S. Hojageldiýew

GIDROGAZODINAMIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2019

UOK 378:532+533
H 53

Hojageldiýew S.
H 53 **Gidrogazodinamika**. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2019.

TDKP № 106, 2019 KBK 22.253 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ
DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

I bölüm

GIDROGAZODINAMIKA DERSI BARADA ESASY DÜŞÜNJELER WE KESGITLEMELER

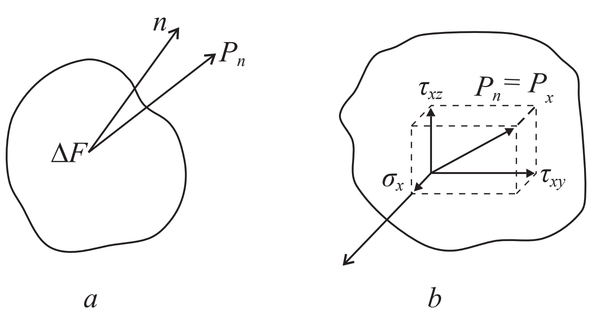
1.1. Giriş. Gidrogazodinamika dersi

Gidrogazodinamika suwuklygyň we gazyň hereketi baradaky ylymdyr. Suwuklygyň we gazyň gaty jisimlerden tapawudy olarda molekulalaryň arasyndaky baglanyşyk güýji gowşakdyr. Bu aýratynlyk aňsat gozganyjylygy, akyjylygy we deformirlenmegi ýüze çykarýar. Içki we daşky güýçleriň täsiri netijesinde, hereketdäki suwuklygyň görnüşiniň üýtgemesi bolup geçýär. Gidrogazodinamikada, köplenç, öwrenilýän akymyň molekulýar gurluşy hasaba alynmaýar we gurşawyň hemme häsiýetnamasy üznüksiz paýlanyşyga eýe bolan şertleýin modeline seredilýär. Üznüksizlik çaklamasy (gipotezasy) suwuklyklary we gazlary akyjy, aňsat deformirleniji gurşaw hökmünde bir topara birleşdirýär. Şunuň bilen birlikde suwuklygyň we gazyň arasynda hem käbir tapawut bardyr. Suwuklyklarda molekulalaryň arasyndaky baglanyşyk güýji gazlaryň düzümindäkä garanyňda ep-esli uludyr we molekulalaryň arasyndaky uzaklyk kiçidir. Şol sebäpli suwuklyklara gowşak gysylýan ýa-da gysylmaýan, gazlara bolsa gysylýan gurşaw hökmünde seretmek mümkin. Gazlaryň kanallardaky ýokary tizlikli hereketinde gysylmaklygy işjeň bolup geçýär. Ýylylyk çalşygy hasaba alynmadyk ýagdaýyndaky pes tizliklerde bolsa gysylmaklyk gowşak bolýar. Damjalaýyn suwuklyklar uly basyş goýlanda gysylýar. Hemme suwuklyklarda gurşawyň şepbeşiklik häsiýeti esasynda döreýän içki sürtülme ýüze çykýar. Suwuklygyň akym häsiýetine şepbeşikligiň täsiri bolýar. Käbir meselelerde şepbeşiklik kesgitleýji ähmiýete eýe bolup, gurşawyň hereketini kesgitleýär. Başga bir ýagdaýlarda bolsa şepbeşikligiň täsiri gowşak bolýar we şol esasda bu güýji hasaba almasaň hem bolýar. Şepbeşiklik güýjüni hasaba almazlyk hasaplama derňew işlerini aňsatlaşdyrýar we hakyky suwuklygyň ýerine hyýaly suwuklyk nusgasyna seretmeklige mümkinçilik berýär. Hyýaly suwuklyk içki sürtülme güýji hasaba alynmaýan howaýy suwuklykdyr. Bu nusga hakyky suwuklyk nusgasyny öwrenmäge ýol açýar. Temperaturanyň ýokarlanmagy bilen suwuklyklarda şepbeşiklik peselýär, gazlarda bolsa artýar.

1.2. Suwuklyga täsir edýän güýçleriň toparlara bölünişi

Gaty jisimiň mehanikasynda merkezleşdirilen we ýaýradylan güýçlere seredilýän bolsa, suwuklyklarda diňe ýaýradylan güýçlere seredilýär. Güýçleri toparlara bölmek üçin hereket edýän suwuklykdan F ýapyk üst bilen araçäkleşýän V göwrümi bölüp alalyň. Bölünip alnan göwrümden töweregini gurşap alan suwuklyga tarap üste ýaýradylan käbir güýç täsir edýär. Daşky n normalyň ugry boýunça ΔF meýdança täsir edýän üst güýjüniň wektoryny $\vec{p}_n$ belgi bilen belgiläliň *(1.1-nji a çyzgy)* we bu wektoryň ΔF meýdança bolan gatnaşygyny kesgitläliň:

$$\vec{p} = \lim \frac{\vec{p}_n}{\Delta F}.$$



1.1-nji çyzgy. Nokatdaky basyşyň kesgitlenilişi

Bu ululyga berlen nokatdaky üst güýjüniň naprýaženiýesiniň wektory diýilýär. Umumy ýagdaýda $\vec{p}_n$ ululyk diňe bir üstdäki nokadyň ýagdaýyna (*x, y, z* – koordinata) we *t* wagta bagly bolman, ol ΔF meýdançanyň giňişlikdäki ýerleşişine hem baglydyr:

$$\vec{p}_n = f(x, y, z, t, n).$$

Şeýlelikde, $\vec{p}_n$ wektora adaty wektor diýip aýdyp bolmaýar, sebäbi meýdançanyň ýagdaýyna baglylykda ol dürli bahalary alyp bilýär. Eger meýdança berkidilen bolsa, onda $\vec{p}_n$ ululyk adaty wektor bolýar, sebäbi ony koordinata oklarynyň düzüjilerine ýaýratmak mümkin. Goý, meýdança *x* okuna perpendikulýar saýlanyp alnan bolsun. $\vec{p}_n = \vec{p}_x$ bolanda wektor naprýaženiýesi (berlen ýagdaýda *x* okuň ugry) normalyň ugry bilen gabat gelmeýär. Bu ýagdaýda ony σ_x normal hem-de τ_{xy}, τ_{xz} galtaşma düzüjilerine ýaýratmak bolar *(1.1-nji b çyzgy)*:

$$\vec{p}_x = \vec{i}\sigma_x + \vec{j}\tau_{xy} + \vec{k}\tau_{xz}, \tag{1.1a}$$

bu ýerde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – birlik wektorlary. Galtaşma naprýaženiýesiniň ikinji indeksi $\vec{p}_x$ naprýaženiýäniň proýektirlenen ugurdaky okuny aňladýar. Meýdançany *y* we *z* oklara perpendikulýar saýlap almak bilen naprýaženiýäniň ýene-de iki sany ýaýramasyny alarys:

$$\vec{p}_y = \vec{i}\tau_{yx} + \vec{j}\sigma_y + \vec{k}\tau_{yz}, \tag{1.1b}$$

$$\vec{p}_z = \vec{i}\tau_{zx} + \vec{j}\tau_{zy} + \vec{k}\sigma_z. \tag{1.1ç}$$

Daşky *n* normal boýunça ugrukdyrylan $\vec{p}_n$ wektory $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ düzüji wektorlaryň üsti bilen aşakdaky gatnaşyk arkaly kesgitlemek bolar:

$$\vec{p}_n = \vec{n}p_{nn} = \vec{p}_x\cos(nx) + \vec{p}_y\cos(ny) + \vec{p}_z\cos(nz). \tag{1.2}$$

$\vec{p}_n$ –i koordinata oklaryna proýektirläp alarys:

$$p_{nx} = \sigma_x\cos(nx) + \tau_{yx}\cos(ny) + \tau_{zx}\cos(nz);$$

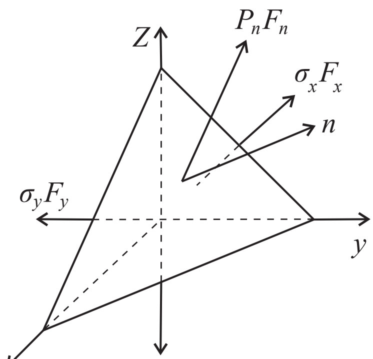
$$p_{ny} = \tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y\cos(ny) + \tau_{zy}\cos(nz);$$

$$p_{nz} = \tau_{xz}\cos(nx) + \tau_{yz}\cos(ny) + \sigma_z\cos(nz).$$

Berlen nokatda $\vec{p}_n$ wektory häsiýetlendirýän, ýagny meýdançanyň ýerleşişine baglylykda dürli bahalary kabul edýän fiziki ululyga ***tenzor*** ululyk diýilýär. Üst naprýaženiýesi dokuz sany $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ skalýar ululyklaryň kömegi bilen kesgitlenilýär, ýagny bu ululyklaryň jemi tenzor naprýaženiýesini kesgitleýär. Moment teoremasyny ulanyp, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ bolýandygyny görmek bolar. Bu ýagdaýda, üst naprýaženiýesi dokuz däl-de, alty sany σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} skalýar ululyk bilen kesgitlenilýär. Suwuklyklarda galtaşma naprýaženiýesi şepbeşikligiň we hereketiň (otnositel gozganmanyň) esasynda döreýär. Gozganmaýan suwuklyklarda, şeýle hem şepbeşikligi hasaba alynmaýan hereketdäki suwuklyklarda (hyýaly suwuklyklarda) galtaşma naprýaženiýe nola deň ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$) we üst güýji diňe $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normal naprýaženiýeleriň üsti bilen kesgitlenilýär. Bu hili ýagdaýda (1.1) we (1.2) baglanyşyklar şeýle görnüşi alar:

$$\vec{p}_x = \vec{i}\sigma_x;\ \vec{p}_y = \vec{i}\sigma_y;\ \vec{p}_z = \vec{i}\sigma_z,\ \vec{p}_n = \vec{n}p_{nn} = \vec{i}\sigma_x\cos(nx) + $$
$$+\vec{j}\sigma_y\cos(ny) + \vec{k}\sigma_z\cos(nz).$$

Indi hyýaly suwuklygyň (ýa-da gozganmaýan hakyky suwuklygyň) granlarynyň meýdany F_x, F_y, F_z bilen belgilenen tetraedr görnüşli elementar bölejigine seredeliň *(1.2-nji çyzgy)*.



1.2-nji çyzgy. Hyýaly suwuklygyň akymynda elementar tetraedre täsir edýän güýçler

Her bir grana σ_x, σ_y, σ_z we p_{nn} normal naprýaženiýeler täsir edýär. Dalamberiň usulyny ulanyp, seredilýän suwuklyk elementi üçin deňagramlylyk şertini ýazalyň. Massalaýyn güýçler (şol sanda inersiýa güýçleri) üç dereje kiçi $dV = dxdydz$ göwrüme proporsional, üst güýçleri bolsa iki dereje meýdana proporsionaldyr. Koordinata oklaryna proýektirlenen we täsir edýän hemme güýçleriň deňagramlylyk şerti aşakdaky deňlemeleri berýär:

$$\sigma_x F_x = p_{nn} F_n \cos(nx) + A_x,$$

$$\sigma_y F_y = p_{nn} F_n \cos(ny) + A_y,$$

$$\sigma_z F_z = p_{nn} F_n \cos(nz) + A_z,$$

bu ýerde A_x, A_y, A_z – tükeniksiz kiçi üçünji dereje. F_x, F_y, F_z – tetraedriň granlarynyň üstleriniň meýdanlary x, y, z oklaryna we $\vec{n}$ normala perpendikulýar ýerleşdirilen. $F_n \cos(nx) = F_x$; $F_n \cos(ny) = F_y$; $F_n \cos(nz) = F_z$ bolýandygyny göz öňünde tutup aşakdakyny alarys:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p_{nn}.$$

Bu ýagdaýda, eger suwuklyklarda galtaşma naprýaženiýesi hasaba alynmasa, onda berlen nokatda normal naprýaženiýe meýdançanyň ýerleşişine bagly däl. Bu netije gozganmaýan şepbeşik suwuklyklar we hyýaly suwuklyk hereketi üçin ýeterliklidir. Islendik normal naprýaženiýäniň ters bahasyna deň bolan p ululyga basyş diýilýär:

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z = -p_{nn}.$$

Degişlilikde, p basyş meýdançanyň ýerleşişine bagly däl we ol diňe koordinatanyň hem-de wagtyň funksiýasy görnüşinde aňladylýar, ýagny $p = f(x, y, z, t)$. Basyşyň ölçeg birligi halkara ulgamda şu görnüşde aňladylýar:

$$[p] = \frac{N}{m^2}.$$

Üst güýçlerinden başga-da bölünip alnan göwrümiň islendik nokadyna täsir edýän suwuklygyň massasyna proporsional bolan güýç hem bardyr. Bu güýje ***massalaýyn güýç*** diýilýär. Massalaýyn güýje agyrlyk güýji, inersiýa güýji, elektromagnit we elektrostatik güýçler degişlidir. Massalaýyn güýjüň häsiýetnamasy üçin $\vec{T}$ massalaýyn güýjüň ΔV elementar göwrümde ýerleşen Δm suwuklyk massasyna bolan gatnaşygynyň predeline deň bolan $\vec{M}$ massalaýyn güýjüň wektor napryaženiýesini girizeliň:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\vec{T}}{\Delta m},$$

bu ýerde $\vec{M}$ – tizlenmäniň ölçegi bilen aňladylýar. $\vec{M}$ wektory koordinata oklaryna dargadyp ýazarys:

$$\vec{M} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z,$$

bu ýerde X, Y, Z – massalaýyn güýç napryaženiýesiniň koordinata oklaryna bolan proýeksiýalary (birlik massalaýyn güýji). Eger-de massalaýyn güýç agyrlyk güýjüni aňladýan bolsa we ýeriň üstüne normal z okuň ugry boýunça ugrukdyrylan bolsa, onda $X = 0$; $Y = 0$:

$$Z = -\frac{mg}{m} = -g; \; \vec{M} = -\vec{k}g.$$

1.3. Akymyň parametrleri

Akymyň termodinamik parametrlerine p basyş, ρ dykyzlyk, T temperatura degişlidir we gidrogazodinamikada bu parametrleriň nokatdaky bahasyna seredilýär. ρ dykyzlygyň nokatdaky bahasyny kesgitlemek üçin, ΔV göwrümdäki Δm suwuklyk massasyna seredeliň we predele geçeliň:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right].$$

Dykyzlyga ters bolan ululyga udel göwrüm diýilýär:

$$\frac{1}{\rho} = \vartheta, \quad \left[\frac{m^3}{kg}\right].$$

Dykyzlygyň hem basyşyňky ýaly bir nokatdan başga bir nokada geçende bahasy üýtgeýär. Berkidilen nokatda dykyzlyk wagta baglylykda üýtgeýär. Ýagny $\rho = (x, y, z, t)$. Gysylmaýan suwuklyklarda $\rho = const$, $\vartheta = const$.

Termodinamik parametrler özaralarynda aşakdaky baglanyşygy emele getirýär:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \tag{1.3}$$

bu ýerde R – gaz hemişeligi. Hakyky gazlar we bug üçin ýarym empriki hal deňlemeleri, meselem, Wan-der-Waalsyň deňlemesi ulanylýar.

Eger-de (1.3) deňleme tükeniksiz kiçi göwrüm üçin ulanylsa, onda T temperatura nokatdaky temperaturany aňladýar. Halkara ulgamda howa üçin: $R = 287,15\frac{m^2}{s^2 \cdot K}$, aşa gyzan suw bugy üçin $R = 464\ \frac{m^2}{s^2 \cdot K}$ ulanylýar. R ululyk hemişelik basyşlardaky c_p we hemişelik göwrümdäki c_v udel ýylylyk sygymlary bilen şeýle baglanyşygy emele getirýär:

$$R = c_p - c_\vartheta \quad \text{ýa-da}$$

$$R = \frac{c_p(k-1)}{k} = c_\vartheta\,(k-1),$$

bu ýerde $k = \frac{c_p}{c_\vartheta}$ – izoentropik görkeziji. Howa üçin $k = 1,4$ we ol aşa gyzan suw bugy üçin $k = 1,3$.

1.4. Suwuklyk hereketini öwrenmekligiň usullary

Suwuklyk hereketiniň matematiki ýazgysy üçin Lagranžyň we Eýleriň hödürlän iki sany dürli ugurlaryny ulanmak mümkin. Lagranžyň ugry boýunça suwuklykdan berkidilen kesgitli bölejik bölünip alynýar we onuň traýektoriýasy aşakdaky deňlemeler ulgamy bilen berilýär:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(a,b,s,t) \\ y &= f_2(a,b,s,t) \\ z &= f_3(a,b,s,t), \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

bu ýerde $a,\ b,\ s$ – Lagranžyň parametrleri, ýagny başlangyç wagt pursadynda bölünip alnan bölejigiň koordinatasyny häsiýetlendirýär. (1.4) baglanyşygy ulanyp, bölünip alnan suwuklyk bölejiginiň dekart koordinata oklarynyň ugry boýunça ugrukdyrylan $u,\ \vartheta,\ w$ – tizlik düzüjilerini tapmak aňsat:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt}; \\ \vartheta &= \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt}; \\ w &= \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Islendik wagt pursadynda absolýut tizligi tizlik düzüjileriniň wektor jemi görnüşinde aňlatmak mümkin:

$$\bar{c} = \bar{i}u + \bar{j}\vartheta + \bar{k}w.$$

Lagranžyň usulyndan Eýleriň usulynyň tapawudy, bölünip alnan suwuklyk bölejiginiň traýektoriýasy däl-de, koordinatanyň we wagtyň funksiýasy bolan hereketdäki suwuklygyň ähli tizlik meýdany berilýär:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = u(x,y,z,t) \\ \vartheta &= \frac{dy}{dt} = \vartheta(x,y,z,t) \\ w &= \frac{dz}{dt} = w(x,y,z,t) \end{aligned}\right\}. \tag{1.6}$$

Seredilýän giňişlikdäki islendik berkidilen nokadyň tizligini tapmak üçin bu nokadyň koordinatalaryny bermek hökmandyr. Meselem, $x = a, y = b, z = s$ koordinatalarda nokadyň tizliginiň üýtgemesini kesgitläliň:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(a,b,s,t) \\ \vartheta_1 &= \vartheta(a,b,s,t) \\ w_1 &= w(a,b,s,t) \end{aligned}\right\}. \tag{1.7}$$

Şeýlelikde, umumy ýagdaýda dört sany üýtgeýjiniň funksiýasy bolan nokat berkidilen bolsa, onda ol diňe wagta bagly bolýar. Berlen bölejigiň traýektoriýasyny tapmak üçin (1.6) deňlemeler ulgamyny integrirlemek zerurdyr. Netijede, täzeden integrirleme arkaly (1.4) deňlemelere geçeris. Barlanylýan ulgamdan t wagty aýranymyzdan soňra suwuklygyň bölejiginiň traýektoriýasynyň deňlemesini taparys.

Tizlenme meýdanynyň düzüjilerini gös-göni (1.6) gatnaşygy wagt boýunça differensirläp almak mümkin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{1.8}$$

Umumy ýagdaýda doly tizlenme ýerli tizlenmeleri aňladýan $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ hususy önümleri we tizligiň üýtgemesini (giňişlikde bölejigiň gyşarmasy netijesinde döreýän) aňladýan konwektiw tizlenme ($u\frac{\partial u}{\partial x}$, $\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}$, $w\frac{\partial u}{\partial z}$, $u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, $w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$, $u\frac{\partial w}{\partial x}$, $\vartheta\frac{\partial w}{\partial y}$, $w\frac{\partial w}{\partial z}$) bilen kesgitlenilýär.

Seredilýän göwrümdäki suwuklygyň hereketi wagta bagly bolman hem biler, ýagny berlen göwrümiň islendik nokadyndaky tizlik we beýleki akym parametrleri wagt boýunça üýtgemeýär. Bu hili akyma ***durnukly*** (stasionar) akym diýilýär. Bu hili akymlaryň ýerli tizlenmeleri nola deň bolýar $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial t} = 0\right)$ we (1.8) gatnaşykda diňe konwektiw ululyklar galýar. Käbir ýagdaýda (1.8) deňlemeler tekiz we birölçegli durnukly akym üçin ýazylýar. Tekiz akymlarda tizligiň üýtgemesi diňe x we y koordinata oklary boýunça bolup geçýär, z = const bolýanlygy sebäpli $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ bolýar, onda:

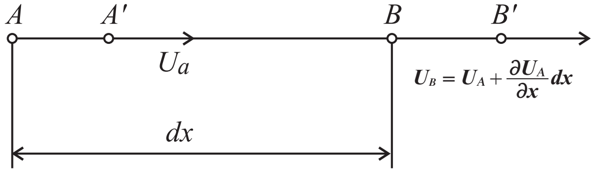
$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{aligned}\right\}.$$

Eger akym birölçegli bolsa, onda tizligiň üýtgemesi diňe bir koordinata okunyň ugry boýunça bolup geçýär (meselem x), onda:

$$\frac{du}{dt} = u\frac{du}{dx} = c\frac{dc}{dx}.$$

1.5. Suwuklygyň elementiniň deformasiýasy we aýlanma hereketi

(1.8) gatnaşykda kesgitlenen konwektiw tizlenmelere tizligiň düzüjileri we olaryň biratly ($\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$), şeýle hem dürli atly ($\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$) önümleri girýär. Bu önümleriň fiziki manysyny kesgitläliň. X okunyň ugruna hereket edýän uzynlygy



1.3-nji çyzgy. Suwuklygyň x okunyň ugruna hereket edýän elementi

dx bolan AB suwuklyk elementine seredeliň *(1.3-nji çyzgy)*. Eger A nokatda tizlik u_a bolsa, onda B nokatda tizlik $u_b = u_a + (\frac{\partial u_a}{\partial x}) dx$ bolar. Bu ýagdaýda dt wagt aralygynda bölünip alnan elementiň x okunyň ugruna garyşmasy bilen birlikde çyzykly deformasiýasy ýüze çykýar we aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\Delta dx = BB' - AA' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdt.$$

Şuňa meňzeşlikde y we z oklarynyň ugrunda bolup geçýän çyzykly deformasiýalary hem almak mümkin. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dt, \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)dt, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt$ aňlatmalar otnositel çyzykly deformasiýalary aňladýar. Bu ululyklary dt-e bölüp, çyzykly deformasiýa tizligini alarys:

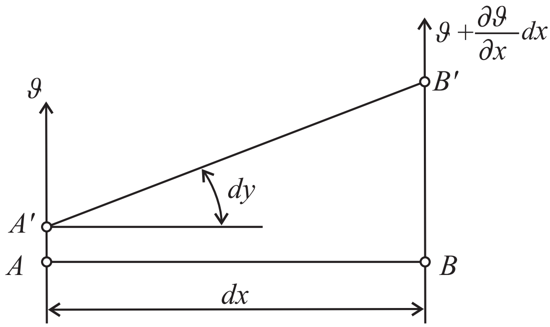
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.9}$$

Şeýlelikde, biratly koordinatalar boýunça tizligiň düzüjileriniň hususy önümleri suwuklyk elementiniň koordinata oklarynyň ugrunda otnositel çyzykly deformasiýa tizligini aňladýar.

x okunyň ugruna ýerleşdirilen, y okuň ugry boýunça hereket edýän suwuklyk elementi dt wagt aralygynda AB ýagdaýdan $A'B'$ ýagdaýa ornuny üýtgedýär we emele gelýän burç deformasiýasy aşakdaka deň diýeliň (*1.4-nji çyzgy*):

$$\mathrm{tg}d\gamma \approx d\gamma = \frac{BB' - AA'}{dx} = \frac{\left[\vartheta + \left(\frac{\partial \vartheta}{dx}\right)dx\right]dt - \vartheta dt}{dx} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dt \tag{1.10}$$

ýa-da $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$.

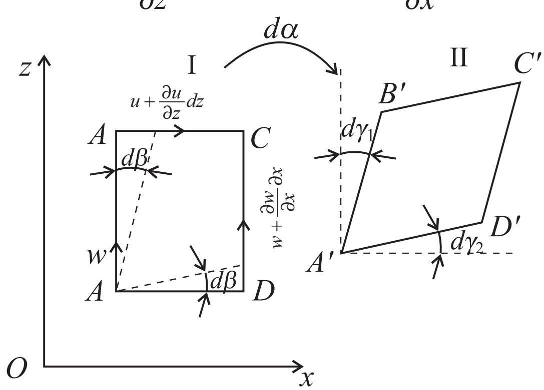


1.4-nji çyzgy. *x* okunyň ugrunda ýerleşdirilen we *y* okunyň ugry boýunça hereket edýän suwuklyk elementi

Şeýlelikde, tizlik düzüjileriniň dürli atly koordinatalar boýunça önümleri suwuklyk elementiniň burç deformasiýa tizligini kesgitleýär.

Eger gaty jisim bölejiginiň aýlanma wagtynda otnositel ýagdaýy üýtgemeýän bolsa, suwuklyklarda aýlanma bilen birlikde süýşme deformasiýasy we bölejigiň gyşarmasy bolup geçýär. Hereketiň bu düzüjilerine (aýlanma we süýşme deformasiýasyna) seredip göreliň. Munuň üçin parallelepiped görnüşli elementar suwuklyk bölejigini xOz koordinata ýerleşdireliň (*1.5-nji çyzgy*). I ýagdaýdan II ýagdaýa geçende ol gönüburçly ýagdaýdan üýtgär we onuň täze ýagdaýy $A'B'C'D'$ bolar. $d\gamma_1$ we $d\gamma_2$ burçlar u we w tizlik proýeksiýalaryna baglylykda (1.10) deňlemä boýun egýärler hem-de aşakdaky görnüşde aňladylýar:

$$d\gamma_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dt, \qquad d\gamma_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dt. \tag{1.11}$$



1.5-nji çyzgy. Suwuklyk elementiniň aýlawly hereketi

Barlanylýan parallelepipedde burç deformasiýasy $d\alpha$ öwrülme we $d\beta$ gyşarma ýa-da süýşme deformasiýasynyň goşulmagy netijesinde ýüze çykýar.

Goý, hemme granlarda gyşarma deformasiýasy birmeňzeş we $d\beta$ burç bilen häsiýetlendirilýär diýeliň, onda:

$$d\gamma_1 = d\alpha + d\beta; -d\gamma_2 = d\alpha - d\beta. \tag{1.12}$$

Bu ýerde koordinata oklarynyň indeksleriniň ugry boýunça, ýagny z okundan x okuna, x okundan y okuna, y okundan z okuna üýtgeme bolup geçýän bolsa, burç položitel diýlip hasap edilýär. Eger-de tersine bolsa burç otnositel hasap edilýär. (1.12) deňlemelerden aýlanmany häsiýetlendirýän $d\alpha$ burçy we süýşme deformasiýany häsiýetlendirýän $d\beta$ burçy tapalyň:

$$d\alpha = \frac{1}{2}(d\gamma_1 - d\gamma_2); \quad d\beta = \frac{1}{2}(d\gamma_1 + d\gamma_2). \tag{1.13}$$

(1.11) deňlemäni ulanyp, (1.13) deňlemäni dt-e bölüp, öwrülme burç tizligini (ω_y aýlanma burç tizligini) we (δ_y) süýşme ýa-da gyşarma deformasiýa tizligini kesgitläris:

$$\left.\begin{aligned} \omega_y &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \delta_y &= \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{1.14}$$

Şuňa meňzeşlikde $\vec{\omega}$ burç tizliginiň we $\vec{\delta}$ deformasiýa wektorynyň wektor düzüjilerini kesgitläp bolýar:

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z; \quad \vec{\delta} = \vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_x.$$

Seredilýän wektor düzüjileri aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right); & \delta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); & \delta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); & \delta_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Bu ululyklaryň indeksleri barlanylýan parallelepipediň perpendikulýar bolan koordinata okuny ýa-da seredilýän suwuk bölejigiň töwerek boýunça aýlanma okuny görkezýär.

(1.15) deňlemäni ulanyp, xy, yz, zx oklar boýunça gönüburçuň aýlanma tizligini (burç deformasiýasynyň jemi tizligini) aňsat tapmak bolar. Bu tizlikleri aşakdaky ýaly belgiläliň:

$$\vartheta_{xy} = 2\delta_z; \quad \vartheta_{yz} = 2\delta_x; \quad \vartheta_{zx} = 2\delta_y.$$

Suwuklykdan elementar parallelepiped görnüşli suwuk bölegi bölüp alalyň we dt wagtda onda bolup geçýän deformasiýa serediliň.

Eger parallelepiped başlangyç wagtda I ýagdaýda bolsa, käbir dt wagtdan soň ol II ýagdaýy emele getirer. Şol sebäpli gapyrgalaryň çyzykly deformasiýasy netijesinde, onuň başlangyç göwrümi üýtgeýär. I ýagdaýdan II ýagdaýa geçen wagtynda $dV_1 = dx\,dy\,dz$ başlangyç göwrümiň üýtgemesini tapalyň. Gapyrgalaryň çyzykly deformasiýasy (1.9) formulanyň kömegi bilen aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$\Delta(dV) = dV_2 - dV_1 = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) - dxdydz =$$
$$= \left[dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt\right]\left[dy + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)dydt\right]\left[dz + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)dzdt\right] - dxdydz.$$

Ýaýyň içindäki ululyklary bir-birine köpeldip, dV bilen deňeşdireniňde örän kiçi ululyklary hasapdan aýryp alarys:

$$\Delta(dV) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dtdxdydz.$$

dt wagtda başlangyç göwrümiň otnositel üýtgemesi aşakdaka deňdir:

$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt.$$

Bu ýerde suwuklyk göwrüminiň berlen nokatda otnositel üýtgeme tizligi (göwrümleýin deformasiýa tizligi) aşakdaka deň bolýar:

$$\lim_{dV \to 0} \frac{\Delta(dV)}{dVdt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (1.16)$$

Bu alnan gatnaşyga $\vec{c}$ tizlik wektorynyň *diwirgensiýasy* diýilýär we div $\vec{c}$ bilen belgilenýär:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{c} = e. \tag{1.17}$$

1.6. Akymyň we tüweleý görnüşli akymyň ugry. Akym turbajygy (elementar akymjagaz) we tüweleý görnüşli turbajyk

Her bir nokatda $\vec{c}$ tizlik wektorynyň ugruny berýän galtaşma çyzyga *akymyň ugry* diýilýär.

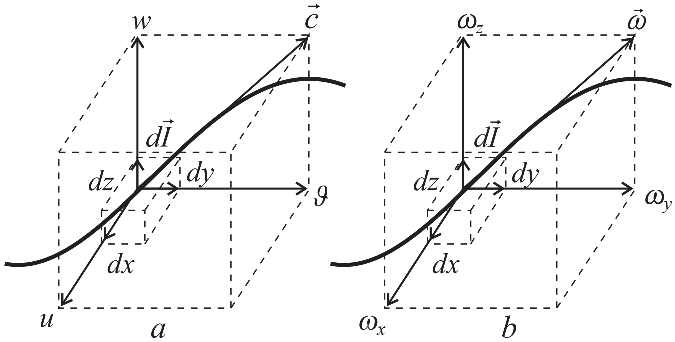
Her bir nokatda $\vec{\omega}$ burç tizlik wektorynyň ugruny kesgitleýän galtaşma çyzyga *tüweleý görnüşli akymyň ugry* diýilýär.

Bu kesgitlemeden $\vec{c}$ tizlik we $\vec{\omega}$ burç tizlik wektorlarynyň $d\vec{l}$ $d\vec{l}$ wektora kollinearlygy gelip çykýar, bu ýerde $d\vec{l}$ – akymyň ugrunyň ýa-da tüweleý görnüşiň düzüjileri, koordinata oklary boýunça *dx, dy, dz* deňdir *(1.6-njy çyzgy)*. Kollinearlyk şerti akymyň ugrunyň we tüweleý görnüşli akymyň ugrunyň deňlemelerini kesgitlemäge mümkinçilik berýär, ýagny bu ýagdaýda $| d\vec{l}\, x \vec{c} |$ we $| d\vec{l}\, x \vec{\omega} |$ wektor köpeltmek hasyllary nola deň bolýar.

Eger $d\vec{l} = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz$ bolsa, onda:

$$| d\vec{l}\, x \vec{c} | = \vec{i}\, (\vartheta dz - w dy) + \vec{j}\, (w dx - u dz) + \vec{k}\, (u dy - \vartheta dx) = 0;$$

$$| d\vec{l}\, x \vec{\omega} | = \vec{i}\, (\omega_y dz - \omega_z dy) + \vec{j}\, (\omega_z dx - \omega_x dz) + \vec{k}\, (\omega_x dy - \omega_y dx) = 0.$$



1.6-njy çyzgy. Akymyň ugry *(a)* we tüweleý görnüşli akymyň ugry *(b)*

Üç sany özara gönüburçly oklar boýunça dargadylan wektor nola deň bolsa, onda onuň hemme düzüjileri aýratynlykda nola deň bolýar. Şeýlelikde:

$$\vartheta dz - wdy = 0; \qquad \omega_y dz - \omega_z dy = 0;$$
$$wdx - udz = 0; \qquad \omega_z dx - \omega_x dz = 0;$$
$$udy - \vartheta dx = 0; \qquad \omega_x dy - \omega_y dx = 0.$$

Bu ýerden akymyň ugry üçin alarys:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{\vartheta} = \frac{dz}{w}. \tag{1.18}$$

Tüweleý görnüşli akymyň ugry üçin:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \tag{1.19}$$

Ýokardaky gatnaşyklaryň üsti bilen berlen tizlik meýdanynda ýa-da tüweleý görnüşli meýdanda akymyň ugry, şeýle hem tüweleý görnüşli akymyň ugry üçin matematiki aňlatmany almak mümkin.

(1.6) deňlemäniň kömegi bilen traýektoriýanyň differensial deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\vartheta(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt. \tag{1.20}$$

(1.20) matematiki baglanyşyk (1.18) aňlatmadan wagta görä doly differensialyň bardygy bilen tapawutlanýar. Bu bolsa traýektoriýanyň we akymyň ugrunyň görnüşiniň tapawudynyň barlygyny aňladýar.

Traýektoriýa diýlip, kesgitli wagt pursadynda berkidilen bölejigiň geçen ýoluny şekillendirýän çyzyga aýdylýar. Akymyň ugry birbada seredilýän wagt pursadynda bölejikleriň toplumynyň hereket ugruny görkezýän ugry aňladýar.

Döredilen ýapyk konturyň nokadynyň üstünden geçýän akym çyzyklarynyň jeminden emele gelýän üsti ***akym turbajygy,*** akym turbajygynyň içindäki suwuklyk bölegi ***akymjagaz*** diýlip atlandyrylýar.

Şuňa meňzeşlikde tüweleý görnüşli turbajygyň kesgitlemesini hem bermek mümkin, ýagny ýapyk konturyň nokatlarynyň üstünden geçýän tüweleý görnüşli çyzyklaryň jemine ***tüweleý görnüşli turbajyk*** diýilýär.

1.7. Tizlik sirkulýasiýasy

Käbir L kontur boýunça G tizlik sirkulýasiýasy diýlip c tizlik wektorynyň dI elementar kontura skalýar köpeltmek hasylyndan L_0 jemi kontur boýunça ýa-da onuň L_1 bölegi boýunça alnan integrala aýdylýar.

Eger: $\vec{c} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,\vartheta + \vec{k}\,w,\ d\vec{I} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$ bolsa, onda:

$$\vec{G} = \int_L \vec{c}\,d\vec{I} = \int c \cdot \cos(c, dl)\,dl = \int_L (udx + \vartheta dy + wdz). \qquad (1.21)$$

(1.21) deňleme F güýjüň L ýola köpeltmek hasylyndan emele gelýän A işi kesgitlemek üçin ulanylýan deňlemä gabat gelýär. Ýöne A işiň we G tizlik sirkulýasiýasynyň fiziki manysy dürli-dürlüdir.

Gidrogazodinamikada tizlik sirkulýasiýasy düşünjesi suwuklygyň tüweleý görnüşli hereketi öwrenilende giňden ulanylýar we tüweleý görnüşiň işjeňligi bolup hyzmat edýär.

(1.21) formula bilen tizlik sirkulýasiýasy kesgitlenende sirkulýasiýanyň konturyň haýsy ugur boýunça bolup geçýändigine garamazdan, ulanylyş çägi ýokdur. Eger konturyň içki bölegi çepde galsa G ululygy položitel diýip almak şertlendirilendir.

1.8. Şepbeşiklik

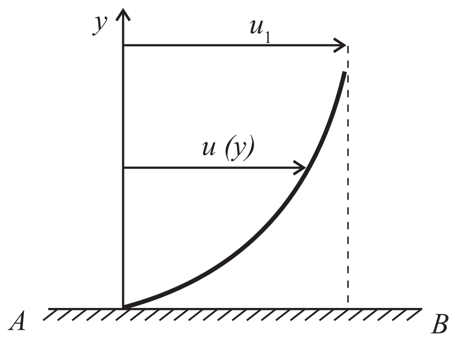
Suwuklygyň şepbeşikligi – bu bölejikleriň otnositel süýşmesine garşylyk görkezip bilijilik ukybydyr. Garşylyk käbir üste täsir edýän τ galtaşma napryýaženiýe bilen häsiýetlendirilýär we aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$\tau = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{F_s}{\Delta S}\right),$$

bu ýerde $F_{\text{sür.}}$ – sürtülme güýji, ΔS – sürtülme güýjüniň täsir edýän meýdany, τ – sürtülme napryaženiýesi gidrogazodinamikada basyşyň birligi ýaly birlige eýedir, ýagny $\left[\frac{N}{m^2}\right]$.

τ galtaşma napryaženiýe Nýutonyň içki sürtülme kanuny bilen bahalandyrylýar. Eger-de gaty jisimler üçin galtaşýan napryaženiýe onuň otnositel burç deformasiýasyna proporsional bolsa, onda Nýutonyň kanunyna görä, suwuklyklarda galtaşýan napryaženiýe otnositel burç deformasiýa tizligine proporsionaldyr. Şepbeşik suwuklygyň *AB* gaty üste galtaşýan tekiz hereketdäki ýagdaýyna seredeliň (*1.7-nji çyzgy*).

Şepbeşikligiň bolmadyk halatynda seredilýän üste geçirilen normal boýunça ýerleşen hemme bölejikleriň tizlikleri birmeňzeş bolýar.



1.7-nji çyzgy. Üste ýakyn akymlarda tizligiň paýlanyşy

Gaty üstüň golaýynda tizligiň ýaýramasy şepbeşikligiň täsiri esasynda üýtgeýär, ýagny gös-göni üstde ýerleşen bölejikleriň tizligi molekulalaryň dartyşma güýji netijesinde nola deň bolýar. Üste golaý ýerleşen we onuň ugruna hereket edýän bölejikleriň tizliginiň nola deň bolmaklygy «ýelmeşmeklik» diýlip atlandyrylýan çaklamany döredýär. Bu çaklama tejribäniň kömegi bilen tassyklanandyr. Bu çaklama diňe güýçli seýreklendirilen gazlarda, ýagny hereketdäki gurşawyň üznüksizlik şerti bozulan ýagdaýynda ýerine ýetmeýär.

Plastinanyň golaýynda hereket edýän, ahyrky hemişelik tizligi u_1 bolan suwuklygyň hereketine seredeliň. Suwuklyga täsir edýän şepbeşiklik güýji plastinanyň golaýynda togtamany döredýär we normalyň ugry boýunça tizligiň noldan u_1-e çenli ýuwaş-ýuwaşdan artmasy bolup geçýär. Netijede, 1.7-nji çyzgyda şekillendirilen tizlik profili döreýär.

Belläp geçilişi ýaly, otnositel burç deformasiýa tizligi $\frac{\partial u}{\partial y}$-a deňdir.

