N.Gurbanmämmedow, O.Aşyrow,
A.Aşyrow, M.Almazow

PSIHOLOGIÝADA MATEMATIKANYŇ USULLARY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary
üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

A ş g a b a t - 2 0 1 0

Okuw kitabyna analitik geometriýa, ýokary algebra, we matematiki analiziň bölümleri (analiziň başlangyjy, bir üýtgeýänli funksiýanyň differensial we integral hasabyýýeti, san we funksional hatarlar), birinji we ýokary tertipli ady differensial deňlemeler, ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen çözülip görkezilen mysallar getirilýär.

Dosent O.Aşyrowyň redaksiýasy bilen

S Ö Z B A Ş Y

Matematikanyň usullarynyň durmuşda duş gelýän köp amaly meseleleri çözmekde giňden ulanylmagy, tebigy ylymlaryň ugurlaryndan, şol sanda psihologiýa boýunça hünär alýan talyplardan “Ýokary matematika” dersini oňat bilmeklerini we onuň usullaryny ele alyp, tebigy ylymlarda duş gelýän dürli görnüşdäki meseleleri çozmeklikde giňden ulanmaklygy başarmagyny talap edýär.

Bu okuw kitaby uniwersitetiň psihologiýa hünärini alýan talyplaryna niýetlenip ýazyldy. Oňa analitik geometriýanyň göni çyzykda koordinatalar, tekizlikde koordinatalar sistemasy, tekizlikde birinji we ikinji tertipli algebraik çyzyklar bölümleri; ýokary algebranyň kesgitleýjiler we olaryň kömegi bilen çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözülişi, matrisalar, olaryň häsiýetleri we olar bilen geçirilýän amallar, wektor algebrasy bölümleri; kompleks sanlar düşünjesi we olar bilen geçirilýän amallar; matematiki analiziň funksiýa, funksiýanyň predeli we üznüksizligi, funksiýanyň önümi we differensialy we olaryň ulanylyşyny görkezýän bölümler, kesgitsz we kesgitli integrallar, olaryň ulanylyşlary hem-de hususy däl integrallaryň bölümleri, şeýle hem san we funksional hatarlar düşünjeleri; birinji weýokary tertipli ady differensial deňlemeler, olaryň çözüliş usullary; ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen bölümde beýan edilen düşünjeleriň ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär we olaryň çözülişleri görkezilýär. Şeýle hem her bölümiň ahyrynda talyplar bilen amaly sapaklar geçilende we özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

Kitapda ýygy-ýygydan duş gelýän “bar bolup”(“tapylyp”) sözleriniň ýerine barlygy aňladýan $\exists$ belgi, “islendik” (“her bir”) sözleriniň ýerine bolsa umumylygy aňladýan $\forall$ belgi ulanylýar. $A \Rightarrow B$ ýazgy A sözlemden B sözlemiň gelip çykýandygyny aňladýar. Eger-de, onuň üstesine B sözlemden A sözlem hem gelip çykýan bolsa, onda ol $A \Leftrightarrow B$ ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin, $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in B,\ P \ni m \exists$ gysgaça ýazgylar “islendik ε uludyr nol”, “islendik x degişli B”, “P degişli m tapylyp” diýlip okalýar. Teoremanyň subudynyň, mysalyň çözülişiniň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin $\triangleleft$ we $\triangleright$ belgiler ulanylýar.

I bap. ANALITIK GEOMETRIÝA WE ÝOKARY ALGEBRA

I.1. TEKIZLIKDE ANALITIK GEOMETRIÝA

§ 1.1. Göni çyzykda koordinatalar

1. Ugrukdyrylan kesim. Käbir göni çýzyk alalyň we onuň kesgitleýän iki ugurlarynyň birini saýlap, ony položitel ugur, beýlekisini otrisatel ugur hasap edeliň. Položitel ugry kesgitlenen göni çyzyga ok diýilýär. Onuň islendik kesiminiň uzynlygyny ölçemek üçin ol okda uzynlyk birligini, ýagny masştab alalyň. Uçlary A we B nokatlar bolan kesime seredeliň. Eger A we B nokatlaryň haýsysynyň ol kesimiň başlangyjy, haýsynyň ahyrydygy görkezilen bolsa, onda oňa ugrukdyrylan kesim diýilýär. Kesimiň ugry diýlip başlangyçdan ahyra tarap bolan ugur hasap edilýär. Başlangyjy A we ahyry B nokat bolan ugrukdyrylan kesim $\overline{AB}$ bilen, onuň uzynlygy bolsa $\left|\overline{AB}\right|$ ýa-da $\left|AB\right|$ bilen belgilenýär. Dürli bolan iki A we B nokatlar iki sany $\overline{AB}$ we $\overline{BA}$ ugrukdyrylan kesimleri kesgitleýär. Eger A we B nokatlar gabat gelýän bolsa, onda $\overline{AA}$ kesime nol kesim diýilýär. Ugry okuň položitel ugry bilen gabat glende goşmak alamaty bilen, otrisatel ugry bilen gabat gelende aýyrmak alamaty bilen alynýan ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň uzynlygyna şol kesimiň ululygy diýilýär we AB bilen belgilenýär, şunlukda $AB = -BA$ deňlik dogrudyr. Bu kesgitlemäniň esasynda okda islendik ýagdaýda ýerleşýän dürli A, B we C nokatlaryň ugrukdyrylan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ kesimleriniň ululyklary üçin

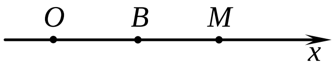
$$AB + BC = AC \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetýär.

2. Koordinatalar oky. Käbir x göni çyzykda O we B nokatlary belläliň (1-nji surat) we olara degişlilikde koordinatalaryň başlangyç we birlik nokatlary diýeliň.

Göni çyzykda $\overline{OB}$ kesim bilen ugurdaş položitel ugry saýlap alalyň.

