasy

$$f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)=e^{it(a_1+a_2)-\frac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_2^2)t^2}$$

bolar. Ol matematiki garaşmasy a_1+a_2 , dispersiýasy bolsa $\delta_1^2+\delta_2^2$ bolar, normal paýlanyşly tötän ululygyň häsiýetlendiriji funksiýasydyr. Şeýlelikde, ýeke-täklik teoremasyna görä, $\xi_1+\xi_2$ jemiň normal paýlanyş kanunyna eýedigi hakynda netijä geleris.

Aslynda, ters tassyklamanyň-da, ýagny iki sany baglanşyksyz tötän ululyklaryň jemi norma paýlanyşa eýe bolanda goşuljylaryň her biriniň hem normal paýlanyşly tötän ululyklar bolýandygyny G.Kramer tarapyndan görkezilendigini belläp geçmek gerek.

Mysal-2: Baglanşyksyz ξ_1 we ξ_2 tötän ululyklar diňe otrisatel bolmadyk bitin san bahalaryny

$$\underline{P}(\xi_1 = k) = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \quad hem-de$$

$$\underline{P}(\xi_2 = k) = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsunlar. Onda $\xi_1$weξ_2 tötän ululyklaryň häsiýetlendiriji funksiýalary, degişlilikde

$$f_1(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \quad hem-de \quad f_2(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$$

bolup $\xi_1+\xi_2$ jemiň häsiýetlendiriji funksiýasy

$$f(t) = f_1(t)\cdot f_2(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

bolýar. Bu ýagdaýda, ýeke-täklik teoremasyna görä, $\xi_1+\xi_2$ jemiň $\lambda_1+\lambda_2$ parametrli Puasson paýlanyşly tötän ululykdygyny alarys:

$$\underline{P}(\xi_1 + \xi_2 = k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Ters tassyklama-da adalatlydyr(A.Raýkow): Eger baglanşyksyz tötän ululyklaryň jemi Puasson kanuny bilen paýlanan bolsa, onda jemiň her bir goşuljysy hem Puasson paýlanyşly tötän ululykdyr.

Dördünji bölüm
Matematiki statistika
Statistiki derňewler
1. Statistiki görkezijileri ýygnamak we aýyl-saýyl etmek

Dürli jemgyýetçilik hem-de durmuşy ykdysady meselelerni, şeýle hem bolup geçýän käbir tebigy prosessleri öwrenmek mak–sady bilen ýörite statistiki derňewler geçirilýär. Her bir statistiki derňew öwrenilýän hadysa ýa-da prosess hakynda maksadalaýyk görkezijileri, informasiýalary ýygnamakdan başlanýar. Işiň şu bölegi **statistiki gözegçilik basgançagy** diýlip atlandyrylýar.

Statistiki gözegçilik netijesinde alynan görkezijileri umumy–laşdyrmak hem-de tertipleşdirmek maksady bilen ilki olary, käbir nyşana görä, aýyl-saýyl edip böleklere bölýärler.

Indiki mysala garalyň. 8-nji synp okuwçylarynyň matematika dersini özleşdirişlerini kesgitlemek maksady bilen 7 sany ýumuş–dan durýan test düzüpdirler. Okuwçylaryň ýerine ýetiren işlerini barlamak bilen, mugallym

bar bolan 25 okuwçynyň her biriniň dogry jogaplarnyň sanyny anyklapdyr. Netijede sanlaryň
4, 5, 6, 4, 3, 5, 7, 5, 1, 0, 4, 5, 6, 7, 5, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 5, 4, 7, 6 hatary alynan. Bu hatary derňemek üçin, onuň sanlaryny kemel–meýän görnüşde ýerleşdirmek bilen, tertipleşdireleň: 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7.

Alynan bu görkezijileri ýokarky setirinde dogry jogaplaryň sanlarny, aşaky setirinde bolsa, ol sanlaryň hatardaky **ýygylyklaryny**, ýagny gaýtalanyşlarny ýazmak bilen iki sany setirleri bolan indiki tablisa görnüşinde aňladalyň:

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	1	2	1	3	6	6	3	3

Şeýle usulda alnýan tablisa **ýygylyklar tablisasy** diýlip atlandyrylýar.