Eger u tizlik x dik koordinata bagly däl bolsa we diňe üste indirilen normalyň ugry boýunça üýtgeýän bolsa, onda hususy önümiň ýerine doly önümi ýazmak bolar:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \qquad (1.22)$$

bu ýerde μ – proporsionallyk koeffisiýenti we ol suwuklygyň fiziki häsiýetine we temperaturasyna baglydyr. Bu koeffisiýente dinamiki şepbeşiklik koeffisiýenti diýilýär, onuň ölçeg birligi $[\mu] = \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right]$. Dinamiki şepbeşiklik koeffisiýentinden başga-da, kähalatlarda kinematiki şepbeşiklik koeffisiýenti hem ulanylýar:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \ \left[\frac{m^2}{s}\right].$$

Dürli temperaturalarda bu koeffisiýentleriň san bahalary degişli tablisalarda berilýär.

Damjalaýyn suwuklyklarda temperaturanyň ýokarlanmagy bilen şepbeşiklik peselýär, gazlarda bolsa beýgelýär.

Suwuklygyň üç ölçegli hereketinde elementar parallelepipediň her bir granyna ugrukdyrylan $F_{\text{sür}}$ sürtülme güýji täsir edýär. Eger bu granlar koordinata oklary boýunça ugrukdyrylan bolsa, onda her bir koordinata boýunça $F_{\text{sür}}$ güýji iki düzüjä dargatmak bolar.

x okuna perpendikulýar granlar boýunça üst güýjüniň dargadylyşy 1.1-nji b çyzgyda görkezilen. Şuňa meňzeşlikde y we z oklaryna perpendikulýar granlar boýunça güýçleriň dargadylmasyny hem almak bolar:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\gamma_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz},$$

bu ýerde γ_{ij} – göni burçuň gyşarma tizligi (otnositel burç deformasiýasynyň doly tizligi) (1.15) deňlemäniň kömegi bilen kesgitlenilýär. Bu deňlemeden görnüşi ýaly: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$; $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Şeýlelikde, umumy ýagdaýda suwuklyga şepbeşikligiň alty däl-de üç sürtülme naprýaženiýesi täsir edýär. (1.19) deňlemäni hasaba alyp aşakdaky deňlemäni ýazmak bolar:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \\ \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{1.23}$$

Eger $w = \vartheta = 0$ bolsa, birölçegli akym boýunça sürtülme naprýaženiýesi üçin (1.22) Nýutonyň formulasyny almak bolar.

II bölüm
GIDROGAZODINAMIKANYŇ ESASY DEŇLEMELERI

2.1. Üznüksizlik deňlemesi

Üznüksizlik deňlemesi hereket edýän suwuklyk üçin massanyň saklanma kanunyndan gelip çykýar. Bu kanun esasynda daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän ulgamdaky hereketiň islendik wagtynda m massa üýtgemeýär:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \qquad (2.1)$$

Bu ýerden $m = \rho \cdot V$ bolýandygyny göz öňünde tutsak (V– hereketdäki suwuklygyň elementar göwrümi), onda:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} + V\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Bu ýerden deňligiň iki tarapyny hem ρV-e bölüp, $V \to 0$ bolanda predele geçip alarys:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \lim_{V\to 0}\frac{dV}{Vdt} = 0, \qquad (2.2)$$

bu ýerde $\lim\limits_{V\to 0}\dfrac{dV}{Vdt}$ – ululyk göwrümleýin deformasiýa tizligini aňladýar, ýagny (2.2) deňlemä $\lim\limits_{V\to 0}\dfrac{dV}{Vdt} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$ gatnaşygy goýup alarys:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{c} = 0, \qquad (2.3)$$

bu ýerde ρ – dykyzlyk koordinatanyň we wagtyň funksiýasydyr, ýagny:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}. \qquad (2.4)$$

(2.4) deňlemäni (2.3) deňlemede ýerine goýup alarys:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \qquad (2.5)$$

(2.5) deňleme üçölçegli durnukly däl akymyň *differensial görnüşdäki üznüksizlik deňlemesini* aňladýar.

Wektor algebrasynyň operatoryny ulanyp, (2.5) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{c}) = 0. \tag{2.6}$$

Durnukly akymlarda dykyzlygyň wagt boýunça ýerli (lokal) üýtgemesi hasaba alynmaýar, ýagny $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, onda:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{c}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\vartheta) + \frac{\partial}{\partial w}(\rho w) = 0. \tag{2.7}$$

Gysylmaýan suwuklyk üçin ($\rho = const$) alarys:

$$\operatorname{div}(\vec{c}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.8}$$

(2.8) deňlemäniň fiziki manysy gysylmaýan suwuklygyň hereketinde göwrümleýin deformasiýa tizligi nola deňdir.

Eger-de gysylýan suwuklygyň tekiz durnukly akymyna seredilýän bolsa, onda:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\vartheta) = 0. \tag{2.9}$$

Gysylmaýan suwuklyk üçin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0. \tag{2.10}$$

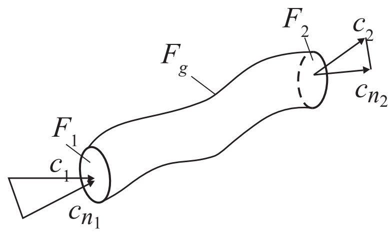
Eger-de birölçegli akym bolsa, ($\vartheta = w = 0$, $u = c$):

$$\frac{d}{dx}(\rho c) = 0; \quad \rho c = const. \tag{2.11}$$

Alnan netije ρc udel sarp edilişiň (akymyň kese kesiginiň birlik meýdany boýunça suwuklygyň sarp edilişi) akym turbajygynyň kese kesiginiň her bir nokadynda şol bir baha eýedigini görkezýär (akym turbajygynyň uzynlygy boýunça).

Käbir halatlarda üznüksizlik deňlemesiniň integral görnüşi hem ulanylýar. Deňlemäni getirip çykarmak üçin akym turbajygyndan alnan kesikleriň arasyndaky erkin ýerleşen bölegine seredeliň (*2.1-nji çyzgy*).

Massanyň saklanma kanunyna görä, seredilýän göwrüme girýän durnuklaşan akymly suwuklygyň mukdary içki çeşme hasaba alynma-



2.1-nji çyzgy. Akym turbajygynyň kesimi

dyk ýagdaýynda bu göwrümi taşlap gidýän suwuklygyň mukdaryna deňdir.

Başgaça ýagdaýda, seredilýän göwrümiň üsti boýunça suwuklyk massasynyň sarp edilişi nola deňdir:

$$\int_F \rho_i c_n dF_i = 0, \tag{2.12}$$

bu ýerde F – seredilýän göwrümiň ähli üsti, c_n – dF elementar üste normal boýunça ugrukdyrylan suwuklygyň tizligi.

(2.12) deňlemäni F_1 kesigiň, F_g gapdal üstüň meýdany we F_2 kesigiň meýdany boýunça alnan üç sany integral görnüşinde ýazalyň. Bu integrallaryň alamatyny, eger normal tizlik düzüjileriniň üste indirilen normal bilen ugry gabat gelýän bolsa položitel diýeliň, tersine bolan ýagdaýynda bolsa otrisatel diýeliň. Onda:

$$\int_{F_1} \rho_i c_n dF \pm \int_{F_g} \rho_i c_n dF - \int_{F_2} \rho_i c_n dF = 0. \tag{2.13}$$

Gapdal üst boýunça suwuklygyň sarp edilişi nola deň, ýagny akym turbajygynda tizlik gapdal üsti boýunça ugrukdyrylan. Onda:

$$\int_{F_1} \rho_i c_n dF = \int_{F_2} \rho_i c_n dF. \tag{2.14}$$

(2.14) deňlemeden görnüşi ýaly, akym turbajygynyň islendik kesiminde durnuklaşan akymly suwuklygyň sarp edilişi üýtgemän galýar:

$$\int_F \rho_i c_n dF = const. \tag{2.15}$$

Eger tizlik integrirlenýän üste indirilen normalyň ugry bilen gabat gelýän bolsa, onda (2.15) deňleme ýönekeý görnüşe eýe bolar, ýagny bu ýagdaýda kese kesik boýunça tizligiň we dykyzlygyň bahalary üýtgemeýär, ýagny:

$$\rho_i c_i F_i = const. \tag{2.16}$$

Kähalatlarda bu deňlemä *sarp ediliş deňlemesi* hem diýilýär. Gysylmaýan suwuklyklarda $\rho = const$ we bu ýagdaýda (2.16) massalaýyn sarp ediliş deňlemesi göwrümleýin sarp ediliş deňlemesine öwrülýär:

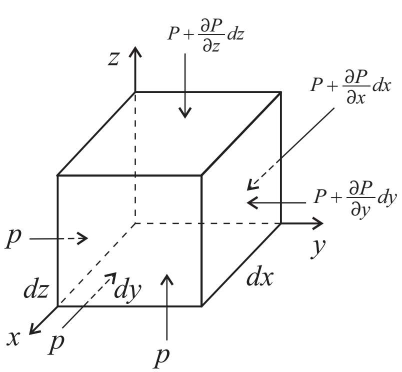
$$c_i F_i = const. \tag{2.17}$$

2.2. Hyýaly suwuklygyň hereket deňlemesi

Indiki seretjek deňlemämiz hereket mukdarynyň saklanma kanunynyň matematiki ýazgysy bolup, bu ýagdaýda suwuklyga täsir edýän ähli massalaýyn we üst güýçleriniň jemi hereket mukdarynyň üýtgeme wektor tizligine deňdir.

Deňlemäni getirip çykarmak üçin gapyrgalary *dx, dy, dz*-e deň bolan dörtburçly parallelepiped görnüşli suwuklyk elementine seredeliň (*2.2-nji çyzgy*). Bu gapyrgalara $\vec{P}$ üst we $\vec{M}$ massalaýyn güýç wektorlary täsir edýär (birlik göwrüme degişli). Onda:

$$\rho \frac{d}{dt}(\vec{c}) = \vec{P} + \rho\vec{M}. \tag{2.18}$$



2.2-nji çyzgy. Dörtburçly parallelepiped görnüşli suwuklyk elementi

Bu deňlemä girýän wektorlary gönüburçly koordinata oklaryna görä dargadyp alarys:

$$\left.\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{i}\,u + \vec{j}\vartheta + \vec{k}w \\ \vec{P} &= \vec{i}\,P_x + \vec{j}P_y + \vec{k}P_z \\ \vec{M} &= \vec{i}\,X + \vec{i}\,Y + \vec{k}Z\end{aligned}\right\}, \tag{2.19}$$

bu ýerde *u, ϑ, w* – tizligiň koordinata oklaryna görä düzüjileri, P_x, P_y, P_z, *X*, *Y*, *Z* – bu oklara görä üst we massalaýyn güýçleriň düzüjileri. (2.18) deňlemäni koordinata oklaryna proýektirläp we (2.19) deňlemäni göz öňünde tutup, aşakdaky üç deňlemäni alarys:

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{d}{dt}(u) &= P_x + X\rho \\ \rho\frac{d}{dt}(\vartheta) &= P_y + Y\rho \\ \rho\frac{d}{dt}(w) &= P_z + Z\rho\end{aligned}\right\}. \tag{2.20}$$

Bu ýagdaýdaky hyýaly suwuklygyň hereketine diňe *p* basyş diýlip atlandyrylýan ýeke-täk üst güýji täsir edýär.

Onda *x* okuna perpendikulýar bolan granlara aşakdaky ýaly güýçler täsir edýär, çep grana *pdydz*, sag grana $\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial x}\right) dydz$.

x okunyň ugruna täsir edýän birlik göwrüme degişli üst güýji üçin alarys: $P_x = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$. Şuňa meňzeşlikde $P_y = -\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)$, $P_z = -\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)$.

Onda (2.20) deňlemämiz aşakdaky görnüşi alar:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z\end{aligned}\right\}. \tag{2.21}$$

Çep tarapdaky doly tizlenmäni ýerli we konwektiw düzüjilere dargadyp alarys:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X\\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z\end{aligned}\right\}. \tag{2.22}$$

(2.22) deňlemä *hyýaly suwuklygyň Eýler görnüşindäki hereket deňlemesi* diýilýär.

Durnuklaşan akym üçin tizlenmäniň ýerli düzüjisi nola deň bolýar we (2.22) deňlemämiz aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\left.\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X\\ u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y\\ u\frac{\partial w}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z\end{aligned}\right\}. \tag{2.23}$$

Tekiz durnuklaşan akym üçin deňlemämiz şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\left.\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X\\ u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y\end{aligned}\right\}. \tag{2.24}$$

Birölçegli akym üçin, ýagny akym parametrleri we tizligi diňe bir koordinata okuna bagly bolsa, onda deňlemämiz aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$c\frac{dc}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+X. \tag{2.25}$$

Käbir gazodinamik meselelerde massalaýyn güýjüň täsiri örän kiçi bolýar we ony hasaba almasaň hem bolýar, ýagny $X = Y = Z = 0$, onda:

$$cdc=-\frac{dp}{\rho}. \tag{2.26}$$

Bu deňleme islendik görnüşli kanallardaky gysylmaýan hyýaly suwuklygyň hereketi baradaky mesele çözülende ulanylýar.

Umumy ýagdaýda hereket deňlemesini integrirlemek başa barmaýar. Käbir goşmaça şertler ulanylanda bu deňlemäni integrirlemek bolar. Onuň üçin her bir deňlemäniň çep tarapyna käbir ululyklary goşup we aýryp, burç tizlik wektorynyň düzüjilerini girizeliň. (2.23) ulgamyň birinji deňlemesine $\pm\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ we $\pm w\frac{\partial w}{\partial x}$ ululyklary goşalyň:

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2+\vartheta^2+w^2}{2})}\underbrace{-\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}}_{-2\vartheta\omega_{bz}}+\underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}-w\frac{\partial w}{\partial x}}_{2w\omega_{by}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X.$$

Onda: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-X=2\vartheta\omega_{bz}-2w\omega_{by}.$

Ikinji hereket deňlemesine $\pm u\frac{\partial u}{\partial y}$ we $\pm w\frac{\partial w}{\partial y}$ ululyklary goşup alarys:

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial y}+\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u^2+\vartheta^2+w^2}{2})}+\underbrace{u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}}_{2u\omega_{bz}}\underbrace{-w\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}}_{-2w\omega_{bx}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y.$$

Onda: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-Y=2w\omega_{bx}-2u\omega_{bz}.$

Şuňa meňzeşlikde üçünji deňlemäni hem üýtgedip bolýar.

Şeýlelikde, (2.23) deňlemeler ulgamyny 1881-nji ýylda I.S. Gromekonyň hödürlän hyýaly suwuklygyň hereket deňlemesi görnüşinde aňlatmak bolýar:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-X&=2\vartheta\omega_{bz}-2w\omega_{by}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-Y&=2w\omega_{bx}-2u\omega_{bz}\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-Z&=2u\omega_{by}-2\vartheta\omega_{bx}\end{aligned}\right\}. \tag{2.27}$$

2.3. Hyýaly suwuklygyň hereket deňlemesiniň integraly

Hereket deňlemesini integrirlemek üçin massalaýyn güýçleri potensial diýip hasap edeliň. Onda olar koordinata oklarynyň üsti bilen aňladylyp bilner.

Eger massalaýyn güýçleriň potensialyny *U(x, y, z)* bilen bellesek, onda:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\ \ Y=\frac{\partial U}{\partial y},\ \ Z=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.28}$$

Ýagny $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=\frac{dp}{\rho}=dP$ üç ululygy käbir *P(x, y, z)* funksiýanyň doly differensialy görnüşinde ýazyp bolýar. Eger seredilýän *p* basyşymyz diňe dykyzlyga bagly bolsa, onda bu hili funksiýany girizmek bolar. Bu hili şerti kanagatlandyrylýan suwuklyklara *barotrop häsiýetli suwuklyklar* diýilýär. Howa ýa-da islendik gaza barotrop häsiýetli suwuklyk görnüşinde garamak bolar. Eger-de bularyň halynyň üýtgemesi izotermiki ýa-da adiabatiki bolup geçýän bolsa, onda barotrop suwuklyklar üçin:

$$P=\int\frac{dp}{\rho}=const. \tag{2.29}$$

Bu özgertmelerden soňra (2.27) deňlemeler ulgamyny degişlilikde *dx*, *dy*, *dz* köpeldeliň we bu ululyklaryň ählisini goşalyň (2.28) we (2.29) deňlemeleri ulanyp alarys:

$$d\left(\frac{c^2}{2}+P-U\right)=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & \vartheta & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \tag{2.30}$$

Bu ýerden (2.30) deňlemedäki kesgitleýjiniň (2.27) deňlemeler ulgamynyň sag tarapyndaky ähli ululyklaryň jemini berýändigini görmek bolýar. Haçan-da kesgitleýji nola deň bolanda (2.30) deňlemäni integrirlemek bolýar.

Munuň üçin setiriň ýa-da sütüniň ähli ululyklary nola deň bolmaly, bolmasa setirler, sütünler bir-birine proporsional bolmaly. Onda suwuklyk akymynyň aşakdaky bäş hili ýagdaýynda (2.30) deňlemäni integrirlemek bolýar:

1. $u=\vartheta=w=c=0$ bolanda suwuklygyň hereketi hasaba alynmaýar we (2.30) deňleme suwuklygyň statiki deňagramlylyk şertini aňladýar.

2. $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$ bolanda suwuklygyň hereketi tüweleý görnüşli däldir. Bu hili herekete potensial hereket diýilýär we (2.30) deňlemäniň integraly aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{c^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}-U=const. \tag{2.31}$$

Bu deňlemä Eýleriň integraly diýilýär. Eger massalaýyn güýç diňe agyrlyk güýjüne deň bolsa, onda U potensialy aşakdaky ýaly ýazyp bolýar:

$$U = -gz. \tag{2.32}$$

Minus alamaty massalaýyn güýjüň ugrunyň z okunyň položitel ugruna garşylyklydygyny aňladýar. Onda (2.32) deňlemäni hasaba alyp, (2.31) integraly aşakdaky ýaly ýazmak bolýar:

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = const. \tag{2.33}$$

(2.33) deňlemäniň sag tarapyndaky hemişelik deňlemäniň çep tarapyndaky ululyklaryň jemi, akymyň ähli ýerinde bir we şol bir baha eýedigini görkezýär.

3. $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{\vartheta} = \frac{dz}{w}. \tag{2.34}$$

Deňlemedäki kesgitleýjiniň ilkinji iki setiriniň proporsionallyk şerti akymyň ugruna differensial deňlemesini berýär. Bu ýagdaýda (2.30) deňleme (2.33) görnüşe eýe bolýar, ýöne integrirlemäniň hemişeligi diňe seredilýän akymyň ugrunda öz bahasyny üýtgetmän saklaýar. Başga bir akymyň ugruna geçilende bu hemişeligiň üýtgemegi mümkin.

4. $$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}.$$

Bu ýerde hem integrirleme tüweleý görnüşli akymyň ugry geçirilýär we (2.33) deňlemedäki hemişelik tüweleý görnüşli akymyň ugrunda üýtgemeýär.

Akymyň ugry we tüweleý görnüşli akymyň ugry boýunça alnan integrala *Bernulliniň integraly* diýilýär. Mundan beýläk (2.33) deňlemäni Bernulliniň integraly diýip atlandyrarys.

5. $\dfrac{u}{\omega_x} = \dfrac{\vartheta}{\omega_y} = \dfrac{w}{\omega_z}$. (2.30) deňlemäniň kesgitleýjisiniň ikinji we üçünji setirleriniň proporsionallygy akymyň aýratyn bir görnüşini aňladýar, ýagny bu ýagdaýda akymyň ugry tüweleý görnüşli akymyň ugry bilen gabat gelýär. Akymyň bu görnüşine *hyr görnüşli akym* diýilýär we integrirlemäniň ((2.33) deňlemedäki) hemişeligi akymyň islendik meýdanynda üýtgemän galýar.

(2.33) deňleme gysylmaýan suwuklyklar üçin $\left(\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}\right)$ ýönekeý görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \cdot \tag{2.35}$$

Bu deňleme energiýanyň saklanma kanunyny aňladýar, ýagny kinetiki $\left(\frac{c^2}{2}\right)$ we potensial $\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)$ energiýalaryň jemi tüweleý görnüşli akymyň ýa-da akymyň ugrunda üýtgemän galýar. Tüweleýsiz (potensial) we hyr görnüşindäki hereketli suwuklyk akymynyň islendik meýdanynda bolsa energiýa üýtgemeýär.

Gysylýan suwuklyklarda basyş bilen dykyzlygyň baglanyşygyny kesgitläliň. Izoentropik kada üçin bu parametrleriň baglanyşygyny izoentropik deňlemäniň üsti bilen almak bolýar: $\frac{p}{\rho^k} = A$.

Differensirlemeden soňra alarys:

$$dp = k\rho^{k-1} A d\rho, \tag{2.36}$$

(2.36) deňlemäni (2.33)-e goýup alarys:

$$\frac{c^2}{2} + Ak\int \rho^{k-2} d\rho + gz = const.$$

A-nyň bahasyny ýerine goýup alarys:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + gz = const. \tag{2.37}$$

Agyrlyk güýji hasaba alynmadyk ýagdaýynda (2.37) Bernulliniň integraly gysylýan suwuklyklar üçin aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = const. \tag{2.38}$$

2.4. Hakyky suwuklygyň hereket deňlemesi (Nawýe-Stoksuň deňlemesi)

Şepbeşiklik güýjüni hasaba almak bilen ýazylan hereket deňlemesi ýeterlik derejede çylşyrymlaşýar. Sebäbi bu halatda edil Eýleriň deňlemesiniň getirilip çykarylyşyndaky ýaly üst güýçleri ýeterlik derejede ýönekeý görnüşde aňladylyp bilinmez.

Görkezilen deňlemeleriň koordinata oklaryna görä proýeksiýalary

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{d}{dt}(u) &= P_x + X\rho\\ \rho\frac{d}{dt}(\vartheta) &= P_y + Y\rho\\ \rho\frac{d}{dt}(w) &= P_z + Z\rho\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

görnüşi saklar.

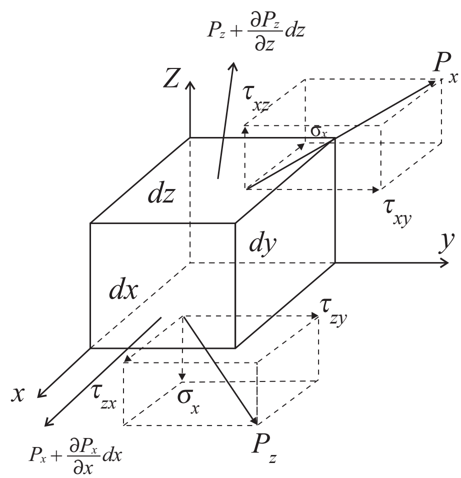
Hyýaly suwuklyklardan hakyky suwuklyklaryň tapawudy umumy halda üst güýçleri normal ugrukdyrylman, eýsem, bölünip alnan meýdana görä erkin burç bilen ugrukdyrylandyr.

Aýdylanlary göz öňünde tutup, suwuklygy elementar gönüburçly parallelepipedlere böleliň we koordinata oklaryna perpendikulýar meýdana täsir edýän üst güýçleriniň jemleýji düzüjisini tapalyň.

Düşnüklilik üçin 2.3-nji çyzgyda diňe x we y oklaryna perpendikulýar gapyrgalara täsir edýän güýçler görkezilendir.

Ýene-de bir gezek şepbeşikligi hasaba alýan $\vec{p}_x$ ululygyň p basyşa deň däldigine we onuň wektor ululykdygyna üns bereliň. Bu ululygyň aşaky indeksi bolsa güýçleriň bu oklara görä proýeksiýasyny görkezmän, eýsem, seredilýän grana perpendikulýar ýerleşýän oky görkezýär.

Diýmek, gapyrgalara perpendikulýar täsir edýän üst güýçleriniň düzüjisi:



2.3-nji çyzgy. x we y oklaryna perpendikulýar bolan granlara üst wektor güýçleriniň täsir edişi

x okunda $\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dxdydz$;

y okunda $\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dxdydz$;

z okunda $\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dxdydz$ ululyklara deň bolar.

$dV = dxdydz$ göwrüm birligine degişli bolan üst güýçleriniň $\vec{P}$ doly wektory:

$$P = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}. \tag{2.40}$$

Her bir $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ wektor ululygyny koordinata oklary boýunça dargadalyň (2.3-nji çyzgyda $\vec{p}_x$ we $\vec{p}_z$ wektorlaryň dargadylyşy görkezilendir).

Bu dargadylma (1.1*a*) , (1.1*b*) we (1.1*ç*) formulalar boýunça kesgitlenilýär.

(1.1) ulgamy (2.40) deňlemä goýup, koordinata oklary boýunça üst güýçlerini dargadyp alarys:

$$\vec{p} = \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\vec{i}}_{p_x} + \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\vec{j}}_{p_y} + \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\vec{k}}_{p_z}. \tag{2.41}$$

Üst güýçleriniň düzüjilerini (2.20) hereket deňlemesine geçireliň, onda:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho\frac{d\vartheta}{dt} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho\frac{dw}{dt} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{2.42}$$

Hyýaly suwuklyklarda ähli galtaşma naprýaženiýeler hasaba alynmaýar ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), normal naprýaženiýeler bolsa bir-birine deňdir we bu ululygyň otrisatel bahasyna *suwuklykdaky basyş* diýilýär.

Sürtülmä eýe bolan hakyky suwuklyk üçin üç normal naprýaženiýeden orta arifmetik bahany girizeliň:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p. \tag{2.43}$$

(2.42) deňlemeler ulgamy alty sany düzüji tenzor napryaženiýesini özünde saklaýar we bu düzüjileri u, ϑ, w tizlik düzüjileri bilen nähili hem bolsa baglanyşdyrmak zerurdyr. Şular ýaly baglanyşyk aşakdaky garaýyşlara görä esaslandyrylyp bilner. Eger-de haýsy-da bolsa bir göwrüme güýç goýlan bolsa, onda umumy halda onuň täsiri bilen bu göwrümiň deformirlenmegi bolýar we ol üç otnositel uzalma hem-de üç süýşme burçunyň üsti bilen häsiýetlendirilýär. Gaty jisimler üçin napryaženiýe otnositel deformasiýa proporsionaldyr (Gukuň kanuny), suwuklyklarda bolsa deformasiýanyň tizligine proporsionaldyr (Nýuton-Stoksuň kanuny).

Diýmek, napryaženiýe we deformasiýa arasynda elementar çalyşma ýoly bilen Gukuň kanunyna görä baglanyşygy esaslandyryp, suwuk gurşawyň meňzeş baglanyşyklaryna ýeňil geçip bolýar.

Gaty jisimler üçin otnositel çyzykly deformasiýany ε_x, ε_y, ε_z bilen belgiläp, suwuklyklar üçin bu ululyklaryň arasynda otnositel çyzykly deformasiýa tizlikleri hökmünde:

$$dv_1 = d\alpha + d\beta, \quad -dv_2 = d\alpha - d\beta$$

ululyga düşüneris. Burç deformasiýalary v_{xy}, v_{yz}, v_{zx} bilen belgiläliň, suwuklyklar üçin olaryň esasynda burç deformasiýasynyň tizligi hökmünde:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

ululyga düşüneris.

Onda galtaşma napryaženiýesi üçin gözlenýän baglanyşyk aşakdaky gatnaşyk arkaly kesgitlenýär:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= Gv_{xy} \\ \tau_{yz} &= Gv_{yz} \\ \tau_{zx} &= Gv_{zx} \end{aligned}\right\}, \qquad (2.44)$$

bu ýerde G – süýşme moduly bolup hyzmat edýän proporsionallyk koeffisiýenti.

σ_i we ε_i ululyklaryň arasynda has çylşyrymly baglanyşyk döreýär, ýagny täsir edýän güýç x okuň diňe bir boýuna görä süýşmekligi döretmän, eýsem, beýleki iki ok boýunça gysylma getirýär.

σ_x napryaženiýe aşakdaky ýaly deformasiýany döredýär:

x – okunyň boýuna $\varepsilon_x^{/} = \frac{\sigma_x}{E}$;

y – okunyň boýuna $\varepsilon_y^{/} = + \frac{\sigma_x}{nE}$;

z – okunyň boýuna $\varepsilon_z^{/} = - \frac{\sigma_x}{nE}$.

σ_y napryýaženiýe esasynda ýüze çykýan deformasiýa degişlilikde, aşakdaka deň bolýar:

$$\varepsilon_x'' = -\frac{\sigma_y}{nE}; \quad \varepsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z'' = -\frac{\sigma_y}{nE}.$$

σ_z üçin alarys: $\varepsilon_x''' = -\frac{\sigma_z}{nE}$; $\varepsilon_y''' = -\frac{\sigma_z}{nE}$; $\varepsilon_z''' = -\frac{\sigma_z}{E}$.

Bulary jemläp, üç ok boýunça döreýän umumy deformasiýany aşakdaky ýaly aňladyp bolýar:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{nE}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_y''' = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{nE}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' + \varepsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{nE}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}\right\}, \tag{2.45}$$

bu ýerde n – kese kesik boýunça gysylma koeffisiýenti, E – süýnme moduly, ol süýşme moduly bilen aşakdaky ýaly baglanyşýar:

$$E = 2\frac{n+1}{n}G. \tag{2.46}$$

(2.45) deňleme her bir normal napryýaženiýäni çyzykly deformasiýa bilen we G süýşme moduly bilen birbelgili baglanyşdyrmaklyga mümkinçilik berýär. Görkezilen deňlemeler ulgamyny çözmekligiň netijesinde alarys:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_x - \frac{2}{3}G \cdot e \\ \sigma_y &= \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_y - \frac{2}{3}G \cdot e \\ \sigma_z &= \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_z - \frac{2}{3}G \cdot e \end{aligned}\right\}. \tag{2.47}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, v_{xy}, v_{yz}, v_{zx}$ ululyklara otnositel deformasiýanyň tizligi hökmünde seredip, proporsionallyk koeffisiýenti hökmünde G süýşme modulyny ulanman, eýsem, μ dinamiki şepbeşikligi ulanyp we $\sigma = -p$ hem-de $e = \operatorname{div}\vec{c}$ deňdigini hasaba alyp (2.42) hereket deňlemesini gutarnykly görnüşde (Nawýe-Stoksuň deňlemesi) aşakdaky ýaly ýazyp bileris:

$$\begin{aligned}\rho\frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right];\end{aligned} \tag{2.48a}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{d\vartheta}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right];\end{aligned} \tag{2.48b}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right).\end{aligned} \tag{2.48ç}$$

Meseläniň matematiki formulirlenmesi üçin bu deňlemäni, eger-de gaz halynyň üýtgemesi izotermiki däl bolsa we μ şepbeşiklik we T temperatura arasynda empriki baglanyşyk bar bolan ýagdaýa seredilýän bolsa, gysylýan suwuklyk akymy üçin üznüksizlik deňlemesini, energiýa deňlemesi bilen doldurmak zerurdyr.

Gysylmaýan suwuklyklar üçin dört deňleme ýeterlikdir, Nawýe-Stoksuň deňlemesinden käbir ýönekeýleşdirme arkaly alarys:

$$\left.\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ &\rho\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right)\\ &\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\right\}. \tag{2.49}$$

Laplasyň operatoryny ulanyp, hereket deňlemesini ýeke-täk wektor deňlemesi görnüşinde ýazmak bolýar:

$$\rho\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{M} - \operatorname{grad} p + \mu\Delta\vec{c}. \tag{2.50}$$

Takyk meseleleri çözmek üçin araçäk şertleri kesgitlemek zerurdyr. Mesele berlen ýagdaýda bu şert gaty üstüň töwereginden akýan suwuň üste ýelmeşmeklik çaklamasyndan gelip çykýar we şol esasynda gaty üstden akýan suwuň tizliginiň c_n normal we tangensial düzüjileri nola deňdir.

Şeýlelikde, massalaýyn güýjüň erkin üsti hasaba alynmadyk ýagdaýynda bir jynsly suwuklyk üçin, p basyş diýip hakyky basyşyň we asuda ýagdaýdaky basyşyň tapawudyna düşünilýän bolsa gidrostatiki ýokary göteriji güýç deňagramlaşýar. Hereket deňlemesinden:

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{c}. \tag{2.51}$$

Durnuklaşan akym üçin:

$$\rho(\vec{c}\ \operatorname{grad})\vec{c} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{c}. \tag{2.52}$$

Nawýe-Stoksuň deňlemesini has ýönekeý görnüşde, ýagny gysylmaýan suwuklygyň tekiz akymy üçin ýazalyň:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right);\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Köpsanly tejribe ähmiýetli meseleler çözülende, meselem, turbomaşynlaryň elementlerindäki akymy hasaplamakda dekart koordinata ulgamyny däl-de, silindriki koordinata ulgamyny ulanmak maksadalaýykdyr.

Eger-de radial koordinatany r diýip, töwerekleýini θ, oklaýyny z diýip hem-de tizligiň bu koordinatalara bolan proýeksiýalaryny c_r, c_θ, c_z diýip bellesek, gönüburçly koordinata ulgamyndan silindrik ulgama geçmeklik arkaly gysylmaýan suwuklyk üçin (2.49) deňlemämiz şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial c_r}{\partial t}+c_r\frac{\partial c_r}{\partial r}+\frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_r}{\partial \theta}-\frac{c_\theta^2}{r}+c_z\frac{\partial c_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c_r}{\partial r}-\frac{c_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial c_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 c_r}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial t}+c_r\frac{\partial c_\theta}{\partial r}+\frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_\theta}{\partial \theta}+\frac{c_r c_\theta}{r}+c_z\frac{\partial c_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c_\theta}{\partial r}-\frac{c_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial c_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial c_z}{\partial t}+c_r\frac{\partial c_z}{\partial r}+\frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_z}{\partial \theta}+c_z\frac{\partial c_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c_z}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 c_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.54)$$

2.5. Energiýa deňlemesi

Energiýa deňlemesi energiýanyň saklanma kanunynyň suwuklyk elementinde ulanylyşynyň matematiki ýazgysyny berýär, ýagny suwuklyk elementiniň kinetiki we içki energiýalarynyň üýtgemesi hemme daşky güýçleriň eden işine we oňa berlen ýylylyk mukdaryna deňdir.

Taraplary *dx, dy, dz* deň bolan parallelepiped görnüşli suwuklyk bölejigini bölüp alalyň we parallelepipediň granlaryna täsir edýän üst güýçleriniň wagt birliginde eden işini tapalyň.

Umumy ýagdaýda şepbeşik suwuklyklaryň hasaplamasynda üç normal naprýaženiýe σ_x, σ_y, σ_z we üç galtaşma τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} naprýaženiýeleriň üsti bilen şertlenilen işini göz öňünde tutmalydyrys.

x okuna perpendikulýar bolan granlara täsir edýän güýçleriň işini hasaplap, normal güýçler üçin alarys:

$$\underbrace{\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dzdy}_{\text{sag grana täsir edýän güýç}}\ \underbrace{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)}_{\text{wagt birliginde sag granyň süýşmesi}}-\underbrace{\sigma_x dydz\cdot u}_{\text{çep grana täsir edýän güýçleriň işi}}=\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)dxdydz.$$

Bu grana galtaşma güýjüniň işi:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}w)dxdydz \text{ we } \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}\vartheta)dxdydz.$$

Şuňa meňzeşlikde x we y oklaryna täsir edýän güýçleriň işini tapyp, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\Sigma A_{ust} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy}\vartheta + \tau_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u + \sigma_y\vartheta + \tau_{yz}w) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u + \tau_{zy}\vartheta + \sigma_z w)\right] dxdydz. \qquad (2.55)$$

Massalaýyn güýjüň işi:

$$\Sigma A_m = (Xu + Y\vartheta + Zw)\rho dxdydz. \qquad (2.56)$$

Onda energiýanyň saklanmak kanunyndan aşakdaky deňlemäni ýazmak bolýar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2} + c_\vartheta T\right)\rho dxdydz = \Sigma A_{ust} + \Sigma A_m + Q\rho dxdydz, \qquad (2.57)$$

(2.55), (2.56) we (2.57) deňlemelerden alarys:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2} + c_\vartheta T\right) = \rho(Xu + Y\vartheta + Zw) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy}\vartheta + \tau_{xz}w) + \qquad (2.58)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u + \sigma_y\vartheta + \tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u + \tau_{zy}\vartheta + \sigma_z w) + \rho Q,$$

bu ýerde Q – suwuklyk massasyna wagt birliginde berilýän ýylylygyň mukdary, $c_\vartheta T = W$ içki energiýa, $\frac{c^2}{2}$ massanyň kinetiki energiýasy.

Mundan beýläk hereket edýän gazyň $h = c_p T$ udel entalpiýasyny girizeliň. Munuň üçin (2.58) deňlemäniň sag we çep taraplaryna şol bir ululygy goşalyň:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \rho p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{dp}{dt}\right) = \rho\frac{d}{dt}(RT).$$

Onda (2.58) deňlemäniň çep tarapy şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2} + c_\vartheta T + \frac{p}{\rho}\right) = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2} + c_p T\right) = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2} + h\right) = \rho\frac{dh_0}{dt},$$

bu ýerde $h_0 = \frac{c^2}{2} + h$ – togtaýan gazyň doly udel entalpiýasy.

Mundan başga-da, $Q\rho dxdydz$ berilýän ýylylyk mukdaryny wagt birliginde bölünip alnan elementiň üstünden akyp geçýän q udel ýylylyk mukdarynyň üsti bilen aňladalyň. x okuna perpendikulýar grana berilýän ýylylygyň udel mukdary:

$$-\left(q+\frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dydz+q_x dydz=-\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdydz;$$

y oky boýunça: $-\left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)dxdydz;$

z oky boýunça: $-\left(\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dxdydz.$

Şeýlelikde, suwuklyk göwrüminiň alýan doly ýylylygynyň mukdary:

$$\rho Q dxdydz=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Bu ýerden:

$$\rho Q=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)=-\operatorname{div}\vec{q}.$$

$\vec{q}$ ýylylyk akymynyň dykyzlygynyň wektoryny T absolýut temperatura bilen Furýe kanuny esasynda baglanyşdyrmak bolýar, ýagny $q=-\lambda \operatorname{grad} T$, bu ýerde λ – ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti.

Netijede, alarys:

$$\rho Q=\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T).$$

Ähli aýdylanlary göz öňünde tutup, (2.57) deňlemäni şeýle görnüşde ýazmak bolar:

$$\rho\frac{dh_0}{dt}=p\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{dp}{dt}+\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}_x\vec{c})+\frac{\partial}{\partial y}(\vec{p}_y\vec{c})+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{p}_z\vec{c})+$$
$$+\rho\vec{M}\vec{c}+\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T).$$

Şeýle belgilemäni girizeliň:

$$p\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{dp}{dt}-\operatorname{div}(p\vec{c})=\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Onda:

$$\rho\frac{dh_0}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{c}p+\rho\vec{M}\vec{c}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}_x\vec{c})+\frac{\partial}{\partial y}(\vec{p}_y\vec{c})+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{p}_z\vec{c})\right]+ \quad (2.59)$$
$$+\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T).$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, suwuklygyň durnuklaşan hereketinde ýylylyk geçirijilik hasaba alynmadyk ýagdaýynda we massalaýyn güýç wektory tizlik wektoryna ortogonal bolanda, doly togtama entalpiýasynyň üýtgemesi nola deňdir:

$$\rho\frac{dh_0}{dt} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{c^2}{2} + h = h_0 = const. \tag{2.60}$$

(2.60) görnüşindäki energiýa deňlemesi (2.38) görnüşli Bernulliniň deňlemesini aňladýandygyny görmek bolýar:

$$h = c_p T = c_p\frac{p}{\rho R} = \frac{c_p}{c_p - c_\vartheta}\frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}.$$

Eger üst güýjüniň wektoryny degişli otnositel deformasiýa tizligi bilen çalşyrsak, (2.59) deňlemämiz şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\rho\frac{dh_0}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, T) - \frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\,\vec{c})^2 - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{c} + \varPhi, \tag{2.61}$$

bu ýerde

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

dissipasiýa energiýany kesgitleýän funksiýa dissipatiw funksiýa diýilýär.