Položitel ugry, hasap başlangyjy we uzynlygy ölçemek üçin masştab birligi kesgitlenen Ox göni çyzyga koordinatalar oky diýilýär. Şol okuň erkin M nokady üçin (1-nji surat) ugrukdyrylan $\overline{OM}$ kesimiň ululygyna M nokadyň koordinatasy diýilýär. Eger ol nokadyň koordinatasy x



1-nji surat

bolsa, onda kesgitleme boýunça

$$x = OM \tag{2}$$

bolar. Şunlukda, $M(x)$ ýazgy x-iň M nokadyň koordinatasydygyny aňladýar.

Şeýlelikde, eger koordinatalar okunyň nokady berlen bolsa, onda şol nokadyň koordinatasy bolan sany görkezmek bolar, şeýle hem berlen san üçin koordinatalar okunda şol san koordinatasy bolan ýeke-täk bir nokady gurmak bolar. Diýmek, koordinatalar okunyň nokatlary bilen hakyky sanlaryň köplüginiň arasynda özara birbahaly degişlilik gurnalandyr. Şoňa görä hakyky sanlaryň köplügine san oky we her bir hakyky sana san okunyň nokady hem diýilýär.

Ugrukdyrylan kesimiň ululygyny we onuň uzynlygyny şol kesimiň başlangyjynyň we ahyrynyň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar.

Eger okuň $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ iki nokady berlen bolsa, onda ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ululygy we onuň uzynlygy degişlilikde

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \quad |M_1M_2| = |x_2 - x_1| \tag{3}$$

formulalar boýunça aňladylýär.

Hakykatdan-da, koordinatalar okunyň O, M_1, M_2 nokatlary üçin (1) formula esasynda

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2$$

deňligi we (2) formula esasynda $x_1 = OM_1$, $x_2 = OM_2$ deňlikleri ýazmak bolar. Olardan bolsa $M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$ deňlik gelip çykýar. Ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň uzynlygynyň onuň ululygynyň absolýut ululygyna deňligi üçin $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$ bolar.

M_1 we M_2 nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\rho(M_1, M_2)$ bilen hem belgilenýär. Şonuň üçin (3) formulalaryň ikinjisi

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|$$

görnüşde ýazylýar. $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ deňligiň esasynda koordinatalar okunyň iki nokadynyň arasyndaky uzaklygy tapmaklyk (3) formula esasynda olaryň koordinatalarynyň birinden beýlekisini aýryp, tapawudyň modulyny almaklygy aňladýar.

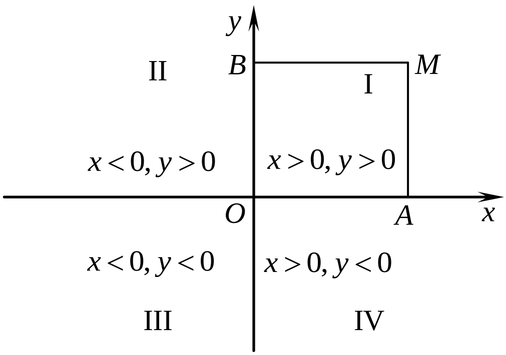
1-nji mysal. Berlen $M_1(2)$, $M_2(-7)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy we ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ululygyny tapmaly.

◁ $x_1 = 2,\ x_2 = -7$ üçin (3) formulany ulanyp taparys:

$$\rho(M_1,\ M_2) = |-7-2| = |-9| = 9,\ \ M_1M_2 = -7-2 = -9\,.\ ▷$$

§ 1.2. Tekizlikde koordinatalar sistemasy

1.Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy. Umumy O başlangyjy we birmeňzeş masştab birligi bolan özara perpendikulýar Ox we Oy oklar tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny emele getirýär. Sol sistemadaky Ox oka absissa oky we Oy oka ordinata oky diýilýär. Ol oklaryň kesişme nokadyna koordinatalar başlangyjy, olaryň ýerleşýän tekizligine koordinatalar tekizligi diýilýär we Oxy bilen belgilenýär.Goý, seredilýän tekizlikde erkin M nokat berlen bolsun. Şol nokatdan Ox we Oy oklaryna degişlilikde MA we MB perpendikulýarlary geçireliň (2-nji surat). Şunlukda, perpendikulýarlaryň oklar bilen kesişmeginden alnan ugrukdyrylan $\overline{OA}$ we $\overline{OB}$ kesimleriň OA we OB ululyklaryna degişlilikde M nokadyň gönüburçly x we y koordinatalary diýilýär, ýagny $x = OA,\ y = OB$. M nokadyň x we y koordinatalaryna degişlilikde şol nokadyň absissasy we ordinatasy diýilýär. M nokadyň koordinatalarynyň x we y bolýandygy $M(x,\ y)$ ýazgyda aňladylýar. Şunlukda, ýaýyň içinde ilki onuň absissasy, ikinji ordinatasy görkezilýär. Absissa okunda ýerleşýän nokatlar üçin $y = 0$ we ordinata okunda ýerleşýän nokatlar üçin $x = 0$, koordinatalar başlangyjy üçin bolsa

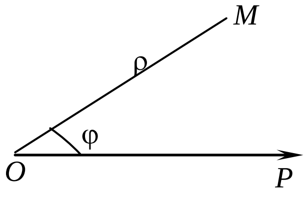


2-nji surat

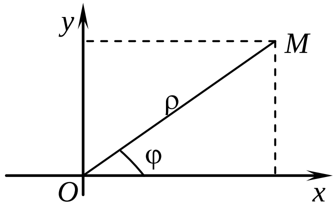
$x = 0,\ y = 0$. Koordinatalar oklary tekizligi dört böleklere bölýär. Olara çärýekler ýa-da kwadrantlar diýilýär. Olaryň nomerlenişi we şolarda ýerleşýän nokatlaryň koordinatalarynyň alamatlary 2-nji suratda görkezilendir.