Bu mysaldaky ýygylyklar tablisasynyň aşaky setirindäki ýygy–lyklaryň jemi 25-e, ýagny barlanylan işleriň sanyna deňdir.

Aslynda, gözegçilik netijeleri ýygylyklar tablisasy görnüşinde aňladylanda, ýygylyklaryň jemi görkezijileriň sanyna deň bolmalydyr.

Statistiki derňew geçirilende görkezijiler ýygnalyp, olar aýyl-saýyl edilenden soň, olary umumylaşdyryjy görkezijileri öwrenmeklige başlaýarlar. Şunlukda orta arifmetiki ululyk, moda, mediana, gerim ýaly statistiki häsiýetlendirijiler şeýle görkezi–jileriň ýönekeýleridir.

Ýokardaky mysaldaky gözegçiligiň netijelerini öwreneliň. Orta arifmetigi tapmak üçin dogry jogaplaryň umumy sanyny okuwçylaryň sanyna, ýagny 25-e böleris:

$$\frac{0\cdot1+1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+4\cdot6+5\cdot6+6\cdot3+7\cdot3}{25}=\frac{106}{25}=4{,}24$$

Diýmek, okuwçylar ortaça 4,24 sany ýumuşlara dogry jogap beripdirler. Bu diýildigi, olaryň ortaça ýumuşlaryň 0,6 bölegine dogry jogap berendiklerini görkezýär.

Okuwçylaryň arasynda ýumuşlaryň ählisine (7-sine-de) dogry jogap berenleri-de, birine-de dogry jogap bermänleri-de bar. Onda 7-0=7 bolup, görkezijiler hatarynyň gerimi 7-ä deňdir. Şeýlelikde, berlen dogry jogaplaryň iň uly we iň kiçi sanlarynyň tapawudy 7 bolup, ol kiçi däl, uludyr. Şeýle-de tablisadan görnüşi ýaly, dogry jogaplaryň sanlarynyň arasynda 4 we 5 sanlar köp gabat gelýärler. Şoňa görä-de hataryň modasy ikidir: 4 we 5 sanlar, olaryň her biri hatarda 6 gezek gelýär.

Hatarda 25 sany sanlar bolandygyna görä, onuň medianasy degişli tertipleşdirilen hataryň 13-nji sanydyr: ol 4 bolar.

Kähalatlarda ýokarda getirlen ýygylyklar tablisasyndan tapawutlylykda **otnositel ýygylyklar tablisasy** diýilýän tablisadan hem gözegçilik netijelerini derňemäge peýdalanýarlar. Ol ýygylyklar tablisasyndan diňe aşaky setirinde ýygylyklary ýazman, olaryň ornuna görkezijileriň ýygylyklarynyň görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşyklarynyň ýazylmagy bilen tapawutlanýandyr. Şol prosentlerde aňladylýan gatnaşyklar bolsa, **otnositel ýygylyklar** diýlip atlandyrylýar.

Biziň ýokardaky mysalymyzda görkezijileriň umumy sany 25 bolar: 25 okuwçynyň her biri üçin testi ýerne ýetirişi barada bir görkeziji alynýar.

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Otnositel ýygylyk, %	4	8	4	12	24	24	12	12

Tablisanyň aşaky setirindäki otnositel ýygylyklaryň jeminiň 100% bolmalydygy düşnüklidir.