Biz mundan beýläk energiýa deňlemesiniň (2.60) hususy görnüşine seretjekdiris.

III bölüm
SUWUKLYGYŇ BIRÖLÇEGLI AKYMY

3.1. Birölçegli akymyň esasy deňlemeleri

Birölçegli akymlarda okuň ähli parametrleriniň häsiýetli üýtgemesi diňe bir ugur boýunça bolup geçýär. Bu aýratynlyk ähli gözlenilýän deňlemeleriň ýönekeýleşmesine we dürli daşky täsir astyndaky akymy derňemeklige mümkinçilik berýär. Bu hili täsirlere ýylylygyň, massanyň, mehaniki işiň berilmesi we alynmasy, kondensirlenme, bugarma we ş.m. degişli bolup durýar.

Birölçegli akym diýlip kanalyň kese kesiginiň endigan üýtgemesindäki we onuň okunyň kiçi egriligindäki akymlaryna düşünilýär.

Üznüksizlik deňlemesi. Daşky gurşaw bilen massa çalşygy hasaba alynmadyk ýagdaýynda birölçegli akym üçin üznüksizlik deňlemesi (2.16) görnüşde bolýar. Onda:

$$F_1\rho_1 c_1 = F_2\rho_2 c_2. \tag{3.1}$$

Gysylmaýan akymlar üçin ($\rho = const$):

$$F_1 c_1 = F_2 c_2.$$

Kähalatlarda aşakdaky ýaly logarifmik differensial deňleme hem ulanylýar:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dF}{F} = 0. \tag{3.2}$$

Daşky gurşaw bilen massa çalşygy bolan ýagdaýynda logarifmiki differensial deňlemämiz aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dF}{F}, \tag{3.2a}$$

bu ýerde dm – massanyň doly üýtgemesi, ol ähli massalaýyn täsiriň, ýagny massanyň berilmesi we alynmasydyr.

Hereket mukdarynyň deňlemesi. Massalaýyn güýjüň hasaba alynmadyk ýagdaýynda bir ölçegli, durnuklaşan, daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän akym üçin hereket mukdarynyň deňlemesi (2.23) Eýler deňlemesinden alynýar:

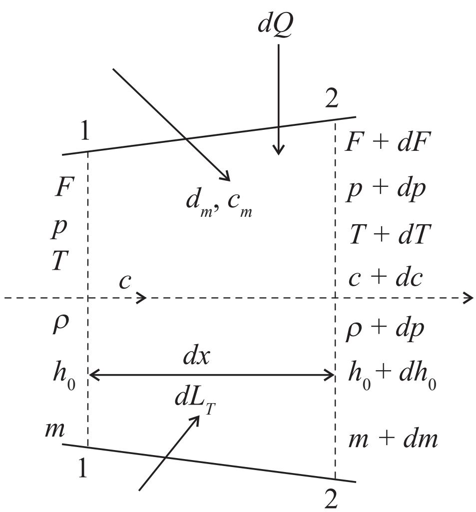
$$c\frac{dc}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad \text{ýa-da} \quad cdc = -\frac{dp}{\rho}.$$

Daşky güýçleriň täsiri we massa çalşygy bolan ýagdaýynda bu deňleme çylşyrymlaşýar. Munuň üçin 3.1-nji çyzgyda şekillendirilen kanalyň elementine seredeliň we bu elemente täsir edýän ähli güýçleriň hereket mukdarynyň üýtgemesiniň sekuntlaýyn impulsyny deňeşdirip alarys:

$$\begin{aligned} & pF + pdF - (p + dp)(F + dF) - \tau_w ds - \Sigma dX_i = \\ & = (m + \Sigma dm_i)(c + dc) - \Sigma dm_i c_i - mc, \end{aligned} \tag{3.3}$$

bu ýerde τ_w – kanalyň dS gapdal üstüniň elementine täsir edýän sürtülme naprýaženiýesi, $\sum dX_i$ – daşky täsir güýjüniň sekuntdaky impulsynyň jemi, c_i, dm_i – tizligiň esasy akym ugruna proeksiýasy we berilýän (ýa-da alynýan) suwuklygyň massalaýyn sarp edilişi, gysgaltmalardan soň alarys:

$$Fdp + \tau_w dS + \Sigma dX_i = \Sigma dm_i c_i \left[\frac{\Sigma dm_i}{m} + \frac{dc}{c}\right] mc. \tag{3.4}$$



3.1-nji çyzgy. Suwuklygyň daşky täsir astyndaky hereketi

Bu ýerde daşky täsir, ýagny sürtülme güýji we massa çalşygy hasaba alynmadyk ýagdaýynda (2.26) deňlemäniň gelip çykýandygyny görmek mümkin. (2.26) deňlemäniň integraly barotrop suwuklyklar üçin Bernulliniň deňlemesi görnüşinde bolýar, ýagny:

$$\frac{c^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=const.$$

Energiýa deňlemesi. Daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän, ýagny massa çalşygy we berilýän ýa-da alynýan iş hasaba alynmadyk ýagdaýynda birölçegli hyýaly suwuklyk akymy üçin energiýa deňlemesi (2.38) görnüşindäki hereket mukdarynyň deňlemesi bilen birmeňzeşdir.

Onda gysylýan hyýaly suwuklyk üçin energiýa deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$\frac{c^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=const$$

ýa-da

$$\frac{c^2}{2}+h=const.$$

Tizligi nola çenli peselýän we togtaýan akym kesigi üçin ýazylan (2.60) deňlemäniň sag tarapyndaky hemişeligi tapalyň. Bu hemişeligi dürli görnüşlerde aňlatmak bolar:

$$h_0=c_pT_0=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}=const,$$

bu ýerde h_0 – togtaýan akymyň entalpiýasy ýa-da onuň doly energiýasy; p_0, ρ_0, T_0, – togtaýan akymyň parametrleri ýa-da doly togtama parametrleri. Akymyň doly togtamasynyň netijesinde onuň ähli kinetik energiýasy ýylylyga öwrülýär we T_0 temperatura, şeýle hem entalpiýa kesgitli baha eýe bolýar. p_0 basyşyň we ρ_0 dykyzlygyň islendik bahasyny almak bolar, ýöne olaryň $\frac{p_0}{\rho_0}$ gatnaşygy hemişelik galmalydyr. Togtama parametrilerini ulanyp, energiýa deňlemesini aşakdaky görnüşlerde ýazmak bolar:

$$\frac{c^2}{2}+h=h_0; \tag{3.5}$$

$$\frac{c^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}; \tag{3.5a}$$

$$\frac{c^2}{2}+c_pT=c_pT_0. \tag{3.5b}$$

Bu deňlemeler hereket edýän suwuklygyň birlik massasyna degişli bolmak bilen, durnuklaşan, daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän akymyň kinetik we potensial energiýalarynyň jemi akym turbajygynyň ugrunda üýtgemän galýandygyny görkezýär.

(3.5) deňlemäni daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän sürtülmeli akymlar üçin hem ulanmak mümkindir.

Daşky täsir astyndaky energiýa deňlemesini 3.1-nji çyzgyda şekillendirilen suwuklyk elementi üçin aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$m(dQ - dL_\tau) = m(h + dh) +$$
$$+\Sigma dm_i h_i - (mh + \Sigma dm_i h_i) + (m +$$
$$+\Sigma dm_i)\cdot\left[\frac{c^2}{2} + d\left(\frac{c^2}{2}\right)\right] - \left(m\frac{c^2}{2} - \frac{1}{2}\Sigma dm_i c_i^2\right)$$

ýa-da

$$dQ - dL_t = dh + d\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{\Sigma dm_i}{m}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{c_i^2}{2}\right) + \frac{\Sigma dm_i}{m}\left(\frac{c^2}{2}\right),$$

bu ýerde dQ – daşky çeşmeden birlik massa berilýän ýylylygyň mukdary, dL_t – daşky güýçleriň garşysyna suwuklyk elementiniň döredýän mehaniki işi, h – esasy akymyň entalpiýasy, h_i – goşulýan akymyň entalpiýasy.

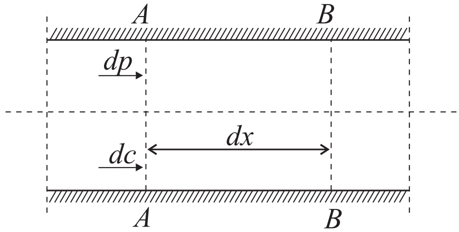
3.2. Sesiň tizligi

a sesiň tizligi diýlip pes tolgunmanyň ýaýrama tizligine düşünilýär. c suwuklyk tizligini a sesiň tizligi bilen deňeşdirip, ähli akymlary $c < a$ sesiň tizligine çenli tizlikli we $c > a$ sesiň tizliginden ýokary tizlikli akymlara bölmek bolar.

Akymyň iki topara bölünmegi, sesiň tizligine çenli we sesiň tizliginden ýokary tizlikli toparlaryň özlerini alyp baryşlarynyň düýpli tapawudy bilen şertleşilendir. Mundan başga-da, akymyň absolýut tizligini pes tolgunmanyň ýaýrama tizligi bilen (sesiň tizligi bilen) deňeşdirmek arkaly, heniz suwuklygy gysylmaýan hasap edip bolýan araçäginde baha bermeklige esas berýär we hasaplamalarda onuň dykyzlygynyň üýtgemesini hasaba almazlyk mümkin bolýar.

Şular ýaly araçäk hökmünde sesiň tizliginiň 30%-ini düzýän akym tizligi kabul edilendir ($c \approx 0,3a$). Eger $c \geq 0,3a$ bolsa, onda suwuklyk akymy gysylýar diýlip hasap edilýär. Getirilen bölünme, umuman aýdylanda, şertli we tehniki hasaplamalarda goýberilýän ýalňyşlyklara baglydyr. Käbir meselelerde gysylmanyň täsiri $c < 0{,}5a$ çenli hasaba alynmaýar. Bu ýagdaýda hasaplamanyň ýalňyşlygy ösýär we ol tebigydyr. Aýdylanlardan görnüşine görä, sesiň tizliginiň dogry bahalandyrylmagy diňe bir gazodinamik hasaplamalaryň usullaryny öňünden kesgitlemeklige däl, eýsem, ahyrky netijeleriň dogrulygyna hem baha bermäge mümkinçilik berýär.

Hasaplama formulasyny getirip çykarmak üçin hemişelik kese kesikli turbadaky tekiz ses tolkunynyň hereketine seredip geçeliň (*3.2-nji çyzgy*).



3.2-nji çyzgy. Kanalda gowşak ses tolkunynyň ýaýramasy

Goý, $t = t_1$ wagtda ses tolkuny *A–A* ýagdaýa eýe diýeliň. Käbir dt wagt aralygynda ses tolkun fronty x okunyň ugruna dx aralyga süýşer we *B–B* ýagdaýa eýe bolar. Ses tolkunynyň ýaýrama tizligi bu ýagdaýda $a = dx/dt$ bolar.

Iki sany tolkun tarapyndan bölünen *A–A–B–B* göwrüme seredeliň we suwuklygyň kanalyň diwaryna bolan sürtülmesini hasaba almazdan, munuň üçin hereket mukdarynyň saklanma kanunyny ýazalyň.

Basyşyň dp pese düşmesiniň täsiri bilen *A–A* kesikden göwrümiň içine suwuklyk dc tizlik bilen akýar. *B–B* kesikde suwuklyk hereket etmeýär, bu kesik dt wagt aralygynda ses tolkunynyň ýagdaýyny kesgitleýär we suwuklykda oýandyrylan ses tolkunyndan oýandyrylmadyk ses tolkunyny bölýär.

Bölünip alnan göwrümde hereket mukdarynyň üýtgemesi, bu göwrüme degişli daşky güýçleriň impulsyna deň bolmalydyr. Bu ýagdaýda daşky güýçler hökmünde diňe ses tolkunyndaky basyşyň ýokarlanmasyna seredilýär. Diýmek, $mdc = dpFdt,$ bu ýerde F – kanalyň kese kesiginiň meýdany.

m massany ρ dykyzlygyň $dV = Fdx$ göwrüme köpeltmek hasyly bilen çalşyralyň, onda:

$$\rho \cdot F \cdot dc \cdot dx = dp \cdot F \cdot dt$$

ýa-da

$$dp = \rho \cdot dc \cdot dx/dt = \rho adc. \tag{3.6}$$

Indi $A–A$ kesikden akýan suwuklygyň tizliginiň bahasy üçin massanyň saklanma kanunyny ulanalyň.

Seredilýän göwrüme akýan suwuklyk onuň dykyzlygynyň $d\rho$ ululyga ýokarlanmagyna getirýär.

Aýdylanlary göz öňünde tutup alarys:

$$p \cdot F \cdot dc \cdot dt = F \cdot dx \cdot d\rho. \tag{3.7}$$

Deňligiň çep tarapy ses basyşynyň täsiri esasynda seredilýän göwrüme girýän massany, sag tarapy bolsa goşmaça massanyň hasabyna massanyň üýtgemesini aňladýar.

Bu ýerden:

$$dc = \frac{dx}{dt}\frac{d\rho}{\rho} = ad\rho/\rho. \tag{3.8}$$

(3.8)-i (3.6)-a goýup alarys:

$$dp = \rho a^2 \frac{d\rho}{\rho} = a^2 d\rho.$$

Onda sesiň tizligi aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{3.9}$$

(3.9) deňleme barotropik suwuklyklar üçin ulanarlyklydyr.

Ses tolkunynyň ýaýrama kadasyny izoentropik diýip kabul etmek bolýar. Onda izoentropiýa prosesiniň deňlemesinden:

$$\frac{p}{\rho^k} = const. \tag{3.10}$$

Bu ýerde $dp = k\rho^{k+1}$const we $\dfrac{dp}{d\rho} = k\rho^{k-1} const.$

Onda:

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}, \tag{3.11}$$

bu ýerden görnüşi ýaly, temperatura näçe ýokary bolsa, ses tolkunynyň ýaýrama tizligi hem şonça ýokarydyr.

3.3. Birölçegli akym kesigindäki häsiýetli tizlikler we otnositel parametrler

Energiýanyň (3.5), (3.5*a*) we (3.5*b*) deňlemeleriniň derňewinden görnüşi ýaly *akymyň tizligi çäksiz ösmeýär,* ol käbir c_{max} – maksimal tizlik bilen çäklenýär. Bu ýagdaý bolsa haçanda ähli bar bolan energiýa kinetik energiýa doly öwrülen ýagdaýynda ýüze çykýar. Bu ýagdaýda energiýa deňlemesiniň çep böleginiň ikinji goşulyjysy bilen häsýetlendirilýän potensial energiýanyň nola deň bolýandygyny görmek bolýar. Onda:

$$c_{max} = \sqrt{2h_0} = \sqrt{2\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{2\frac{kRT_0}{k-1}}. \tag{3.12}$$

Bu alnan tizligi geljekde maksimal tizlik diýip atlandyrarys. Görkezilen ululyk togtama akymyndaky sesiň tizliginiň üsti bilen hem aňladylyp bilner. (3.11) baglanyşygy ulanyp, (3.5*a*) deňlemäni şeýle görnüşde ýazmak bolýar:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} = h_0. \tag{3.13}$$

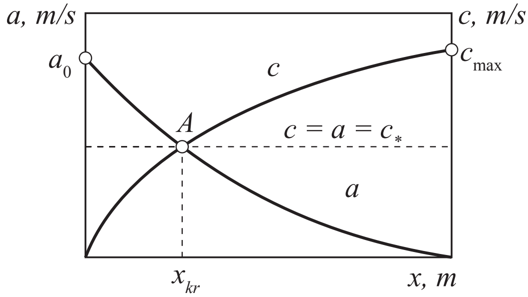
Bu ýerden

$$c_{max} = a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}}. \tag{3.14}$$

Fiziki maksimal tizlik absolýut wakuumdaky akymlarda gabat gelýär. Tejribede bu tizligi alyp bolmaýar, sebäbi şu tizlige golaýlaşylanda gazyň seýreklemesi örän uly bolýar. Bu ýagdaýda seredilýän deňlemede bize belli bolan görnüşdäki hal deňlemesini we energiýa deňlemesini ulanmak bolmaýar. Şeýlelik bilen maksimal tizlik gazyň tizligi üçin nazary çäk bolup hyzmat edýär. (3.14) gatnaşygy ulanyp, (3.13) deňligi şeýle ýazalyň:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{c_{max}^2}{2}. \tag{3.15}$$

(3.13) formuladan energiýa deňlemesiniň sag bölegindäki hemişelik üçin ýene bir aňlatmany almak bolýar. Goý, suwuklygyň akmasy absolýut wakuumda bolup geçýär, ýagny tizligiň maksimal baha çenli ösmesine mümkinçilik bar diýeliň. 3.3-nji çyzgyda akymyň tizliginiň we sesiň tizliginiň şular ýaly göz öňüne getirilýän kanal boýunça üýtgemesiniň hil şekili görkezilen. Akymyň tizligi noldan c_{max}-a çenli ulalýar, sesiň tizligi bolsa a_0-dan nola çenli peselýär. Bu ýagdaýda seredilýän iki kesik hem A nokatda, ýagny akym tizliginiň ýerli ses tizligine deň bolan nokadynda gutulgysyz kesişýändigini görmek bolar.



3.3-nji çyzgy. Absolýut wakuumda suwuklyk hereketi üçin akym tizliginiň we ses tizliginiň üýtgemesi

Görkezilen akym tizligi hemme gazodinamiki barlaglarda ähmiýetli baha eýedir. Degişlilikde, bu tizlige degişli bolan kese kesige we bu kese kesikdäki parametrlere kritiki diýlip at berilýär. Hemme kritiki ululyklary geljekde ýyldyzjyk bilen belgiläris (c_*, ρ_*, P_*, T_*, F_*).

Şeýlelikde, kritiki tizlik ýerli ses tizligine deň bolan akym tizligidir, ýagny kritiki kese kesikde $c = a = c_*$.

(3.13) deňlemäni kritiki kesik üçin ýazalyň:

$$\frac{c_*^2}{2} + \frac{c_*^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{c_*^2}{2}\frac{k+1}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}. \tag{3.16}$$

Bu ýerden görnüşi ýaly kritiki tizlik, şeýle hem maksimal tizlik doly togtama parametrleriniň üsti bilen kesgitlenilýär we olar şeýle aňladylýar:

$$c_* = a_0\sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}}. \qquad (3.17)$$

(3.13) gatnaşygyň sag bölegini (3.16) deňleme bilen çalşyp, energiýa deňlemesiniň ýene bir wajyp ýazgysyny alarys:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2}. \qquad (3.18)$$

Energiýa deňlemesini ulanyp, akym parametrlerini akym turbajygynyň erkin kese kesigindäki togtama parametrleriniň we tizligiň üsti bilen aňladalyň.
(3.18) deňlemäni ulanyp, onuň ähli goşulyjylaryny c^2-a böleliň. Onda:

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2}{c^2}\frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{c^2}, \qquad (3.19)$$

bu alnan gatnaşykda absolýut tizlik ýerli ses tizliginiň we kritiki tizligiň paýy görnüşinde aňladylýar. Alnan ölçegsiz tizlikleri: $M = \frac{c}{a}$ we $\lambda = \frac{c}{c_*}$ diýip belgiläliň. Bu girizen belgilerimiz many taýdan M san akymyň kinetik we potensial energiýalarynyň gatnaşygyny, λ san bolsa akymyň kinetik we doly energiýanyň arasyndaky gatnaşygyny kesgitleýär. Bu ýerden (3.12) we (3.17) formulalary hasaba alyp, seredilýän ölçegsiz (ölçeg birliksiz) tizlikleriň üýtgeme çägini tapmak bolar:

$$0 \le M \le \infty; \quad 0 \le \lambda \le \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Ölçegsiz tizlikleriň arasyndaky baglanyşyk (3.19) deňlemeden gelip çykýar:

$$M^2 = \frac{2}{k+1}\frac{\lambda^2}{1-(k-1)\lambda^2/(k+1)}. \qquad (3.20)$$

Indi (3.5*b*) görnüşdäki energiýanyň deňlemesiniň iki tarapyny hem c_pT bölüp alarys:

$\frac{c^2}{2c_pT} + 1 = \frac{T_0}{T}$ ýa-da $c_p = \frac{kR}{k-1}$ -i göz öňüne tutup alarys:

$$\frac{c^2}{2}\frac{k-1}{kRT}+1=\frac{T_0}{T},$$

$kRT = a^2$ bolýandygyny hasaba alsak:

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2. \tag{3.21}$$

Hal deňlemesini we izoentropiýa deňlemesini ulanyp, $\frac{p_0}{p}$ otnositel basyşyň we $\frac{\rho_0}{\rho}$ otnositel dykyzlygyň M ölçegsiz tizlik bilen arasyndaky baglanyşygy kesgitlemek bolýar. Ýagny:

$$\frac{T_0}{T}=\frac{P_0}{P}\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{P_0}{P}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k}\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1}.$$

Bu ýerden:

$$\frac{P_0}{P}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{3.21a}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.21b}$$

Şuňa meňzeşlikde seredilýän parametrler bilen λ sanyň arasyndaky baglanyşygy hem gurmak bolar. Şonuň üçin (3.5*b*) deňlemäni c_pT_0-a bölmeli we (3.17) deňlemeden alynýan $2kRT_0 = c_*^2(k+1)$ gatnaşykdan peýdalanyp, netijede alarys:

$$\frac{T}{T_0}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2; \tag{3.22}$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{3.22a}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.22b}$$

Alnan formulalar akymyň otnositel parametrleriniň we ölçegsiz tizlikleriň arasynda birbelgili baglanyşygy esaslandyryp, tejribede uly ähmiýete eýedir. Sebäbi bu formula islendik ölçegsiz parametr boýunça hemme beýleki ululyklary tapmaga mümkinçilik berýär. Şeýle hem (3.21) we (3.22) baglanyşyklar diňe izoentropik akym üçin ulanarlykly bolman, eýsem, olary energiýa alyş-çalyşmasy bolan akym üçin hem ulanmak bolar.

3.4. Erkin görnüşli kanallaryň boýuna akym parametrleriniň paýlanyşy

Kanallarda suwuklyk hereketiniň häsiýeti daşky güýçleriň täsiriniň üsti bilen kesgitlenýär. Tejribede biz kanalyň kese kesiginiň üýtgemesi netijesindäki geometrik täsire köp duş gelýäris. Bu ýagdaý akymyň derňewi üçin ýönekeý häsiýetlendirilýär.

Üznüksizlik deňlemesinden:

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dc}{c}+\frac{dF}{F}=0.$$

(2.26) hereket mukdarynyň deňlemesini şeýle görnüşde ýazalyň:

$$cdc=-\frac{dp}{\rho}=-\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-a^2\frac{d\rho}{\rho}.$$

Bu ýerde:

$$\frac{d\rho}{\rho}=-c\frac{dc}{a^2}. \tag{3.23}$$

(3.23) deňlemäni (3.2) deňlemede goýup alarys:

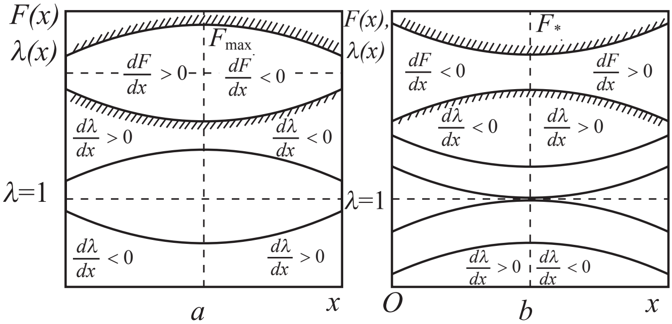
$$\frac{dc}{c}(M^2-1)=\frac{dF}{F}. \tag{3.24}$$

M ölçegsiz tizligi λ tizlik bilen (3.20) deňlemäniň kömegi arkaly çalşalyň we deňlemäniň çep we sag böleklerini dx-e böleliň. Şeýlelikde, tizligiň üýtgemesiniň meýdanyň üýtgemesi bilen baglanyşdyrýan görnüşdäki deňlemesini alarys:

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)}{\lambda^2-1}\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}. \tag{3.25}$$

(3.25) deňlemäni integrirlemek bolar, ýöne derňewi differensial görnüşde alyp barmak amatly. (3.25) deňlemeden görnüşi ýaly, tizlik özüniň ekstremal bahalaryny $\left(\frac{d\lambda}{dx}=0\right)$, haçanda $\lambda=0;\ \lambda=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\lambda_{\max}$ bolanda eýe bolýar.

Birinji ýagdaý gozganmaýan gazlara degişli we ol gyzyklanma döretmeýär. Ikinji ýagdaýda $\lambda=\lambda_{\max}$ bolýar we mundan beýläk tizligiň ýokarlanmasy mümkin däl. Üçünji ýagdaý $\lambda\neq 1$ bolanda tizligiň



3.4-nji çyzgy. Maksimal *(a)* we minimal *(b)* kesikli kanallarda tizligiň üýtgemesi

ekstremal bahasyny berýär we bu baha diňe meýdanyň ekstremal bahasynda $\left(\frac{dF}{dx}=0\right)$ eýe bolýar.

$\lambda = 1$ we $dF \neq 0$, $\frac{d\lambda}{dx} \to \infty$, ýagdaý tizligiň tükeniksiz üzülmesini aňladýar we şeýlelikde, $\frac{dF}{dx} \neq 0$ kesikde sesiň tizliginden geçmek mümkin däldir.

Eger $\frac{dF}{dx} = 0$ we $\lambda = 1$ bolsa aýratyn derňew etmekligi talap edýär, sebäbi eger kanalyň kesigi minimal meýdana eýe bolsa $\lambda(x)$ egride egrelme nokadynyň bolmagy mümkin. Bu ýerde $d\lambda \neq 0$ we sesiň tizligine çenli tizlik, sesiň tizliginden ýokary tizlige, sesiň tizliginden ýokary tizlik bolsa, sesiň tizligine çenli tizlige geçýär.

Bu hili geçişi amala aşyrmak üçin minimal kesikden soňra kanalyň giňelme derejesine baglylykda basyşyň kesgitli pese düşmesi hökmanydyr. Kiçi peselmede minimal kesikden soň täzeden ýene-de akymyň togtamasy başlaýar we $\lambda(x)$ egri bu kesikde diňe maksimum nokadyna eýe bolýar.

Aýdylanlary grafiki usulda görkezmek bolýar. 3.4-nji çyzgyda kanalyň maksimal meýdanynda (3.3*a*) we minimal meýdanynda (3.3*b*) tizligiň üýtgemesine $\lambda = 1$ bolan gorizontal çyzyk akym tekizligini şertleýin sesiň tizliginden ýokary (bu çyzykdan ýokarsy) we sesiň tizligine çenli böleklere bölýär. (3.25) deňlemede $\lambda > 0,\ 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2 > 0,$ onda, $\frac{d\lambda}{dx}$ önümiň belgisi $\frac{dF}{dx}$ we $(\lambda^2 - 1)$ ululyklaryň belgisini kesgitleýär. Sesiş tizligine çenli tizliklerde $(\lambda^2 - 1) < 0$ we tizligiň üýtgeme belgisi meýdanyň üýtgeme belgisine garşylyklydyr. Sesiň tizliginden ýokary bölekde $(\lambda^2 - 1) > 0$ we tizligiň üýtgeme belgisi meýdanyň üýtgeme belgisi bilen gabat gelýär.

Egriden görnüşi ýaly (*3.4-nji a çyzgy*), birinji ýagdaýda sesiň tizligine çenli we sesiň tizliginden ýokary böleklerde meýdanyň maksimal bahasyna ýakynlaşdygyça tizlik $\lambda = 1$ bahadan daşlaşýar we bu hili kanallarda sesiň tizliginden geçmeklik mümkin däldir.

(3.22), (3.22*a*) we (3.22*b*) formulalarda $\lambda = 1$ bahany goýup kritiki parametrleri kesgitlemek bolýar:

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{3.26}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{3.26a}$$

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}. \tag{3.26b}$$

3.5. Udel sarp ediliş we getirme udel sarp ediliş

m udel sarp ediliş diýlip, bir birlik meýdandan sekuntdaky sarp edilişe aýdylýar:

$$\overline{m} = \rho c = \rho_0 c_* \frac{\rho}{\rho_0}\frac{c}{c_*} = \rho_0 c_* \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda.$$

(3.22*b*) formulanyň kömegi bilen bu ululygy ölçegsiz tizlik bilen baglanyşdyryp alarys:

$$\frac{\partial \overline{m}}{\partial \lambda} = \rho_0 c_* \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{2-k}{k-1}} (1 - \lambda^2) = 0. \tag{3.27}$$

Bu baglanyşykdan görnüşi ýaly $\lambda = 0$ we $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ bahalarda udel sarp ediliş nola deň bolýar.

Udel sarp edilişi onuň maksimal bahasyna gatnaşdyryp, diňe λ tizlige we k izoentropik görkezijä bagly bolan q getirme udel sarp edilişini alarys:

$$q = \frac{\overline{m}}{\overline{m}_{\max}} = \frac{\rho c}{\rho_* c_*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.28}$$

q getirme udel sarp edilişiň kömegi bilen akym parametrlerini kanalyň geometrik parametrleri bilen baglanyşdyrmak bolýar. Şonuň üçin kanalyň F_i-erkin meýdanynda we onuň F_*-kritiki kesiginde $m = \rho_i c_i F_i = \rho_* c_* F_*$ sarp edilişiň hemişelik baha eýe bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$q_i = \frac{\rho_i c_i}{\rho_* c_*} = \frac{F_*}{F_i}. \tag{3.29}$$

Kritiki kesik üçin sarp ediliş deňlemesini şeýle görnüşde ýazalyň:

$$m_* = \rho_* c_* F_* = \frac{\rho_*}{\rho_0} c_* F_* \rho_0.$$

$\frac{\rho_*}{\rho_0}$ dykyzlyklaryň gatnaşygyny (3.26 *a*) deňleme bilen, kritiki tizligi (3.17) gatnaşyk bilen we ρ_0 dykyzlygy hal deňlemesi bilen çalşyryp alarys:

$$m_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} F_* = B \frac{p_0 F_*}{\sqrt{T_0}}. \tag{3.30}$$

B hemişelik gazyň diňe fiziki häsiýetine baglydyr. Howa üçin: $B = 0{,}0404$; aşa gyzan bug üçin: $B = 0{,}0360$.

3.6. Birölçegli gaz akymynyň gazodinamik funksiýalarynyň tablisasy

(3.22), (3.22*a*), (3.22*b*) we (3.28) gatnaşyklaryň kömegi bilen birölçegli akymyň ähli parametrlerini kesgitlemek bolýar, ýöne bu formulalar bilen hasaplama geçirmeklige wagt sarp edilýär. λ ölçegsiz tizligiň üýtgeme aralygy üçin bu ululyklary öňünden hasaplap, sarp edilýän wagty gysgaltmak bolar. Şu hili hasaplama bahalarynyň girizilen tablisasyna gazodinamik funksiýalaryň tablisasy diýilýär.

Bu tablisa girizilýän funksiýalara seredip geçeliň. Onuň üçin m massalaýyn sarp edilişi q getirme sarp ediliş bilen aňladalyň:

$$m = \rho c F = \rho_* c_* F q = m_* q = B\left(\frac{p_0 F}{\sqrt{T_0}}\right) q. \tag{3.31}$$

Bu deňlemä p ululygy köpeldip we bölüp alarys:

$$m = BF \frac{q}{\sqrt{T_0}} \frac{p_0}{p} p = BF \frac{p}{\sqrt{T_0}} \sigma. \tag{3.32}$$

Bu ýerde

$$\sigma = \frac{p_0 q}{p} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k+1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+2}\lambda^2\right)^{-1}. \tag{3.33}$$

(3.33) deňlemede λ tizlige we k izoentropik görkezijä bagly bolan ýene bir funksiýany aňladýarys.

(3.31) deňlemäni kanalyň iki kesigi üçin ýazalyň:

$$F_1 \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} q_1 = F_2 \frac{p_{02}}{\sqrt{T_{02}}} q_2. \tag{3.34}$$

Daşky gurşaw bilen täsirleşmeýän ulgamda $T_{01} = T_{02}$, onda:

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{F_2}{F_1}\frac{q_2}{q_1}. \tag{3.35}$$

Eger seredilýän kanalyň kesigi hemişelik bolsa, ýagny $F = const$, onda:

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{q_2}{q_1}. \tag{3.36}$$

(3.32) deňlemäni ulanyp alarys: $F_1 p_1 \sigma_1 = F_2 p_2 \sigma_2$.

Onda:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{F_2}{F_1}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Bu ýerden:

$$\pi = \frac{p}{\rho c c_*} = \frac{p}{\rho c^2}\lambda = \frac{RT}{c^2}\lambda = \frac{a^2}{c^2 k}\lambda = \frac{\lambda}{kM^2}. \tag{3.37}$$

(3.20) gatnaşyk arkaly M sany λ san bilen çalşyryp alarys:

$$\pi = \frac{k+1}{2k}\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right). \tag{3.38}$$

3.7. Dürli daşky täsir astynda birölçegli akym

Geçen temalarda birölçegli akymyň hususy ýagdaýyna, ýagny daşky täsir hökmünde kanalyň kese kesiginiň üýtgemesine seredip geçdik. Umumy ýagdaýda akyma ýylylygyň, massanyň, mehaniki energiýanyň, sürtülme güýjüniň berilmesi ýa-da alynmasy täsir edip biler.

Görkezilen ýagdaýlaryň ählisiniň ýa-da köp böleginiň bir wagtdaky täsiri netijesinde hil derňewini alyp barmaklykda kynçylyk döreýär we kesgitli matematiki gatnaşyklary ulanmaklygy talap edýär.

Aşakdaky deňlemeler ulgamyny bilelikde çözmek arkaly bu gatnaşygy almak mümkin:

1. (3.2*a*) görnüşdäki üznüksizlik deňlemesi;

2. (3.4) impuls deňlemesi, bu ýerde τ_w – sürtülme naprýaženiýesi. Ony aşakdaky belli gidrawliki formula bilen çalşyrylan:

$$\tau_w = \frac{\xi \rho c}{2}.$$

Massanyň jemi üýtgemesi bolsa:

$$y\frac{dm}{m} = y_1\frac{dm_1}{m} + y_2\frac{dm_2}{m}$$

görnüşde aňladylýar.

Bu ýerde gözegçilik edilýän göwrümde suwuklyk massasynyň üýtgemesi daşky gurşawdan alynmasy ýa-da daşky gurşawa berilmesi (dm_1) we bugarmasy ýa-da kondensirlenmesi (dm_2) netijesinde bolup geçýär. y_1 we y_2 ululyklar goşmaça we esasy suwuklyk massasynyň tizlikleriniň gatnaşygyny aňladýar. Aýdylanlary göz öňünde tutup we käbir özgertmelerden soň (3.4) deňleme şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}kM^2\frac{dc^2}{c} + \frac{1}{2}kM^2\left(4\xi d\bar{x} + \frac{2\sum dX_i}{kpM^2F}\right) + kM^2(1-y)\frac{dm}{m} = 0.$$

Bu deňlemede dS gapdal üstüniň meýdanynyň F kanalyň kesigine bolan gatnaşygy $\frac{dS}{F} = \frac{4dx}{D} = 4d\bar{x}\cdot$

3. Daşky täsir astyndaky energiýa deňlemesine goşmaça we esasy akym parametrleriniň deňlik şertini ulanyp, käbir özgertmelerden soň alarys:

$$\frac{dQ - dL_t}{c_p dT} = \frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2}M^2\frac{dc^2}{c^2}.$$

4. Hal deňlemesiniň differensial görnüşi:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}.$$

5. Entropiýanyň üýtgeme deňlemesi:

$$dS = dS_1 + \left(\frac{1}{m}\right)\sum dS_i dm_i\cdot$$

IV bölüm

SUWUKLYGYŇ WE GAZYŇ SESIŇ TIZLIGINE ÇENLI TIZLIKLI TEKIZ AKYMY

4.1. Potensial akym

Tüweleý görnüşi bolmadyk suwuklyk akymyna *potensial akym* diýilýär.Tekiz potensial akym üçin:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{4.1}$$

ýa-da

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.1a}$$

(4.1*a*) şert $udx + \vartheta dy$ iki agza käbir $\varphi(x, y)$ funksiýanyň doly differensialydygyny aňladýar.

Şeýlelikde, tüweleý görnüşli akym hasaba alynmasa:

$$d\varphi(x,y) = udx + \vartheta dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy.$$

Bu deňlemäniň çep we sag taraplaryny deňeşdirip alarys:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \vartheta &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\}. \tag{4.2}$$

Alnan $\varphi(x, y)$ funksiýa gysylmaýan suwuklygyň $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$ (2.10) differensial görnüşdäki deňlemesinden gelip çykýar.

Bu ýerde (4.2) gatnaşyk bilen kesgitlenilýän tizligiň bahasyny goýsak, $\varphi(x, y)$ funksiýa Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{4.3}$$

Berlen şertlerde (4.3) deňlemäni integrirlemek we bizi gyzyklandyrýan tizlik meýdanyny tapmak bolýar. $\varphi(x, y)$ funksiýa *tizlik potensialy* diýilýär we ol wajyp häsiýete eýedir: bu funksiýanyň islendik l

ugur boýunça hususy önümi bu ugur boýunça c_l- tizlik proýeksiýasyny berýär.

Goý, c tizlik 4.1-nji çyzgyda görkezilen ugur boýunça ugrukdyrylan we görkezilen l ugur boýunça onuň proýeksiýasyny kesgitlemek talap edilýän bolsun. Dekart koordinatalar ulgamynyň başlangyjyny A nokat diýip belläliň we φ potensial tizligiň l ugur boýunça hususy önümini kesgitläliň:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dl}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dl}.$$

(4.2) deňlemäni hasaba alyp:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=u\cos(\widehat{x,l})+\vartheta\cos(\widehat{y,l})=c\cos(\widehat{c,l})=c_l. \qquad (4.4)$$

Şeýlelikde, (4.2) gatnaşyk tizlik potensialynyň hususy ýagdaýyny aňladýar.