Şeýlelikde, tekizligiň her bir M nokadyna onuň gönüburçly koordinatalary atlandyrýan tertipleşdirilen sanlaryň $(x,\ y)$ jübüti degişli we tersine, sanlaryň her bir $(x,\ y)$ jübütine tekizlikde koordinatalary şol sanlar bolan ýeke-täk nokat degişlidir. Beýle diýildigi tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasy tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügi bilen sanlaryň jübuti arasynda özära birbahaly degişliligi gurnaýar we ol geometrik meseleleri çözmekde algebraik usullary ulanmaklyga ýardam berýär.

2. Polýar koordinatalar sistemasy. Tekizlikde polýus atlandyrylýan O nokada we şol nokatdan çykýan hem-de polýar oky atlandyrylýan OP şöhlä seredeliň. Şeýle hem kesimleriň uzynlygyny ölçemek üçin masştab birligi we polýusyň töwereginde aýlawyň položitel ugry kesgitlenen hasap edeliň. Tekizligiň islendik M nokady bilen O polýusyň arasyndaky ρ uzaklyga şol nokadyň polýar radiusy, OM bilen gabat getirmek üçin OP polýar oky sagat diliniň hereketiniň garşysyna (položitel ugra) aýlamaly bolýan φ burça bolsa polýar burçy diýilýär (3-nji surat). Şunlukda, ρ we



3-nji surat



4-nji surat

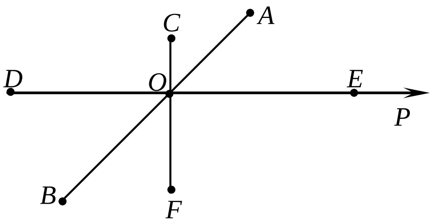
φ sanlara M nokadyň polýar koordinatalary diýilýär. ρ sana onuň birinji koordinatasy, φ sana - ikinji koordinatasy diýilýär we $M(\rho,\ \varphi)$ bilen belgilenýär. Polýus üçin $\rho = 0$ bolup, ýöne φ kesgitlenmedikdir. Adatça ol koordinatalar $0 \le \rho < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi$ çaklerde üýtgeýär hasap edilýär. Ýöne käbir hallarda 2π - den uly bolan burçlara, şeýle-de otrisatel, ýagny polýar okdan sagat diliniň hereketi boýunça alynýan bürçlara hem seretmeli bolýar.

Nokadyň polýar koordinatalary bilen gönüburçly koordinatalarynyň baglanyşygyny görkezmek üçin koordinatalar başlangyjy polýus bilen we položitel ýarym Ox oky polýar oky bilen gabat gelýän gönüburçly koordinatalar sistemasyna seredeliň (4-nji surat). Ol suratdan görnüsi ýaly M nokadyň gönüburçly $(x,\ y)$ koordinatalary bilen onuň $(\rho,\ \varphi)$ polýar koordinatalary şeýle baglanyşykdadyr:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi\ . \qquad (4)$$

Bu formula tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalaryny onuň polýar koordinatalary bilen aňladýar. Ol formuladan nokadyň polýar koordinatalaryny onuň dekart koordinatalary bilen aňladýan şeýle formula alynýar: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2-nji mysal. Polýar koordinatalarynda berlen $A\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3,\ -\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $C\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D(3,\ \pi)$, $E(4,\ 0)$, $F\left(2,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$ nokatlary gurmaly we koordinatalar başlangyjy polýus bilen we Ox okunyň položitel ugry polýar oky bilen gabat gelýän dekart koordinatalarynda ol nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.



5-nji surat

⊲ Polýar koordinatalarynda A nokady gurmak üçin O polýusdan OP polýar okuna $\varphi = \pi/4$ burç boýunça şöhle geçireliň (5-nji surat) we şol şöhlede uzynlygy 2-ä deň bolan $[OA]$ kesimi guralyň. Şol kesimiň soňky ujy $A(2,\ \pi/4)$ nokat bolar. Beýleki $B,\ C,\ D,\ E,\ F$ nokatlar hem edil şolar ýaly gurulýar (5-nji surata seret). Berlen nokatlaryň dekart koordinatalaryny tapmak üçin (4) formuladan peýdalanarys. A nokat üçin

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\quad y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\quad A\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right).$$

Edil şonuň ýaly beýleki nokatlaryň dekart koordinatalary tapylýar:

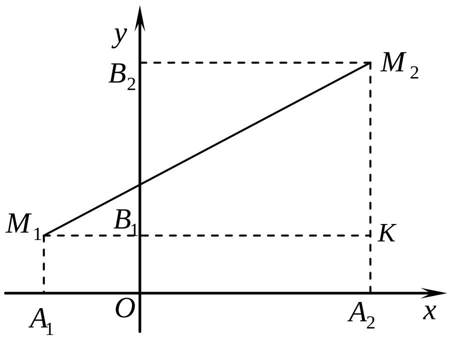
$$B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ C(0,\ 1),\ D(-3,\ 0),\ E(4,\ 0),\ F(0,\ -2).$$

§ 1. 3. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri

1. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk. Tekizligiň işlndik $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_2,\ y_2)$ iki nokadynyň arasyndaky $\rho = \rho(M_1,\ M_2)$ uzaklyk

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (5)$$

formula bilen kesgitlenýär.