Eger-de hatar gaýtalanyşlary seýrek bolan köpsanly görkezijilerden durýan bolsa, onda ýygylyklar tablisasy, şonuň ýaly-da otnositel ýygylyklar tablisasy tagaşyksyz uly bolýar. Şeýle ýagdaýlarda gözegçilik netijesiniň derňewi üçin **interwallar hataryny** gurýarlar. Munyň üçin hataryň iň uly we iň kiçi bahalarnyň arasyndaky tapawudy birnäçe deň böleklere bölýärler we alnan ululygy tegelekläp interwalyň uzynlygyny tapýarlar. Birinji interwalyň başlangyjy deregine ýa iň kiçi görkeziji, ýa-da ondan uly bolmadyk iň ýakyn bitin sany alýarlar. Her bir interwala düşýän görkezijileriň sanyny ýa-da olaryň prosentlerde aňladylýan görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşygyny görkezýärler. Şunlukda her bir interwalyň çägi indiki interwala degişli diýip hasap edilýär: interwalyň çäklerini görkezýän sanlaryň birinjisi şol interwala degişli, ikinjisi bolsa indiki interwala degişlidir.

Indiki mysala garalyň. Alynan 100 sany elektrolampalarynyň sagatlarda hasaplanan iş dowamlyklaryny öwrenmekçi bolup, hasabat ýöredipdirler. Bu gözegçiligiň netijeleri aşaky tablisany beripdir.

Iş dowamlygy, sagat	Ýygylygy
100 sagatdan az	3
100 − 200	8
200 − 300	8
300 − 400	10
400 − 500	10
500 − 600	11
600 − 700	15
700 − 800	13
800 − 900	11
900 − 1000	7
1000 − 1100	3
1100 − 1200	1

Elektrolampalaryň ortaça iş dowamlygyny tapmak üçin, bu tablisanyň her bir interwalyny onuň orta nokady bilen çalşyryp, aşakdaky ýygylyklar tablisasyny düzýäris:

Iş dowamlygy, sagat	Ýygylygy
50	3
150	8
250	8
350	10
450	10
550	11
650	15
750	13
850	11
950	7
1050	3
1150	1

Alynan bu hataryň orta arifmetigi
$(50\cdot3+150\cdot8+250\cdot8+350\cdot10+450\cdot10+550\cdot11+650\cdot15+750\cdot13+$
$+850\cdot11+950\cdot7+1050\cdot3+1150\cdot1):100=(150+1200+2000+3500+$
$+4500+6050+9750+9750+9350+6650+3150+1150):100=$
$=57200:100=572.$

Şeýlelikde biz elektrolampalaryň ortaça iş dowamlygynyň 572 sagat bolmagy hakynda netije alarys.

Ýokarda garalan mysallaryň ilkinjisinde 25 sany 8-nji synp okuwçylarnyň matematika dersinden taýýarlyklaryny barlamak üçin test ýumuşlaryny ýerine ýetirişleri öwrenilipdi. Şol barlag mekdebiň, ýa-da bolmasa, şäheriň mekdepleriniň 8-nji synp okuwçylarynyň ählisi üçin hem geçirilmegi mümkindir. Ýöne, köpçülikleýin derňewleriň islendiginiň, belli bir derejede, uly çykdajylary hem-de guramaçylyk bilen baglanyşykly meseleleriň çözülmeklerini talap edýändigi bellidir. Mysal üçin, ilat ýazuwy, pasport çalyşmak we başga-da ş.m. dürli resminamalary taýýar–lamak ýaly meseleler çözülmeklerini talap edýärler. Şeýle ýagdaý-lar-da uçdantutma derňewi geçirmegiň agyr düşýändigini göz öňünde tutmak bilen **saýlama** derňewi geçirýärlerler. Saýlama derňewinde öwrenilýän **baş toplum** diýlip atlandyrylýan ähli görkezijiler toplumyndan onuň **saýlama toplumy** diýilýän käbir bölegi saýlanylýar hem-de öwrenilýär. Şunlukda saýlama toplumy öwrenilýän baş toplumyna häsiýetli aýratynlyklaryň ählisini özünde saklaýan bolmalydyr. Şeýle häsiýetli saýlama toplumyna **reprezentatiw** ýa-da **wekilçilikli** diýlip aýdylýar.