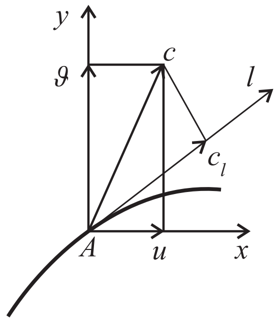
Indi (1.18) görnüşdäki akym çyzygynyň deňlemesine seredeliň we ony şeýle görnüşde ýazalyň: $udy - \vartheta dx = 0$. Bu deňlemäniň çep tarapyndaky iki agza $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$ ýa-da $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=0$ ýagdaýda käbir $\psi(x, y)$ funksiýanyň doly differensialyny aňladýar:

$$\partial\psi(x,y)=udy-\vartheta dx=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy.$$

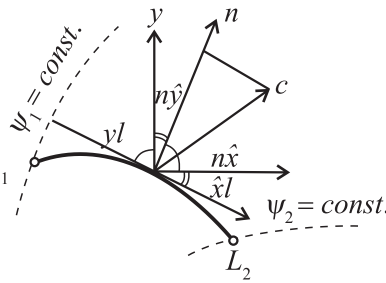
Bu ýerden:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \vartheta&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.5)$$

Girizilen $\psi(x, y)$ funksiýa ***akym funksiýasy*** diýilýär. (4.5) deňlemäni (4.1)-e goýup, bu funksiýanyň hem $\varphi(x, y)$ tizlik potensialy ýaly Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýandygyny göreris. Eger tizlik potensialy tüweleý görnüşi bolmadyk (potensial) akymyň ýazgysy bolsa, ähli akymlar üçin ulanarlyklydyr. Haçanda $\partial\psi(x, y)=udy - -\vartheta dx$ ýagdaýda $\psi(x, y)=const$ akym çyzygynyň deňlemesini berýär. Bu ýerden görnüşi ýaly, akym funksiýasy suwuklygyň sarp edilişi bilen baglanyşyklydyr. Bu baglanyşygy almak üçin $L_1 - L_2$ erkin



4.1-nji çyzgy. φ-potensial tizligiň kömegi bilen l erkin ugur boýunça c tizlik proýeksiýasynyň kesgitlenilişi



4.2-nji çyzgy. Akym funksiýasynyň esasy häsiýetiniň düşündirilişi

aýlaw boýunça, Q sekuntdaky göwrümleýin sarp edilişi kesgitläliň (*4.2-nji çyzgy*).

$$Q = \int_{L_1}^{L_2} c_n dl,$$

φ tizlik potensialynyň esasy häsiýeti esasynda:

$$c_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} = u\cos(\widehat{x,n}) + \vartheta\cos(\widehat{y,n}),$$

4.2-nji çyzgydan görnüşi ýaly:

$$\cos(\widehat{n,x}) = \cos(\widehat{l,y}) = \frac{dy}{dl}$$

we

$$\cos(\widehat{y,n}) = -\cos(\widehat{l,x}) = -\frac{dx}{dl}.$$

u we ϑ tizlikleri (4.5) deňlemäniň kömegi arkaly ψ funksiýanyň üsti bilen aňladyp alarys:

$$Q = \int_{L_1}^{L_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_{L_1}^{L_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1,$$

bu ýerde ψ_1 we ψ_2 – konturyň başlangyç we ahyrky nokatlaryndaky akym funksiýalarynyň bahalary.

Şeýlelikde, iki sany akym çyzygynyň arasyndaky, erkin konturyň üstünden geçýän suwuklygyň göwrümleýin sarp edilişi diňe bu çyzyklar boýunça akym funksiýasynyň kömegi bilen kesgitlenýär we konturyň görnüşine bagly däldir. Eger konturyň başlangyç we ahyrky nokatlary bir we şol bir akym çyzygynyň üstünde ýatýan bolsa, bu kontur boýunça sarp ediliş nola deňdir (bu ýagdaýda $\psi_1 = \psi_2$).

(4.2) we (4.5) deňlemeleri deňeşdirip, gysylmaýan suwuklyk üçin akym funksiýasyny we tizlik potensialyny baglanyşdyrmak bolýar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \tag{4.6}$$

(4.6) gatnaşyga Koşi-Rimanyň şerti diýilýär.

(4.6) baglanyşygy atanaklaýyn köpeldip alarys:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Matematikadan belli bolşy ýaly, bu deňleme $\varphi(x, y)=const$ we $\psi(x, y)=const$ egrileriň ortogonallyk şertini kesgitleýär. Şeýlelikde, ekwipotensial çyzyk ($\varphi = const$) we akym çyzygy ($\psi = const$) özara ortogonal gözenekleri emele getirýär.

(4.6) Koşi Rimanyň şerti wajyp häsiýete eýedir, ýagny ondaky funksiýalary diňe bir kompleksleýin üýtgeýjä baglanyşykly görnüşde aňlatmak bolýar. Bu funksiýa *W(z) kompleks potensial ýa-da häsiýetlendiriji funksiýa diýilýär*, onuň hakyky bölegi tizlik potensialy, hyýaly bölegi bolsa akym funksiýasyny aňladýar, ýagny $W(z)=\varphi(x,y)+ i\psi(x, y)$. Bu ýerde $z = x + iy = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ kompleks tekizliginiň koordinata nokadyny aňladýar. Bu ýerden indiki netijäni almak bolar: islendik potensial akymy kompleks üýtgeýjä meňzeş funksiýa görnüşinde aňlatmak bolar we islendik kompleks meňzeş funksiýa käbir potensial akymy kesgitleýär.

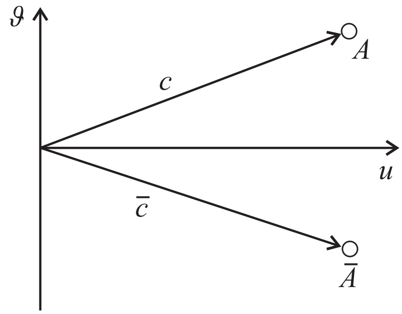
W(z) kompleks potensial diňe z nokadyň ýagdaýyna baglylykda kesgitlenýär we *W(z)*-den alnan önüm hem bu nokadyň ýagdaýyna baglydyr, şeýle-de bu önümiň haýsy ugur boýunça alnandygyna bagly däldir. Şeýlelikde:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial iy}$$

ýa-da

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{dx} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}i + \frac{\partial\psi}{\partial y} = u - i\vartheta. \tag{4.7}$$

Kompleks tekizlikdäki c absolýut tizlik $c = u + i\vartheta$ formula boýunça kesgitlenilýär.



4.3-nji çyzgy. Kompleks tekizlikde çatyrym tizlik

Kompleks potensialdan alnan önüm tizligiň şol bir düzüjisini berýär, ýöne alnan wektoryň ugry x okuna otnositellikde serpigýär (*4.3-nji* ç*yzgy*). Kompleks – ***çatyrym*** sanlara degişlilikde (4.7) deňleme bilen kesgitlenilýän tizlige hem çatyrym *tizlik* diýilýär $\bar{c} = u - i\vartheta$.

Eger iki akymyň akym funksiýasy we potensial tizligi belli bolsa (ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2), onda bularyň jemi $W_3(z)$ täze kompleks potensialy kesgitleýär:

$$W_3(z) = \varphi_3 + i\psi_3 = (\varphi_1 + \varphi_2) + i(\psi_1 + \psi_2). \tag{4.8}$$

Alnan gatnaşyklardan görnüşi ýaly, potensial akymy öwrenmek üçin kompleks üýtgeýji funksiýany ulanmak gerek. Bu ýagdaýda, eger kompleks potensial belli bolsa akymyň görnüşini we tizlik meýdanyny kesgitlemek bolýar.

4.2. Potensial akymlaryň mysallary

Tekiz parallel akym. Goý, kompleks potensialy ýönekeý çyzykly funksiýa görnüşinde berlen bolsun:

$$W(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy),$$

bu ýerde a_1 we a_2 – hemişelik ululyklar.

Hakyky we hyýaly bölekleri bölüp alarys:

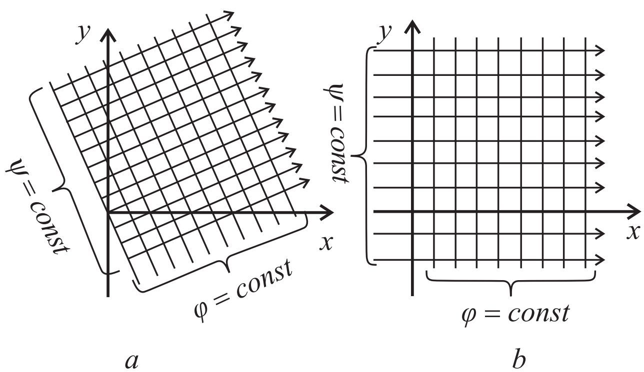
$$W(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = (a_1 x - a_2 y) + i(a_1 y + a_2 x).$$

Şeýlelikde, berlen ýagdaýda $\varphi = a_1x - a_2x$, $\psi = a_2x + a_1y$ deňlemeleri $a_2x + a_1y = const$ we $a_1x - a_2y = const$ özara perpendikulýar çyzyklary kesgitleýär; tizlik düzüjisi we onuň ugry baglanyşykly tizlik boýunça ýerleşýär:

$$\bar{c} = \frac{dW}{dz} = a = a_1 + ia_2 = u - i\vartheta,$$

bu ýerde $u = a_1$; $\vartheta = -a_2$, $a_2 = 0$ bolanda x okunyň ugruna akymyň hususy ýagdaýyny alarys, potensial we akym funksiýalary şeýle aňladylýar:

$$\varphi = a_1x; \quad \psi = a_1y. \tag{4.9}$$



4.4-nji çyzgy. Tekiz parallel akymyň akym çyzygy *(a)* we ekwipotensial çyzygy *(b)*

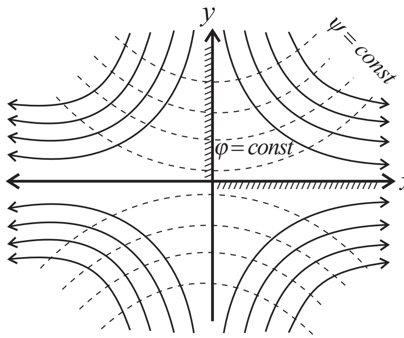
4.4-nji *b* çyzgyda bu akymyň akym çyzygy we ekwipotensial çyzygy görkezilendir.

Içki gönüburçly akym. Derejeli funksiýa bilen kesgitlenilýän akyma seredeliň: $W(z) = az^2$. Ýönekeýlik üçin a ululygy hakyky položitel san diýip alarys. Onda:

$$W(z) = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy;$$

$$\varphi = a(x^2 - y^2); \qquad \psi = 2axy. \tag{4.10}$$

Bu hili akymyň akym çyzygy giperbolany düzýär $y = \frac{A_1}{2ax} = \frac{A_2}{x}$, bu ýerde $A_2 = \frac{A_1}{2a}$ ekwipotensial çyzyk bolsa parabolany aňladýar. $y = \sqrt{x^2 - A}$ bu akym 4.5-nji çyzgyda şekillendirilendir.



4.5-nji çyzgy. Içki gönüburçly potensial akym

u we ϑ tizlik düzüjileri tizlik potensialynyň kömegi bilen şeýle aňladylýar:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax; \qquad \vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay. \tag{4.11}$$

Çeşme we akym. Potensialy kesgitlenilýän akyma seredeliň:

$$W(z) = a\ln z,$$

bu ýerde a – hakyky san.

z kompleks üýtgeýjini polýar koordinata ulgamyna geçireliň:

$$W(z) = a\ln re^{i\theta} = a\ln r + ia\theta.$$

Onda:
$$\varphi = a\ln r; \quad \psi = a\theta. \tag{4.12}$$

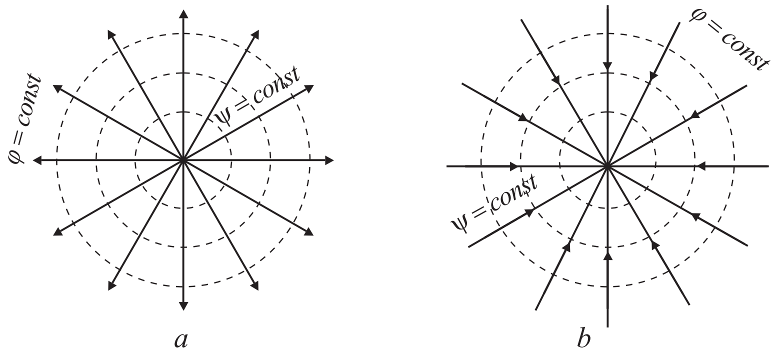
Ekwipotensial çyzygyň ($r = const$) we akym çyzygynyň ($\theta = const$) deňlemeleri koordinata başlangyjyndan geçýän töweregi we göni çyzygy aňladýar (*4.6-njy çyzgy*).

c_r we c_θ düzüji tizlikler şeýle kesgitlenilýär:

$$c_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{r}; \quad c_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0. \tag{4.13}$$

Eger $a > 0$ bolsa akym çyzygynyň ugruna suwuklygyň hereketi merkezden başlanýar (*4.6-njy a çyzgy*). Eger $a < 0$ bolsa suwuklyk merkeze hereket edýär (*4.6-njy b çyzgy)*.

Sirkulýasiýaly akym. Bu hili akymyň hem tizlik potensialy (4.12) görnüşinde kesgitlenilýär, ýöne bu ýerde $a = ia_1$ hyýaly sany aňladýar (a_1 – hakyky san). Onda:



4.6-njy çyzgy. Çeşmäniň, akymyň akym çyzygy *(a)* we tizligiň birmeňzeş potensialy *(b)*

$$W(z) = -a_1\theta + ia_1 \ln r;$$

$$\varphi = -a_1\theta; \ \ \psi = a_1 \ln r.$$

Bu ýagdaýda töwerek akym çyzygyny, koordinata başlangyjyndan çykýan üzük çyzyklar bolsa, ekwipotensial çyzyklary aňladýar (*4.7-nji çyzgy*). Tizlik meýdany tizlik düzüjileriniň üsti bilen şeýle kesgitlenilýär:

$$c_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0; \qquad c_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{a_1}{r}. \tag{4.14}$$

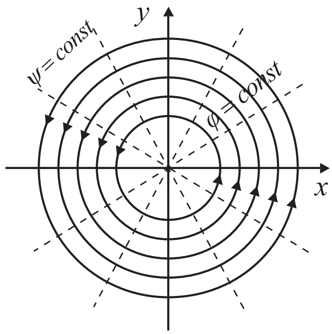
Islendik tegelek boýunça sirkulýasiýa $G = 2\pi r c_\theta = -2\pi a_1$ görnüşinde kesgitlenýär. Bu ýerde $a_1 = -\dfrac{G}{2\pi}$, şeýlelikde:

$$W = -\frac{G}{2\pi} i \ln z = \frac{G}{2\pi i} \ln z;$$

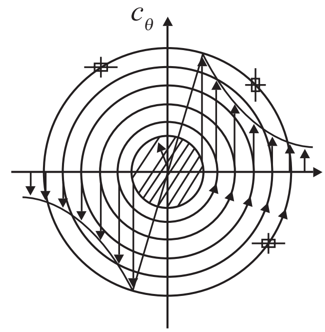
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{G}{2\pi}\theta \\ \psi &= -\frac{G}{2\pi}\ln r \end{aligned}\right\}. \tag{4.15}$$

Suwuklyk hereketiniň c_θ tizligi radiusyň ugruna merkezden daşlaşdygyça ters proporsionallyk boýunça üýtgeýär:

$$c_\theta = \frac{G}{2\pi r}. \tag{4.16}$$



4.7-nji çyzgy. Sirkulýasiýaly akym



4.8-nji çyzgy. Sirkulýasiýaly akymda tizlik meýdany

Koordinata başlangyjynda aýratyn nokat ýerleşýär, ýagny merkeze golaýlaşdygyça c_θ üznüksiz ösýär. Islendik akym çyzygyny gaty üst diýip kabul etmeklik bolýar. Mysal üçin, radiusy $r = r_1$ bolan tegelege seretsek, radiusy r_1-e deň bolan tükeniksiz uzyn silindriň daşyndaky akym hakyky sirkulýasiýaly akymdyr. Silindriň daşyndaky tizligiň paýlanyşy 4.8-nji çyzgyda görkezilendir, tizligiň ugry sirkulýasiýanyň belgisi bilen kesgitlenilýär.

Dipol. Ýönekeý akymlary jemlemek arkaly alynýan dipol diýlip atlandyrylýan akym wajyp ähmiýete eýedir. Onuň kompleks potensialy $W(z) = \dfrac{M}{2\pi z}$ görnüşde bolýar. M – hakyky hemişelige dipol momenti diýilýär. Hakyky we hyýaly böleklere bölüp alarys:

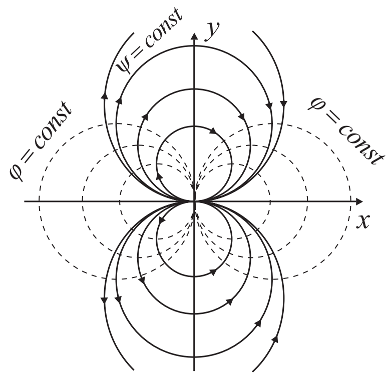
$$W(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2},$$

bu ýerde:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ \psi &= -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\}. \tag{4.17}$$

Ekwipotensial ($\varphi = const$) we akym ($\psi = const$) çyzyklary üçin alnan deňlemeler merkezleri koordinata okunyň başlangyjynda ýatýan x we y oklary boýunça ýerleşen tegelekler ulgamyny kesgitleýär (*4.9-njy çyzgy*):

$$x^2 + y^2 = cy \quad (\psi = const); \quad x^2 + y^2 = cx \quad (\varphi = const)$$



4.9-njy çyzgy. Dipol

4.3. Tekiz parellel akymyň tegelek silindriň gapdalyndan keseleýin akymy

Bu hili akymy tekiz parallel akymy dipol görnüşinde aňladyp almak bolýar. Onda:

$$W(z) = c_\infty z + \frac{M}{2\pi z};$$

$$\varphi = c_\infty x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}; \qquad \psi = c_\infty y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Eger polýar koordinatany ulansak ($x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$), onda:

$$\varphi = c_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{M}{2\pi c_\infty}\frac{1}{r^2}\right);$$

$$\psi = c_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{M}{2\pi c_\infty}\frac{1}{r^2}\right).$$

$\frac{M}{2\pi c_\infty}$ kompleks hemişelik ululykdyr. Ony r_0^2 bilen belgiläp alarys:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= c_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\\ \psi &= c_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

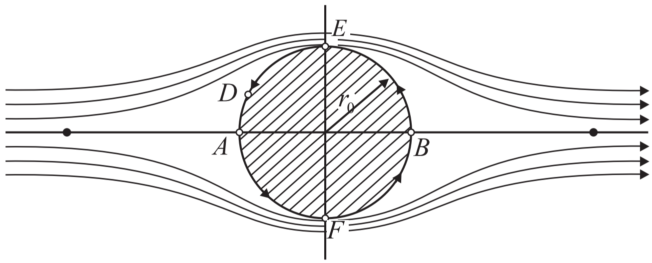
Akym çyzygynyň görnüşi aşakdaky deňlemeden alynýar:

$$c_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) = A.$$

A hemişeligi nola deňläp, nol akym çyzygy üçin alarys:

$$c_\infty r \sin\theta\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)=0.$$

Bu deňlemäni iki sany $\sin\theta = 0$; $1-\frac{r_0^2}{r^2}=0$ özbaşdak deňlemä bölmek bolýar. Bu ýerden görnüşi ýaly nol akym çyzygy radiusy $r = r_0$ bolan tegelegiň daşynda ýatan x okunyň iki sany bölegini aňladýar (*4.10-njy çyzgy*).



4.10-njy çyzgy. Silindriň sirkulýasiýasyz akymynda akym çyzygy

Gaty üstden akýan nol akym çyzygyny peýdalanyp $r_0^2=\frac{M}{2\pi c_\infty}$ bolýandygyny göz öňünde tutup, radiusy r_0 bolan erkin saýlanyp alnan silindriň daşyndan akýan suwuklygyň meselesini çözüp, bu ýagdaý üçin M dipol momentini kesgitlemäge mümkinçilik alarys.

Nol akym çyzygyndan iki gapdala hem akym meýdany (4.18) funksiýanyň kömegi bilen kesgitlenilýär:

$$c_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=c_\infty\cos\theta\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right);$$

$$c_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\,c_\infty\sin\theta\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Silindriň üstünde: $c_r\big|_{r=r_0}=0$;

$$c_\theta\big|_{r=r_0}=-\,2c_\infty\sin\theta. \qquad (4.19)$$

(4.19) formuladaky minus alamaty x okunyň položitel ugry bilen gabat gelýän c_∞ tizlik $\sin\theta > 0$ bolanda, ýagny birinji we ikinji kwadrantlarda θ burçuň peselýän tarapyna, $\sin\theta < 0$ bolanda, üçünji we dördünji kwadratlarda θ burçuň artýan tarapyna ugrukdyrylandygyny aňladýar. 4.10-njy çyzgyda silindriň daşyndan aýlanýan c_θ tizligiň ugry diliň kömegi bilen görkezilendir. A nokatda nol akym çyzygynyň ýaýramasy, B nokatda bolsa täzeden birikmesi amala aşýar. Bu nokatlarda tizlik nola deň bolýar ($\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$) we oňa öňdäki (A nokat) we yzdaky (B nokat) kritiki nokatlar ýa-da akymyň doly togtama nokatlary diýilýär. Maksimal tizlikler burçuň $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ baha deň bolan E we F nokatlarynda eýe bolýar ($c_{\theta\max} = 2c_\infty$).

Silindriň üsti boýunça basyşlaryň paýlanyşy nol akym çyzygy üçin ýazylan Bernulliniň deňlemesinden kesgitlemek bolýar:

$$\frac{c_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{c_\theta^2}{2} + \frac{p}{\rho},$$

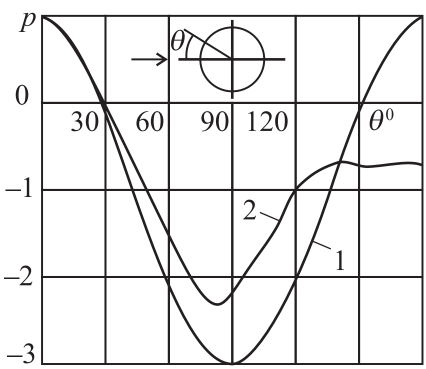
bu ýerden

$$p - p_\infty = \frac{\rho c_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{c_\theta^2}{c_\infty^2}\right)$$

ýa-da $\bar{p}$ ölçegsiz basyş koeffisiýentine geçmek arkaly we $\bar{c}_\theta$-ni (4.19) deňlemedäki bahasy bilen çalşyryp alarys:

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho c_\infty^2}{2}} = 1 - \frac{c_\theta^2}{c_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta. \qquad (4.20)$$

(4.20) baglanyşyk 4.11-nji çyzgyda grafiki şekillendirilendir *(1-nji egri)*. $\bar{p}$ basyş koeffisiýenti maksimal baha öňdäki we yzdaky kritiki nokatlarda eýe bolýar ($\bar{p} = 1$).



4.11-nji çyzgy. Silindr boýunça basyş koeffisiýentiniň paýlanyşy:
1 – hyýaly suwuklyk üçin; 2 – şepbeşik suwuklyk üçin

Tizligiň maksimal baha eýe bolan nokadynda $\left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ basyş minimal baha eýedir $(\bar{p}_{\min} = -3)$. Şeýlelikde, E we F nokatlarda akym tizlenýär, soňra bolsa yzdaky kritiki nokatda nol tizlige çenli haýallaýar.

Suwuklyk hereketiniň ugruna tizligiň ösýän bölegine $\left(\frac{dc}{dx} > 0\right)$ *konfuzor*, tizligiň peselýän bölegine bolsa *diffuzor* diýlip atlandyrylýar.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ bolanda $\bar{p}$ basyş koeffisiýenti silindriň üsti boýunça nola deň, şeýlelikde, bu nokatdaky p absolýut basyş akýan akymyň basyşyna deňdir.

Indi silindriň gapdalyndan sirkulýasiýaly akyma seredeliň, sirkulýasiýa položitel diýeliň $(G > 0)$. Bu ýagdaýda tekiz parallel akyma, dipol we sirkulýasiýaly akymlar jemlenýär. Jemi potensial we akym funksiýasy şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= c_\infty r \cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{G}{2\pi}\theta \\ \psi &= c_\infty r \sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{G}{2\pi}\ln r \end{aligned}\right\}, \tag{4.21}$$

bu ýerden:

$$\left.\begin{aligned} c_r\,|_{r=r_0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0; \\ c_\theta\,|_{r=r_0} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -2c_\infty \sin\theta + \frac{G}{2\pi r_0} \end{aligned}\right\}. \tag{4.22}$$

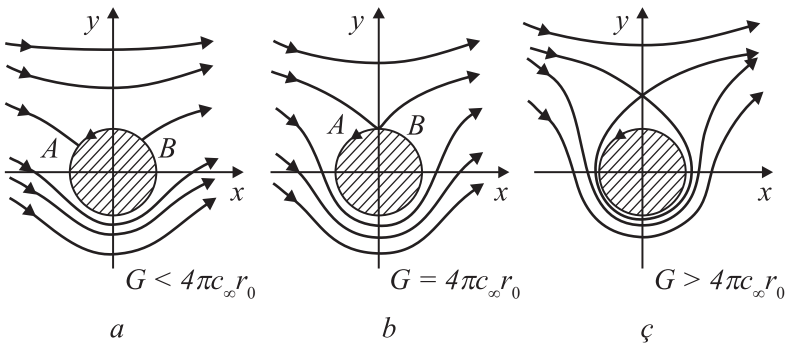
Sirkulýasiýaly akymyň goşulmagy bilen silindriň üstündäki tizligiň paýlanyşy üýtgeýär we kritiki nokatlar hem üýtgeýär. (4.22) deňlemäni nola deňläp onuň ýagdaýyny kesgitläris:

$$\left.\begin{aligned} -2c_\infty \sin\theta_{kr} + \frac{G}{2\pi r_0} &= 0 \\ \sin\theta_{kr} &= \frac{G}{4\pi c_\infty r_0} \end{aligned}\right\}. \tag{4.23}$$

Bu ýerde üç hili ýagdaý bolýar: 1) tizlik sirkulýasiýasy $G < 4\pi c_\infty r_0$. Bu ýagdaýda kritiki nokatlar y-koordinata okuna simmetrik ýerleşen we silindriň üsti boýunça x okundan käbir aralyga ýokarlygyna süýşýär (*4.12-nji a çyzgy*);

2) $G = 4\pi c_\infty r_0$. Bu ýerde A we B nokatlar gabat gelýär $\theta_{kr} = \frac{\pi}{2}$ (*4.12-nji b çyzgy*):

3) $G > 4\pi c_\infty r_0$. Bu ýagdaýda kritiki nokat silindrde ýerleşmeýär we 4.12-nji *ç* çyzgyda görkezilen akymy emele getirýär.



4.12-nji çyzgy. Silindrdäki sirkulýasiýaly akymda akym çyzygy
$a - G < 4\pi c_\infty r_0$, $b - G = 4\pi c_\infty r_0$, $ç - G > 4\pi c_\infty r_0$.

4.4. Tüweleý görnüşdäki akymly hyýaly suwuklygyň esasy teoremalary

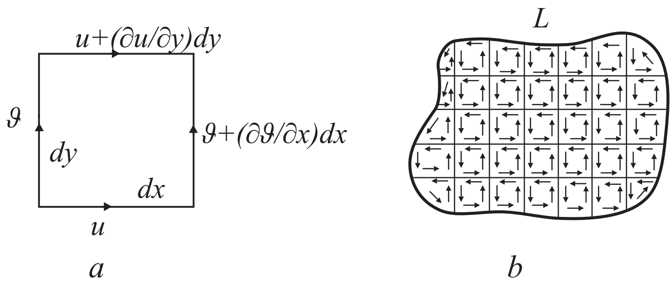
Tüweleý görnüşli hereketiň potensial hereketden tapawudy burç tizlik wektorynyň nola deň däldigi bilen ($\omega \neq 0$) häsiýetlendirilýär. Şuňa meňzeş hakyky hereketler durmuşda hem ýygy-ýygydan duşýar. Bu hili herekete mysal edip derýalardaky akymlary, ýagny köpriniň daýanjynyň täsiri, gaýygyň yzynda döreýän akymyň, küregiň güýçli urgusy, şeýle hem päsgelçilikleriň esasynda döreýän hereketi almak bolýar.

Stoksuň teoremasy. Suwuklygyň tekiz hereketine seredeliň we ondan taraplary dx we dy bolan gönüburçly elementar kontury bölüp alalyň *(4.13-nji çyzgy)*. Konturyň ähli taraplarynda tizlik birmeňzeş diýeliň we sagat diliniň tersine sirkulýasyýany kesgitläliň:

$$dG = udx + \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx\right)dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx - \vartheta dy.$$

Minus alamaty konturyň aýlanma ugry bilen tizligiň ugrunyň bir-birine ters ugrukdyrylandygyny aňladýar. Şeýlelikde:

$$dG = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 2\omega_z dF.$$



4.13-nji çyzgy. Stoksyň teoremasynyň getirilip çykarylyşy

Şeýlelikde:

$$dG = 2\omega_n dF \tag{4.24}$$

(4.24) deňlemäni 4.13-nji *b* çyzgyda görkezilen birnäçe konturyň jemi görnüşinde şeýle ýazmak bolýar:

$$\sum \Delta G_i = 2\sum \omega_n \Delta F.$$

Jemleýji *G* tizlik sirkulýasiýasy daşky kontura deňdir. Netijede:

$$G = 2\sum \omega_n \Delta F$$

ýa-da:

$$G = 2\int_F \omega_n dF. \tag{4.25}$$

(4.25) formula Stoksyň indiki teoremasynyň matematiki ýazgysydyr: döredilen kontur boýunça tizlik sirkulýasiýasy bu kontury gurşap alýan tüweleý görnüşli akymyň napryaženiýesiniň ikeldilen jemine deňdir.

Tomsonyň teoremasy. Bu teorema hyýaly suwuklyklarda tüweleý görnüşiň wagta görä emele gelme meselesini çözýär. Akymdan *L* kontury bölüp alalyň we sirkulýasiýanyň $\frac{dG}{dt}$ wagt boýunça üýtgemesini hasaplalyň. Kesgitlemä görä *G* sirkulýasiýany $G = \int_L udx + \vartheta dy + wdz$ formula boýunça kesgitlemek bolýar. Onda:

$$\frac{dG}{dt} = \int_L \frac{du}{dt}dx + \int_L \frac{d\vartheta}{dt}dy + \int_L \frac{dw}{dt}dz + \int_L ud\left(\frac{dx}{dt}\right) + \int_L \vartheta d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \int_L wd\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

$\frac{du}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{dw}{dt}$ önümleri (2.21) Eýleriň deňlemesi bilen, koordinatalaryň wagt boýunça önümlerini bolsa tizlik proýeksiýalary bilen çalşyryp alarys:

Eger massalaýyn güýç U potensial diýip kabul etsek, onda

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\ Y = \frac{\partial U}{\partial y},\ Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

$$\frac{dG}{dt} = \int_L d\left(\frac{c^2}{2} - P + U\right) = \left(\frac{c^2}{2} - P + U\right)_B - \left(\frac{c^2}{2} - P + U\right)_A;$$

onda:

$$\frac{dG}{dt} = 0.$$

Alnan netije Tomsonyň teoremasyny berýär. Hyýaly suwuklyklarda ýapyk kontur boýunça tizlik sirkulýasiýasy wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär.

Gelmgolsyň teoremasy. Gelmgolsyň teoremasy Stoksuň we Tomsonyň teoremasyna esaslanandyr.

1. Teorema. Köwlenme turbajygynyň depgini (intensiwligi) onuň uzynlygy boýunça üýtgemeýär:

$$G = G_{AB} + G_{BS} - G_{SD} - G_{DA};$$

$$|G_{BS}| = |G_{DA}|;\ G = G_{AB} - G_{SD};$$

$$G = G_{AB} - G_{SD} = 0;\ G_{AB} = G_{SD};$$

$$G_{AB} = 2\omega_1 F_1 = 2\omega_2 F_2.$$

2. Teorema. Potensial massalaýyn güýjüň täsirindäki hyýaly suwuklyklarda tüweleý görnüşli turbajyk üýtgemeýär.

3. Teorema. Potensial massalaýyn güýjüň täsirindäki hyýaly suwuklyklarda tüweleý görnüşli turbajygyň naprýaženiýesi üýtgemeýär.

4.5. Gysylýan hyýaly suwuklygyň potensial akymy

Seredilip geçilen potensial akymda biz suwuklygyň otnositel gysyjylyk täsirini göz öňünde tutmadyk. Potensial tizligiň üsti bilen tizlik proýeksiýasyny kesgitleýän (4.2) gatnaşyk gysylýan suwuklyk üçin hem ulanarlyklydyr, ýöne gysylýan suwuklygyň tizlik potensialyny kanagatlandyrýan deňleme üýtgeýär. Gysylýan suwuklygyň durnuklaşan akymy üçin üznüksizlik deňlemesini ýazalyň:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \qquad (4.26)$$

Eýleriň deňlemesini peýdalanyp, şeýle özgertmeleri geçireliň:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Bu ýerden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial \rho}{\partial y}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{4.27}$$

(4.26) deňlemäni (4.27) deňlemä goýup alarys:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)-\frac{u}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)-\frac{\vartheta}{a^2}\left(u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)=0.$$

Bu deňlemäni özgerdip alarys:

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u\vartheta}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)+\left(1-\frac{\vartheta^2}{a^2}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0.$$

(4.2) formulany ulanyp we tizlik düzüjisiniň önümini φ tizlik potensialy bilen çalşyryp alarys:

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}\frac{u\vartheta}{a^2}+\left(1-\frac{\vartheta^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0. \tag{4.28}$$

(4.28) deňleme gysylýan suwuklygyň tekiz akymynyň tizlik potensialy üçin birinji derejeli hususy önümli çyzykly differensial deňlemäni aňladýar.

Potensial tizlik üçin gyraky şertler takyk meselelerde kesgitlenilýär. x oky boýunça tükeniksiz tekiz akym üçin potensial tizlige indiki şertleri girizmek bolar:

$$u_\infty=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=\infty}=c_\infty;\quad \vartheta_\infty=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x=\infty}=0.$$

Akýan üstüň araçäginde ϑ_n normal tizlik düzüjisi nola deň, şeýlelikde, $y_n=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=0$.

(4.28) deňlemäniň derňewinden görnüşi ýaly, tizlik düzüjileriniň sesiň tizligine bolan gatnaşygynyň örän kiçi bahalarynda

$\left(\frac{u^2}{a^2} \ll 1;\ \frac{u\vartheta}{a^2} \ll 1;\ \frac{\vartheta^2}{a^2} \ll 1;\right)$ degişli gatnaşyklary hasaba almasak, gysylýan suwuklyga geçeris we potensial tizlik Laplasyň (4.3) görnüşindäki çyzykly deňlemesini kanagatlandyrar.

Eger akymda kese kesiginiň ölçegi kiçi bolan jisim ýerleşen bolsa, bu jisimiň tolgundyrmasy örän kiçidir, onda (4.24) çyzykly däl deňlemämiz çyzykly görnüşe geçer we alnan ýönekeý deňlemäniň netijesinde bizi gyzyklandyrýan bölekdäki tizligiň we basyşyň paýlanmasynda gysyjylyk täsiri baradaky meseläni çözmek bolýar.

Goý, alnan şertde akym tizligi we onuň düzüjileri käbir hemişelik ululygyň jemi görnüşinde berlen bolsun. Bu ýagdaýda x okunyň ugry tizligiň ugry bilen tükeniksizlige çenli gabat gelýär, y oky bolsa bu ugra perpendikulýardyr ($\vartheta_\infty = 0$), onda: $c = c_\infty + c'$; $u = u_\infty + u'$; $\vartheta = \vartheta'$, bu ýerde c', u', ϑ' bahasy Δ tertipli kiçi ululyk. Indi (4.28) deňlemedäki koeffisiýentleriň tertibini bahalandyralyň:

$$1 - \frac{u^2}{a^2} \approx 1 - \frac{u_\infty^2}{a^2} - 2\frac{u_\infty}{a}\bar{\Delta} - \bar{\Delta}^2;$$

$$1 - \frac{\vartheta^2}{a^2} \approx 1 - \frac{\Delta^2}{a^2};\quad \frac{u\vartheta}{a^2} = \frac{u_\infty}{a}\bar{\Delta} + \bar{\Delta}^2.$$

$\bar{\Delta}$ we $\bar{\Delta}^2$ tertipdäki bahaly ululyklary hasapdan aýryp, potensial tizlik üçin çyzykly deňlemäni alarys, bu ýerde $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{a}$.

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (4.29)$$

(4.29) görnüşindäki deňleme M_∞ baha baglydyr. Eger: $M_\infty < 1$ bolan ýagdaýynda, elliptik deňlemäni aňladýar; $M_\infty = 1$ bolanda, parabolik deňlemäni; $M_\infty > 1$ bolanda bolsa, giperbolik görnüşindäki deňlemäni aňladýar. Differensial görnüşindäki deňlemäniň üýtgemesi, sese çenli, ses we sesiň tizliginden ýokary tizlikli akymlarda tolgundyrylmanyň ýaýrama mehanizminde fiziki üýtgemäni aňladýar.

Alnan usul diňe bir daşky aerodinamiki meseleleri çözmekde oňat netijäni bermek bilen çäklenmän, egriligi kiçi bolan diwar bilen çäklenen kanallardaky akymyň barlagynda hem oňat netijäni berýär.

(4.29) deňlemäni koordinata okunyň degişli deformasiýa ýoly bilen Laplasyň deňlemesi arkaly aňlatmak bolýar. Munuň üçin berlen ulgam bilen aşakdaky ýaly baglanyşygy bolan täze koordinata ulgamyny girizeliň:

$$x_n = x;\ y_n = ky. \tag{4.30}$$

Täze girizilen koordinata ulgamynda dik ölçeg (x okunyň ugry) üýtgemeýär, kese ölçeg bolsa k hemişelik deformasiýa koeffisiýenti bilen deformirlenýär.

Täze koordinata ulgamynda potensial tizlik hem üýtgeýär. Onuň φ_n täze koordinata ulgamyndaky bahasy berlen ulgam bilen şeýle baglanyşygy emele getirýär:

$$\varphi_n(x_n, y_n) = \sigma\varphi(x, y),$$

bu ýerde σ – diňe M_∞ bagly bolan käbir hemişelik koeffisiýenti. Indi önümi hasaplalyň:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\left(\frac{dx_n}{dx} = 1\right);$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_n^2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y} = \frac{k}{\sigma}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}.$$

(4.30) gatnaşykdan $\dfrac{dy_n}{dy} = k$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{k^2}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y_n^2}.$$

σ ululygy gysgaldanymyzdan soňra, (4.29) çyzykly deňlemä önümiň bahasyny goýup alarys:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_n^2} + k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_n^2} = 0.$$

Eger $k = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, gysylmaýan suwuklygyň potensial tizligi üçin ýazylan deňleme bilen gabat gelýär. Täze koordinata ulgamynda Laplasyň deňlemesini alarys:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y_n^2} = 0. \quad (4.31)$$

Şeýlelikde, gysylýan suwuklyk akymy baradaky meseläni öň seredip geçilen gysylmaýan suwuklygyň hereketiniň kömegi bilen çözmek bolýar. Munuň üçin araçäk şertleriniň üýtgemesini hasaba almak zerurdyr. Bu şertiň üznüksizligi üçin gysylýan, şeýle hem gysylmaýan suwuklyk hereketiniň tizlikleri birmeňzeşdir, $c_\infty = c_{\infty n} = const$. Ikinji araçäk şert akýan jisimiň aýlawy akym çyzygy bilen gabat gelmelidir. Eger $y = f(x)$ berlen aýlawyň deňlemesi bolsa, onda $y_n = f_n(x_n)$ deňleme gysylmaýan suwuklyklarda degişli aýlawy kesgitleýär, onda:

$$\frac{\vartheta'}{c_\infty + u'} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f'(x)$$

ýa-da

$$\vartheta' \approx c_\infty f'(x); \quad \vartheta_n' = c_\infty f_n'(x_n). \quad (4.32)$$

Indi gysylýan suwuklygyň φ potensial tizligini $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$ jem görnüşinde aňladalyň, bu ýerde $\varphi_\infty = c_\infty x$ tolgundyrylmadyk akymyň potensialy, φ' tolgundyrylan akymyň potensialy, onda:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = c_\infty + u'; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \vartheta';$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2}.$$

Bu bahalary (4.29) deňlemä goýmak tolgundyrylmadyk akymyň potensialynyň seredilýän deňlemä girmeýändigini aňladýar: $\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{k}{\sigma}\vartheta_n'$. ϑ' we ϑ_n' ululyklary (4.32) deňleme bilen çalşyryp alarys:

$$c_\infty f'(x) = \frac{k}{\sigma} c_\infty f_n'(x_n).$$

c_∞ ululygy gysgaldyp alarys:

$$\frac{df}{dx} = \frac{k}{\sigma}\frac{df_n}{dx_n}. \quad (4.33)$$

Gysylýan suwuklykdan gysylmaýan suwuklyga geçilende bir we şol bir profiliň golaýynda tizligiň we basyşyň ýaýramasynyň üýtgemesine seredeliň. Bu hili özgertmede profil meselesi birmeňzeşdir: $\frac{df}{dx} = \frac{df_n}{dx_n}$. Bu şerti ýerine ýetirmek üçin $k = \sigma = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ bahany goýmak zerurdyr, ýagny $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\frac{1}{\sigma}$; onda $u' = \frac{u'_n}{\sigma}$

ýa-da
$$u' = \frac{u'_n}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \tag{4.34}$$

Gysylýan suwuklyk profilinde tizlik birmeňzeş şertlerde gysylmaýan suwuklyk tizliginden uludyr.