6-njy surat

Ony görkezmek üçin M_1 we M_2 nokatlardan Ox, Oy oklaryna perpendikulýarlary geçirip, olaryň esaslaryny $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2$ bilen, perpendikulýarlaryň kesişme nokadyny K bilen belgiläliň (6-njy surat). Pifagoryň teoremasyny gönüburçly M_1KM_2 üçburçluga ulanyp,

$$\rho = \sqrt{M_1K^2 + M_2K^2} \qquad (6)$$

formulany alarys. Bu ýerde üçburçlugyň M_1K, M_2K katetleriniň $|M_1K|,\ |M_2K|$ uzynlyklary koordinata oklarynyň ugrukdyrylan $\overline{A_1A_2},\ \overline{B_1B_2}$ kesimleriniň uzynlyklary bilen gabat gelýär. Şoňa görä (3) formula boýunça

$$M_1K = A_1A_2 = x_2 - x_1,\quad M_2K = B_1B_2 = y_2 - y_1$$

deňlikleri we olaryň esasynda (6) deňlikden (5) formulany alarys.

M_1 nokadyň koordinatalaryň başlangyjy bilen gabat gelýän hususy haly üçin (5) formula

$$\rho(O,\ M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \qquad (7)$$

görňuşi alar.

3-nji mysal. $M_1(5,\ -2)$, $M_2(8,\ -6)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy we M_2 nokatdan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklygy tapmaly.

◁ Berlen nokatlar üçin $x_1 = 5,\ y_1 = -2,\ x_2 = 8,\ y_2 = -6$ bolýandygy sebäpli, (5) we (7) formulalar esasynda taparys:

$$\rho(M_1,\ M_2) = \sqrt{(8-5)^2 + ((-6)-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\rho(O,\ M_2) = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10. \ ▷$$

2. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek. Tekizlikde dürli M_1 we M_2 nokatlary alyp (M_1 nokady birinji, M_2 nokady ikinji hasap edip) olar arkaly položitel ugry kesgitlenen göni çyzyk geçireliň we masştab birligini alalyň. Goý, M şol göni çyzygyň M_2 bilen gabat gelmeýän käbir nokady bolsun. Onda

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \tag{8}$$

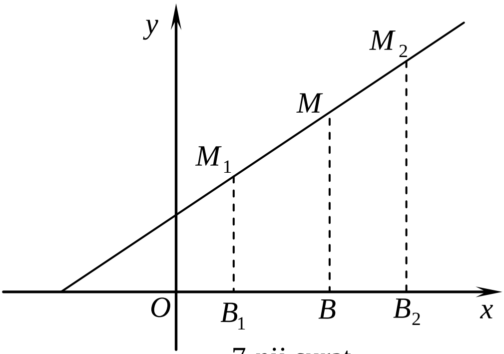
sana M nokadyň ugrukdyrylan $\overline{M_1M_2}$ kesimi bölýän gatnaşygy diýilýär, bu ýerde $M_1M,\ MM_2$ görkezilen okuň ugrukdyrylan $\overline{M_1M},\ \overline{MM_2}$ kesimleriniň ululyklarydyr. Okuň položitel ugry başgaça kesgitlenende ýa-da masştab birligi başgaça alnanda hem (8) gatnaşyk üýtgemeýär, çünki iki halda hem sanawjy we maýdalawjy şol bir sana köpeldilýär. Eger M nokat M_1 we M_2 nokatlaryň arasynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda > 0$ bolar. Bu halda M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi içinden bölýär diýilýär. Eger M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimiň daşynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda < 0$ bolar we bu halda M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi daşyndan bölýär diýilýär. $\lambda = -1$ bolup bilmez, çünki tersine, ol deňlik ýerine ýetende $M_1M = -\ MM_2$ deňlik alnar we şonuň esasynda $M_1M + MM_2 = 0$ bolar, ýagny $M_1M_2 = 0$, ýöne ol deňlik M_1 we M_2 nokatlar gabat gelende bolup biler, ol bolsa şerte garşy gelýär. Eger M nokat M_1 nokat bilen gabat gelýän bolsa, onda $\lambda = 0$. Eger M nokat M_2 nokada ýakynlaşýan bolsa, onda $|\lambda|$ san artar.

Kesimi berlen gatnaşykda bölmek meselesi şeýle okalýar: M nokadyň $\overline{M_1M_2}$ kesimi böleklere belýän λ gatnaşygy berlen. Şol nokadyň koordinatalaryny tapmaly. Ol aşakdaky tassyklama esaslanýar.

Eger $M(x,\ y)$ nokat $M_1(x_1,\ y_1)$ we $M_2(x_2,\ y_2)$ nokatlar bilen çäklenen $\overline{M_1M_2}$ kesimi λ gatnaşykda bölýän bolsa, onda ol nokadyň koordinatalary

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{9}$$

formula boýunça kesgitlenýär.



7-nji surat

$\lhd$ $M_1,\ M,\ M_2$ nokatlardan Ox okuna perpendikulýar göýberip, olaryň esaslaryny $B_1,\ B,\ B_2$ bilen belgiläliň (7-nji surat). Onda parallel göni çyzyklaryň arasyndaky kesimleriň proporsionallyk häsiýeti boýunça (8) şertiň esasynda

$$\frac{B_1B}{BB_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

deňligi alarys. (3) formula esasynda alynýan $B_1B = x - x_1,\ BB_2 = x_2 - x$ deňlikleri ulanyp, bu deňligi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

görnüşde ýazmak bolar. Ondan bolsa $\lambda \neq -1$ şerti ulanyp, (9) formulanyň birinjisini alarys. Onuň ikinjisi edil şuňa meňzeşlikde ($M_1,\ M,\ M_2$ nokatlardan Oy okuna perpendikulýar geçirip) subut edilýär. $\rhd$

Eger M nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimiň ortasynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda = 1$ bolar we bu halda (9) formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{10}$$

görnüsi alar.

4-nji mysal. Berlen $M_1(-1,\ -2)$, $M_2(3,\ 4)$ nokatlar boýunça M_1M_2 göni çyzykda M_1 nokada M_2 nokatdan üç esse ýakyn bolan we $\overline{M_1M_2}$ kesimiň daşynda ýerleşýän M nokady tapmaly.