Ýigrimi bäş müň sany saýlawçylary bolan okrugda üç sany bäsdeşiň saýlawda haýsy biriniň ýeňmekliginiň mümkingadar–lygyny barlamakçy bolup müň sany saýlawçylardan kime ses bermekçidikleri hakynda pikir sorama geçirilýän bolsun. Şunlukda saýlanyp alynan müň sany saýlawçylar toplumy reprezentatiw bolmalydyr: olaryň arasynda ýaş hem, ýaşuly hem, erkek hem, aýal hem, pensionerler hem, dürli durmuşy şertleri we bilimleri bolan adamlar bolmalydyrlar. Tersine ýagdaýda, statistiki derňewiň nädogry netijelere alyp gelmegi mümkindir.

Şeýle-de uçdan tutma derňewiň öwrenilýän obýektleri ýa zaýalaýan, ýa-da olaryň ýok bolmagyna alyp gelýän ýagdaýlarynda hem saýlama derňewinden peýdalanýarlar. Mysal üçin, zawodyň öndüren ähli elektrolampalarynyň bozulman işlemekleriniň dowamlyklary öwrenilmekçi bolsa, elektrolampalary uçdantutma öwrenmek mümkin däldir, sebäbi şeýle jähtden iş tutmak olaryň ählisiniň zaýalanmagyna alyp geler: olary tä köýýänçä ýakmaly bolar.

Mysallar

1. Şäheriň ähli mekdepleriniň 9-njy synp okuwçylaryna algebra–dan barlag işli hökmünde 7 sany ýumuşlardan durýan test hödürle-nipdir. Şäher Bilim müdirligi barlag işiniň jemi boýunça dogry jogaplaryň hem-de olaryň eýeleriniň sanlary boýunça indiki tablisany alypdyr

Dogry jogaplaryň sany	Okuwçylaryň sany
0	0
1	19
2	21
3	73
4	137
5	321
6	229
7	102

Bu tablisa görä, 1% takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

2. Tokarlaryň bäşisi hem çalşyk dowamynda şol bir detaly taýýarlapdyrlar. Olaryň ýasan detallarnyň sany boýunça indiki tablisa alnypdyr.

Tokarlar	1	2	3	4	5
Ýasalan detallaryň sany	13	22	18	24	25

Bu tablisa görä, 1% takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

3. 50 sany okuwçylaryň türkmen dilinden ýazan işlerini barlamak bilen olaryň işlerinde bar bolan orfografiki ýalňyşlary hasaba almak bilen alnan maglumatlary ýygylyklaryň indiki tablisasy görnüşinde aňladypdyrlar:

Ýalňyşlar sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	3	4	11	13	9	6	2	2

Goýberilen ýalňyşlaryň sanlarynyň iň uly tapawudy näçe? Bu okuwçylar üçin ýalňyşlar sanynyň haýsysy mahsus? Bu sowallara jogap bermek üçin statistiki häsiýetlendirijileriň haýsylaryny peýdalanandygyňyzy aýdyň.

4. Telekeçi hödürlenen önümiň hilini kesgitlemekçi bolup, olaryň üýşmeginden 100 sany gutyny alyp, olaryň her biriniň içindäki kemisli önümleriň sanyny hasaba almak bilen indiki tablisany doldurypdyr:

Kemisli önümler sany	0	1	2	3	4	5	6
Gutylar sany	15	29	27	19	7	2	1

Görkezijiler hatarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapmaly. Bu statistiki häsiýetlendirijileriň amaly manylaryny düşündiriň.
5. Turistik syýahata gatnaşýanlary ýaşlary boýunça häsiýetlen–dirmek bilen indiki tablisa düzülen (ýaş interwallarnyň her bir
çägi özünden soň gelýän interwala degişlidir)

Ýaşy, ýyl hasabynda	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38
Syýahatçylar sany	45	37	10	6	2