Basyş koeffisiýentiniň üýtgemesiniň bahasy üçin (4.16) gatnaşygy ulanarys we ony $\bar{p} = \frac{2(p_\infty - p)}{\rho_\infty c_\infty^2}$ görnüşde aňladarys. Bu özgertmelerden soň (4.34) deňleme şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\bar{p}_{\text{gys}} = 2\frac{u'_n}{\sqrt{1 - M_\infty^2}\,c_\infty} = \frac{\bar{p}_n}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \tag{4.35}$$

Şeýlelikde, profiliň bir we şol bir nokadynda gysylýan suwuklyga geçilende basyş koeffisiýenti $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ esse ýokarlanýar.

Gysylýan we gysylmaýan suwuklygy deňeşdirmegiň ikinji usuly profiliň üýtgemesine däl-de deňeşdirilýän akymlaryň tizlikleriniň we basyşlarynyň ýaýramasynyň birmeňzeş takmyn bahalarynda seredilýär. Kese tizligiň birmeňzeş şertine $(u' = u'_n)$ görä $\varphi = \varphi_n$, ýagny bu ýagdaýda $\sigma = 1$. Onda (4.33) şertimiz:

$$\frac{df_n}{dx_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}\right)\frac{df}{dx}$$

ýa-da
$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{df_n}{dx_n};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{df}{dx};$$

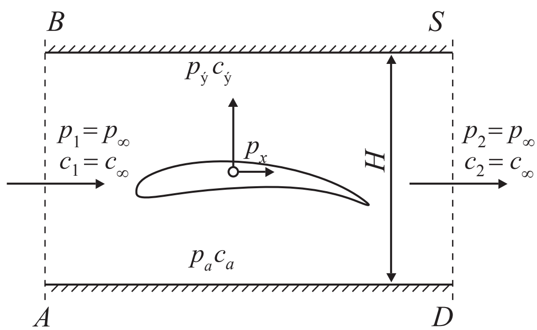
$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Şeýlelikde, gysylmaýan suwuklyklarda aýlawyň her bir hereketi gysylýan suwuklygyň degişli elementi bilen deňeşdireniňde ýokary ýapgytlygy berýär. Netijede, gysylýan suwuklygyň akma profilinden gysylmaýan suwuklygyň akmasyna geçmek üçin onuň ordinatasynyň her bir nokadyny $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ esse ulaltmak bolar.

Çyzyklylyga geçmekligiň seredilen usuly $M_\infty < 0{,}6 \div 0{,}7$ bahalarda kanagatlanarly netijäni berýär, bu ululygyň uly bahalarynda profilde sesiň tizliginden ýokary tizlikli çyzykly zolak emele gelýär.

4.6. Göteriji güýçler barada N.Ý.Žukowskiniň teoremasy

Teoremany subut etmeklik üçin 4.14-nji çyzgyda görkezilen shemadan peýdalanalyň.



4.14-nji çyzgy. M.Ý. Žukowskiniň teoremasyny getirip çykarmak üçin

Bu ýerde profil biri-birinden $H \to \infty$ aralykda bolan akymyň ugruna tükeniksizlige uzap gidýän iki sany geçirmeýän tekiz üstleriň arasynda ýerleşendir. Profili koordinata ulgamy bilen baglanyşdyralyň we akymy x okunyň ugruna ýerleşdireliň. Profilden öňde we soňda profiliň döredýän tolgundyrylmasynyň täsiriniň az bolan, şeýle hem akymyň tizliginiň we parametrleriniň birmeňzeş bolan aralyklarda iki sany AB we SD gözegçilik kesiklerini ýerleşdireliň. Seredilýän profil bölünmesiz akymy emele getirýär diýip hasap edip, gözegçilik üstleri bilen çäklenen suwuklyk massasy üçin hereket mukdarynyň üýtgeme teoremasyny ulanalyň.

Hereket mukdarynyň deňlemesini x okuna proýektirläp alarys:

$$\int_N (p_1 - p_2)dy - P_x - \int_N \rho_1 c_1 (c_1 - c_2)dy = 0\,.$$

AB we *SD* kesiklerde, $c_1 = c_2 = c_\infty$ we $p_1 = p_2 = p_\infty$, onda $P_x = 0$. Bu netije erkin görnüşde saýlanyp alnan jisimiň hyýaly suwuklyklardaky bölünmesiz akymy üçin Eýler-Dalamberiň kesgitlemesini berýär.

Profilden akyma wertikal täsir edýän P_y güýç düzüjisini (göteriji güýji) hereket mukdarynyň deňlemesini *y* okuna proýektirläp alarys:

$$-P_y + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_n - p_B)dx = 0.$$

Bu ýerden:

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_n - p_B)dx. \tag{4.36}$$

Eger *AD* we *BS* üstleriň arasyndaky *H* ölçeg ýeterlik uly bolsa, bu üstleriň ugruna bolan tizlikler akyp geçýän akymyň tizliginden az tapawut eder. Onda c_n, c_B hakyky tizlikleri c_∞ hemişelik düzüjiniň we c'_n, c'_B kiçi ululyklaryň jemi görnüşinde aňlatmak bolýar:

$$\left.\begin{aligned} c_n &= c_\infty + c'_n \\ c_B &= c_\infty + c'_B \end{aligned}\right\}. \tag{4.37}$$

Onda gysylýan suwuklyk üçin Bernulliniň deňlemesini ulanyp, gözegçilik üstlerinde döreýän tolgundyrylan akymda erkin saýlanyp alnan nokatdaky basyşy kesgitläliň:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{k-1}{2k}(c_\infty^2 - c^2) = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{k-1}{2k}(c_\infty^2 - c_\infty^2 + 2c_\infty c' - c'^2) \approx \frac{p_\infty}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k} c_\infty c'.$$

Izoentropiýa deňlemesini ulansak, $\rho = \rho_\infty \left(\frac{p}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{k}}$; $\frac{kp_\infty}{\rho_\infty} = a_\infty^2$, onda käbir özgertmelerden soň alarys:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 - (k-1) M_\infty^2 \frac{c'}{c_\infty}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Kwadrat ýaýdaky aňlatmany hatara dargadyp we onuň iki agzasyny gysgaldyp alarys:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - kM_\infty^2 \frac{c'}{c_\infty} = 1 - \frac{kc_\infty c'}{a_\infty^2} = 1 - \frac{c_\infty c'}{p_\infty}\rho_\infty,$$

ýa-da

$$p = p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'. \tag{4.38}$$

(4.38) deňlemäni ýokarky we aşaky gözegçilik üstleri boýunça ýazalyň:

$$\left.\begin{aligned} p_B &= p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_B \\ p_n &= p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_n \end{aligned}\right\}. \tag{4.39}$$

(4.39) deňlemäni (4.38) deňlemede ýerine goýup alarys:

$$P_y = \rho_\infty c_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_B - c'_n) dx .$$

Bu deňlemedäki integralyň bahasyny *ADSBA* ýapyk aýlawyň tizligi bilen çalşyrmak bolýar:

$$G_{ADSBA} = G_{AD} + G_{DS} + G_{SB} + G_{BA} .$$

Şeýlelikde,

$$G_{AD} = + \int_{-\infty}^{+\infty} (c_\infty + c'_n) dx; \; G_{SB} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (c_\infty + c'_B) dx; \; G_{AB} = - G_{DS} .$$

Onda:

$$G_{ADSBA} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_B - c'_n) dx,$$

$$P_y = - \rho_\infty c_\infty G . \tag{4.40}$$

Bu deňleme gidrogazodinamikanyň indiki esasy teoremasyny aňladýar: *hyýaly suwuklygyň tükeniksiz tekiz parallel akymyndaky jisime täsir edýän güýç, akyp geçýän akymyň tizliginiň we dykyzlygynyň jisimiň töwereginden akyp geçýän aýlaw tizligine köpeltmek hasylyna deňdir*. Eger c_∞ tizlik wektoryny aýlawyň tizligine 90° aýlasak, onda ol täsir edýän göteriji güýjüň ugruny görkezýär.

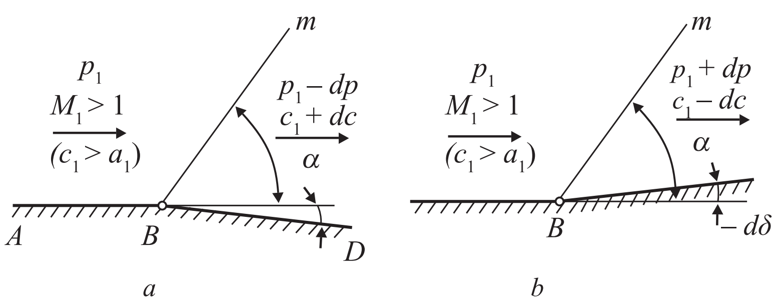
V bölüm

TEKIZ SESIŇ TIZLIGINDEN ÝOKARY TIZLIKLI GAZ AKYMLARY

5.1. Sesiň tizliginden ýokary tizlikli akymlaryň häsiýetnamasy

BA diwaryň golaýyndaky sesiň tizliginden ýokary tizlikli tekiz durnuklaşan akyma seredeliň *(5.1-nji çyzgy)*. Goý, *AB* diwara normal ugur boýunça tizlik üýtgemeýär diýeliň. *B* nokatda diwaryň $\pm d\delta$ burça öwrülýändigi sebäpli akymyň gowşak tolgundyrylmasy döreýär. Bu tolgundyrylma akymyň ugruna döreýär, *Bm* çyzyk akymyň iki bölegini bölýän araçäk bolup hyzmat edýär. *Bm* çyzygyň çep tarapynda tolgundyrylmadyk akym bölegi, sag tarapda bolsa tolgundyrylan akym bölegi ýerleşýär.

Bu çyzyga gowşak ýa-da ses tolgundyrylmasynyň araçäk häsiýetnamasy ýa-da Mahyň çyzygy diýilýär. Gowşak tolgundyrylma ses tizligi bilen ýaýraýar.



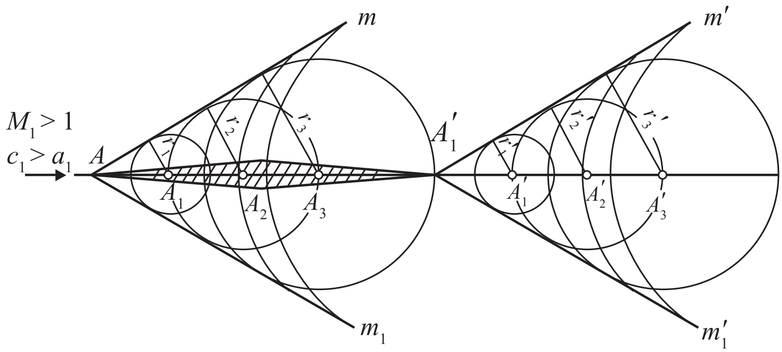
5.1-nji çyzgy. Tükeniksiz kiçi giňelýän *(a)* we daralýan *(b)* burçlardaky akymlar

5.1-nji çyzgyda sesden ýokary akymyň iki shemasy görkezilendir. Diwaryň giňelme burçundaky akymda (*5.1-nji a çyzgy*) giňelme döreýär, basyş *dp* ululyga peselýär, tizlik bolsa *dc* ululyga ýokarlanýar. Diwaryň daralma burçundaky akymda (*5.1-nji b çyzgy*) basyş artýar, tizlik bolsa peselýär. Şeýlelikde, birinji ýagdaýda häsiýetnama pes tolkunyň seýreklemesini, ikinji ýagdaýda pes tolkunyň gysylmasyny aňladýar.

Pes tolgundyrylma tolkuny radiusy $\alpha_1 \Delta t$ deň bolan tükeniksiz tegelek silindr görnüşinde ýaýraýar, bu ýerde Δt B nokatdaky seredilýän tolkunyň döremeginiň wagt aralygy. Şol wagt aralygynda tolkun $c_1 \Delta t$ deň bolan ýoly geçýär.

Ýuka diwardaky çäksiz akymdan, berlen nokatdaky tizlik wektoryndan $\pm\alpha$ burç boýunça ýerleşen iki sany häsiýetnama döreýär (*5.2-nji çyzgy*):

$$\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{M_1}. \tag{5.1}$$



5.2-nji çyzgy. Ýiteldilen ýuka diwardaky ses tizliginden ýokary akymyň akmasy

(5.1) formuladan görnüşi ýaly, tizlenýän sesden ýokary tizliklerde häsiýetli burç akymyň ugruna peselýär, diffuzor akymlarda bolsa ýokarlanýar. Bu ýagdaýda akymyň kese kesigi boýunça tizligiň üýtgemesi egri çyzykly häsiýetnama boýunça amala aşýar (*5.3-nji çyzgy*).

Häsiýetnamany kesgitlemeklik üçin burçlaryň arasyndaky baglanyşygy ulanalyň:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\vartheta - \vartheta_0), \tag{5.2}$$

bu ýerde ϑ_0 – berlen nokatdaky tizlik wektory bilen x okunyň arasyndaky burç, ($\vartheta = \alpha + \vartheta_0$). Ýönekeý gatnaşygy ulanyp alarys:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\vartheta - tg\,\vartheta_0}{1 + \operatorname{tg}\vartheta\,\operatorname{tg}\vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2} - 1}},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx}$$

onda:

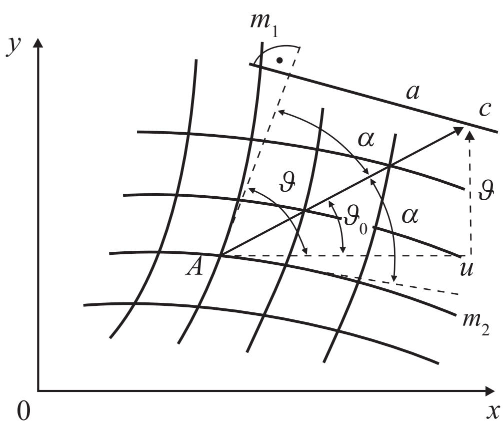
$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{\vartheta}{u}; \quad c^2 = u^2 + \vartheta^2;$$

$$(u^2 - a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2u\vartheta\frac{dy}{dx} + \vartheta^2 - a^2 = 0. \tag{5.3}$$

(5.3) deňleme x, y tekizlikdäki berlen nokatdan geçýän häsiýetnamanyň differensial deňlemesini aňladýar.

Kwadrat deňlemäni çözüp, onuň köküni taparys:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{u\vartheta \pm \alpha\sqrt{u^2 + \vartheta^2 - a^2}}{u^2 - a^2}. \tag{5.4}$$



5.3-nji çyzgy. Akym tekizligindäki häsiýetnamadan tizlik düzüjilerini kesgitlemek

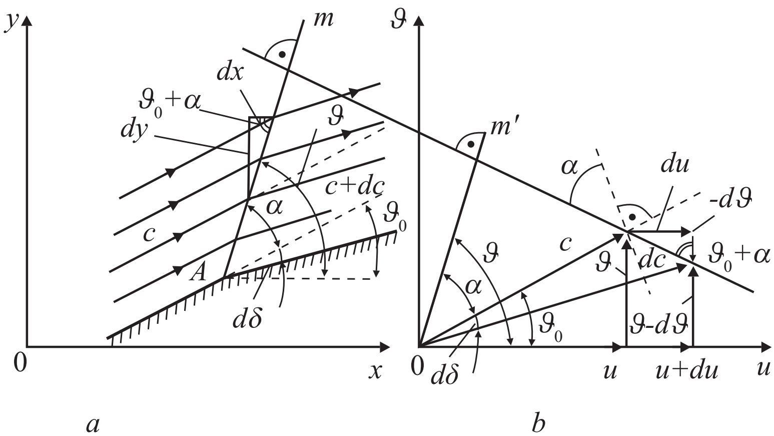
(5.4) gatnaşykdaky $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{1,2}$ önüm iki burçuň tapawudynyň tangensini we onuň jemini aňladýar, ýagny:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\vartheta_0 \mp \alpha)\cdot \tag{5.4 a}$$

5.2. Häsiýetnama diagrammasy

Eger u, ϑ tizlik düzüjileri belli bolsa, onda x, y koordinatalarda häsiýetnamany kesgitlemeklik bolar. Ses tizliginden ýokary tizligi hasaplamagyň bu ýönekeý usuly tizlik tekizligine (u, ϑ) tekizlige geçmek bilen amala aşyrylýar.

Häsiýetnamanyň we tizlik wektorynyň x, y koordinatada we u, ϑ tekizlikde şekillendirilişi 5.4-nji çyzgyda görkezilendir.



5.4-nji çyzgy. Akym tekizligindäki we godograf tekizligindäki häsiýetnamalaryň arasyndaky baglanyşygy gurnamak

u, ϑ oklar bilen dc proýeksiýanyň emele getirýän üçburçlugyndan alarys:

$$\frac{d\vartheta}{du} = \operatorname{ctg}(\vartheta_0 \pm \alpha). \tag{5.5}$$

(5.4 *a*) we (5.5) formulalardan aşakdaky netijäni alarys:

$$\left(\frac{d\vartheta}{du}\right)_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -1; \qquad \left(\frac{d\vartheta}{du}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly x, y we $u\vartheta$ tekizliklerde häsiýetnama özara perpendikulýardyr. (5.4) we (5.5) deňlemeleri ulanyp alarys:

$$\left(\frac{d\vartheta}{du}\right)_{1,2} = -\frac{u\vartheta \pm a\sqrt{u^2 + \vartheta^2 - a^2}}{\vartheta^2 - a^2}. \tag{5.5 a}$$

5.4-nji *b* çyzgydan peýdalanyp alarys:

$$\pm\operatorname{tg}\alpha = \frac{dc}{c d\vartheta} \quad \text{ýa-da} \quad d\vartheta = \pm \operatorname{ctg}\,\alpha \frac{dc}{c},$$

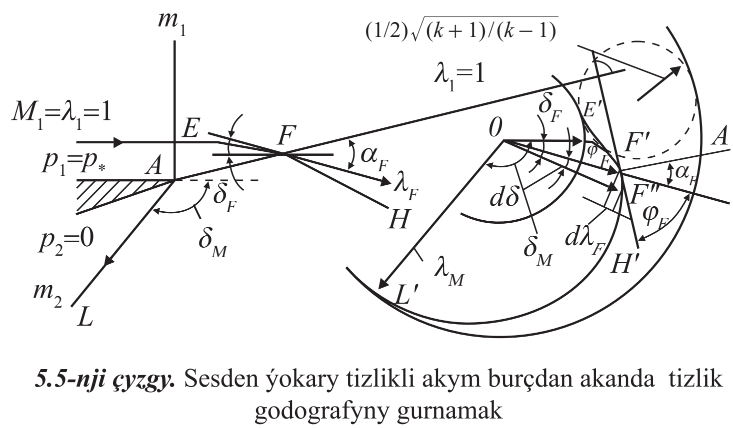
bu ýerde ϑ – abssissa okunyň we häsiýetnamanyň arasyndaky burç. Soňky deňlemä $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{M^2 - 1}$ bahany goýup we λ ölçegsiz tizlige gelip alarys:

$$d\vartheta = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - b^2\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{5.6}$$

Bu ýerden $b = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ (5.6) deňleme integrirlenýär we şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\pm\vartheta = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b^2(\lambda^2 - 1)}{1 - b^2\lambda^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - b^2\lambda^2}} + \vartheta_0. \tag{5.7}$$

(5.7) deňleme *u*, ϑ godograf tekizligindäki häsiýetnama deňlemesini aňladýar. (5.7) deňlemäni ulanyp, käbir *EFH* akym çyzygynyň ugruna tizligiň üýtgemesine seredeliň. *A* burç nokadyndan öň tolgundyrylmadyk akymyň tizligi $M_1 = \lambda_1 = 1$ diýeliň. Burç nokadyndan aşakda basyş $p_2 = 0$. Onda *EFH* akym çyzygynyň ugruna $p_1 = p_*$-dan $p_2 = 0$-a çenli akymyň üznüksiz giňelmesi bolýar.

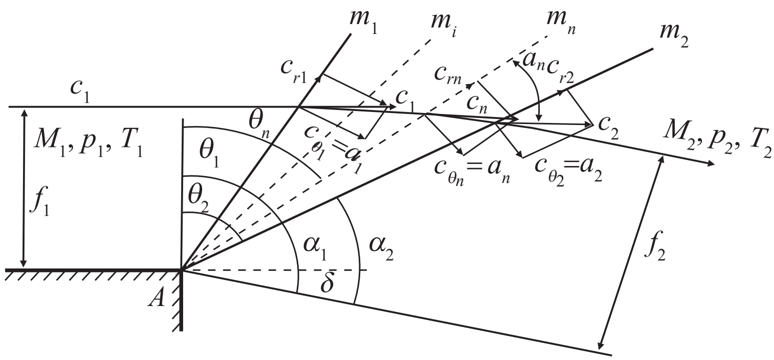


5.5-nji çyzgy. Sesden ýokary tizlikli akym burçdan akanda tizlik godografyny gurnamak

Akym çyzygynyň her bir nokadynda λ tizlik wektorynyň bahasyny we ugruny kesgitlemek bolýar. Bu wektory godograf tekizlige geçireliň. Onda wektoryň ahyry berlen akym çyzygy üçin tizlik godograf egrisini aňladýar.

5.3. Seýreklemäniň merkezleşdirilen tolkuny. Seýrekleme tolkunlarynyň kesişmesi we serpikmesi

Maksimal depgini bolan merkezleşdirilen tolkunyna 5.5-nji çyzgy mysal bolup biler.



5.6-njy çyzgy. Güberçek burçdan sesiň tizliginden ýokary tizlikli akymyň merkezleşdirilen tolkuny

Bu hili tolkunyň häsiýetnamasynyň aýratynlygy burç nokadynda berilmesidir. Ýene bir mysal 5.6-njy çyzgyda şekillendirilendir. Bu ýerde tolkundan öň tizlik ses tizliginden ýokarydyr ($\lambda_1 > 1$), A burç nokadyndan soň gaz pes basyşly bölege barýar ($p_1 > p_2$). Bu ýagdaýda araçäk akym çyzygy BA diwara tarap ugruny üýtgedýär we pes basyşly tarapa δ burça öwrülýär. A nokatda döreýän tolgundyrylma ses tizliginden ýokary akymlarda Am_1, Am_i, ..., Am_2 häsiýetnamalaryň ugruna ýaýraýar we m_1, Am_2 merkezleşdirilen seýrekleme tolkunyny emele getirýär. Tolgundyrylma tolgundyrylmadyk akymyň tizlik wektoryndan tizlik burçy $\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right)$ bolan Am_1 häsiýetnamada başlaýar we öwrülen akymyň ugruna gyşarma burçy $\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{1}{M_2}\right)$ bolan häsiýetnamada gutarýar.

Am_1 we Am_2 häsiýetnamalaryň arasynda p_1-den p_2-ä çenli gazyň giňelmesi bolup geçýär. Seýrekleme tolkunlarynyň çägindäki akym çyzygynyň araçäk nokatlary Am_i, Am_n we ş.m. häsiýetnamalara degişlidirler, her bir häsiýetnamanyň ugruna akym parametrleri üýtgewsiz galýar. Häsiýetnamanyň we akym çyzygyna galtaşmanyň arasyndaky burç akymyň ugruna kiçelýär: $\alpha_1 > \alpha_i > \alpha_n$. Bu ýagdaýda akym çyzygy sarp edilýär we olar bilen normalyň arasy tizlenýän sesden ýokary Am_1 tizlikli akymyň birölçegli shemasyna laýyklykda ýokarlanýar ($f_2 > f_1$, *5.6-njy çyzgy*). m_1Am_2 tolkun depgini p_2 basyşyň üýtgemesi bilen üýtgeýär.

Eger tolgundyrylmadyk akym üýtgewsiz galýan bolsa, onda Am_1 häsiýetnama üýtgewsiz ýagdaýda bolýar, Am_2 häsiýetnama bolsa p_2 basyşa baglylykda ýerleşýär. Aralykdaky akym parametri bilen seýrekleme tolkunynyň arasyndaky baglanyşygy gurnalyň. Bu maksat üçin silindriki koordinatada ýazylan Eýleriň deňlemesini ulanarys. Massalaýyn güýç hasaba alynmaýar. Merkezleşdirilen tolkuny emele getirýän häsiýetnamalar gönüçyzykly, tolkunlaryň çäginde islendik radiusyň ugruna akym parametrleri üýtgewsiz galýar. Şeýlelikde, $\frac{dp}{dr} = \frac{dc}{dr} = 0$. Onda Eýleriň deňlemesi şeýle görnüşe eýe bolar:

$$c_\theta = \frac{dc_r}{d\theta}; \tag{5.8 a}$$

$$c_\theta\left(c_r + \frac{dc_\theta}{d\theta}\right) = -\rho^{-1}\frac{dp}{d\theta}; \tag{5.8 b}$$

$$\rho\left(c_r + \frac{dc_\theta}{d\theta}\right) + c_\theta\frac{d\rho}{d\theta} = 0 \cdot \tag{5.8 ç}$$

(5.8 *a*) deňleme tekiz tüweleý görnüşi bolmadyk akym şertini aňladýar: *A* burç nokadynyň akymynda akym potensial we tüweleý görnüşsizdir, şeýlelikde, seýrekleme tolkuny bilen kesişýän akym entalpiýasy hem üýtgewsiz galýar. (5.8 *b*) deňlemä akymyň önümini goýup alarys:

$$\frac{dp}{d\theta} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s\frac{d\rho}{d\theta} = a^2\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Bu deňlemä (5.8 *b*)-den $\frac{dp}{d\theta}$ -niň (5.8 *ç*)-den $\frac{d\rho}{d\theta}$-niň bahasyny goýup, $c_\theta = a$ bolýandygyny görmek bolar. Bu ýagdaý seýrekleme tolkunlarynda akymyň gyşarmasy, radiusy (häsiýetnama) normal tizlik düzüjisiniň bu nokatda sesiň tizligine deň bolýandygyny aňladýar.

Indi seýrekleme tolkuny bilen kesişýän akym çyzygynyň ugrunda tizligiň we basyşyň nähili üýtgeýändigine seredeliň. Bu maksat üçin (3.18) energiýa deňlemesini ulanalyň: $c^2 = c_r^2 + c_\theta^2$; $c_\theta = a$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\frac{k+1}{2}c_\theta^2 = \frac{k+1}{2}c_*^2 - \frac{k-1}{2}c_r^2.$$

Bu deňlemä $c_\theta = \dfrac{dc_r}{d\theta}$ bahany goýup, radial düzüjini kesgitlemek üçin differensial deňlemäni alarys:

$$\frac{dc_r}{\sqrt{\dfrac{c_*^2}{b} - c_r^2}} = \sqrt{b}d\theta.$$

Bu deňlemäni integrirläp alarys:

c_θ tizlik düzüjisi, $\lambda_\theta = \dfrac{c_\theta}{c_*} = \dfrac{d\lambda_r}{d\theta} = \cos(b\theta)$ deňlemeden kesgitlenilýär.

Seýrekleme tolkunynyň erkin nokadynda λ ölçegsiz tizlik:

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1}\sin^2(b\theta). \tag{5.9}$$

Şol nokatdan basyşy kesgitlemek üçin (3.22 *a*) deňlemäni ulanarys. (3.22 *a*) deňlemä λ-nyň bahasyny goýup alarys:

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{1+\cos(2b\theta)}{k+1}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{5.10}$$

Tablisadan peýdalanyp, seýrekleme tolkunynyň $\dfrac{\rho}{\rho_0}$ dykyzlygynyň we $\dfrac{T}{T_0}$ temperaturasynyň üýtgemesini kesgitlemek bolar. (5.9) deňlemeden görnüşi ýaly, $\lambda_m = \sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}} = \dfrac{1}{b}$ maksimal tizlik θ burçuň aňryçäk bahasyna degişlidir:

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{b}. \tag{5.11}$$

Bu ýagdaýda burçuň üýtgemesinde akymyň basyşy $p_2 = 0$ bolýar (boşlukdaky akym). Bilşimiz ýaly bu hili hadysada Am_2 araçäk häsiýetnama öwrülen akymyň akym çyzygy bilen gabat gelýär, ýagny $\alpha_2=0$. Seredilýän akym ($\lambda=\lambda_m$) nazary çäk bolup hyzmat edýär. Seýrekleme tolkunynyň çäginde akym çyzygynyň görnüşini kesgitläliň. $\dfrac{dr}{c_r} = \dfrac{rd\theta}{c_\theta}$ tekiz akymyň akym çyzygynyň differensial deňlemesini ulanalyň. λ_r we λ_θ parametrleriň formulalaryny ulanyp we olary integrirläp alarys:

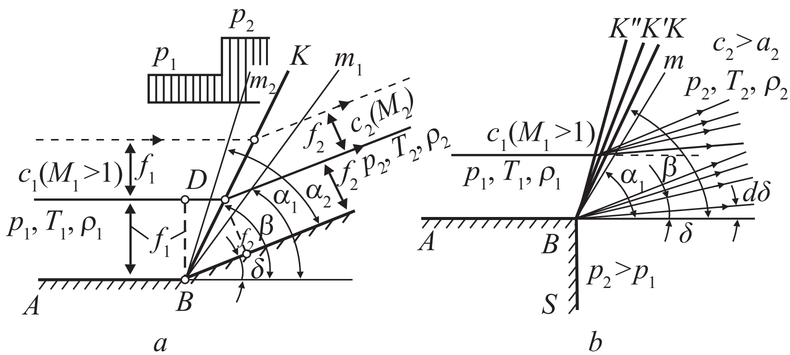
$$r = r_0[\cos(b\theta)]^{-b}. \tag{5.12}$$

Bu ýerde $r_0 - \theta = 0$ bolandaky akym çyzygynyň radius wektory. (5.12) deňlemeden görnüşi ýaly seýrekleme tolkunynyň çäginde ähli akym çyzygy birmeňzeş egriler ulgamyny emele getirýär.

5.4. Tolkun urgusynyň (böküşleýin dykyzlanmanyň) döredilmegi we kesgitlenilmegi

Ses tizliginden ýokary tizlikli gaz akymlarynda tizligiň peselmesi bilen tolkun urgusy ýa-da böküşleýin dykyzlanma diýlip atlandyrylýan güýçli bölünme döreýär. Akymlaryň kesişmesinde bölünme üstünde basyş, temperatura we dykyzlyk ýokarlanýar, tizlik bolsa peselýär, bu üýtgeme bolsa böküşi döredýär. Giňişlikde ýerleşen bölünme üstüne *tolkun urgusy*, gozganmaýan tolkun urgusyna bolsa *böküşleýin dykyzlanma* diýilýär.

Böküşleýin dykyzlanmanyň emele gelmesine *B* nokatda käbir δ burça gyşaran *ABS* tekiz üstüň mysalynda seredeliň (*5.7-nji a çyzgy*).



5.7-nji çyzgy. Ses tizliginden ýokary tizlikli akymyň gyşaran diwardaky hereketi *(a)* we basyşyň ýokarlanan bölegindäki ses tizliginden ýokary tizlikli gaz akymlaryndaky tolkun urgusy (*b)*

Diwaryň bu hili öwrümlerinde akymlaryň kesikleri gysylýar. Ses tizliginden ýokary tizlikli akymlarda bu ýagdaý basyşyň ýokarlanmasyny döredýär, käbir *BK* üstden geçende basyşyň ýokarlanmasy böküşleýin görnüşde bolup geçýär we oňa *tekiz ýapgyt böküşleýin* *dykyzlanma* diýilýär. Seredilýän diwardaky suwuklygyň hereketinde *ABK* bölekdäki parametrlerden *KBS* bölekdäki parametrlere üznüksiz geçmek mümkin däl.

Hakykatdan hem, Abm_1 bölek üçin tolgundyrylma çägi c_1 tizlik wektorynyň gyşarma burçy $\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{M_1}$-a deň bolan Bm_1 ses tolkuny bolmalydyr.

Bm_2 ikinji tolgundyrylma çägine $\alpha_2 = \arcsin\frac{1}{M_2}$ gyşarma burçy degişlidir. Şeýlelikde, $c_2 < c_1$ we $\alpha_1 < \alpha_2$, onda $\alpha_1 < \alpha_2$. Bm_2 häsiýetnama ABm_1 dolandyrylmadyk bölekde ýerleşýär we akym çyzygy fiziki mümkin bolmadyk ştrihlenen çyzyk bilen görkezilendir. Ýapgyt böküş Bm_1 we Bm_2 tolkunlaryň arasynda ýerleşendir.

Böküş ýokary basyşly gurşawda ses tizliginden ýokary tizlikli akymlarda döreýär (*5.7-nji b çyzgy*). *B* nokatdan sagda (*BS* çyzykdan soň) p_1 basyşdan has ýokary bolan p_2 basyş döreýär. Eger basyşyň $p_2 - p_1$ tapawudy uly bolsa, *B* nokatda *Bm* gowşak gysylma tolkuny döreýär. Eger *B* nokatdaky basyşlaryň tapawudy ýokarlanyp başlasa, onda tolkun *BK* ýagdaýa geçer we böküşleýin dykyzlanma döreýär. p_2 basyşyň ýokarlanmasy bilen *BK* böküş *B* nokada otnositellikde çepe süýşer (BK^{I}, BK^{II} we ş.m.). Böküşden geçenden soňra akym *AB* tolgundyrylmadyk akymyň ugrundan δ burça gyşarar. Böküşden geçenden soňra akymyň ähli parametrleri böküşleýin görnüşde üýtgär.

Böküşiň ýagdaýy *BK* böküş dykyzlygynyň we akymyň ilkibaşdaky *AB* ugrunyň arasyndaky β burç bilen kesgitlenýär.

Böküş diňe bir burçlaýyn öwrümlerdäki adiabatiki akymlarda däl-de, eýsem, akymyň gysga aralygynda energiýanyň, mysal üçin ýylylygyň berilmegi netijesinde hem döreýär.

Daşky gurşaw bilen ýylylyk çalşygy we sürtülmesi bolmadyk, durnuklaşan akyma seredeliň. Goý, käbir nokatda ses tizliginden ýokary tizlikli akymda ýapgyt böküşleýin dykyzlanma döreýär diýeliň (*5.8-nji çyzgy*).

Böküşden öň gaz parametrleri 1 indeks bilen, böküşden soň bolsa 2 indeks bilen belgilenen. *B* nokatda böküş tekizligi bilen kesişýän *ABD* akym çyzygynyň ugry boýunça gaz hereketine seredeliň. Böküşden öň we soň tizlik düzüjilerini böküş tizligine normal (c_{n_1}, c_{n_2}) we galtaşma (c_{t_1}, c_{t_2}) ugurlar boýunça dargatmak bolýar. Onda böküşden öň we soň tizlik üçburçlugyny guralyň. Bilşimiz ýaly $c_1^2 = c_{n_1}^2 + c_{t_1}^2$ we $c_2^2 = c_{n_2}^2 + c_{t_2}^2$.

Böküşden öňki we soňky parametrleriň arasyndaky baglanyşygy gurnamak üçin esasy saklanma kanunlaryny ulanalyň. Massanyň saklanma kanuny:

$$f_1 \rho_1 c_1 = f_2 \rho_2 c_2. \tag{5.13}$$

Bu ýerde

$$\rho_1 c_1 \sin\beta = \rho_2 c_2 \sin(\beta - \delta), \tag{5.14}$$

ýa-da

$$\rho_1 c_{n1} = \rho_2 c_{n2}. \tag{5.15}$$

Ýapgyt böküş tekizligine normal proýeksiýada impulsyň saklanma kanuny:

$$(p_1 - p_2)\bar{B}\bar{B}_1 \cdot 1 = m(c_{n2} - c_{n1}).$$

Käbir gysgaltmalardan soňra:

$$p_1 + \rho_1 c_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 c_{n2}^2. \tag{5.16}$$

Tolkun tekizligine proýeksiýa şeýle aňladylýar:

$$p_1 c_{n1}(c_{t2} + c_{t1}) = 0.$$

Tolkunyň üstüne parallel bolan ähli üstleriň ugrunda basyş hemişelikdir, onda:

$$c_{t_2} = c_{t_1} = c_t. \tag{5.17}$$

Şeýlelikde, ýapgyt tolkun urgusy tekizligine çenli we ondan soň tizligiň galtaşma düzüjileri birmeňzeşdir. Seredilýän akym daşky gurşaw bilen ýylylyk çalşygy amala aşyrmaýar, akymyň doly energiýasy üýtgewsiz galýar: $h_{01} = h_{02} = h_0$.

Tizlik düzüjileri bilen aňladylýan energiýa şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\frac{c_{n1}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{c_{n2}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{c_*^2}{2}\frac{k+1}{k-1} - \frac{c_t^2}{2}. \tag{5.18}$$

Böküşe çenli we ondan soňky tizlikleriň arasyndaky baglanyşygy kesgitläliň. (5.15) deňlemäni göz öňünde tutup, (5.16) deňlemäni şeýle görnüşde ýazalyň:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + c_{n1}^2 = \frac{c_{n1}}{c_{n2}}\left(\frac{p_2}{\rho_2} + c_{n2}^2\right). \tag{5.16 a}$$

Energiýa deňlemesinden alarys:

$$\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{k-1}{2k}\left(\frac{k+1}{k-1}c_*^2-c_{n1}^2-c_t^2\right); \qquad (5.18\ a)$$

$$\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{k-1}{2k}\left(\frac{k+1}{k-1}c_*^2-c_{n2}^2-c_t^2\right). \qquad (5.18\ b)$$

(5.18 *a*) we (5.18 *b*) deňlemeleri (5.16 *a*) deňlemä goýup we käbir özgertmelerden soň alarys:

$$c_{n1}c_{n2}=c_*^2-\frac{k-1}{k+1}c_t^2 \qquad (5.19)$$

ýa-da

$$\lambda_{n1}\lambda_{n2}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_t^2. \qquad (5.19\ a)$$

(5.19) formula ýapgyt böküşden geçilendäki tizligiň normal düzüjileriniň arasyndaky baglanyşygy gurnaýar we böküşden öň we soň beýleki parametrleriň arasyndaky parametrleri kesgitlemek üçin peýdalanylýar. c_*^2 ululygy (5.18) deňlemede çalşyralyň. Onda sesiň tizligini $a^2=k\dfrac{p}{\rho}$ diýip aňladyp alarys:

$$\frac{p_1}{\rho_1}\left(\frac{c_{n1}^2}{a_1^2}+\frac{2}{k-1}\right)=\frac{p_2}{\rho_2}\left(\frac{c_{n2}^2}{a_2^2}+\frac{2}{k-1}\right). \qquad (5.20)$$

(5.19) deňlemäni şeýle görnüşde ýazmak bolar:

$$\frac{c_{n2}^2}{a_2^2}=\left(\frac{c_{n1}^2}{a_1^2}+\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{2k}{k-1}\frac{c_{n1}^2}{a_1^2}-1\right). \qquad (5.21)$$

(5.15) deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip, $\rho_1=k\dfrac{p_1}{a_1^2}$, $\rho_2=k\dfrac{p_2}{a_2^2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$p_1\rho_1\frac{c_{n1}^2}{a_1^2}=p_2\rho_2\frac{c_{n2}^2}{a_2^2}. \qquad (5.22)$$

(5.20) – (5.22) deňlemelerde üç sany $p_2,\rho_2,\dfrac{c_{n2}}{a_2}$ – gözlenilýän ululyklar bar we bu deňlemeleri birlikde ulanyp çözmek mümkin. Böküşdäki tizlik üçburçlugyndan aşakdaky gatnaşyklary alarys (*5.8-nji çyzgy*):

$$\left.\begin{aligned}c_{n1}&=c_1\sin\beta\\ c_{n2}&=c_2\sin(\beta-\delta)\\ c_t&=c_1\cos\beta=c_2\cos(\beta-\delta)\end{aligned}\right\}. \qquad (5.23)$$

Onda (5.22) formulanyň kömegi bilen (5.20) deňlemeden ρ_1 we ρ_2-ni ýa-da p_1 we p_2-ni aýralyň we (5.21) formuladan $\frac{c_{n2}}{a_2}$-ni (5.20) formula goýup, tolkundaky termodinamiki parametrleriň arasyndaky gözlenilýän baglanyşygy almak bolar. Bu baglanyşyklar 5.1-nji tablisada berlen. 5.1-nji tablisadaky formulalar k ululyga, böküşden öň akymyň M_1 tizligine we ýapgyt tolkunyň β burçuna baglylykda ýapgyt böküşleýin dykyzlanmadan geçenden soňra gaz parametrleriniň üýtgeme baglanyşygyny aňladýar.