$\lhd$ Şerte görä gözlenýän $M(x,\ y)$ nokat $\overline{M_1M_2}$ kesimi $\lambda = -1/3$

gatnaşykda bölýär. Şoňa görä (9) formulany ulanyp we ol formulada $x_1=-1,\ y_1=-2,\ x_2=3,\ y_2=4$ göýup, M nokadyň koordinatalaryny taparys:

$$x=\frac{-1+(-1/3)\cdot 3}{1+(-1/3)}=-3,\quad y=\frac{-2+(-1/3)\cdot 4}{1+(-1/3)}=-5\,.\ \triangleright$$

5-nji mysal. Tekizligiň $M_1(x_1,\ x_2),\ M_2(x_2,\ y_2),\ \ldots,M_n(x_n,\ y_n)$ nokatlarynda $m_1,\ m_2,\ldots,m_n$ massalar ýerleşdirilen. Ol massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmaly.

$\triangleleft$ Ilki $n=2$ hala garalyň we $m_1,\ m_2$ massalar $M_1,\ M_2$ nokatlarda ýerleşýän bolsun. Onda mehanikanyň belli prinsipi esasynda ol massalaryň sistemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkezi $\overline{M_1M_2}$ kesimi $m_1,\ m_2$ massalara ters proporsional böleklere, ýagny $\lambda=m_2:m_1$ gatnaşykdaky böleklere bölýär. Şoňa görä (5) formula esasynda massalaryň sictemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkeziiniň koordinatalary üçin

$$x=\frac{x_1+(m_2/m_1)x_2}{1+m_2/m_1},\quad y=\frac{y_1+(m_2/m_1)y_2}{1+m_2/m_1};$$

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2} \tag{11}$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly $M_1(x_1,\ x_2),\ M_2(x_2,\ y_2),\ M_3(x_n,\ y_n)$ nokatlarda ýerleşen $m_1,\ m_2,\ m_3$ massalaryň sistemasynyň $M(x,\ y)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar. Eger $m_1,\ m_2$ massalary şol sistemanyň $M'(x',\ y')$ agyrlyk merkezinde jemlesek, onda $M(x,\ y)$ nokadyň ýerleşýän ýeri üýtgemez. Indi $M(x,\ y)$ nokada M_3 nokatda ýerleşýän m_3 massa bilen $M'(x',\ y')$ nokatda jemlenen m_1+m_2 massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkezi hökmünde gararys. Şunlukda, $M'(x',\ y')$ nokat $m_1,\ m_2$ massalaryň sistemasynyň hem agyrlyk merkezidir we $x',\ y'$ koordinatalar (11) formulanyň sag bölegi bilen kesgitlenýär. Şoňa görä $M(x,\ y)$ agyrlyk merkezi $\overline{M'M_3}$ kesimi $\lambda=m_3:(m_1+m_2)$ gatnaşykda bölýän nokat hökmünde (5) formulany ulanyp taparys:

$$x=\frac{x'+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_3x_3}{m_1+m_2}}{\dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}},$$

$$y=\frac{\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_3y_3}{m_1+m_2}}{\dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}},$$

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Matematiki induksiýadan peýdalanyp, $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ nokatlarda ýerleşen $m_1,\ m_2,\ \ldots,m_n$ massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak bolar:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\ .\ \triangleright$$

3. Üçburçlugyň meýdany. $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3)$ depeleri bolan bir göni çyzykda ýatmaýan üçburçlugyň S meýdany (8-nji surat)

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]\right| \qquad (12)$$

formula boýunça tapylýar.

$\triangleleft$ ABC üçburçlugyň meýdanyny

$$S_{ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}$$

deňlik boýunça tapmak bolar, bu ýerde S_{ADEC}, S_{BCEF}, S_{ABFD} trapesiýalaryň meýdanlarydyr. Ol meýdanlar bolsa şeýle tapylýar:

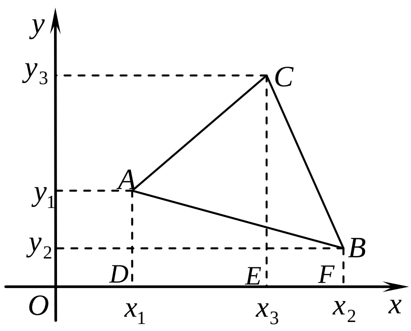
$$S_{ADEC}=|DE|\cdot\frac{|AD|+|CE|}{2}=\frac{(x_3-x_1)(y_3+y_1)}{2},$$

$$S_{BSEF}=|EF|\cdot\frac{|EC|+|BF|}{2}=\frac{(x_2-x_3)(y_2+y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD}=|DF|\cdot\frac{|AD|+|BF|}{2}=\frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2},$$

olaryň bahalaryny formulada goup,

$$S = \frac{1}{2} \left| \left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1) \right] \right|$$



8-nji surat

formulany alarys. Ondan bolsa ýönekeý ögertmeler esasynda (12) formula gelip çykýar.Üçburçlugyň islendik başgaça ýerleşişi üçin hem (12) formula şonuň ýaly subut edilýär. ▹

6-njy mysal. Depeleri $A(1,\ 1)$, $B(6,\ 4)$, $C(8,\ 2)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň S meýdanyny tapmaly.

◃ Üçburçlugyň meýdanyny (12) formulany ulanyp taparys:

$$S = \frac{1}{2}\left[(6-1)(2-1) - (8-1)(4-1)\right] = \frac{1}{2}\left|\left[-16\right]\right| = 8 \text{ (kw.birlik).} \ ▹$$

§ 1. 4. Tekizlikde koordinatalary baglanyşdyrýan deňlemeleriň geometrik manysy

1. Tekizlikde çyzygyň deňlemesi. Goý, gönüburçly dekart koordinatalarynda x we y üýtgeýänler

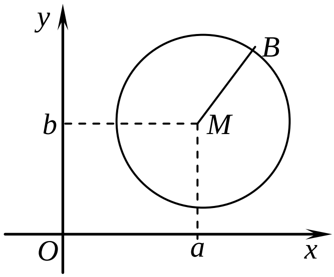
$$F(x,\ y) = 0 \tag{13}$$

görnüşdäki deňligi kanagatlanyrýan bolsun. Eger bu deňlik x we y jübütleriň ähli bahalary üçin ýerine ýetse, onda oňa tozdestwo diýilýär, käbir bahalary üçin ýerine ýetende bolsa oňa deňleme diýilýär. Deňlemäniň mysallary: $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$, toždestwonyň mysallary: $(x+y)(x-y) - x^2 + y^2 = 0$, $(x-y) - x + y = 0$.