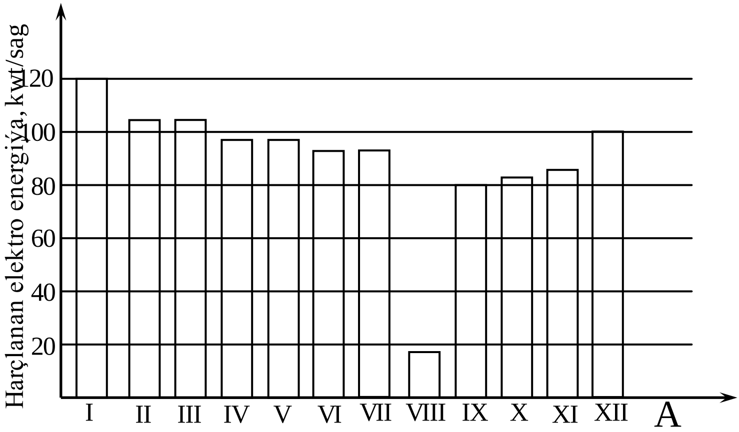
Her bir interwaly ony ýarpa bölýän nokady bilen çalşyryp, syýahatçylaryň orta ýaşyny tapmaly.

Statistiki maglumatlary suratlandyrmak

Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileri suratlandyrmak üçin olary şekillendirmäniň dürli usullary giňden ulanylýar.
Görkezijiler hataryny suratlandyrmagyň belli usullarynyň biri hem sütünlerdäki diagrammany gurmakdyr.
Görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini ýa-da statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny şekillendir–mekçi bolanlarynda sütünlerdäki diagrammadan peýdalanýarlar.
Mysal üçin, maşgalanyň ýylyň dowamynda harç eden elektroenergiýasy, 5 kwt/sag takyklygynda, indiki tablisa bilen berlen bolsun.

Aý	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Harçlanan elektro–energiýa, kwt/sag	120	105	105	90	90	85	85	15	80	90	95	100

Bu tablisa degişli sütünlerdäki diagramma 12 sany gönüburçluklardan durmak bilen, olar erkin saýlanan, birmeňzeş esasly bolup biri-birinden deňdaşlykda ýerleşendirler. Şunlukda her bir gönüburçlugyň beýikligi, saýlanan masştaba görä, berlen aýdaky harçlanan elektroenergiýanyň mukdaryna deňdir. Şeýlelikde aşakdaky şekile eýe bolarys:



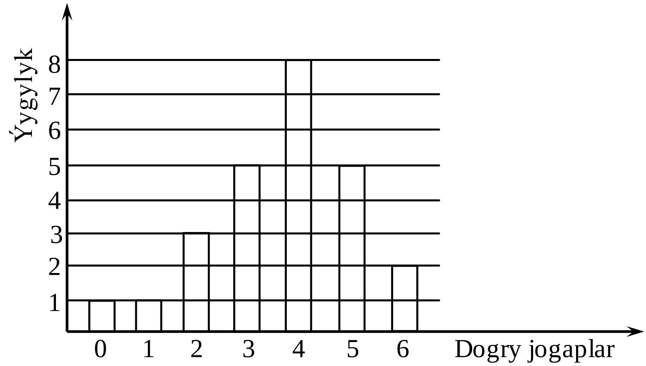
1-nji surat

Eger–de statistiki derňewde alnan görkezijileriň birmeňzeşlerini toplaşdyrmak bilen aýyl–saýyl edilip, her toparyň degişli ýygylygy (otnositel ýygylygy) anyklanan bolsa, onda her bir topar sütünlerdäki diagrammada beýikligi, saýlanan masştaba görä, degişli ýygylyga (otnositel ýygylygy) deň bolan gönüburçlyk ýaly şekillendirilýär.

Goý 8–nji synpyň 25 sany okuwçysynyň 6 sany ýumuşlardan duran test boýunça barlag işleriniň netijeleri indiki tablisa görnüşde aňladylan bolsun.