Formuladan görnüşi ýaly ýapgyt tolkunyň burçy α_1 häsiýetnama burçundan uludyr (*5.1-nji tablisa*).

5.1-nji tablisa

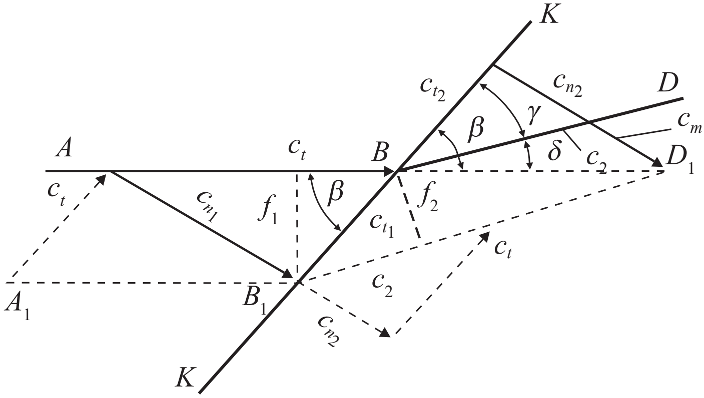
Ululyklar	Hasaplama formulasy
Basyşyň gatnaşygy	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2k}{k-1}M_1^2\sin^2\beta - 1\right)$
Dykyzlygyň gatnaşygy	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}\left(\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_1^2\sin^2\beta} + 1\right)^{-1}$
Temperaturanyň gatnaşygy	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\left(\frac{2k}{k-1}M_1^2\sin^2\beta - 1\left(\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_1^2\sin^2\beta} + 1\right)\right)$
Böküşden soň Mahyň sany	$M_2 = \left(\frac{2}{k-1} + M_1^2\right)\left(\frac{2k}{k-1}M_1^2\sin^2\beta - 1\right)^{-1} + M_1^2\cos^2\beta\left(\frac{k-1}{2}M_1^2\sin\beta^2 + 1\right)^{-1}$

Eger $\beta = \alpha_1 = \arcsin\frac{1}{M_1}$ bolsa $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_2}{T_1} = 1$.

Bu ýagdaýda ýapgyt tolkun urgusynyň gowşak tolkuny görnüşinde aňladylýar we akymyň gyşarma burçy nola ymtylýar. β we δ burçlaryň arasyndaky baglanyşyk (5.19) we (5.23) deňlemeleriň kömegi bilen gurnalýar:

$$\mathrm{tg}\delta = (M_1^2\sin^2\beta - 1)\left[\left(M_1^2\frac{k+1}{2} - \sin^2\beta\right) + 1\right]^{-1}(\mathrm{tg}\beta)^{-1} \quad (5.24)$$

(5.24) formuladan görnüşi ýaly haçanda $\beta = \alpha_1$ we $\beta = 90°$ bolanda, $\delta = 0$ bolar. Şeýlelikde, $\delta(\beta)$ egriniň maksimum bahasy adaty usulyň kömegi bilen kesgitlenýär. β_m we δ_m burçlar maksimum egrini kesgitleýär şeýle-de olaryň bahasy M_1 we k ululyklara baglydyr. (5.24) formula böküş diagrammada grafiki şekillendirilendir.



5.8-nji çyzgy. Ýapgyt tolkun urgusynda tizlik üçburçlugy

β burçuň ulalmagy bilen gazyň böküşden öňki basyşy, temperaturasy we dykyzlygy ýokarlanýar, ölçegsiz tizlik bolsa peselýär. $\beta = 90°$ bolan hususy ýagdaýa tolkundaky parametrleriň üýtgemesi maksimal baha eýedir, gyşarma burçy bolsa $\delta = 0$-a deňdir. Tolgundyrylmadyk akymyň tizlik ugruna normal ýerleşýän bu hili böküşe *göni böküş* diýilýär. Göni tolkun ýapgyt tolkunyň hususy haly bolup durýar: göni tolkunyň esasy deňlemeleri 5.1-nji tablisadaky formulalara $\beta = 90°$ baha goýup alynýar. Tolkuna çenli we soňky tizlikleriň arasyndaky baglanyşyk formulalary hem (5.19) ýa-da (5.19 *a*) ýapgyt böküşiň esasy deňlemesinden alynýar, ýagny:

$$c_{n1} = c_1(\lambda_{n1} = \lambda_1);\ \ c_{n2} = c_2(\lambda_{n2} = \lambda_2);\ \ c_t = 0\ .$$

Onda:

$$c_1 c_2 = c_*^2 \quad \text{ýa-da} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1\,. \tag{5.25}$$

Şeýlelikde, göni böküşden öň gazyň tizligi hemişe kritiki tizlikden kiçidir ($c_2 < c_*$). Bu bolsa göni tolkunyň basyşyň maksimal ýokarlanmasyny we degişlilikde tizligiň peselmesini döredýän has depginli tolkundygyny aňladýar.

5.1-nji tablisadaky formulalardan görnüşi ýaly tolkunyň depgini tolgundyrylmadyk akymyň λ_1 (M_1) tizliginiň ýokarlanmasy bilen ösýär. Maksimal tizlikde dykyzlygyň gatnaşygy $\lim\limits_{\lambda_1 \to \lambda_m} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}$ ahyrky çäge (predele) ymtylýar, basyş we temperatura üznüksiz ösýär.

5.5. Urgy polýary we urgy polýarynyň diagrammasy

Tolkunyň çägindäki parametrleriň arasyndaky baglanyşygy grafiki şekillendirmek amatlydyr. Bu maksat üçin tolkundan öň we soňky tizlik üçburçlugyna seredeliň (*5.9-njy a çyzgy*).

Tolkuna çenli tizlik wektoryny x okunyň ugruna c_1 bilen belgiläliň (OQ kesik). OF we FQ- kesikler bilen degişlilikde tolkuna çenli tizligiň c_t galtaşma we c_{nl} normal düzüjilerini aňladýar. Akymyň δ gyşarma burçuny bilip, tolkundan soňky FQ kesim bilen kesişmä çenli bolan c_2 tizlik wektoryny geçireris. E kesişme nokady c_2 ululygy kesgitleýär, EF kesim bolsa böküşden soňky tizligiň c_{n2} normal düzüjisini aňladýar.

c_2 tizligi bolsa iki sany u_2 we ϑ_2 tizlik düzüjileri bilen aňlatmak bolar. u_2 we ϑ_2 düzüjiler c_2-niň tolkundan öň akym tizliginiň ugruna we bu ugra normal düzüjilerini aňladýar. Tolkundan öňki c_1 tizliginiň hemişelik bahasyndaky we δ öwrülme burçunyň üýtgeme bahalaryndaky tolkundan soňraky c_2 tizlik wektorynyň ahyrynyň ýazgysy bolan egriniň deňlemesini tapalyň. Bu deňlemäni u_2 we ϑ_2 ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk görnüşinde aňladyp, godograf tekizliginde tolkundan soňky tizligiň egrisini alarys. Bu baglanyşygy kesgitlemek üçin ilki bilen (5.19) ýapgyt tolkunyň esasy deňlemesini ulanalyň. Bu deňlemä (5.23) deňlemeden c_{n_1} we c_t ululyklaryň bahasyny goýup alarys:

$$c_1^2 \sin^2\beta - c_1\vartheta_2 \operatorname{tg}\beta = c_*^2 - b^2 c_1^2 \cos^2\beta \cdot \qquad (5.26)$$

Şeýlelikde, 5.12-nji *a* çyzgydan görnüşi ýaly

$$c_{n2} = c_{n1} - \vartheta_2(\cos\beta)^{-1}.$$

(5.26) deňlemäni şeýle görnüşde aňladalyň:

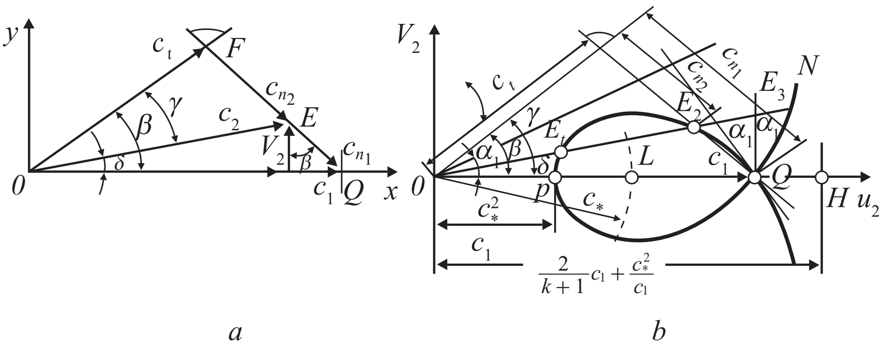
$$c_1^2\cos^2\beta\cdot\mathrm{tg}^2\beta - c_1\vartheta_2\mathrm{tg}\beta = c_*^2 - b^2c_1^2\cos^2\beta.$$

$\mathrm{tg}\beta = \dfrac{c_1 - u_2}{\vartheta_2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\vartheta_2^2 = (c_1 - u_2)^2(c_1u_2 - c_*^2)\left(\frac{2}{k+1}c_1^2 + c_*^2 - c_1u_2\right)^{-1}. \qquad (5.27)$$

Ýa-da ölçegsiz tizliklerde:

$$\lambda_{\vartheta_2} = (\lambda_1 - \lambda_{u2})^2(\lambda_1\lambda_{u2} - 1)\left(\frac{2}{k+1}\lambda_1^2 + 1 - \lambda_1\lambda_{u2}\right)^{-1}. \qquad (5.27\ a)$$



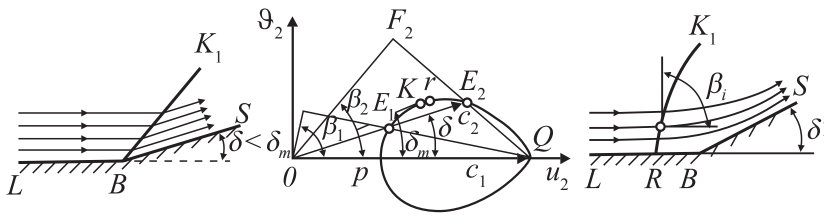
5.9-njy çyzgy. Tolkundaky tizlik üçburçlugy *(a)* we godograf tekizliginde urgy polýarynyň gurnalyşy *(b)*

(5.27) deňlemeden alynýan egrä *urgy polýary* diýilýär we ol 5.9-njy *b* çyzgyda şekillendirilendir.

Dürli çaltlygy bolan (görnüşli) tolkun urgusyndan soňraky tizlik wektorynyň ahyrky nokatlaryndan emele gelýän egrä urgy polýary diýilýar. Her bir urgy polýary hereketdäki akymyň berlen kesgitli tizlikleri üçin gurnalýar. (5.27) deňlemedäki ϑ_2-niň ahyrky bahasyna seredeliň. $u_2 = c_1$ we $u_2c_1 = c_*^2$ bolanda $\vartheta_2 = 0$ bolýandygyny görmek bolar. Birinji ýagdaý tolkunsyz akyma degişlidir: ýapgyt tolkun urgusy gowşak tolgundyrylma tolkunyna (häsiýetnama) öwrülýär. Q nokatdaky giposissoide galtaşma, Q nokada inderilen normaldan $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{1}{M_1}$ burçda ýerleşýär. Koordinata başlangyjyndaky galtaşma inderilen normala α_1 burç alnar. Q nokat bir wagtda häsiýetnama diagrammasyna we urgy polýaryna degişlidir. E_2-nokady kesgitleýän

β ýapgyt tolkun burçy QE_2 kesimi we O nokatdan oňa bolan normaly kesgitleýär. Ikinji ýagdaý ýapgyt tolkunyň $\beta = 90°$ bolan göni tolkuna geçmegini häsiýetlendirýär. Bu ýagdaý giposissoidde P nokady häsiýetlendirýär.

(5.27) deňlemeden görnüşi ýaly $u_2 = \dfrac{2c_1}{k+1} + \dfrac{c_*^2}{c_1}$ bolanda, ϑ_2 tükeniksizlige öwrülýär. QM kesim tolkundan öňki tizlikden uly bolan tolkundan soňky tizligi (*5.9-njy b çyzgy E_3-nokat*) berýär. P we Q ahyrky nokatlaryň arasyndaky urgy polýary tolkundan soňky tizlik wektory üçin iki bahany berýär. Tekiz tolkun tolkundan soňky tizlik wektorynyň bahasynda ýüze çykýar we E_2 nokady aňladýar (*5.9-njy b çyzgy*). E_1 nokada degişli bolan ikinji ululyk tekiz tolkuny döretmeýär. Akymyň gyşarma burçy ýuwaş-ýuwaşdan ulalýan LBS diwaryň ugruna ses tizliginden ýokary gaz akymyna seredeliň (*5.10-njy a çyzgy*).

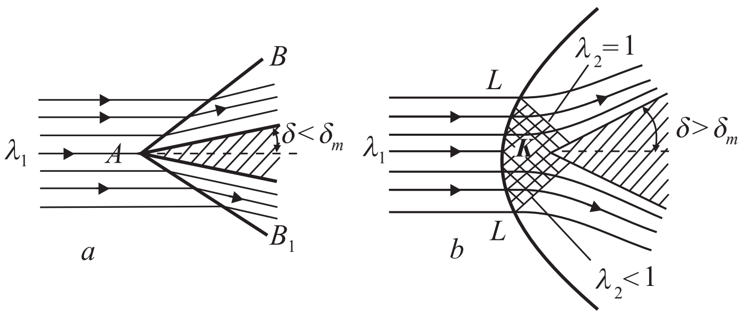


a *b* *ç*

5.10-njy çyzgy. Akymyň öwrülme burçy $\delta \le \delta_m$ *(a)* , $\delta = \delta_m$ *(b)*, $\delta \ge \delta_m$ *(ç)* bolan tolkun urgusy

Eger δ-nyň bahasy nola ýakyn bolsa, akymyň tolgundyrylmasy uly däldir we tolkundan soňraky c_2-tizlik tolkundan öňdäki c_1-tizlige ýakyndyr. δ burçuň ýokarlanmasy bilen E_2 nokat Q-dan r-e çenli urgy polýarynyň ugrunda ýerleşýär (*5.10-njy b çyzgy*), bu ýerde r tolkundan soňky tizligi berýär $\lambda_2 = M_2 = 1$. Mundan beýläk δ-nyň ýokarlanmasy bilen tolkundan soňraky akymyň ýagdaýy K nokat bilen kesgitlenýär. Bu ýagdaýda tolkundan soňky akym sesiň tizligine çenli ($M_2 < 1$) we δ özüniň δ_m maksimal bahasyny alýar. Eger $\delta > \delta_m$ bolsa, tolkun B burç nokadyndan aýrylýar we egrelýär *(5.10-njy ç çyzgy)*. Bu bolsa tolgundyrylmanyň ýaýrama tizliginiň tolkundan soňky akym tizliginden uly bolýandygy bilen düşündirilýär. Hakykatdan hem δ burçuň ulalmagy bilen tolkundan soňky akymyň basyşy, temperaturasy we dykyzlygy ýokarlandyrylýar. Şeýlelikde, tolgundyrylan akymda sesiň tizligi hem ýokarlanýar $a_2 = \sqrt{kRT_2}$. RK_1 üst tolgundyrylmadyk akymly bölek bilen tolgundyrylan akymly bölegi aýratyn çäk bolup hyzmat edýär we muňa *aýyrýan egriçyzykly tolkun urgusy* diýilýär.

Pahna görnüşli üstlerdäki akymlarda hem sesden ýokary akymyň gurluşy şuňa meňzeşlikde üýtgeýär. Eger pahna görnüşli üstüň ýarym burçy $\delta < \delta_m$ bolsa (*5.11-nji a çyzgy*), onda pahnanyň başlangyjynda iki sany *AB* we AB_1 gönüçyzykly ýapgyt tolkun döreýär we oňa pahnanyň başlangyjyndaky urgy tolkuny diýilýär. Eger $\delta > \delta_m$ bolsa tekiz tolkun egriçyzykly tolkuna öwrülýär we ol pahnanyň başlangyjynda däl-de biraz öňräkde başlaýar (*5.11-nji b çyzgy*).



5.11-nji çyzgy. $\delta<\delta_m$ *(a)* we $\delta>\delta_m$ *(b)* bolanda sesden ýokary pahna görnüşli üstdäki akym

Bu aralyk tolgundyrylmadyk akymyň λ_1 tizligine we δ burça bagly. λ_1 ululygyň ýokarlanmagy bilen böküş üstüň başlangyjyna ýakynlaşýar. $\delta > \delta_m$ gyşarma burçunyň ýokarlanmagy bilen tolkun jisimden daşlaşýar. Tegelek burunly jisimlerdäki ses tizliginden ýokary tizlikli akymlarda jisimiň başlangyjyndan käbir aralykda hemişe egriçyzykly başlangyç tolkuny döreýär we merkezi akym çyzygyndaky jisimiň başlangyjy bilen tolkunyň aralygy λ_1 tizlige we jisimiň görnüşine baglydyr.

A aýrylýan nokatdaky akym çyzygy üçin *(5.11-nji b çyzgy)*. $\beta = 90°$ we $\delta = 0$ bolsa, merkezi çyzygy kesýän tolkunyň elementi göni bolmaly. Göni tolkunyň elementinden soňky akym tizligi *P* nokat bilen kesgitlenýär (*5.10-njy b çyzgy*). Tolkundan soňky bu çyzykdaky akym elmydama ses tizligine çenlidir. Tolgundyrylmadyk akymyň tizlik wektoryna görä dürli burçlar bilen ýerleşen merkezdäkiden başga tolkunyň ähli böleginde $\beta_i < 90°$.

Seredip geçilen egriçyzykly başlangyç tolkunyndan görnüşi ýaly merkezi akym çyzygyndan daşlaşdygyňça δ_i we β_i tolkunyň elementiniň gyşarma burçy kiçelýär. Bu ýagdaýda tolkundan soňraky akymy hasaplamak üçin urgy polýaryny her bir akym çyzygy üçin aýratynlykda ulanmak bolar. Başlangyç tolkunyndaky *KL* bölek tizligi $\lambda_2 = 1$ bolan *P*-den *r* nokada çenli urgy polýaryny kesgitleýär. Bu akym jisimiň başlangyjyndan käbir aralyga çenli ses tizligine çenli tizliklidir (bu bölek 5.11-nji *b* çyzgyda ştrihlenen çyzyk bilen belgilenen). Tolkundan soňdaky dürli nokatlarda basyş dürlüdir. Käbir *L* nokatda tolkundan soňdaky tizlik sesiň tizligine deňdir. Bu nokatdan ýokarda tolkundan soňdaky ýagdaý *r*-den *Q*-a çenli urgy polýarynyň bölegi bilen kesgitlenýär.

Biz tolkunyň üç görnüşi bilen tanyş bolduk: *tekiz ýapgyt, aýryjy egriçyzykly we göni tolkunlar*. λ_1 we *k* ululyklaryň berlen bahalarynda has işjeň göni tolkun we gaýtalanýan göni tolkunlar egriçyzykly tolkuny berýär, has gowşagy tekiz ýapgyt tolkun bolup durýar.

(5.27 *a*) deňleme λ_1 ululygyň hemişelik bahalarynda urgy polýarynyň maşgalasyny gurnamaga mümkinçilik berýär. Urgy polýarynyň diagrammasynyň kömegi bilen dürli gurluşly tolkunlar ulgamyny grafiki hasaplamak bolýar. Iki sany berlen bahalaryň kömegi bilen tolkunyň termodinamiki, geometriki we gazodinamiki parametrlerini kesgitlemek mümkin.

5.6. Tolkunda(böküşde) kinetiki energiýanyň dissipasiýasy

Termodinamikadan belli bolşy ýaly daşky gurşaw bilen ýylylyk çalşygy bolmadyk proseslerde gazlardaky entropiýanyň üýtgemesi şeýle formula bilen kesgitlenilýär:

$$\Delta S = \left(\frac{R}{k-1}\right)\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k. \tag{5.28}$$

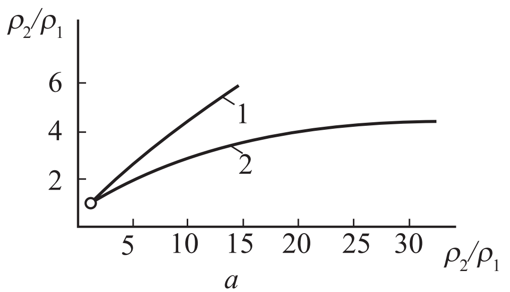
Izoentropiki prosesde $\Delta S = 0$ we $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k = 1$.

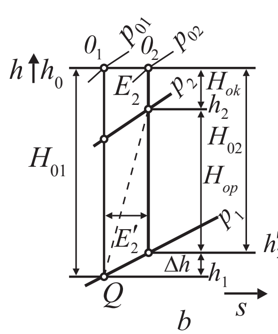
Tolkun urgusyndan soňky entropiýanyň üýtgemesini kesgitläliň. $\frac{p_2}{p_1}$ we $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ parametrler üçin 5.1-nji tablisadan alnan deňlemelerden $M_1^2 \sin^2\beta$ kompleksi aýryp alarys:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \frac{k+1}{k-1}\frac{\rho_2}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k+1}{k-1}}. \qquad (5.29)$$

Hasaplamalardan tolkun urgusy üçin $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$ bolanda hemişe $\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$ bolýandygyny görmek bolýar we (5.28) deňlemä laýyklykda tolkundan geçeninden soň gazyň entropiýasy ösýär. Tolkundaky entropiýanyň ýokarlanmasy, tolkunda gazyň halynyň gaýtalanmaýan «urgy» üýtgeme häsiýeti bilen düşündirilýär. Bu hadysanyň netijesinde gazyň kinetiki energiýasynyň bir bölegi ýylylyga öwrülýär: daşky gurşaw bilen energiýa çalşygy hasaba alynmadyk ýagdaýynda akymyň içki energiýasy ösýär. (5.29) deňleme boýunça bolup geçýän hadysany häsiýetlendirýän egrä ***urgy adiabaty*** diýilýär.

λ_1 tizligiň hemişelik bahalarynda entropiýa tolkundan geçeninden soň, β burçuň üýtgemegi bilen üýtgeýär. Eger tolkun tekiz bolsa we tolkunyň ugruna, tolkuny kesýän ähli akym çyzyklary üçin β ululygyň hemişelik bahasy saklanýan bolsa, entropiýanyň üýtgemesi birmeňzeş bolar. Eger tolkun egriçyzykly, ýagny her bir akym çyzygy üçin entropiýanyň ýokarlanmasy dürli bolsa, tolkunyň ugruna β burç üýtgeýär. Bu bolsa egriçyzykly tolkunlarda akymynyň tüweleý görnüşli bolýandygyny aňladýar: tekiz tolkunlarda akym potensial bolýar.





5.12-nji çyzgy. Gaýtalanýan we urgy adiabatlardaky basyşyň, şeýle hem dykyzlygyň üýtgeýşi *(a)* we hs diagrammada tolkun hadysasy *(b)*:
1 – gaýtalanýan adiabat, 2 – urgy adiabaty

(5.29) deňlemäni ulanyp gowşak tolkundan geçenden soňra gazyň halynyň üýtgemesine seretmek bolar. Goý, $p_1 = p$, $\rho_1 = \rho$ tolkunda basyş we dykyzlyk tükeniksiz kiçi baha üýtgeýär diýeliň, ýagny $p_2 = p + dp$; $\rho_1 = \rho + d\rho$. (5.29) deňlemeden alarys: $\frac{dp}{p} = k\frac{d\rho}{\rho}$. Tolkunda halyň üýtgemesi tükeniksiz kiçi işjeňlik bilen amala aşýan bolsa izoentropiki diýlip atlandyrylýar. Tolkundaky energiýa öwrülişigine seredeliň. Bilşimiz ýaly tolkunda akymyň doly energiýasy üýtgemeýär: ýagny $h_{01} = h_{02} = h_0$ ýa-da $c_p = const$ bolanda $T_{01} = T_{02} = T_0$. Beýleki doly togtama parametrlerini şeýle deňlemäni ulanyp alarys:

$$\frac{p_{01}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{\rho_{02}}.$$

Tolkundan geçme hadysasyna *hs* diagrammada seredeliň (*5.12-nji b çyzgy*). Tolkuna çenli p_{01} togtama basyşy we h_{01} togtama entalpiýany bilip O_1 nokady kesgitläliň. Tolkundan öň akymyň tizligi ýa-da basyşy belli bolsa, tolkundan öň gazyň hereketiniň ýagdaýyny kesgitleýän Q nokady taparys. Tolkunda statistiki akymyň statistiki basyşy p_2 baha çenli ýokarlanýar. Eger akymyň δ gyşarma burçy we β burç belli bolsa, tolkundan soňky gazyň häsiýetini kesgitlemek bolýar (E_2 nokat). Şeýlelikde, (5.28) formulanyň kömegi bilen ΔS entropiýanyň üýtgemesini hem kesgitlemek bolýar. Q we E_2 nokatlary birleşdirýän çyzyk (*5.12-nji a, b çyzgy*) tolkundaky gazyň halynyň üýtgemesini häsiýetlendirmeýär, diňe hadysanyň başlangyç we ahyrky nokatlaryny görkezýär. Tolkundan soň akym izoentropiki togtaýan bolsa, doly togtama haly p_{02} baha bilen tapylýan O_2 nokat häsiýetlendirýär. Indi akymyň tolkundan öňdäki basyşa çenli izoentropiki giňelmesine seredeliň. Onuň ýagdaýy E_2 nokat bilen häsiýetlendirilýär. Bu ýagdaýda gazyň tizligi energiýa deňlemesi bilen kesgitlenilýär:

$$\frac{c'^2_2}{2} = h_0 - h'_2 = H_{02} = H_{ok} + H_{op},$$

bu ýerde H_{02} – tolkundan soň entalpiýanyň izoentropiki pese düşmesi; $H_{ok} = \frac{c_2^2}{2}$ tolkundan soň akymyň kinetiki energiýasy; $H_{op} = \frac{c'^2_2 - c_2^2}{2}$

– tolkunda akymyň potensial energiýasynyň üýtgemesi. $H_{02} < H_{01}$ bolýar, bu ýerde $H_{01} = \frac{c_1^2}{2}$ – tolkundan öň entalpiýanyň izoentropiki pese düşmesi. Onda:

$$\Delta h = H_{01} - H_{02} = 0,5(c_1^2 - c'^2_2). \qquad (5.30)$$

Δh ululygy entalpiýalaryň $h'_2 - h_1$ tapawudy görnüşinde h–s diagrammadan kesgitlemek bolýar. Kinetiki energiýa ýitgisini tolkunyň esasy parametrleri bilen baglanyşdyrmak kyn däldir. H_{01} we H_{02} ululyklary bize belli bolan termodinamiki baglanyşyklara paýlap, tolkundaky kinetiki energiýanyň ýitgi koeffisiýentini şeýle aňlatmak mümkin:

$$S_b = \frac{\Delta h}{H_{01}} = \frac{2}{k-1}\frac{1}{M_1^2}\left(\varepsilon_0^{-\frac{k-1}{k}} - 1\right). \qquad (5.31)$$

$\varepsilon_0 = \frac{p_{02}}{p_{01}}$ gatnaşyk tolkun togtama basyşynyň üýtgemesini häsiýetlendirýär. Bu ululygy tolkundaky M_1 we β parametrleriň baglanyşygy görnüşinde aňlatmak bolar.

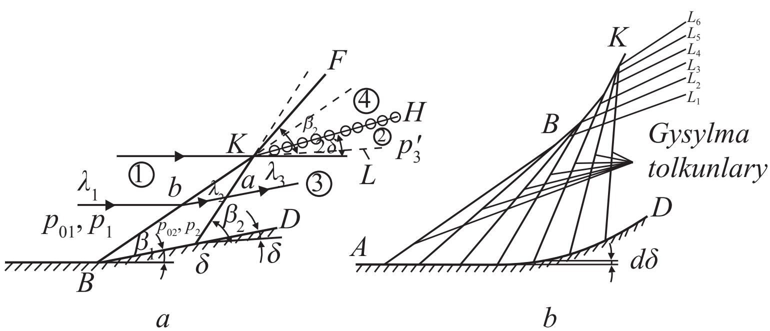
Jisimlerdäki sesden ýokary tizlikli akymlarda jisimden öň böküşleýin dykyzlanma döreýär; tolkundan geçeninden soň gazyň entropiýasy ösýär, tizlik bolsa peselýär. Bu ýagdaýda, hyýaly suwuklygyň sesden ýokary tizlikli akymlarynda tolkundaky kinetiki energiýa ýitgisine, şeýle hem tolkunyň görnüşine we işjeňligine bagly bolan aýratyn görnüşli garşylyk – tolkun garşylygy döreýär. Bilşimiz ýaly, tolkunyň görnüşi we onuň işjeňligi jisimiň görnüşine we akym tizligine baglydyr. Gyşarma burçunyň (β burçuň) kiçelmegi bilen ýitgi peselýär. Şeýlelikde, sesden ýokary tizlikli akymlardaky ýitiburçly jisimlerde tegelek görnüşli jisimlerdäkä garanyňda garşylyk pesdir.

5.7. Tolkunlaryň (böküşleriň) kesişmesi we serpikmesi

Tolkunlaryň (böküşleriň) kesişmesi. Diwaryň *LBSD* iki sany yzygider δ burç boýunça öwrümlerinde *(5.13-nji a çyzgy)* iki sany *BK* we *SK* ýapgyt tolkun döreýär. $\beta_2 > \beta_1$, onda birinji tolkundan soň tizlik $\lambda_2 < \lambda_1$. Netijede, tolkunlar *K* nokatda kesişýärler. Kesişme nokadyndan soň iki tolkun hem *KF* bir tolkuna birigýär: β_2 burç kiçelýär (ikinji tolkun $\lambda_1 < \lambda_2$ bolan bölege düşýär), β_1 burç bolsa ýokarlanýar (birinji tolkun ikinji tolkundan soň ýerleşýär). Iki tolkunyň birikme ulgamyndaky akym çyzygy deformirlenýär, *b* we *d* nokatlarda δ burça öwrülýär: tolkunlaryň birikmesi netijesinde akymyň tizligi basgançaklaýyn pese düşýär, basyş bolsa artýar. 3 we 4 bölekleri *KL* gowşak seýrekleme tolkuny ýa-da gowşak tolkunlaýyn dykyzlanma bölýär, kesişmede akymyň basyşy $p_4 = p_3'$ bolýar. *KF* tolkundan soňky tizlik elmydama *SK* tolkundan soňky tizlikden kiçidir ($\lambda_4 < \lambda_3$). Bu ýerden görnüşi ýaly *KN* çyzyk tizligiň tangensial bölünme çyzygyny aňladýar. Şepbeşik suwuklyklarda *KN* çyzygyň ugruna tüweleý görnüşli hereket döreýär.

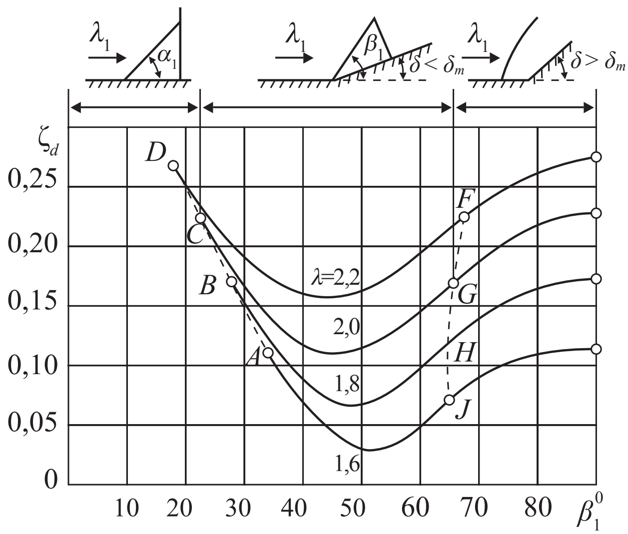
Şeýlelikde, statistiki basyşyň üýtgemesiniň berlen bahalarynda diwaryň üznüksiz öwrülme derejesiniň ýokarlanmagy esasynda ýapgyt tolkunlaýyn dykyzlanmanyň sany ýokarlansa, akymyň togtamasy has endigan bolýar, kinetiki energiýanyň jemi otnositel ýitgisi bolsa peselýär.

Eger *KF* tolkun haýsy hem bolsa bir usul bilen öçürilse, onda sesden ýokary tizlikli akymyň basgançaklaýyn togtamasy döreýär. Köplenç, ahyrky ýapgyt tolkundan soňra sesiň tizligine çenli tizlige geçmegi amala aşyrýan göni tolkun döreýär. Bu ýagdaýda birinji tolkunyň gyşarma burçuny (δ burçy) kesgitlemeklik zerurdyr. Hasaplama tolkun diagrammasy arkaly amala aşyrylýar.



5.13-nji çyzgy. Iki sany yzygider tolkundaky akymyň togtamasy *(a)* we endigan egri diwardaky ses tizliginden ýokary tizlikli akym *(b)*

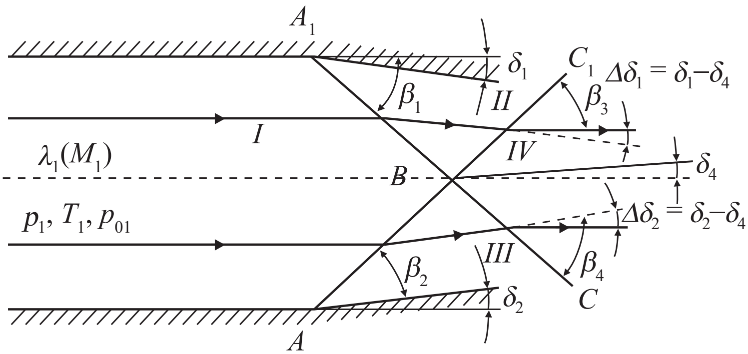
Iki sany tolkun ulgamynyň (ýapgyt we göni) hasaplamasynyň netijesi β_{1opt} bahalarda ζ_b ululygyň minimal baha eýe bolýandygyny görkezýär. λ_1 = 1,6 bahalarda ζ_b = 0,035 ululyk minimal baha eýe we bu ýagdaýda β_{1opt} = 52°-a deň (*5.14-nji çyzgy*). Bu ýagdaýda bir göni tolkun ζ_b = 0,113 bahany berýär (*5.14-nji çyzgyda A nokat*), bir ýapgyt tolkun bolsa tolkundan soňky ses tizligine deň bolan tizliklerde ζ_b = 0,073 bahany berýär (*5.14-nji çyzgyda J nokat*). λ_1 bahanyň ýokarlanmasy bilen iki basganҫakly togtama netijeliligi ýokarlanýar, ζ_b (β_1) egriniň minimumy bolsa has ýapgyt bolýar. Bu bolsa ikinji göni tolkundan soň statistiki basyş has ýokary baha eýe bolar ýaly, β_1 ululygyň optimal bahasyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär.



5.14-nji çyzgy. Tolkunyň shemasy we tolkundaky ζ_b kinetiki energiýanyň ýitgi koeffisiýentiniň birinji tolkun burçuna baglylygy

Ses tizliginden has ýokary tizlikleri ses tizligine çenli tizliklere öwürmek üçin, birnäçe ýapgyt we ahyrky göni tolkundan ybarat bolan, yzygider ýerleşdirilen has çylşyrymly tolkunlar ulgamy peýdalanylýar. Ýapgyt tolkunyň sanynyň ýokarlanmagy bilen energiýa ýitgisi peselýär. Ýapgyt tolkunlaryň berlen sanynda λ_1 akym tizliginiň her bir bahasy üçin, yzygider hasaplamalar arkaly kesgitlenilýän tolkunlaryň ýerleşdiriliшiniň optimal bahasy degişlidir.

Endigan egri diwaryň ugruna, her bir nokatda $d\delta$ kiçi burça gyşarmasy bolan akymyň togtamagy çäklendirilen ýagdaý bolup durýar (*5.13-nji b çyzgy*). Bu ýagdaýda sansyz köp gowşak tolkun dykyzlanmadan durýan diwarda tolkunyň gysylmasy döreýär. Bu hili tolkunyň gysylmasy ýagdaýynda gazyň hereketi hemişelik entropiýada bolup geçýär. Bu ýerde endigan izoentropiki togtama diňe diwara ýakyn gaz gatlaklarynda bolup geçýär.



5.15-nji çyzgy. *Iki tolkunyň normal kesişme shemasy*

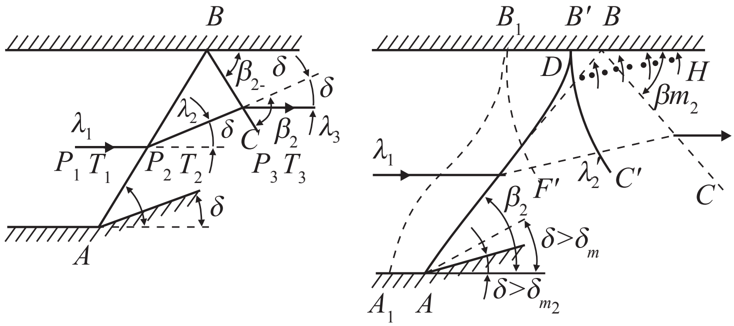
Netijede, tolgundyrylmadyk akymyň tizligine bagly bolan, diwardan käbir aralykda häsiýetnama dykyzlygynyň kesişmesi döreýär.

Tolkundan soň akym tüweleý görnüşli, şeýlelikde BK çyzygyň dürli nokatlarynda tizlik dürli-dürlüdir. Başga hili iki ýapgyt tolkunyň kesişmesi 5.15-nji çyzgyda görkezilendir. I – tolgundyrylmadyk akymda kanalyň iki sany bir-birine garşylykly oturan diwarlarynyň δ_1 we δ_2 dürli burçlara gyşarmasy netijesinde ýapgyt tolkun döreýär. II we III böleklerdäki akymyň ugry birmeňzeş däldir. AB we AB_1 ýapgyt tolkundan soňky akym, akym parametrlerini tolkundan öňki λ_1, p_1, T_1 belli parametrleriň we λ_1 üçin degişli δ_m maksimal bahadan kiçi bolsa δ_1 we δ_2 burçlaryň kömegi bilen kesgitlemek bolýar. IV-bölekdäki akym parametrlerini urgy polýarynyň diagrammasynyň we B nokatdan geçýän akym çyzygy üçin araçäk şertleriň kömegi bilen kesgitlemek bolýar. IV bölegiň ähli nokatlarynda tizligiň we basyşyň ugry birmeňzeş diýlip kabul edilýär.