Eger L çyzykda ýerleşýän ähli nokatlaryň koordinatalary (13) deňlemäni kanagatlandyrýan bolup, şol çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary ol deňlemäni kanagatlandyrmasa, onda (13) deňlemä L çyzygyň deňlemesi diýilýär. Başgaça aýdylanda, L çyzyk (13) deňlemäni kanagatlandyrýan tekizligiň $(x,\ y)$ koordinatalarynyň köplügini aňladýar. Mysal üçin, $x - y = 0$ deňleme göni çyzygy – birinji we üçünji koordinatalar burçlarynyň bissektrisasyny, $x^2 + y^2 - 25 = 0$ deňleme merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy bäşe deň bolan töweregi kesgitleýär. Käbir deňleme bilen kesgitlenýän köplük bir nokady (mysal üçin, $x^2+y^2=0$ deňleme diňe bir $(0,\ 0)$ nokady), käbir deňleme bolsa boş köplügi kesgitleýär (mysal üçin, $x^2+y^2+1=0$ deňleme, çünki tekizligiň hiç bir nokady ol deňlemäni kanagatlandyrmaýar). Çyzygyň deňlemesiniň kesgitlemesi esasynda berlen nokadyň çyzykda ýatýanlygy aňsat görkezilýär. Eger nokadyň koordinatalary deňlemede goýulanda san deňlik (toždestwo) alynsa, onda nokat çyzykda ýatýar, eger-de toždestwo alynmasa, onda nokat çyzykda ýatmaýar.

7-nji mysal. Merkezi $M(a,\ b)$ nokatda we radiusy R bolan töweregiň deňlemesini düzmeli.

$\triangleleft$ Goý, $B=B(x,\ y)$ töweregiň erkin nokady bolsun (9-njy surat). Belli bolşy ýaly töweregiň – tekizligiň bir nokatdan (merkezden) deň daşlykda bolan nokatlarynyň köplügi bolýandygy esasynda we onuň islendik nokadynyň merkezden uzaklygynyň R sana deňligi üçin iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyny ulanyp,



9-njy surat

$$\rho(M,\ B)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

deňligi alarys. Ondan bolsa gözlenýän töweregiň deňlemrsini alarys:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \triangleright \qquad (14)$$

Bu töweregiň islendik nokadynyň koordinatalary ol töweregiň deňlemesini kanagatlandyrýar. Eger $N(x,\ y)$ nokat şol towerekde ýatmaýan bolsa, onda $\rho(M,\ N)<R$ ýa-da $\rho(M,\ N)>R$ bolar we şonuň üçin onuň koordinatalary (14) deňlemäni kanagatlandyrmaýar. (14) deňlemeden $a=b=0$ bolanda alynýan

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (15)$$

deňlemä töweregiň kanonik deňlemesi diýilýär.

2. Çyzyklaryň kesişmesi. Goý, iki çyzyk

$$F(x,\ y)=0,\quad G(x,\ y)=0 \qquad (16)$$

deňlemeler arkaly berlen bolsun. Olaryň kesişme nokadyny tapalyň. Olaryň kesişme nokady birinji çyzyga hem, ikinji çyzyga hem degişlidir, şonuň üçin onuň koordinatasy (16) deňlemeleriň birnji deňlemesini hem, ikinji deňlemesini hem kanagatlandyrýar, ýagny

$$\left.\begin{array}{l} F(x,\ y)=0, \\ G(x,\ y)=0 \end{array}\right\} \qquad (!7)$$

deňlemeler sistemasyny kanagatlandyrýar.Tersine, eger-de käbir $K(x_o,\ y_o)$ nokadyň $x_o,\ y_o$ koordinatalary (16) çyzyklaryň birinjisinde hem, ikinjisinde hem ýatýan bolsa, onda ol nokat şolaryň kesişme nokadydyr.

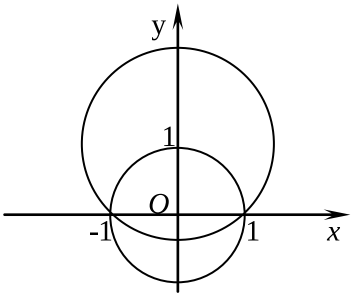
Şeýlelikde, çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmak üçin olaryň deňlemeleriniň sistemasyny çözmek zerurdyr. Şunlukda, hakyky kökleriň sany olaryň kesişme nokatlarynyň sanyna deňdir. Eger (17) sistemanyň hakyky kökleri ýok bolsa, onda (16) çyzyklar kesişýän däldir.

8-nji mysal. $x^2+y^2=1,\ \ x^2+(y-1)^2=2$ çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmaly (10-njy surat)..