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6
Ýygylygy	1	1	3	5	8	5	2

Degişli sütünlerdäki diagramma her sütüniň beýikligi, saýlanan masştaba görä, görkezijiler hataryndaky dogry jogaplaryň berlen sanynyň gaýtalanyş ýygylygyna deň bolup, aşakdaky ýaly aňladylar:

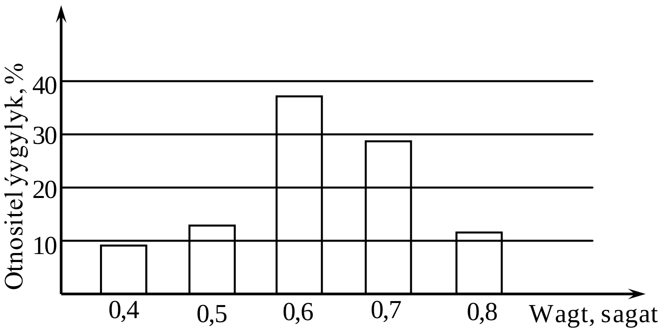


2-nji surat

Krossa gatnaşýan ylgaýjylaryň aralygy geçen wagtlaryna görä, 0,1 sagat takyklygynda, otnositel ýygylyklaryň indiki tablisasy alnan:

Wagt, sagat	Otnositel ýygylyk, %
0,4	9
0,5	14
0,6	37
0,7	29
0,8	11

Bu tablisa degişli bolan sütünlerdäki diagramma indiki şekile eýe bolar:



3-nji surat

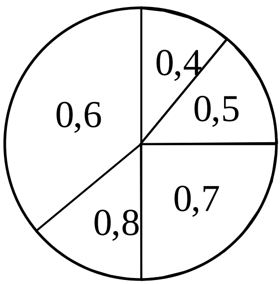
Öwreniliýän görkezijileriň köplüginiň toparlarynyň arasyndaky gatnaşyklary suratlandyrmak üçin tegeleklerdäki diagramma–lardan peýdalanmak oňaýlydyr.

Eger–de statistiki derňewiň netijesi otnositel ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda tegelekdäki diagrammany gurmak üçin tegelegi görkezijileriň her bir toparynyň otnositel ýygylygyna proporsional bolan merkezi burçlara eýe sektorlara bölýärler.

Ýokardaky krossa gatnaşyjylaryň aralygy geçmäge sarp eden wagtlaryna görä ylgaýjylaryň paýlanşynyň tegelekdäki diagrammasyny guralyň. $360°:100=3{,}6°$ bolýandygyna görä bir prosente $3{,}6°$–a deň merkezi burç degişli bolar. Şoňa görä–de her bir topar üçin degişli merkezi burçy taparys:

$$3{,}6°\cdot 9=32{,}4°$$
$$3{,}6°\cdot 14=50{,}4°$$
$$3{,}6°\cdot 37=133{,}2°$$
$$3{,}6°\cdot 29=104{,}4°$$
$$3{,}6°\cdot 8=28{,}8°$$

Tegelegi tapylan bu merkezi burçlary bolan sektorlara bölekläp, indiki suratdaky, tegelekdäki diagrammany alarys:



4–nji surat

Eger–de statistiki derňewiň netijesi ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda ilki bilen otnositel ýygylyklar tablisasyna geçip soňra tegelekdäki digrammany gurmak oňaýlydyr.

Şeýle hem, tegelekdäki diagrammany öwrenilýän görkezijiler köplügi az sanly toparlara böleklenýän ýagdaýynda synlamak bilen köplüge baha bermäge mümkinçilik berýändigini belläp geçeliň. Tersine ýagdaýda

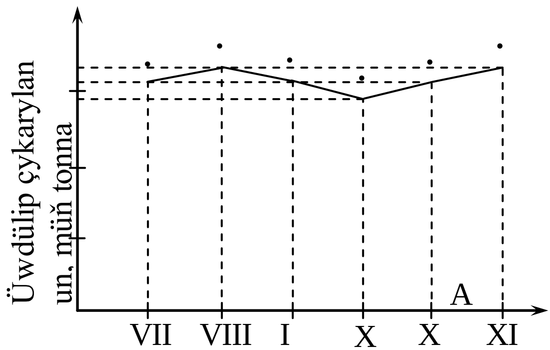
tegelekde biri–beýlekisinden, göräýmäge tapawutlanmaýan köpsanly sektorlar saklanyp,
olara degişli toparlara diagramma garap baha bermek kynlaşýar.