Iki sany durnukly ýapgyt tolkunlar ulgamyny döretmek ähli ýagdaýlarda mümkin däldir. Eger ikinji tolkunlaryň β_3 we β_4 burçlary degişli β_m bahadan uly bolsa, akymyň häsiýeti üýtgeýär. B nokadyň üstünden geçýän merkezi akym çyzygynyň golaýynda göni tolkun döreýär. Gönüçyzykly ýapgyt tolkunlaryň kesişme ulgamy köpri görnüşli tolkuna geçýär.

Gaty üstden tolkunyň serpikmesi. Diwarlar tolgundyrylmadyk akymyň tizlik ugruna parallel ýerleşen (*5.16-njy çyzgy*). Tolkun A nokatda döredilýär. AB birinji tolkundan geçenden soňra akym çyzygy göni diwara tarap δ burça öwrülýär. B nokatda bu öwrüm döremeýär we araçäkdäki akym çyzygy diwaryň ugruna hereket edýär. Netijede, serpigýän BS ýapgyt tolkun döreýär. Düşýän we serpigýän tolkunlaryň emele getirýän burçlary birmeňzeş däldir, şol sebäpli BS tolkundan öň tizlik şol bir δ gyşarma burçunda $\lambda_2 < \lambda_1$. Ulgamyň hasaplamasy urgy polýarynyň diagrammasy (ýa-da tolkunyň diagrammasy) arkaly amala aşyrylýar.

Tolkunyň bu hili serpikmesi elmydama mümkin däldir. Eger diwaryň gyşarma burçy $\delta > \delta_{m_2}$ bolsa, bu ýerde δ_{m_2} – tolkundan soňky λ_2 tizlik bilen kesgitlenýän maksimal gyşarma burçy, onda $B'S'$ serpigýän böküş egrelýär we akymyň tersine hereket edýär.

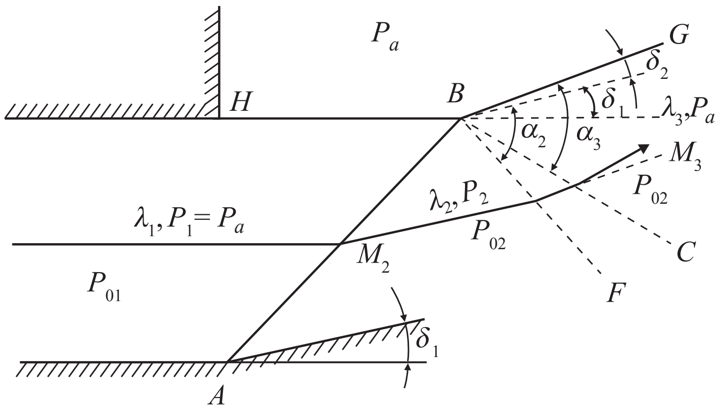


a) b)

5.16-njy çyzgy. *Gaty üstden tolkunyň normal (a) we* düzüw däl *(b)* serpikmesi

Bu ýagdaýda AB birinji tolkun hem deformirlenýär. Bu tolkunyň AB' elementi diwara normal ýerleşýär, tolkunlaryň görnüşi λ şekili emele getirýär. Göni tolkundan soňky bölek sesiň tizligine çenli tizlikli akym. Serpigen tolkunyň egriçyzykly böleginden soň akym ses tizliginden ýokary tizlige hem eýe bolup bilýär.

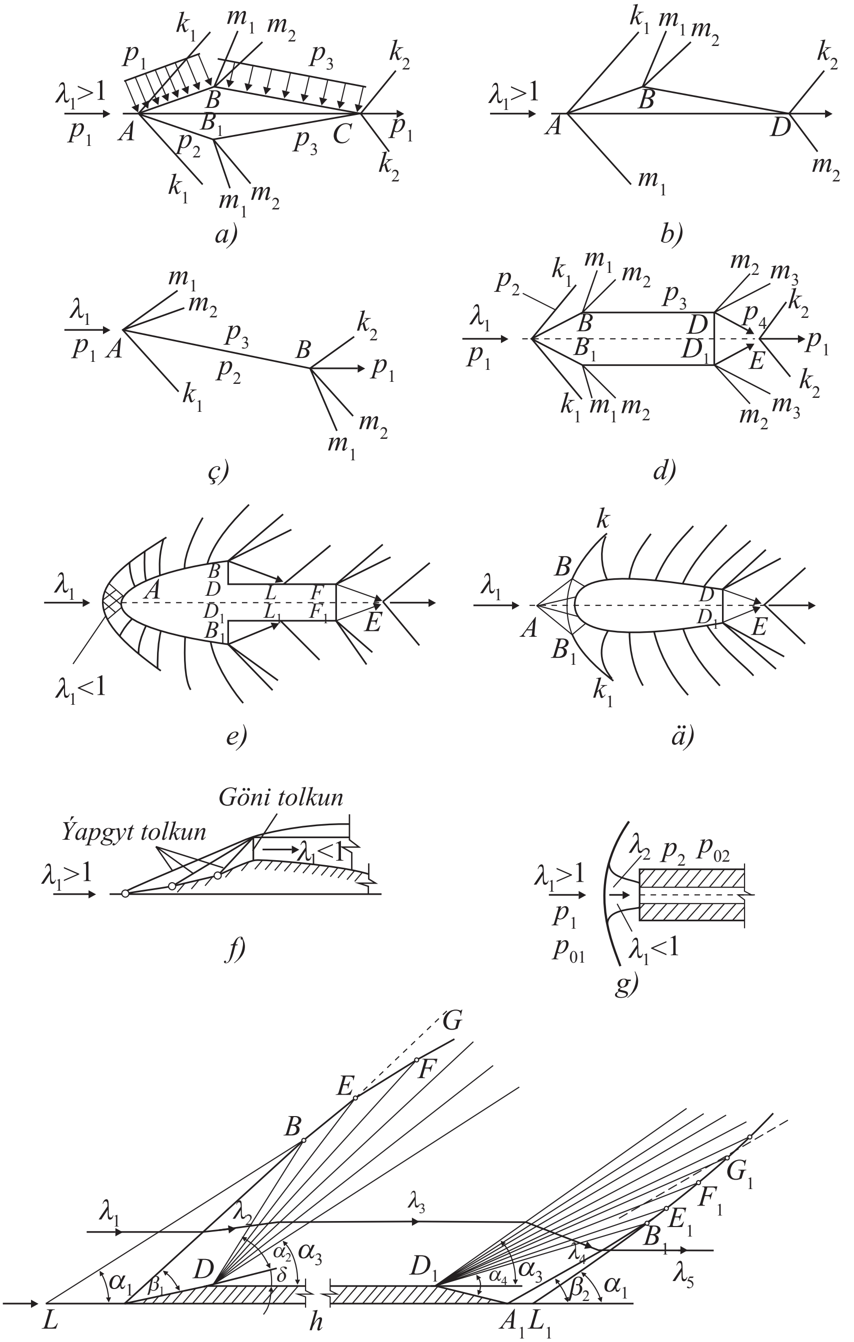
Akymyň erkin araçäginde tolkunyň serpikmesi. Akymyň *HBG* araçäginiň ähli nokatlarynda basyş birmeňzeşdir we P_a daşky gurşawyň basyşyna deňdir (*5.17-nji çyzgy*).



5.17-nji çyzgy. Akymyň erkin araçäginde tolkunyň serpikmesi

Akymda bu basyş diňe *AB* tolkuna çenli bolýar. *AB* böküşden geçeninden soňra basyş $P_1 = P_\alpha$-dan $P_2 > P_\alpha$ çenli üýtgeýär. Şeýlelikde, *B* nokada bir wagtda iki basyş degişli bolýar we bu ýerde merkezleşdirilen seýrekleme tolkuny döreýär: akymyň basyşy P_2-den P_a-a çenli peselýär. *BF* birinji häsiýetnama M_2 wektoryň ugry bilen $\alpha_2 = \arcsin\dfrac{1}{M_2}$ burçy emele getirýär, bu ýerde M_2 – *AB* tolkundan soňky akym tizligi. Soňky häsiýetnamanyň burçy $\alpha_3 = \arcsin\dfrac{1}{M_3}$. Bu ýerde serpigen seýrekleme tolkunyndan soňky M_3 tizlik $\dfrac{P_a}{P_{02}}$ gatnaşyk arkaly kesgitlenilýär, bu ýerde P_{02} – ýapgyt tolkundan soňky togtama basyşy. Tolkunyň serpikmesi akymyň araçäginiň deformirlenmesini ýüze çykarýar we *B* nokatda akym δ_2 burça gyşarýar. Bu gyşarma akymyň giňelmesini ýüze çykarýar.

Sesden ýokary tizlikli akymlardaky jisimiň spektrleri. Romb görnüşli jisimiň akymynda (*5.18-nji a çyzgy*) iki sany AK_1 tekiz ýapgyt tolkundan, iki sany Bm_1m_2 we $B_1m_1m_2$ merkezleşdirilen seýrekleme tolkunyndan ybarat bolan başdaky urgy tolkuny we iki sany CK_1K_2 tekiz ýapgyt tolkunyndan durýan ahyrky urgy tolkuny döreýär. Bu ýerde



5.18-nji çyzgy

jisimiň taraplary boýunça basyşyň paýlanyşy görkezilendir: bu ýerden görnüşi ýaly λ_1 tizligiň ugruna bolan proýeksiýa basyşlaryň tapawudy netijesindäki güýç täsir edýär we ol $(P_2–P_3)BB_1$-e deňdir. Bu güýç garşylyk güýjüni aňladýar. Şeýlelikde, sesden ýokary tizliklerdäki tolkun garşylygy basyş garşylygyny aňladýar.

Üçburç jisimiň akymynda (*5.18-nji b çyzgy*) aşaky granyň burçlarynda döreýän AK_1 başdaky we DK_2 ahyrky tolkun gowşak tolkuny (häsiýetnamany) döredýär.

Käbir burç bilen ýerleşen plastinanyň sesden ýokary tizlikli akymynda (*5.18-nji ç çyzgy*) plastinanyň öňünde aşaklygyna AK_1 tolkun (akymyň oýuk burçdaky öwrüminde) we ýokarlygyna Am_1m_2 seýrekleme tolkuny (akymyň güberçek burçdaky öwrüminde) döreýär: $P_2>P_3$, onda plastina ýokary göteriji güýç we garşylyk güýji täsir edýär. Birigýän ahyrky urgy tolkuny bäşburçlugyň akymynda görkezilendir. E nokady ýerleşdirmek üçin *(5.18-nji d çyzgy)* Dm_2m_3 $(D_1m_2m_3)$ seýrekleme tolkunynyň gyşarma burçuny kesgitlemeli we DE, şeýle hem D_1E akym çyzyklaryny grafiki şekillendirmeli we olaryň birikme nokadyny kesgitlemeli.

Ýaýradylan we merkezleşdirilen seýrekleme tolkunlarynda basyşdaky urgy tolkunynyň jisimden aýrylmasynyň we L, L_1 nokatlarda goşmaça tolkunyň döreme ýagdaýy 5.18-nji *e* çyzgyda görkezilendir. Kütek böleginiň öňi uçly pahna görnüşli jisimlerde, kütek bölekden aýrylan BK we BK_1 tolkunlary haýalladýan iki sany AB we AB_1 tekiz ýapgyt tolkun döreýär *(5.18-nji ä çyzgy)*. Netijede, bu ýagdaýda tolkun garşylygy peselýär.

5.8. Ýylylyk tolkuny (böküşi)

Üçünji bölümde ýylylyk çalşygy bolan gaz akymyna seredildi we akymyň ýylylyk täsiri netijesinde sesiň tizliginden geçme şerti düzgünleşdirildi. Goý, ýylylyk bölünip çykmasy birden, ýagny kanalyň örän az böleginde bolup geçýän bolsun. Bu hili konsentrirlenen ýylylygyň bölünip çykmasy ýangyç ýananda, detonasiýada ýa-da himiki reaksiýalarda ýüze çykýar. Bu hili ýagdaýda termodinamiki parametrler we gazyň tizligi tolkun görnüşinde üýtgeýär, ýagny ýylylyk tolkuny döreýär.

Ýylylyk tolkunyny hasaplamak üçin kanaldan akymyň ugruna örän az aralygy bölüp alalyň we bu bölekde massa birligindäki kesgitli ýylylyk mukdary deňölçegli paýlanan diýeliň. Tolkundan öňki we soňky parametrleri 1 we 2 indeks bilen belgiläliň. Diffuziýa, ýylylyk geçirijilik, sürtülme örän kiçi we hasaba almasaň hem bolýar diýeliň. Gaz hyýaly hem-de ýylylyk bölünmeden öň we soň birmeňzeş häsiýete eýe bolsun. Ýylylyk sygymy we izoentropiki hadysanyň görkezijisi diňe tolkundan geçende üýtgeýän bolsun. Seredilýän ýagdaýda gözlenilýän deňlemeler ýapgyt tolkunyň (5.15), (5.16) we (5.18) deňlemelerine meňzeşlikde şeýle görnüşde aňladylýar.

Üznüksizlik deňlemesi:

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 . \tag{5.32}$$

Hereket mukdarynyň deňlemesi:

$$P_1 + \rho_1 c_1^2 = P_2 + \rho_2 c_2^2 . \tag{5.33}$$

Energiýanyň saklanma deňlemesi:

$$0,5c_1^2 + h_1 + q = 0,5c_2^2 + h_2, \tag{5.34}$$

bu ýerde $h_1 = c_{p1} T_1 = \dfrac{k_1}{k_1 - 1} \dfrac{P_1}{\rho_1}$ we $h_2 = c_{p2} T_2 = \dfrac{k_2}{k_2 - 1} \dfrac{P_2}{\rho_2}$;

q – birlik massa berilýän ýylylygyň mukdary.

(5.34) togtama deňlemesi entalpiýanyň we temperaturanyň üsti bilen şeýle aňladylýar:

$$h_{01} + q = h_{02}; \quad c_{p1} T_{01} + q = c_{p2} T_{02} . \tag{5.35}$$

Akýan gazyň tolkundan öň we soň hal deňlemesi:

$$P_1 = \rho_1 R_1 T_1; \;\; P_2 = \rho_2 R_2 T_2 \cdot$$

(5.32), (5.34) deňlemeler ulgamyny bilelikde çözeliň. (5.33) deňlemeden alarys:

$$\frac{P_1}{\rho_1} + c_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{P_2}{\rho_2} + c_2^2\right) = \frac{c_1}{c_2}\left(\frac{P_2}{\rho_2} + c_2^2\right).$$

Hal deňlemesini ulanyp alarys:

$$R_1 T_1 + c_1^2 = \frac{c_1}{c_2}(R_2 T_2 + c_2^2). \tag{5.36}$$

Tolkundan soňky temperatura (5.34) energiýa deňlemesiniň kömegi bilen şeýle aňladylýar:

$$c_{P2}T_2 = c_{P1}T_{01} + q - 0,5c_2^2 \cdot$$

T_2 ululygyň bahasyny (5.36) deňlemä goýup alarys:

$$RT_1 + c_1^2 - \frac{c_1}{c_2}\frac{R_2}{c_{P2}}c_{P1}T_{01}\left(1 + \frac{q}{c_{p1}T_{01}} - \frac{c_2^2}{2c_{P1}T_{01}}\right) = 0, \tag{5.37}$$

bu deňlemä ölçegsiz tizligi girizeliň. Şeýlelikde, togtama entalpiýasy we izoentropiki görkeziji tolkunyň kesişmesinde üýtgeýär, kritiki tizlikler birmeňzeş bolmaýar, onda:

$$c_{*1} = \sqrt{2\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}h_{01}}\,;\ c_{*2} = \sqrt{2\frac{k_2 - 1}{k_2 + 1}h_{02}}\,. \tag{5.38}$$

Kritiki tizlikleriň kwadratlarynyň gatnaşyklaryny (5.35) deňlemäniň kömegi bilen şeýle aňladalyň:

$$\bar{c}_*^2 = \frac{c_{*1}^2}{c_{*2}^2} = m(1 + \bar{q}), \tag{5.39}$$

bu ýerde:

$$\bar{q} = \frac{q}{h_{01}} = \frac{q}{c_{p1}T_{01}};\quad m = \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1}.$$

$R_1 = c_{p1} - c_{\vartheta 1};\ R_2 = c_{p2} - c_{\vartheta 2};\ k_1 = \frac{c_{P1}}{c_{\vartheta 1}};\ k_2 = \frac{c_{P2}}{c_{\vartheta 2}}$ bolýandygyny göz öňünde tutup we käbir özgertmelerden soň (5.35) deňlemäni şeýle görnüşde aňladarys:

$$\lambda_2^2 - \bar{K}\frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1\sqrt{1 + \bar{q}}}\lambda_2 + 1 = 0\,. \tag{5.40}$$

Bu ýerde $\bar{K} = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}};\quad \lambda_1 = \frac{c_1}{c_{*1}};\quad \lambda_2 = \frac{c_2}{c_{*2}}.$

(5.40) deňlemeden tolkundan soňky ölçegsiz tizligi alarys:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{\bar{K}(1 + \lambda_1^2)}{\lambda_1\sqrt{1 + \bar{q}}} \pm \sqrt{\frac{\bar{K}^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1}\,. \tag{5.41}$$

(5.41) deňleme hususy ýagdaýlarda, ýagny gazyň fiziki häsiýetleri tolkunda üýtgemeýän bolsa ýönekeý görnüşe eýe bolýar. Onda $k_1 = k_2 = k; m = 1; \bar{K} = 1$ we

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1\sqrt{1+\bar{q}}} \pm \sqrt{\frac{(1+\lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1+\bar{q})} - 1}\,. \tag{5.42}$$

(5.41) we (5.42) deňlemeler $\bar{c}_* = \sqrt{1+\bar{q}}$ ululyga baglylykda $\lambda_1 > 1$ we $\lambda_1 < 1$ şerti kesgitleýän dört sany göni görnüşli ýylylyk tolkun, tolkundan soňky ölçegsiz tizlikleriň $\lambda_2 < 1$ ýa-da $\lambda_2 > 1$ bahalary teoretiki almak bolar.

Hakykatda $\lambda_1 < 1$ we $\lambda_2 > 1$ tizliklere degişli bolan ýylylyk tolkuny mümkin däldir, bu ýagdaýda gazdan ýylylygy aýyrmak zerurdyr, bu bolsa mümkin däldir. Haçanda $\lambda_1 > 1$ we $\lambda_2 > 1$ bolanda hem ýylylyk tolkuny mümkin däldir.

Şeýlelikde, hakyky iki hili ýylylyk tolkuny bolýar: 1) $\lambda_1 > 1$ we $\lambda_2 < 1$ ses tizliginden ýokary ýylylyk tolkuny, ýylylygyň bölünip çykmasy gazyň gysylmasyny döredýär ($P_2 > P_1$); 2) $\lambda_1 < 1$ we $\lambda_2 < 1$ ses tizligine çenli tizlikli böküş, ýylylygyň bölünip çykmasy gazyň seýreklemesine getirýär ($P_2 < P_1$).

Ýylylyk tolkuny ýapgyt we egriçyzykly bolup bilýär. Ýokardaky derňewden görnüşi ýaly dürli görnüşli adeabatik tolkun sesden ýokary tizliklerde döreýän bölünmäniň hususy haly bolup durýar we bu dürli görnüşli gaty üstüň akmasyna baglydyr.

VI
bölüm

ŞEPBEŞIK SUWUKLYGYŇ HEREKETI WE ARAÇÄK GATLAK

6.1. Nawýe-Stoksuň deňlemesiniň takyk çözgütleriniň mysallary

Eýleriň deňlemesinden (2.50) görnüşindäki Nawýe-Stoksuň deňlemesiniň tapawudy ol hyýaly suwuklyk hereketiniň däl-de, hakyky, şepbeşik suwuklyk hereketiniň ýazgysyny aňladýar we gaty üste ýakyn akymlarda hereketiň häsiýeti ýokary derejede üýtgeýär. Bu ýagdaýda akymyň galtaşýan gaty üstünde tizligiň diňe bir normal düzüjisi däl-de galtaşma düzüjileri hem nola deňdir. Gaty üstde suwuklyk bölejiginiň tizliginiň nola deň bolmaklyk şerti tejribede alnan bahalar bilen gabat gelýär, diňe güýçli seýreklendirilen gaz akymynda bu çaklama bozulýar.

Nawýe-Stoksuň deňlemesiniň çözüwi käbir hususy ýagdaýlar üçin tapylandyr. Bu çözüwler (2.49) deňlemäniň çep bölegindäki inersion agzalar hasaba alynmadyk ýagdaýa degişlidir. Bu hili akyma gatlaklaýyn akym diýilýär we akymy diňe bir tizlik düzüjisi häsiýetlendirýär. Eger bu tizlik düzüjisini u diýsek, ϑ we w düzüjiler nola deňdir. Üznüksizlik deňlemesinden görnüşi ýaly $\frac{\partial u}{\partial x}=0$. Onda gatlaklaýyn akymda $u=u(y,z)$; $\vartheta=0$; $w=0$; $\frac{\partial P}{\partial y}=0$; $\frac{\partial P}{\partial z}=0$, onda (2.47) deňlemämiz şeýle görnüşe eýe bolar:

$$\frac{dP}{dx}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (6.1)$$

Takyk çözgütler basyşyň gradiýentiniň hemişelik bahasyna degişlidir, ýagny $\frac{dP}{dx}=const.$

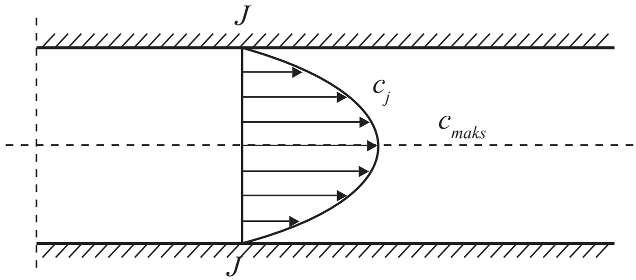
(6.1) deňlemä esaslanylýan käbir takyk çözüwlere seredeliň:

Iki sany parallel tekiz diwar bilen çäklenen kanallardaky tekiz parallel akym. Bu ýagdaýda tizlik z koordinata bagly däldir, (6.1) deňlemämiz $\dfrac{dP}{dx} = \mu \dfrac{d^2 u}{dy^2}$ görnüşe eýe bolar. Bu deňlemäni integrirläp alarys:

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2,$$

bu ýerde c_1, c_2 – integrirleme hemişeligi, ony kesgitlemek üçin iki şerti girizeliň: a) $y = +b$ bolanda $u = 0$ (b kanalyň okundan degişli diwara çenli bolan aralyk); b) $y = –b$ bolanda $u = 0$.

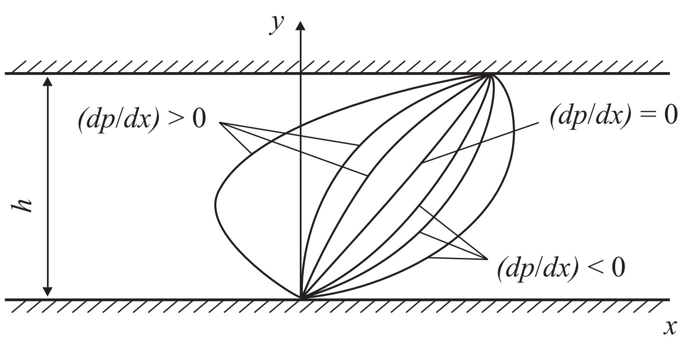
Netijede, alarys:



6.1-nji çyzgy. Parallel plastinalaryň arasyndaky suwuklyk akymy

$$c_1 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}b^2; \quad u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (6.2)$$

Kuetta akymy. Biri hemişelik tizlik bilen hereket edýän iki sany parallel diwarlaryň arasyndaky akyma seredeliň. Bu ýagdaýda diňe araçäk şertler üýtgeýär. c_1 we c_2 hemişelikleri kesgitlemek üçin: 1) $y = 0$ bolanda $u = 0$. 2) $y = h$ bolanda $u = u_0$ (bu ýagdaýda koordinata başlangyjy aşaky gozganmaýan diwarda ýerleşdirilen, h iki diwaryň aralygy). Netijede:



6.2-nji çyzgy. Kuetta akymy

$$c_1=\frac{u_0}{h}-\frac{bh}{2};\quad c_2=0;$$

$$u=u_0\frac{y}{h}-\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}h^2\left(1-\frac{y}{h}\right)\frac{y}{h}.$$

Eger $\frac{dP}{dx}=0$ bolsa, diwaryň arasyndaky tizligiň paýlanyşy çyzyklydy: $u=u_0\frac{y}{h}$.

Gysylmaýan suwuklygyň turbalardaky gatlaklaýyn akymy. Bu hili akym oka simmetrik bolýar, meseläni çözmek üçin (2.57) hereket deňlemesini ulanmak amatlydyr. Bu ýagdaýda $c_r=c_\theta=0$, $c_z=u(r)$, onda:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dz}. \tag{6.3}$$

(6.3) deňlemäniň çep bölegini şeýle görnüşde ýazmak bolýar:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right).$$

Onda:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dz}. \tag{6.4}$$

$\frac{dP}{dz}=const$, onda (6.4) deňlemäni integrirläp alarys:

$$u=\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dz}r^2+c_1\ln r+c_2. \tag{6.5}$$

c_1 we c_2 hemişelikleri kesgitlemeklik üçin:

1) $r=r_0$; $u=0$; 2) $r=0$; $u=u_{max}$, onda

$$c_1=0;\ c_2=-\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dz}r_0^2.$$

$\frac{dP}{dz}$ ululygy uzynlyk birliginde basyşyň pese düşmesi, onda $\frac{dP}{dz}=\frac{\Delta P}{l}=const$, şeýlelikde:

$$u=-\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{l}r_0^2\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right). \tag{6.6}$$

(6.6) deňlemäni ulanyp turbanyň kese kesiginden geçýän suwuklygyň göwrümleýin sarp edilişini kesgitläliň:

$$Q=2\pi\int_0^{r_0}urdr=-2\pi\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{l}r_0^2\int_0^{r_0}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)rdr,$$

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta P}{l}\left(\frac{d_0}{2}\right)^4. \qquad (6.7)$$

(6.7) deňlemäniň kömegi bilen orta tizligi kesgitläliň:

$$u_{or} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{1}{8\mu}\frac{\Delta P}{l}r_0^2. \qquad (6.8)$$

Maksimal tizligi $r = 0$ bolanda (6.6) deňlemeden taparys:

$$u_{\max} = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{l}r_0^2. \qquad (6.9)$$

(6.8) we (6.9) deňlemeleri deňeşdirip, maksimal tizligiň orta tizlikden iki esse köpdügini görmek bolýar:

$$u_{\max} = 2u_{or}. \qquad (6.10)$$

Onda sarp edilişi şeýle aňlatmak bolar:

$$Q = \frac{\pi r_0^2}{2}u_{\max}. \qquad (6.11)$$

Indi ΔP basyşyň pese düşmesini kesgitläliň. Basyşyň pese düşmesi tizlik badyna göni proporsional $\left(\frac{\rho u_{or.}^2}{2}\right)$, d diametre bolsa ters proporsional:

$$\Delta P = \varsigma\frac{l}{d}\frac{\rho u_{or.}^2}{2}, \qquad (6.12)$$

bu ýerde ζ – proporsionallyk koeffisiýenti, oňa turbanyň garşylyk koeffisiýenti diýilýär. Eger (6.9) we (6.10) deňlemeleri ulanyp:

$$\Delta P = \frac{8\mu l}{r_0^2}u_{or}. \qquad (6.13)$$

(6.12) we (6.13) deňlemeleri deňeşdirip alarys:

$$8\frac{u_{or}\mu \cdot l}{r_0} = \varsigma\frac{l}{2r_0}\frac{\rho u_{or}^2}{2}. \qquad (6.14)$$

(6.13) formuladaky ölçegsiz komplekse *Reýnoldsyň sany* diýilýär. $Re = \frac{du_{or}}{v}$. Şeýlelikde:

$$\varsigma = \frac{64}{Re}. \qquad (6.15)$$

Garşylyk koeffisiýentini kesgitlemek üçin ýazylan (6.15) formula *Puazeýliň kanuny* diýilýär. Bu kanun Reýnoldsyň kiçi sanlarynda ($Re < 2300$) ulanarlyklydyr.

6.2. Araçäk gatlak barada esasy düşünjeler

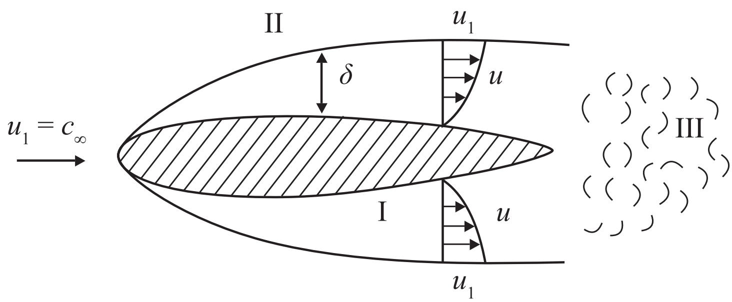
Nawýe-Stoksuň deňlemesiniň takyk çözüwiniň mysallary (2.49) deňlemäniň çep tarapyndaky çyzykly däl agzalary nola deň bolan, akymyň kesgitli topary üçin alnandyr.

Käbir meselelerde şepbeşiklik güýji bilen deňeşdireniňde inersiýa güýji örän kiçidir. Bu ýagdaýda (2.49) deňlemeler ulgamynyň çep tarapyndaky ähli agzalar aýrylýar we çyzykly däl ulgam çözgüdi belli bolan Poussonyň bir jynsly däl çyzykly deňlemesine öwrülýär. Bu ýol örän ýönekeýdir, ýöne tejribede az gyzyklandyrýan, örän haýal akýan akymlar üçin ulanarlyklydyr.

Ýönekeýleşdirmäniň ikinji ýoly Reýnoldsyň sany uly bolan akymlara degişlidir. Bu ýagdaýda Nawýe-Stoksuň deňlemesine girýän agzalar deňeşdirilýär we kiçi derejeli agzalar aýrylýar. Bu hili ýönekeýleşdirmäni 1904-nji ýylda Prandtl üste ýakyn ýerleşen akym bölegi üçin hödürledi. Prandtl *Re* uly sanlarynda şepbeşikligiň täsiriniň diwara ýakyn bölekde akymyň häsiýetiniň görnetin üýtgetýändigini synag geçirmegiň kömegi bilen tassyklady. Hakykatdan hem ýelmeşmeklik çaklamasyna laýyklykda akýan üstde tizlik nola deň bolýar we üste normal ugur boýunça tizlik birden üýtgeýär. τ sürtülme naprýaženiýesi tizligiň kese gradiýentine proporsional $\tau \approx \frac{du}{dy}$. Şeýlelikde, bu bölekde şepbeşikligiň täsiri has güýçli bolýar. Prandtlyň tassyklamagyna görä haýsy hem bolsa bir jisimiň töweregınden akyp gelýän suwuklyk akymyny şertleýin üç bölege bölmek bolýar. I araçäk gatlak, bu bölekde şepbeşiklik güýji akymyň häsiýetine has güýçli täsir edýär, II tolgundyrylmadyk (potensial) akym, ýagny derňewi hyýaly suwuklyk hereketi görnüşinde alyp barmak mümkin bolan akym we III erňekden soňky akym (*6.3-nji çyzgy*).

Araçäk gatlagy bölmeklik şertleýin häsiýetdedir. Şol sebäpli araçäk gatlagyň fiziki galyňlygyna kesgitleme bermek zerurdyr.

Gaty üstden tolgundyrylmadyk akym tizliginden 1% tapawutlanýan akym tizlikli suwuklyk gatlagyna çenli bolan aralyga araçäk gatlak diýilýär.



6.3-nji çyzgy. Şepbeşik suwuklyk akymyndaky jisimiň akyşy

Eger tolgundyrylmadyk akymyň tizligini u_1, araçäk gatlakdaky suwuklyk akymynyň tizligini u diýip bellesek, araçäk gatlagyň galyňlygy üçin kesgitlemä görä alarys:

$$u(y)I_{y=\delta} = 0,99 \cdot u_1 .$$

u tizligiň tolgundyrylmadyk akymyň tizligine golaýlaşma derejesiniň üýtgemegi bilen δ galyňlygyň dürli bahalaryny alarys. Kabul edilen şert sürtülme güýjüni hasaba almak bilen, diwara ýakyn bölekdäki akymyň ölçegine baha bermekligiň zerurdygyny görkezýär.

Araçäk gatlagyň kese kesigi boýunça tizlik meýdany kesgitlenilende deňölçegsizlik ýüze çykýar we bu deňölçegsizlik üçin δ^* gysyp çykarma integral meýdanyny, δ^{**} impuls ýitgisini we δ^{***} energiýa ýitgisini ulanmak maksadalaýykdyr. Tekiz araçäk gatlak üçin:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 u_1}\right) dy; \qquad (6.16\ a)$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 u_1}\left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy; \qquad (6.16\ b)$$

$$\delta^{***} = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 u_1}\left(1 - \frac{u^2}{u_1^2}\right) dy . \qquad (6.16\ ç)$$

Bu ululyklaryň ölçeg birligi çyzyklydyr, ýöne tekiz araçäk gatlaga seredeniňde integral meýdan barada däl-de integral galyňlyk barada gürrüň gidýär. Bu galyňlygy bir-birlik kese ölçege köpeldip tekiz araçäk gatlagyň sarp ediliş, güýç we energetik häsiýetnamasyny kesgitleýän integral meýdany alarys. Ahyrky ini B bolan kanalda bu häsiýetnamany bahalandyrmak we degişli integral meýdany almak üçin integral galyňlygy B ululyga köpeltmeklik zerurdyr. Araçäk gatlagyň girizilen häsiýetnamasynyň ornuny kesgitläliň. Beýikligi $2b$-e deň bolan kesgitli uzynlykly tekiz kanallardaky şepbeşik suwuklygyň hereketine seredeliň (*6.4-nji çyzgy*). Goý, araçäk gatlagyň galyňlygy kanalyň käbir bölegini tutýar we kanalyň merkezi böleginde potensial akym saklanýar diýeliň.

Bu bölekde tizlik kanalyň kesigi boýunça $u_{2.maks.} = u_{2t}$. Onda (3.50) we (3.62) deňlemeleri ulanyp m massalaýyn sarp edilişi we şepbeşiklik güýjüň täsiri netijesinde döreýän energiýa ýitgisini şeýle görnüşde aňlatmak bolar:

$$m = 2 \cdot \rho_{2t} u_{2t} b \cdot 1\left(1 - \frac{\delta_2^*}{b}\right); \tag{6.17}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho_{2t} u_{2t}^3 2 \cdot \delta_2^{***} \cdot 1\,. \tag{6.18}$$

Kanalyň aerodinamiki häsiýetnamasyny häsiýetlendirmek üçin ΔK energiýa ýitgisiniň nazary energiýa bolan gatnaşygy bilen häsiýetlendirilýän ζ içki ýitgi koeffisiýenti ulanylýar:

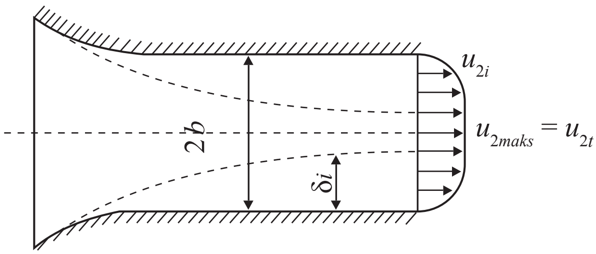
$$\varsigma = \frac{\Delta K}{K_t} = \frac{\Delta K}{0,5mu_t^2}.$$

(6.17) we (6.18) deňlemeleri ulanyp alarys:

$$\varsigma = \frac{\rho_{2t} u_{2t}^3 \delta_2^{***}}{\rho_{2t} u_{2t}^3 b\left(1 - \frac{\delta_2^*}{b}\right)} = \frac{\frac{\delta_2^{***}}{b}}{1 - \frac{\delta_2^*}{b}} = \frac{\bar{\delta}_2^{***}}{1 - \bar{\delta}_2^*}. \tag{6.19}$$

(6.19) baglanyşyk araçäk gatlagyň esasy integral ululyklarynyň kömegi bilen tekiz kanallardaky ζ içki ýitgi koeffisiýentini kesgitleýär. Kanalyň ýokarky we aşaky çäklendiriji üstlerindäki ýa-da jisimlerdäki araçäk gatlagyň häsiýetnamasy tapawutly bolsa, onda onuň hasaplama formulasy şeýle görnüşde aňladylýar:

$$\varsigma = \frac{\bar{\delta}_{2p}^{***} + \bar{\delta}_{2v}^{***}}{1 - \bar{\delta}_{2p}^* - \bar{\delta}_{2v}^*}. \tag{6.20}$$



6.4-nji çyzgy. Tekiz kanalyň çykyş böleginde şepbeşik suwuklygyň hereketi

Bu ýerde $\delta_p^{***} = \dfrac{\delta_p^{***}}{2b}$; $\delta_v^{***} = \dfrac{\delta_v^{***}}{2b}$; $\delta_p^{*} = \dfrac{\delta_p^{*}}{2b}$; $\delta_v^{*} = \dfrac{\delta_v^{*}}{2b}$.

Eger δ_2^{**} çykyş kesigindäki impuls ýitgi galyňlygy belli bolsa, tekiz parallel akymlardaky plastinanyň garşylygyny hem kesgitlemek bolar. Araçäk gatlagyň çäginde hereket mukdarynyň üýtgemesi (3.5) formula bilen kesgitlenilýär:

$$\Delta I = \rho_\infty u_\infty^2 \delta_2^{**},$$

bu ýagdaýda daşky güýç hökmünde diňe sürtülme güýji alynýar, ýöne iki tarap üçin hem hasaba alynmalydyr. Onda P_x garşylyk güýji üçin şeýle baglanyşygy alarys:

$$P_x = 2\Delta I = 2\rho_\infty u_\infty^2 \delta_2^{***} B = 2\frac{\delta_2^{**}}{L}\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2} 2LB, \tag{6.21}$$

bu ýerde ρ_∞, u_∞– degişlilikde tolgundyrylmadyk akymyň dykyzlygy we tizligi, L – plastinanyň uzynlygy, B – plastinanyň ini. P_x absolýut ululyk bilen birlikde aerodinamikada P_x güýjüň $\dfrac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}$ tizlik badyna we akymyň ýuwýan S umumy meýdanyna (S = 2LB) bolan gatnaşygy bilen häsiýetlendirýän C_x ölçegsiz garşylyk koeffisiýenti giňden ulanylýar:

$$C_x = \frac{P_x}{\rho_\infty u_\infty^2/(2S)} = 2\delta_2^{**}/L. \tag{6.22}$$

Seredip geçilen meseleden görnüşi ýaly, integral häsiýetnamanyň kömegi bilen örän ýönekeý deňlemeleri almak bolar, ýöne olar ulanylanda ýokarda görkezilen ähli araçäk gatlagyň galyňlyklaryny kesgitlemegi başarmak zerurdyr.

6.3. Araçäk gatlak üçin Prandtlyň deňlemesi

Araçäk gatlagyň differensial deňlemesi Nawýe-Stoksuň deňlemesinden peýdalanyp we bu deňlemäniň, şeýle hem üznüksizlik deňlemesini deňeşdirmek arkaly tapylýar.

Gaty üste ýakyn tekiz akym üçin bu bahalary girizeliň. Bu maksat üçin (2.51) deňlemedäki ölçegli ululyklary ölçegsiz ululyklara geçireliň. Onuň üçin dik we kese tizlikler üçin U_0, V_0; çyzykly ölçegler üçin L_0; Y_0; basyş üçin P_0 masştablary saýlap alalyň.