◁ Kesişme nokatlary tapmak üçin

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1, \\ x^2+(y-1)^2=2 \end{array}\right\}$$

sistemany çözeliň. Ikinji deňlemeden birinjini aýryp alarys: $2y=0,\ \ y=0$. Birinji deňlemede $y=0$ goýup, $x_1=-1,\ \ x_2=1$ alarys. Şeýlelikde, çyzyklar $A(-1,\ 0),\ B(1,\ 0)$ nokatlarda kesişýärler. ▷



10-njy surat

3. Çyzygyň parametrik deňlemeleri. Goý, tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalarynda käbir çyzyk berlen bolsun. Käbir hallarda onuň erkin nokadynyň $(x,\ y)$ koordinatalaryny (parametr atlandyrylýan) üçünji t ululyk arkaly aňladyp bolýar:

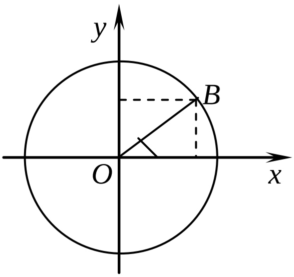
$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \qquad (18)$$

Eger t parametr käbir (tükenikli ýa-da tükeniksiz) aralykda üýtgände (18) formuladan berlen çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary alynýan bolup, çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň koordinatalary alynmaýan bolsa, onda (18) deňlemelere çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär.

Mysal üçin, eger tekizlikde merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy R deň bolan töwerek berlen bolsa (11-nji surat), onda t parametr hökmünde töweregiň erkin $B = B(x,\ y)$ nokady üçin OB kesimiň Ox oky bilen emele getirýan burçuny almak bolar. Bu halda berlen töweregiň parametrik deňlemeleri

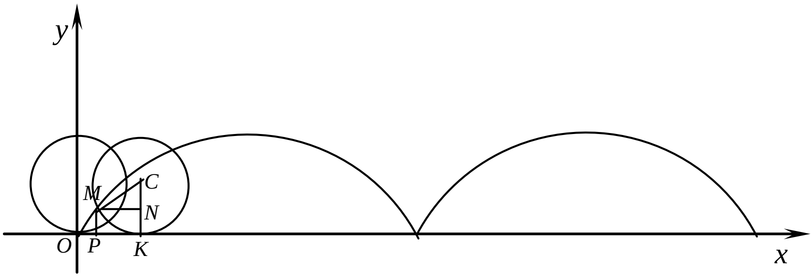
$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad (0 \le t < 2\pi) \qquad (19)$$

görnüşde bolar. Olardan t parametri ýoklap (olary kwadrata göterip we goşup), töweregiň (15) deňlemesini alarys.



11-nji surat

Indi bolsa R radiusly töweregiň göni çyzyk boýunça togalananda onuň käbir bellenen nokadynyň çyzýan çyzygyna garalyň. Oňa sikloid diýilýär. Göni çyzygy gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň Ox oky hökmünde alalyň (12-nji surat). Goý, bellenen nokat töweregiň başlangyç ýagdaýynda koordinatalar başlagyjynda bolsun



12-nji surat

we töwerek t (MCN) burç öwrülenden soň ol $M = M(x,\ y)$ nokada barsyn.Onda suratdan görnüşi ýaly

$$x = OP = OK - PK, \quad y = MP = CK - CN, \quad CM = CK = R,$$

$OK = MK = Rt, \quad PK = MN = R\sin t, \quad CN = R\cos t$. Şonuň üçin hem

$$x = Rt - R\sin t, \quad y = R - R\cos t \text{ ýa-da}$$

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \qquad (20)$$

bolar. Bu deňlemelere sikloidiň parametrik deňlemeleri diýilýär.

G ö n ü k m el e r

1. Ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň ululyklaryny tapmaly:
1) $A(2),\ B(5)$; 2) $A(3),\ B(-4)$; 3) $A(-6),\ B(8)$; 4) $A(-2),\ B(-7)$

2. Ugrukdyrylan $\overline{AB}$ kesimiň uzynlyklaryny tapmaly:
1) $A(3),\ B(8)$; 2) $A(4),\ B(-9)$; 3) $A(-5),\ B(1)$; 4) $A(-3),\ B(-8)$.

3. Belli bolan 1) $B(2),\ AB=5$; 2) $B(3),\ BA=-2$ 3) $B(5),\ BA=-3$ boýunça koordinatalar okunda A nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

4. Gönüburçly dekart koordinatalarynda nokatlary gurmaly:
$A(1,\ 4),\ B(2,\ -3),\ C(-3,\ 5),\ D(-1,\ -2),\ E(0,\ 1)\ \ F(5,\ 0)$.

5. Ox okuna görä $A(3,\ 4),\ B(-2,\ 5),\ C(-3,\ -3)$ nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.

6. Koordinatalar başlangyjyna göra $A(-1,\ 2),\ B(-3,\ -2),\ C(4,\ 7)$ nokatlara simmetrik nokatlary tapmaly.

7. Polýar koordinatalarynda $A(3,\ \pi/4),\ B(1,\ -\pi/4),\ C(4,\ 3\pi/4)$, $D(2,\ -3\pi/4)$ nokatlary gurmaly.

8. Polýar koordinatalarynda berlen $A(2,\ \pi/3),\ B(6,\ -\pi/2),\ C(5,\ \pi)$ nokatlaryň gönüburçly dekart koordinatalaryny tapmaly.

9. Dekart koordinatalarynda berlen $A(-1,\ 1),\ B(0,\ 2), C(3,\ 0),\ D(1,\ 1)$ nokatlaryň polýar koordinatalaryny tapmaly.

10. Berlen $A(4,\ 3),\ B(0,\ 0), C(-3,\ -4),\ D(6,\ 8)$ nokatlar boýunça
1) A we B; 2) A we C; 3) A we D; 4) B we C; 5) B we D nokatlaryň arasyndaky uzaklyklary hasaplamaly.

11. Iki çatyk depeleri $A(5,\ 6),\ B(9,\ 2)$ nokatlarda bolan kwadratyň meýdanyny hasaplamaly.

12. $A(0,\ 2),\ B(2,\ 0)$ depeleri berlen deňtaraply ABC üçburçlugyň C depesiniň koordinatalaryny tapmaly.