Statistiki görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini köplenç **poligon** ýardamynda şekillendirýärler. Poligony gurmak üçin koordinatalar tekizliginde abssissalary wagt pursatlary, ordinata–lary bolsa olara degişli statistiki görkezijiler bolan nokatlary alyp, ol nokatlary yzygiderlikde kesimler bilen birleşdirip poligon diýip atlandyrylýan döwük çyzygy alýarlar

Un kombinatynyň 2008–nji ýylyň ikinji ýarymynda üwäp çykaran ununyň aýlardaky mukdarlary indiki tablisada berilýär:

Aý	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Uwelip çykarylan un, müň tonna	3,1	3,2	3,1	2,8	3,1	3,2

2008–nji ýylyň ikinji ýarymynda un kombinatynda un üwelme–giniň ýagdaýyny şekillendirýän poligon indiki 5–nji surat görnü–şinde alnar:



5–nji surat

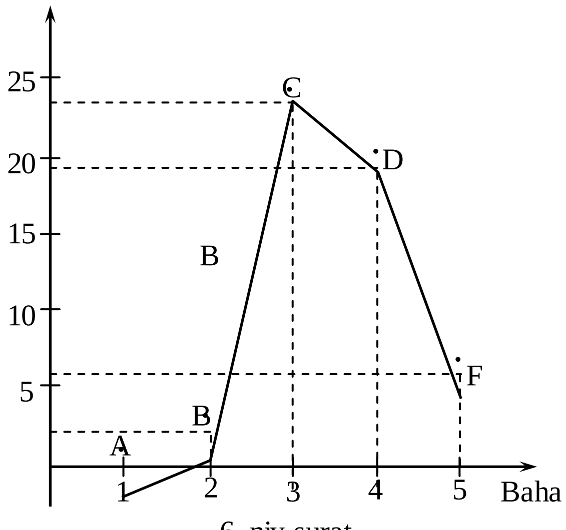
Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny suratlandyrmak üçin hem poligonlar ulanylýarlar.

Eger–de statistiki derňew netijesinde alnan görkezijiler ýygylyklar ýa–da otnositel ýygylyklar tablisasy görnüşinde berlen bolsalar, onda poligon gurmak üçin abssissalary statistiki görkezijiler, ordinatalary bolsa olara degişli ýygylyklar ýa–da otnositel ýygylyklar bolan nokatlary gurup, olary yzygiderli ýagdaýda kesimler bilen birleşdirýärler.

Algebradan barlag işini 50 sany okuwçy ýerne ýetirip, barlagyň netijesi okuwçylaryň alan bahalaryna görä aýyl–saýyl edip toplanyp indiki ýygylyklar tablisasy bilen berlen:

Bahalar	1	2	3	4	5
Ýygylyklar	0	2	23	19	6

Koordinatalar tekizliginde A(1;0), B(2;2), C(3;23), D(4;19), E(5;6) nokatlar gurup olary yzygiderlikde kesimler bilen birleş–dirip barlag işiniň bahalarynyň paýlanşynyň poligonyny alarys:



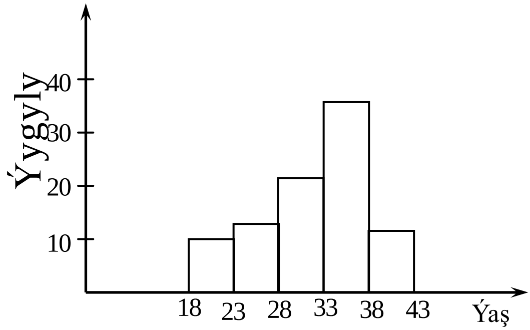
6–njy surat

Görkezijileriň interwallarda berlen hatarny **gistogramma** arkaly şekillendirýärler.Gistogramma sepleşen gönüburçluklardan durýan basgançak şekildir. Her bir gönüburçlugyň esasy interwalyň uzynlygyna, beýikligi bolsa degişli ýygylyga ýa–da otnositel ýygylyga deňdir. Şeýlelikde gistogrammada sütünlerdäki diagrammadan tapawutlylykda gönüburçluklaryň esaslary erkin alynman interwalynyň uzynlygy bilen takyk kesgitlenýändirler.