Onda tizligi, basyşy we koordinatany saýlanyp alnan masştablaryň paýy görnüşinde aňladalyň:

$$u = U_0\bar{u};\quad \vartheta = V_0\bar{\vartheta};\quad x = L_0\bar{x};\quad y = Y_0\bar{y};\quad p = P_0\bar{p}. \tag{6.23}$$

Bu ýerde üsti çyzykly ululyklar ölçegsiz ululyklary aňladýar.

(2.51) deňlemä (6.23) belgilemeleri goýup alarys:

$$\frac{U_0^2}{L_0}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0U_0}{Y_0}\bar{\vartheta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{P_0}{\rho L_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{\nu U_0}{L_0^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\nu U_0}{Y_0^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2};$$

$$\frac{U_0V_0}{L_0}\bar{u}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0^2}{Y_0}\bar{\vartheta}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}} = -\frac{P_0}{\rho Y_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + \frac{\nu V_0}{L_0^2}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\nu V_0}{Y_0^2}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}^2};$$

$$\frac{U_0}{L}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0}{Y_0}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}} = 0.$$

Birinji deňlemäniň ähli agzalaryny $\frac{L_0}{U_0^2}$-a, ikinji deňlemäniň ähli agzalaryny $\frac{Y_0}{U_0^2}$ -a, üçünji deňlemäniň ähli agzalaryny $\frac{L_0}{U_0^2}$-a köpeldip alarys:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0L_0}{U_0Y_0}\bar{\vartheta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{P_0}{\rho U_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{\nu}{U_0L_0}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\nu L_0}{U_0Y_0^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}. \tag{6.24 a}$$

$$\frac{Y_0V_0}{U_0L_0}\bar{u}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0^2}{U_0^2}\bar{\vartheta}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}} = -\frac{P_0}{\rho U_0^2}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}} + \frac{\nu Y_0V_0}{U_0^2L_0^2}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\nu V_0}{Y_0U_0^2}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}^2}. \tag{6.24 b}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{V_0L_0}{U_0Y_0}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\bar{y}} = 0. \tag{6.24 ç}$$

Deňlemedäki masştab köpeldijili ähli kompleksler ölçegsizdir. Berlen masştablar $\frac{V_0L_0}{U_0Y_0}$, $\frac{\nu L_0}{U_0Y_0^2}$, $\frac{P_0}{\rho U_0^2}$ kompleksler bire deň bolar ýaly saýlanyp alnan diýeliň:

$$\frac{V_0 L_0}{U_0 Y_0} = 1; \quad \frac{\nu L_0}{U_0 Y_0^2} = 1; \quad \frac{P_0}{\rho U_0^2} = 1. \tag{6.25}$$

Bu ýerde:

$$Y_0 = \frac{L_0}{\sqrt{\frac{U_0 L_0}{\nu}}}; \quad V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{U_0 L_0}{\nu}}}; \quad P_0 = \rho U_0^2.$$

$\frac{U_0 L_0}{\nu}$ – kompleks Reýnoldsyň sanyny aňladýar:

$$Y_0 = \frac{L_0}{\sqrt{Re}}; \quad V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{Re}}. \tag{6.26}$$

(6.24) deňlemelere (6.26) masştablaryň bahasyny goýup alarys:

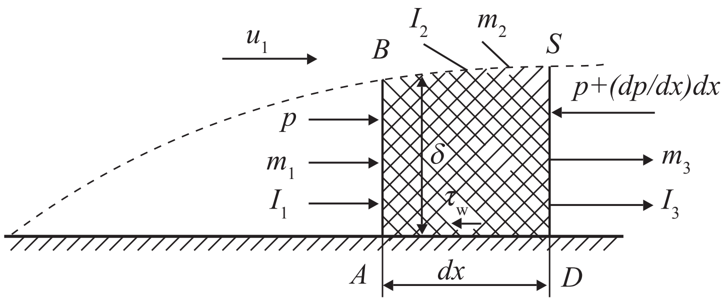
$$\left.\begin{aligned} \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{1}{Re}\bar{u}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re}\bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2}\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6.27}$$

$\frac{1}{Re^m}$ ululyga köpelýän agzalar Reýnoldsyň uly bahalarynda beýleki agzalar bilen deňeşdireniňde örän kiçidir we hasaba almasaň hem bolar. Onda ölçegsiz ululyklara geçip aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6.28}$$

6.4. Araçäk gatlak üçin Karmanyň deňlemesi

Suwuklygyň üste ýakyn tekiz akymyna seredeliň we araçäk gatlak bilen daşky tolgundyrylmadyk akymyň arasyna şertleýin çäk goýalyň *(6.5-nji çyzgy)*.



6.5-nji çyzgy. Karmanyň deňlemesiniň getirip çykarylyşy

Üstüň ugruna x okuny ugrukdyralyň we bu okuň ugruna bolan araçäk gatlakdaky tizlik düzüjisini u bilen, onuň daşky çägindäki tizlik düzüjisini u_1 bilen, diwara bolan sürtülme napryýaženiýesini bolsa τ_w bilen belgiläliň. $ABSD$ üst bilen çäklenen käbir suwuklyk elementini bölüp alalyň. Bu elementiň hereket mukdarynyň saklanma kanunyny x okuna proýektirläp alarys:

$$\Delta I = \sum_{i=1}^{n} R_{ix}, \tag{6.29}$$

bu ýerde ΔI– hereket mukdarynyň üýtgemesi; $\sum R_{ix}$ – bölünip alnan elemente x okunyň ugry boýunça täsir edýän ähli daşky güýçleriň jemi.

Çep tarapdaky AB grandan elemente hereket mukdary I_1-e deň bolan m_1 massa girýär. Daşky BS grandan hereket mukdary I_2 bolan m_2 massa girýär, SD sag grandan bolsa hereket mukdary I_3 bolan m_3 massa çykýar:

$$\Delta I = I_3 - I_2 - I_1$$

ýa-da

$$I_3 = I_1 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial x}\right) dx;$$

$$I_2 = m_2 u_1;$$

$$\Delta I = \frac{\partial I_1}{\partial x} dx - m_2 u\,.$$

m_2 massanyň saklanma kanunyndan kesgitlemek bolar:

$$m_2 = m_3 - m_1 = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial x} dx - m_1 = \frac{\partial m_1}{\partial x} dx.$$

Şeýlelikde,

$$\Delta I = \left[\frac{\partial I_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} \right] dx. \qquad (6.30)$$

Seredilýän bölege täsir edýän daşky güýçlere *AB, BS, SD* üstlere normal ugur boýunça ugrukdyrylan basyş güýji we akyma galtaşýan üste täsir edýän sürtülme güýji degişlidir. Bu güýçleriň sekuntdaky impulsyny jemläp alarys:

$$\sum R_{ix} = p \cdot \delta \cdot 1 - \tau_w dx \cdot 1 - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \left(\delta + \frac{d\delta}{dx} \right) \cdot 1 + p \frac{d\delta}{dx} dx \cdot 1.$$

Has takygy tükeniksiz kiçi ikinji derejä çenli:

$$\sum R_{ix} = \left(-\tau_w - \frac{dp}{dx} \delta \right) dx. \qquad (6.31)$$

(6.30) we (6.31) deňlemeleri deňleşdirip alarys:

$$\left(\frac{\partial I_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} \right) dx = -\left[\tau_w + \frac{\partial p}{\partial x} \delta \right] dx.$$

dx-a gysgaldanymyzdan soňra:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} = -\tau_w - \frac{dp}{dx} \delta. \qquad (6.32)$$

Eger *AB* kesikde tizlik profili we araçäk gatlagyň kese kesigi boýunça ρ dykyzlygyň üýtgeme kanuny belli bolsa, onda:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\rho} \rho u^2 dy = \varphi_1(x) \\ m_1 &= \int_0^{\delta} \rho u dy = \varphi_2(y) \end{aligned} \right\}. \qquad (6.33)$$

x oky boýunça hususy önümleri doly önüm bilen çalşyrmak bolar, sebäbi I_1 we m_1 diňe *x* dik koordinata baglydyr. (6.33) *deňleme araçäk gatlak üçin impulsyň integral deňlemesi diýlip atlandyrylýan Karmanyň deňlemesidir.*

6.5. Turbulent akymyň esasy häsiýetnamasy we deňlemesi

Belläp geçişimiz ýaly turbulent akym durnuksyzdyr we onuň häsiýetnamasy üçin tizligiň pursatlaýyn däl-de, käbir $\bar{c}$ ortalaşdyrýan bahasy ulanylýar. Munuň üçin Reýnoldsyň wagt boýunça ortalaşdyrmasy ulanylýar. Netijede, gözlenilýän tizlik ýa-da turbulent akymyň parametrleri ortalaşdyrylan we pulsasiýaly ululyklaryň jemi görnüşinde aňladylýar. Wagtyň ortalaşdyrylmasy giňişligiň berkidilen nokadynda girizilýär we tizligiň, şeýle hem basyşyň ortalaşdyrylan düzüjisi üçin alarys:

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt; \qquad \overline{\vartheta} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \upsilon(t)\,dt;$$
$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t)\,dt; \qquad \overline{p} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)\,dt. \qquad (6.34)$$

Bu ýerde T ortalaşdyrma aralygy mümkin boldugyça uly alynýar, sebäbi ortalaşdyrýan ululyklar wagta bagly däldir. Başga söz bilen aýdanyňda orta ululygyň ikilenji ortalaşdyrmasy gözlenilýän orta bahany berýär. Gözlenilýän ululygy tizligiň u düzüjisi arkaly $u = \overline{u} + u'$ jem görnüşinde aňlatsak, onda: $\overline{u} = \overline{\overline{u} + u'} = u$, bu ýerde u' – onuň pulsasiýaly bölegi. Bu ýerden görnüşi ýaly, wagt boýunça ortalaşdyrmada pulsasiýaly ululygyň bahasy nola deň, ýagny $\overline{u'} = 0;\ \overline{\vartheta'} = 0;\ \overline{w'} = 0;\ \overline{p'} = 0$. Şol bir wagtda pulsasiýaly ululygy kwadratyň orta bahasy noldan tapawutlanýar:

$$\overline{\vartheta'^2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u'^2(t)\,dt \neq 0.$$

Wagt boýunça ortalaşdyrylan pulsasiýaly tizlikleriň köpeltmek hasyllary hem noldan tapawutlydyr.

$$\overline{u'\vartheta'} \neq 0; \overline{u'w'} \neq 0; \overline{\vartheta' w'} \neq 0.$$

Erkin saýlanyp alnan

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}\,;\ \overline{f+q} = \bar{f} + \bar{q};\ \overline{\overline{fq}} = \bar{f}\cdot\bar{q};\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}. \qquad (6.35)$$

Bu ýerde S – dört sany x, y, z, t baglanyşyksyz üýtgeýjileriň biri, tizlik we turbulent akymyň parametrleri wagt boýunça üýtgewsiz galmaýar, kähalatda deňölçegsiz üýtgeýär. Akym haýsy hem bolsa bir ululyk bilen häsiýetlendirilmeýär. Pulsasiýaly hereketiň depginini häsiýetlendirmek üçin E turbulentlik derejesi ulanylýar. Izotrop turbulentlik üçin, ýagny ähli koordinata oklary boýunça tizligiň bir pulsasiýaly düzüjisi bolan turbulentlik üçin $E = \frac{\sqrt{u'^2}}{u}$. Pulsasiýaly hereketiň kinetiki energiýasyny $q = \frac{1}{2}(\overline{u}'^2 + \overline{\vartheta}'^2 + \overline{w}'^2)$ – turbulentlik derejesi bilen şeýle başlanyşdyrmak bolar:

$$q = \frac{3}{2}\overline{u}^2 \frac{1}{3}(\overline{u}'^2 + \overline{\vartheta}'^2 + \overline{w}'^2)\frac{1}{\overline{u}^2} = \frac{3}{2}\overline{u}^2 E^2.$$

Şeýlelikde, bu ýerde turbulentlik derejesi pulsasiýaly hereketiň kinetiki energiýasyny häsiýetlendirýän parametr görnüşinde gelýär. Tizligiň pulsasiýasy dürli n ýygylykda döreýär. Ýygylygyň her aralygynda energiýa dürli bolup biler. Ýygylyklar boýunça energiýanyň paýlanyşy *F(n)* spektral funksiýa düşünjesini berýär. Muny gurnamak üçin abssissa oky boýunça n pulsasiýa ýygylygynyň bahasyny we ýygylygyny her bir Δn aralygy üçin dik okunda $\bar{u}'^2$ orta kwadratik pulsasiýanyň göterim hasabyndaky bahasyny ýerleşdireliň.

Şuňa meňzeşlikde $\bar{\vartheta}'^2$ we $\overline{w}'^2$ orta kwadratik funksiýalar üçin hem bu egrini almak bolar. Spektral funksiýa düşünjesi boýunça $\int_0^\infty F(n)\,dn = 1$. Orta ýygylyk üçin: $F(n) \approx n^{-\frac{5}{3}}$; uly bahalary üçin $F(n) \approx n^{-7}$.

Belläp geçişimiz ýaly, *F(n)* funksiýada dürli ýygylyk pulsasiýaly hereketiň ätiýaçlygyny kesgitleýär, kiçi ýygylyklarda uly ölçegli köwlenmäniň emele gelmesine gabat gelýär. Pulsasiýanyň ýygylygy näçe ýokary bolsa, ýagny köwlenmäniň ölçegi näçe kiçi bolsa şonça hem pulsasiýaly herekete umumy energiýa dolanyşyndan az mukdardaky paý ýetýär.

Turbulent akymda tizligiň pulsasiýasy goşmaça hereket mukdarynyň geçirilmesini döredýär. Bu geçiş wagt boýunça ortalaşdyrylan tizligiň pulsasiýaly düzüjiliginiň garyşyk köpeltmek hasyly bilen kesgitlenilýär. Görkezilen funksiýa korrelýasion diýilýär, ýagny akymda pulsasiýanyň statistiki baglanyşygyny kesgitleýär. Tizligiň pulsasiýaly düzüjileriniň köpeltmek hasyllarynyň absolýut orta bahalarynyň ýerine şeýle aňladylýan otnositel ululyklary ulanmak amatlydyr:

$$R_{xy} = \frac{\overline{u'\vartheta'}}{\sqrt{\bar{u}'^2}\sqrt{\bar{\vartheta}'^2}};$$

$$R_{yz} = \frac{\overline{\vartheta'w'}}{\sqrt{\bar{\vartheta}'^2}\sqrt{\bar{w}'^2}};$$

$$R_{zx} = \frac{\overline{w'u'}}{\sqrt{\bar{w}'^2}\sqrt{\bar{u}'^2}}.$$

Girizilen koeffisiýentlere *korrelýasiýa koeffisiýenti* diýilýär. Eger $R_{ij} = 0$ bolsa, onda seredýän ululygymyz statistiki baglanyşyksyzdyr. Eger $R_{ij} = 1$ bolsa bir ululygyň meselesi beýleki ululygyňkyny hem kesgitleýär.

Turbulent meýdanynyň indiki wajyp häsiýetnamasy turbulentligiň möçberi (masştaby), ýagny özüniň hususy kinematiki häsiýetnamasyny saklaýan hereketdäki suwuklykda emele gelýän köwlenmäniň orta statistiki çyzykly ölçegi bolup durýar. Gözenegiň kömegi bilen emeli döredilýän turbulent akymlarda, kähalatlarda L turbulentligiň möçberi R_{xy} korrelýasiýa koeffisiýentinden turbanyň ähli radiusy boýunça alnan integral bilen bahalandyrylýar:

$$L = \int_0^{r_0} R_{xy} dr. \tag{6.36}$$

Turbulent hereketiň deňlemesini almak üçin Nawýe-Stoksuň differensial deňlemesini ortalaşdyralyň:

$$\rho\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(u\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\left[\frac{\partial(\vartheta u)}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta^2}{\partial y} + \frac{\partial(\vartheta w)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\left[\frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(w\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Aşakdakylary hasaba alalyň:

$$\overline{uw} = \overline{(u+u')(w+w')} = \overline{uw+uw'+wu'+u'w'} = \bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'};$$

$$\bar{u}^2 = (\overline{u+u'})^2 = \bar{u}^2 + \bar{u}'^2;$$

$$\overline{\vartheta w} = \bar{\vartheta}\bar{w} + \overline{\vartheta' w'}.$$

Ortalaşdyrmadan soň aşakdakyny alarys:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\Delta\bar{u} - \rho\left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'\vartheta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)\\
&\rho\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu\Delta\bar{\vartheta} - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'\vartheta'}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\vartheta}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\vartheta'}}{\partial z}\right)\\
&\rho\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu\Delta\bar{w} - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\vartheta'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}. \quad (6.37)$$

Döreýän goşmaça naprýaženiýäni Reýnoldsyň tenzor naprýaženiýesini kesgitleýän matrisanyň jemi görnüşinde aňladalyň:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x^l \tau_{xy}^l \tau_{xz}^l \\ \tau_{yx}^l \sigma_y^l \tau_{yz}^l \\ \tau_{zx}^l \tau_{zy}^l \sigma_z^l \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \rho\overline{u'^2} & \rho\overline{u'\vartheta'} & \rho\overline{u'w'} \\ \rho\overline{u'\vartheta'} & \rho\overline{\vartheta'^2} & \rho\overline{\vartheta'w'} \\ \rho\overline{u'w'} & \rho\overline{\vartheta'w'} & \rho\overline{w'^2} \end{vmatrix}. \quad (6.38)$$

(6.38) matrisa bilen kesgitlenilýän goşmaça napraženiýäniň döremesi tizligiň pulsasion häsiýeti bilen düşündirilýär. (6.37) deňlemeler ulgamyna Reýnoldsyň deňlemesi diýilýär.

Eger suwuklyk akymy tekiz araçäk gatlagyň çäginde bolsa we (6.28) Prandtlyň, şeýle hem üznüksizlik deňlemelerde ortalaşdyrmany amala aşyrmak arkaly ýönekeý görnüşdäki deňlemäni alarys:

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_l + \tau_t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x{}'}{\partial x};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} = 0.$$

Öň girizilen belgilemelerimizi ulanalyň:

$$\tau_l = \mu\frac{d\bar{u}}{dy}; \quad \tau_t = -\rho\overline{u'\vartheta'}; \quad \sigma_x{}' = -\rho\bar{u}'^2.$$

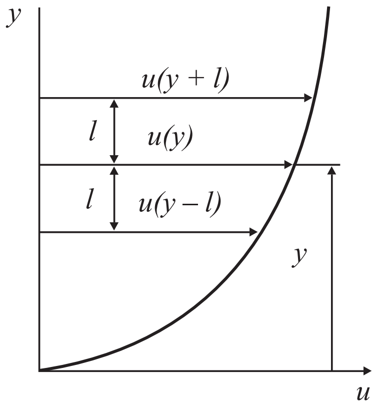
Birinji deňlemäniň soňky iki ululygyny deňeşdirip alarys:

$$\frac{\partial \sigma_x{}'}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \tau_t} \sim \frac{1}{Re}.$$

Şeýlelikde, $\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x}$ ululygy beýleki ululyklar bilen deňeşdirsek hasaba almasak hem bolýar.

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tau_t\right) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6.39}$$

x okunyň ugruna ugrukdyrylan, gaty üste ýakyn turbulent akyma seredeliň.



6.6-njy çyzgy. Prandtylyň deňlemesini getirip çykarylyşy

$\bar{u}$ orta tizlik bu ýerde diňe y koordinata bagly, $\bar{\vartheta}$ we $\bar{w}$ düzüjiler bolsa nola deň. $\bar{u}(y)$ tizligiň ortalaşdyrma profili 6.6-njy çyzgyda görkezilendir. Suwuklygyň köwlenmeli gatlagyndan keseleýin geçmesi tizligiň $\bar{\vartheta}$ pulsasion düzüjisiniň hasabyna amala aşýar. Goý, $y - l$ koordinatadaky suwuklyk gatlagynyň göwrümi y koordinataly gatlaga gelýär diýeliň we ilkibaşda $\bar{u}(y-l)$ kese tizlik saklanýar diýeliň.

Onda y gatlaga düşýän, seredilýän göwrümiň tizligi $\bar{u}(y)$ tizlikden $\Delta u = \bar{u}(y) - \bar{u}(y-l)$ ululyga tapawutlanýar. $\bar{u}(y-l)$ ululygy Teýloryň hataryna dargadyp alarys:

$$\Delta u_1 = l\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right).$$

Şuňa meňzeşlikde *(y + l)* gatlakdan *y* gatlaga düşýäň suwuklyk göwrümi üçin alarys:

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y+1) - \bar{u}(y) = l\frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{6.40}$$

y okunyň ugruna käbir uzaklyk ölçegini kesgitlemek bolar. Bu ululyga molekulanyň erkin ýoluna meňzeşlikde garyşma ýoly diýilýär.

Prandtl boýunça kese pulsasiýanyň döremesi *y* gatlaga dürli kese tizligi iki döwrüň düşmegi bilen düşündirilýär. Eger öňde pes tizlikli göwrüm ýerleşen bolsa, yzdaky göwrüm ony kowup ýetýär we göwrümleriň $2\bar{u}$ tizlik bilen çaknyşmasy döreýär. Netijede, *y* derejede iki gapdala hem ϑ' tizlikli kese hereket ýüze çykýar. *(6.6-njy çyzgy)*. Eger öňde ýokary tizlikli göwrüm ýerleşýän bolsa, onda olar biri-birinden $2u'$ tizlik bilen aýrylýarlar. Olaryň aralygynda suwuklyk ϑ'pulsasion tizligiň bahasynyň tertibi u' tizlik ýoly bolýar diýip hödürläpdir, ýagny:

$$|\vartheta'| = Al\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right), \tag{6.41}$$

bu ýerde A – käbir hemişelik san. Indi turbulent sürtülme napraženiýesi üçin ýazylan formula girýän $\overline{u'\vartheta'}$ – köpeltmek hasylynyň ortalaşdyrylan bahasyny tapalyň. Shemadan görnüşi ýaly, ϑ' ululygyň položitel ugry boýunça aşak geçýän suwuklyk bölejiginiň pulsasiýasynyň döremesi, u' otrisatel pulsasiýany döretmeýär, bu hili bölejigiň $\overline{u'\vartheta'}$ – köpeltmek hasyly otrisateldir.

6.6. Turbulent araçäk gatlakda ortaça tizligiň profili

Prandtlyň formulasyna $\bar{u}$ – otnositel ortalaşdyrylan tizligiň differensial deňlemesi görnüşinde seretmek bolar. Onuň üçin diwaryň golaýyna τ_w napraženiýe deňdir. Onda Prandtlyň deňlemesinden alarys:

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{1}{\chi y}.$$

$\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ kompleks tizligiň ölçegine gabat gelýär we kähalatlarda oňa $\vartheta_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ dinamiki tizlik diýlip atlandyrylýar. Aýdylanlary göz öňünde tutsak $du = \vartheta_* \frac{dy}{\chi y}$. Integrirlemeden soň şu aşakdaky formulany alarys:

$$u = \frac{\vartheta_*}{\chi} \ln \cdot y + c. \tag{6.42}$$

c integrirleme hemişeligini kesgitlemezden ozal, käbir goşmaça düşündiriş bereliň. (6.42) formula ösen turbulent akym üçin ulanarlyklydyr, bu ýagdaýda molekulalarara sepleşikligi hasaba alardan kiçidir. Diwarda turbulent pulsasiýa nola ýakyn we bu ýerde sürtülme napryýaženiýesi üçin Nýutonyň kanuny saklanýar $\tau_l = \tau_w = \mu \frac{du}{dy}$. Bu kanun $\tau_l = \tau_w = const$ şertde ulanylsa, diwardan örän az aralyga tizligiň çyzykly üýtgemesini berýär:

$$u_l = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\vartheta} = \frac{\vartheta_*^2}{\vartheta} y_l. \tag{6.43}$$

Şeýlelikde, turbulent araçägi tizligiň çyzykly paýlanyşyna eýe bolan inçe şepbeşik gatlaga we tizligiň profili (6.42) logarifmiki baglanyşyk bilen häsýetlendirilýän esasy turbulent bölege bölmek bolar. Hakyky model çylşyrymlydyr, görkezilen iki bölegiň arasynda garyşyk gatlak hem bardyr. Integrirlemäniň hemişeligini kesgitlemek üçin iki gatlakly modelden peýdalanylýar.

Eger y_l galyňlykly şepbeşik gatlagyň daşky çägindäki tizlik u_l bolsa, onda:

$$u_l = \frac{\vartheta_*}{\chi} \ln \cdot y_l + c = \frac{\vartheta_*^2}{v} y_l.$$

Netijede,

$$c = \frac{\vartheta_*^2}{\vartheta} y_l - \frac{\vartheta_*}{\chi} \ln \cdot y_l.$$

c-niň bahasyny (6.42) formulada goýup alarys:

$$u = \frac{\vartheta_*}{\chi} \ln \cdot \frac{y}{y_1} + \frac{\vartheta_*^2}{\vartheta} y_l. \tag{6.44}$$

Şepbeşik gatlagyň y_l galyňlygy v kinematiki şepbeşiklik koeffisiýentiniň we ϑ_* dinamiki tizligiň funksiýasydyr. Bu ululyklardan çyzykly ölçegli $\frac{v}{\vartheta_*}$ ýeke-täk kombinasiýany düzmek bolar. Eger y_l aralyk $\frac{v}{\vartheta_*}$ uzynlyga proporsional bolsa,

$$y_l = \frac{\beta v}{\vartheta_*}. \tag{6.45}$$

(6.45) deňlemäni (6.44)-e goýup alarys:

$$\frac{u}{\vartheta_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y\vartheta_*}{\vartheta} + \left(\beta - \frac{1}{\chi} \ln \cdot \beta\right). \tag{6.46}$$

Tejribe maglumatlary esasynda gidrawlik tekiz turba üçin $\chi = 0{,}4$, $\beta = 0{,}11$ we tizligiň paýlanyşygynyň umumylaşdyrylan kanuny *Re* uly bahalarynda:

$$\varphi = 2{,}5 \ln \cdot \eta + 5{,}5 = 5{,}75 \lg \cdot \eta + 5{,}5, \tag{6.47}$$

bu ýerde $\varphi = \dfrac{u}{\vartheta_*}$ we $\eta = \dfrac{y\vartheta_*}{v}$ ölçegsiz koordinatalar.

(6.47) baglanyşyga asimptotik diýilýär we molekulýar şepbeşikligiň täsiri hasaba alynmadyk ýagdaýynda, *Re* uly bahaly böleklerinde hem ulanarlyklydygyny aňladýar. Bu täsiriň derejesi *Re* mundan başga-da η ölçegsiz aralyga baglydyr. $\eta = \dfrac{y\vartheta_*}{v} < 5$ bolsa laminar akym, $5 < \eta < 70$ bolsa laminar turbulent akym, $\eta > 70$ bolsa molekulýar şepbeşikligiň täsiri bolmadyk ösen turbulent akym döreýär.

Kähalatlarda tizligiň derejeli profili hem ulanylýar. φ we η ölçegsiz uniwersal koordinatalary ulanyp, umumy ýagdaýda şeýle görnüşde aňlatmak bolar:

$$\frac{u}{\vartheta_*} = c(n) \left(\frac{y\vartheta_*}{v}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.48}$$

Eger (6.66) tizligiň logarifmiki profili *Re* bagly däl bolsa, şu esasda $\varphi = \dfrac{u}{\vartheta_*}$ we $\eta = \dfrac{y\vartheta_*}{\vartheta}$ koordinatalara uniwersal diýilýär, ýöne turbulent araçäk gatlakda tizligiň paýlanyşynyň derejeli aňladylyşynda uniwersallyk ýitýär we (6.48) formuladaky tejribe berlenleri ω laýyklykda $c(n)$ hemişeligiň we $\dfrac{1}{n}$ dereje görkezijiniň bahasy *Re*-niň üýtgemegi bilen üýtgeýär *(6.1-nji tablisa)*.

6.1-nji tablisa

Re	$4 \cdot 10^3$	10^5	10^6	$> 10^6$
η	$^1/_6$	$^1/_7$	$^1/_9$	$^1/_{10}$
$c(n)$	7,8	8,74	10,6	11,5

Tizlik profiliniň logarifmik bilen deňeşdireniňde derejeli aňladylyşyndaky uniwersallygyň bozulmasy logarifmik koordinatanyň aýratynlygy, çyzykly ölçegiň birden gysylmagynyň daşky çägindäki u_1

tizlik şeýle hem araçäk gatlagyň δ galyňlygy alynsa (6.48) formula ýönekeýleşer. Hakykatdan hem $y = \delta$ bolanda $u = u_1$, onda:

$$\frac{u_1}{\vartheta_*} = c(n)\left(\frac{\delta\vartheta_*}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.49}$$

(6.48)-i (6.49)-a bölüp, tizligiň we çyzykly ölçegiň u_1 we δ ölçeg ululyklarynyň paýy görnüşinde aňladylýan ýönekeý derejeli profili alarys:

$$\frac{u}{u_1} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.50}$$

6.7. Aýlanyp akýan şepbeşik suwuklyga jisimiň garşylygy

Aýlanyp akýan hyýaly suwuklykda akymyň ugruna jisimiň täsiri nola deň bolsa (Eýler-Dalamberiň paradoksy), şepbeşik suwuklyklarda bu güýç elmydama noldan tapawutlydyr. Bu güýç P_x' üst boýunça güýjünden we P_x'' basyşyň jemleýji güýjünden durýar. Sürtülme güýji jisimiň üsti boýunça τ_w galtaşma naprýaženiýesiniň ýaýramasy arkaly (6.50) formula bilen kesgitlemek bolar:

$$P_x' = \int_S \tau_w dS = 0,5\int_S \rho_1 u_1^2 c_f dS.$$

Aýlanyp akýan jisimiň üsti boýunça basyşyň paýlanyşy bilen düşündirilýän garşylyk güýjüni kesgitlemeklik üçin c_∞ ylgaýan akym tizliginiň wektorynyň ugruna basyş güýjüniň jemi proýeksiýasyny kesgitlemek zerurdyr.

Umumy garşylygyň bu düzüjileri şeýle kesgitlenilýär:

$$P_x'' = \int_S p_i \cos\left(\widehat{x,n}\right) dS,$$

bu ýerde dS – jisimiň elementar üsti; p_i – basyşyň ýerli bahasy.

Şeýlelikde, tizlik akymlardaky jisimiň P_x doly garşylygy seredilen düzüjileriň jemi görnüşinde kesgitlenilýär. $P_x = P_x' + P_x''$ absolýut basyş bilen birlikde, P_x güýjüň $\rho_\infty c_\infty/2$ ylgaýan akymyň tizlik badyna we F jisimiň häsiýetli meýdanyna bolan gatnaşygy bilen kesgitlenilýär. c_x ölçegsiz garşylyk koeffisiýentini girizeliň:

$$C_x = P_x'/(0,5\rho_\infty c_\infty F).$$

P_x' sürtülme garşylygynyň we P_x'' basyş garşylygynyň arasyndaky gatnaşyga baglylykda jisimi oňat we ýaramaz akyjy böleklere bölmek bolar. Oňat akýan jisimler üçin sürtülme garşylygy basyş garşylygy bilen deňeşdireniňde uludyr. Oňat akýan jisime akyma parallel plastinany mysal getirmek bolar. Bu hili jisimleriň diwarynda akymyň bölünmesi bolmaýar we olar garşylyk koeffisiýentiniň pes bahalary bilen häsiýetlendirilýär.

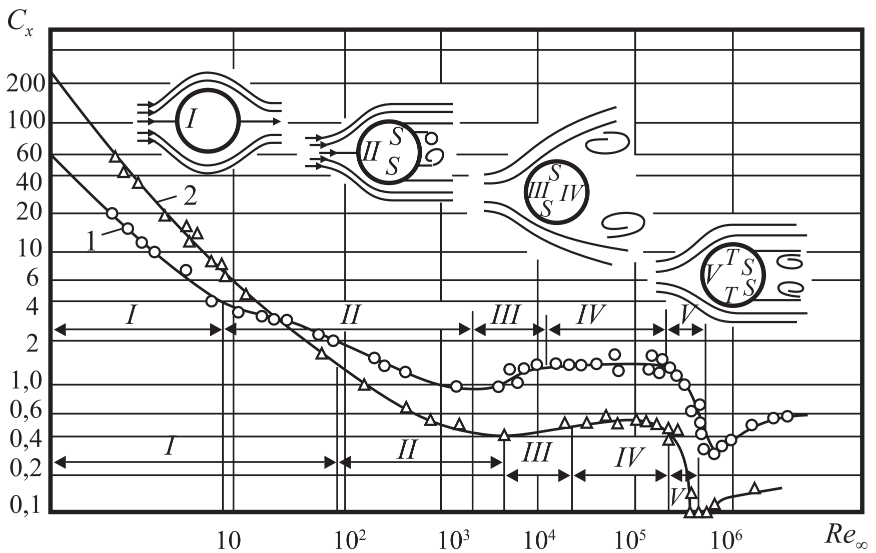
Diwarynda bölünmeli akym döreýän jisimler ýaramaz akyjylyga eýedir. Onuň garşylygy, esasan, basyş garşylygy bilen kesgitlenilýär. Ýaramaz akyjy jisime şar, silindr, akyma perpendikulýar ýerleşdirilen plastina degişli bolup bilýär. Umumy ýagdaýda c_x garşylyk koeffisiýenti jisimiň görnüşine, onuň üstüniň ýagdaýyna, Re_∞, M_∞ we E_0 sanlar bilen häsiýetlendirilýän akym kadasyna we giňişlikde jisimiň ýerleşişine baglydyr. Tekiz üstli jisimlerdäki pes tizlikli akymlarda we ylgaýan akymyň turbulentliginiň pes derejelerinde c_x ululyk jisimiň görnüşi, giňişlikde ýerleşişi we Re_∞ bilen kesgitlenilýär. Şar we gapdal akýan silindrlerde $E_0=const$ ýagdaýda c_x koeffisiýent diňe Re_∞ ululyga bagly we 6.12-nji çyzgyda görkezilen tejribäniň kömegi bilen tassyklanylýandyr. Bu baglanyşyk örän çylşyrymlydyr.

Reýnoldsyň kiçi bahalarynda (Re <100) Re ýokarlanmasy bilen c_x garşylyk koeffisiýentiniň birden peselmesi ýüze çykýar (6.12-nji çyzgyda I bölek). Soňra bu peselmäniň çaltlygy aşaklaýar (II bölek), mundan beýläk $10^3 < Re < 10^4$ aralykda hatda c_x ululygyň biraz ýokarlanmasy hem bolýar (III bölek) IV bölekde [$10^4 < Re < (2 \div 4)10^5$] c_x koeffisiýent Re ýokarlanmasy bilen üýtgemeýär we bu bölege kähalatlarda Re görä ýerli *awtomodel bölek* diýilýär. Bu bölekden soň ($Re < 2 \cdot 10^5$) garşylyk koeffisiýentiniň birden peselmesi bolup geçýär (V bölek), soňra azrak ýokarlanýar.

Seredilýän baglanyşygyň çylşyrymly häsiýeti Re üýtgände sürtülme garşylygynyň we basyş garşylygynyň gatnaşygynyň üýtgemesi bilen düşündirilýär. Re pes bahalarynda, silindr akanda onuň üstünde akymyň bölünmesi bolmaýar. Şepbeşikligiň täsiri akýan jisimiň üstünden uzak aralyga ýaýraýar we sürtülme garşylygynyň täsiri uly bolýar. Re ýokarlanmasy bilen şepbeşikligiň täsiri diwara ýakyn bölekde çäklenýär we yzky bölekde köwlenmeli akym döreýär. Akymda ýerleşdirilen şilindriň yzynda merkezleri atanaklaýyn tertipde bolan köwlenmeli ýoljagaz emele gelýär. Bu köwlenme ýoljagazyny Karman tejribe arkaly görüpdir we muňa Karmanyň köwlenmeli ýoljagazy diýilýär.

Seredilýän bölekde (II bölek) *Re* ýokarlanmasy bilen sürtülme garşylygy peselýär, basyş garşylygy bolsa ösýär. c_x koeffisiýentiniň jemi bahasy *Re* ýokarlanmasy bilen peselmesini dowam edýär, ýöne I bölekdäki ýaly çalt bolup geçmeýär.

III bölekde silindriň yzky bölegindäki köwlenmeli hereket çaltlanýar. Köwlenmäniň ölçegi kiçelýär, onuň emele gelme tizligi ýokarlanýar we laminar araçäk gatlagyň bölünmesiniň durgunlaşmasy bolup geçýär. Silindriň üstündäki akymyň bölünme nokady (*S* nokat) $\theta \approx 87°$ burçlaýyn koordinatany emele getirýär. Bu ýagdaýda umumy garşylyk basyş garşylygynyň ýokarlanmasynyň hasabyna biraz ösýär. Silindriň akmasynyň ýazgysy IV bölekde saklanýar.



6.7-nji çyzgy. Silindr (1) we şar (2) gapdala akanda garşylyk koeffisiýentiniň Reýnoldsyň sanyna baglanyşygy

Netijede, c_x koeffisiýent üýtgemeýär we *Re* görä ýerli awtomodel bölek diýip aýtmaklyga mümkinçilik berýär. Şeýle-de bolsa yzky bölekde akymyň gurluşy üýtgeýär. Silindriň diwaryndaky akymyň bölünmesinde akymyň ugruna käbir aralyga çenli bölünen akymyň laminar hereketi saklanýar we diňe *T* nokatda akymyň turbulentleşmesi döreýär (*6.7-nji çyzgy*) Reýholdsyň sanynyň ýokarlanmasy bilen laminar araçäk gatlagyň *S* bölünme nokady bilen *T* turbulentleşme nokadyny aňladýan *ST* bölek gysgalýar.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, 2007.
3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Döwlet adam üçindir. Aşgabat, 2008.
4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Bilim – bagtyýarlyk, ruhubelentlik, rowaçlyk. Aşgabat, 2014.
5. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyz, baky Bitarap Türkmenistan. Aşgabat, 2014.
6. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Suw – ýaşaýşyň we bolçulygyň gözbaşy. Aşgabat, 2014.
7. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – abadançylygyň we rowaçlygyň ýurdy. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.
8. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Bitarap Türkmenistan. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.
9. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – Beýik Ýüpek ýolunyň ýüregi. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.
10. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan Durnukly ösüşiň maksatlaryna ýetmegiň ýolunda. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.
11. Arkadag taglymaty – sagdynlygyň, ruhubelentligiň binýady. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.
12. Дейч М. Е., Зарянкин А. Е. Гидрогазодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1984.
13. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. М.: Машиностроение, 1990.
14. Швыдкий В.С., Ярошенко Ю.Г., Гордон Я.М., Шаврин В.С., Носков А.С. Механика жидкости и газа. М.: ИКЦ «Академкнига», 2003.

MAZMUNY

IV bölüm

Suwuklygyň we gazyň sesiň tizligine çenli tizlikli tekiz akymy

V bölüm

Tekiz sesiň tizliginden ýokary tizlikli gaz akymlary

VI bölüm

Şepbeşik suwuklygyň hereketi we araçäk gatlak

Saparmyrat Samadowiç Hojageldiýew

GIDROGAZODINAMIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*G. Gurbannazarowa*
Surat redaktory	*O. Çerkezowa*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Kompýuter bezegi	*S. Ýarmakowa*
Neşir üçin jogapkär	*G. Akmyradow*

Çap etmäge rugsat edildi 18.06. 2019. Ölçegi 60x90 $^{1}/_{16}$.
Times New Roman garniturasy. Şertli çap listi 9,0.
Şertli reňkli ottiski 17,13. Çap listi 9,0. Hasap-neşir listi 6,25.
Sargyt № 3638. Sany 600.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.