13. $A(-3,\ -5),\ B(5,\ 3)$ depeleri berlen deňtaraply ABC üçburçlugyň meýdanyny hasaplamaly.

14. $A(1,\ 1),\ B(1,\ 6),\ C(5,\ 9)$ depeleri berlen $ABCD$ rombuň meýdanyny hasaplamaly.

15. $[AB]$ kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapmaly: 1) $A(3,\ -7)$, $B(5,\ 9)$; 2) $A(-5,\ -1),\ B(-3,\ -1)$; 3) $A(2,\ 6),\ B(-8,\ -12)$.

16. Depeleri $A(-4,\ 2)$, $B(6,\ 8)$, $C(4,\ -10)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň medianalarynyň esaslaryny tapmaly.

17. Bir ujy $A(4,\ 5)$ nokatda bolan $[AB]$ kesimiň ortasy $C(-3,\ 7)$ nokatda ýerleşýär. Kesimiň beýleki ujyny tapmaly.

18. Berlen $A(1,\ 2)$ we $B(-1,\ 4)$ nokatlar boýunça $[AB]$ kesimi A nokatdan başlap $1:2$ gatnaşykda bölýän C nokady tapmaly.

19. $[AB]$ kesim A nokatdan başlap $C(4,\ 1)$ nokat bilen $1:4$ gatnaşykda bölünen. A nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

20. ABC üçburçluklaryň meýdanlaryny tapmaly:
1) $A(-2,\ -2)$, $B(6,\ 2)$, $C(4,\ 8)$; 2) $A(-1,\ 5)$, $B(4,\ 8)$, $C(6,\ 2)$.

21. Üçburçlugyň $A(3,\ 5)$, $B(6,\ -2)$ depeleri berlen. ABC üçburçlugyň meýdany 15-e deň bolar ýaly Oy okunda C nokady tapmaly.

J o g a p l a r

1. 1) 3; 2) -7; 3) 14; 4) -5. **2.** 1) 5; 2) 13; 3) 6; 4) 5. **3.** 1) $A(-3)$; 2) $A(1)$: 3) $A(8)$. **5.** 1) $A_1(3,\ -4)$, $B_1(-2,\ -5)$, $C_1(-3,\ 3)$. **6.** 1) $A_1(1,\ -2)$, $B_1(3,\ 2)$, $C_1(-4,\ -7)$. **8.** $A(1,\ \sqrt{3})$, $B(0,\ -6)$, $C(-5,\ 0)$. **9.** $A(\sqrt{2},\ 3\pi/4)$, $B(2,\ \pi/2)$, $C(3,\ 0)$, $D(\sqrt{2},\ \pi/4)$. **10.** 1) 5; 2) $7\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) 5; 5) 10. **11.** 32. **12.** $C_1(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$, $C_2(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$. **13.** $32\sqrt{3}$. **14.** 20. **15.** 1) (4, 1); 2) $(-4,\ 0)$; 3) $(-3,\ -3)$. **16.** 1) (1, 5); 2) (0, -4); 3) (5, -1). **17.** $B(-10,\ 9)$. **18.** $C(1/3,\ 8/3)$. **19.** $A(3,\ 0)$. **20.** 1) 24; 2) 18. **21.** $C_1(0,\ 2)$, $C_2(0,\ 22)$.

I. 2. BIRINJI WE IKINJI TERTIPLI ALGEBRAIK ÇYZYKLAR

§ 2.1. Tekizlikde göni çyzyklar

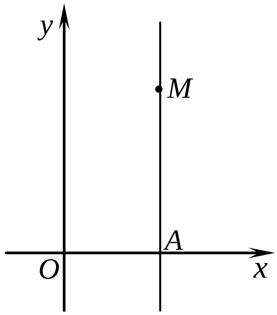
1. Göni çyzyklaryň dürli görnüşleri. Tekislikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyna görä göni çyzyklary dürli usullar boýunça berip bolar. Şoňa baglylykda olar dürli görnüşdäki deňlemeler arkaly aňladylýar. Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynyň Oy okuna parallel bolan we onuň Ox okuny $A(a,\ 0)$ nokatda kesýän göni çyzyga seredeleiň (1-nji surat). Ol göni çyzygyň deňlemesi

$$x = a \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemedir.Hakykatdan-da,ol göni çyzygyň islendik $M(x,\ y)$ nokadynyň x koordinatasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýar we ol göni çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadyň x koordinatasy ony kanagatlandyrmaýar. Eger $a = 0$ bolsa, onda göni çyzyk Oy oky bilen gabat gelýär we onuň deňlemesi

$$x = 0 \qquad (2)$$

bolar.



1-nji surat

Orta mekdebiň matematikasyndan belli bolşy ýaly Oy okuny kesýän göni çyzygyň deňlemesi

$$y = kx + b \qquad (3)$$

görnüşdedir, bu ýerde $k = tg\alpha$ onuň burç koeffisiýenti bolup, α - göni çyzyk bilen Ox okunyň arasyndaky burçdyr, $b = OB$ bolsa göni çyzygyň Oy okunda kesip alýan ugrukdurulan $\overline{OB}$ kesiminiň ululygydyr. (3) deňlemä göni çyzygyň **burç koeffisiýentli** deňlemesi diýilýär. Eger göni çyzyk Ox okuna parallel bolsa, ýagny $\alpha = 0,\ \ k = 0$, onda (3) deňleme

$$y = b$$

görnüsi alar. Ox okunyň ähli nokatlarynyň y koordinatasy nola deňdir. Şoňa görä-de Ox okunyň deňlemesi

$$y = 0$$

bolar. (3) göni çyzygyň burç koeffisiýentini şol göni çyzykda ýatýan iki dürli $B(x_1,\ y_1)$, $M(x_2,\ y_2)$ nokatlaryň koordinatalary arkaly aňlatmak bolar. (3) göni çyzykda ýatýandygy üçin olaryň koordinatalary şol