Eger–de sehiň işçileriniň ýaşlary boýunça paýlanyşlary

Ýaşy	18–23	23–28	28–33	33–38	38–43
Ýygylyk	12	16	24	37	11

tablisa bilen berilýän bolsa, onda şol paýlanyşyň gistogrammasyny gursak, ol indiki şekilde bolar.



7-nji surat

Bu şekildäki gönüburçluklaryň beýikliklerniň jemi derňelýän köplügiň elementleriniň umumy sanydyr, ýagny sehde işleýän işçileriň sanyna deňdir.

Mysallar:

1. Daýhan birleşiginiň miweli bag ekilen ýerlerniň 52%-ini üzüm, 18%-ini alma, 11%-ini erik, 10%-ini şetdaly, 9%-ini bolsa garaly tutýar.

Miweli bag ekilen ýerleriň meýdanlarynyň paýlanyşyny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

2. Mekdebiň bir synpyndaky okuwçylaryň algebradan çärýek bahalary indiki ýaly:

„5”–6 sany okuwçy,
„4”–9 sany okuwçy,
„3”–14 sany okuwçy,
„2”–1 sany okuwçy.

Okuwçylaryň bu çärýek bahalary boýunça paýlanyşlaryny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

3. Welaýatyň daýhan birleşiklerinde gowaçanyň hasyllylygyny öwrenmek bilen indiki tablisa alnan;

Hasyllylyk s/ gektar	23	24	25	26	27	28	29	30
Daýhan birleşikleriniň sany	4	6	14	13	18	20	17	8

Gowaçanyň hasyllylygy boýunça daýhan birleşikleriniň paýlanşynyň poligonyny guruň.

4. Obanyň maşgalalarynyň agzalarynyň sany boýunça paýlanyşlaryny öwrenmek maksady bilen 100 sany maşgalalaryň birmeňzeş sandaky agzalary bolanlarynyň otnositel ýygylygyny görkezmek bilen

Maşgala agzalarynyň sany	2	3	4	5	6	7	8	9
Otnositel ýygylyk, %	7	9	16	28	19	14	5	2

tablisa alnypdyr. Otnositel ýygylyklaryň poligonyny guruň.

5. Mekdebiň ähli uçurymlarynyň boýlaryny ölçemek bilen

Boýy, sm	155–160	160–165	165–170	170–175	175–180	180–185
Ýygylygy	4	12	31	28	15	8

tablisa alnan (boýlary görkezýän interwallaryň çakleri özünden soňky gelýän interwala degişlidir).

Uçurymlaryň boýlary boýunça paýlanşynyň gistogrammasyny guruň.

Edebiýat

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.- М., Наука, 1967.

2. Боровков А. А. Теория вероятностей.- М., Наука, 1976.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М., Высшая школа, 1977.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М., Высшая школа, 1979.

5. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука,1969.

6. Гнеденко Б.В. Математика в современном мире.- М., Просвещение, 1980.

7. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М., Наука,1964.

8. Ивашов–Мусатов О.С. Теория вероятностей и математи–ческая статистика. –М., Наука, 1979.

9. Кордемский Б.А Математика изучает случайности. - М., Просвещение 1975.

10. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.– М., Наука, 1974.

11. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. – М.,Мир, 1969.

I goşundy

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasy

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

I goşundynyň dowamy

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

II goşundy

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasy

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1 ,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1 ,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1 ,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1 ,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1 ,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1 ,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,8238	1 ,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54.	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Matematiki statistika