# MATEMATIKADAN OLIMPIADA ÜÇIN MESELELER

# OLIMPIADA MESELELERI

## 8-nji synp üçin olimpiada meseleleri

**1.** $x \neq 0$, $y \neq 0$ bolanda $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$ deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli. Nähili ýagdaýda bu deňsizlik deňlige öwrülýär?

**2.** Tagtada $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{12}$ sanlar ýazylypdyr.

a) bu sanlaryň her biriniň öňünde «+» ýa-da «–» alamatlary goýup, olaryň jemi nola deň bolar ýaly edip bolarmy?

b) bu sanlaryň näçe iň kiçi mukdaryny bozup, galan sanlaryň öňünde «+» ýa-da «–» alamatyny goýanyňda, alnan jem 0 bolar?

**3.** Massalary 1*g*, 2*g*, 3*g*, ... 1985 *g* bolan 1985 sany çeküw daşlary berlen. Her bir toparda çeküw daşlarynyň sany we çeküw daşlaryň massalarynyň jemi deň bolar ýaly olary 5 topara bölüp bolarmy?

**4.** Biri beýlekisiniň daşynda ýerleşen $R_1$ we $R_2$ radiusly iki töwerek berlen. *s* we *t* göni çyzyklaryň her biri iki töwerege hem galtaşýar, onsoňam töwerekler göni çyzyklaryň her biriniň bir tarapynda ýatýar. *l* göni çyzyk hem bu töwereklere galtaşýar, ýöne töwerekler onuň dürli tarapynda ýerleşýär. *l* göni çyzyk birinji töwerege *C* nokatda galtaşýar *s* we *t* göni çyzyklary *A* we *B* nokatlarda kesýär. $R_1 \cdot R_2 = CA \cdot CB$ deňligi subut etmeli.

**5.** Haçanda $ab+bc+ac>0$, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}>0$ şertler ýerine ýetende we diňe şonda $a$, $b$, $c$ sanlaryň bir alamatyňyň bolýandygyny subut etmeli.

**6.** Deňtaraply üçburçlukda depeleriniň biri bu üçburçlugyň bir tarapynyň ortasy bilen, beýleki iki depeleri üçburçlugyň galan taraplarynda ýatar ýaly kwadrat ýerleşdirilen. Kwadratyň dördünji depesiniň üçburçlugyň daşynda ýatýandygyny subut etmeli.

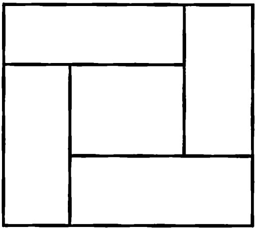
**7.** Tekizlikde simmetriýa oklary özara perpendikulýar we dört nokatda kesişýän iki parabola berlen. Bu parabolalaryň kesişme nokatlarynyň hemmesiniň bir töwerekde ýatýandygyny subut etmeli.

**8.** $AB$ kesim we onuň üstünde nokat berlen. $\angle AMB=\angle ACM$ bolýan $M$ nokatlaryň geometrik ornuny tapmaly.

**9.** Islendik $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_{2n+1}$ üçin $|a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+ +\ldots+a_{2n+1}\cos(2n+1)x|\geq|a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}|$ deňsizligiň çözüwiniň bardygyny subut etmeli.

**10.** $a$ we $b$, $a\neq0$ iki rasional san berlen. Jemi $a$ sana, köpeltmek hasyly $b$ sana deň bolan şeýle dört rasional sanlaryň bardygyny subut etmeli.

**11.** Suratdan görnüşi ýaly kwadrat bäş sany gönüburçluga bölünen. Kwadratyň taraplaryna galtaşýan dört gönüburçluklaryň meýdanlarynyň deňdigi bellidir. Içki gönüburçlugyň kwadratdygyny subut etmeli.



**12.** Deňsizlikleri subut etmeli:

1) $3a^3+7b^3>9ab^2, a>0, b>0$;

2) $3a^3+b^3\geq\frac{1}{16}, a>0, b>0, 3a+b=1$;

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, a>0, b>0$;

4) $x^n + y^n \geq \frac{(x-y)^n}{2^{n-1}}, x \geq 0, y \geq 0, n \in N$;
5) $a^2 + b^2 + c^2 \geq AB + BC + ac$;
6) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$.

**13.** Trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar we onuň beýikligi 4-e deň. Eger trapesiýanyň diagonallarynyň biriniň uzynlygy 5-e deň bolsa, onda onuň meýdanyny tapmaly.

**14.** Hakyky $a, b, c, d, e$ sanlar üçin $a+b+c+d+e=8$ we $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ deňlikler ýerine ýetýär. $e$-niň iň uly bahasyny tapmaly.

**15.** Gönüburçluk görnüşli 9·12 ölçegli kagyz bölegini diagonal garşylykly depeler gabat geler ýaly edip epleýärler. Epiniň uzynlygy näçä deň?

**16.** Eger $a, b, c$ rasional sanlar $x^3+ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň dürli kökleri bolsalar, onda olaryň bahalaryny tapmaly.

**17.** Degişlilikde, $P(x)+1$ we $P(x)-1$ aňlatmalar $(x-1)^3$ we $(x+1)^3$ bölüner ýaly bäşinji derejeli $P(x)$ köpagzany tapmaly.

**18.** Eger hemme hakyky $x$ we $y$ üçin $f(x)f(y)-f(xy)=x+y$ bolsa, onda $f(x)$-i tapmaly.

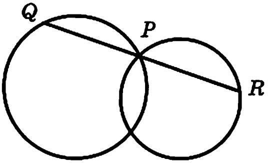
**19.** Goý $x$ we $y$, $x<y$ iki belgili natural sanlar bolsun. Olaryň $xy$ köpeltmek hasyly 2 bilen başlanýan dört belgili sandyr. Eger bu 2-lik çyzylsa, onda $x+y$ san alnar. Şeýle häsiýete $x=30$ we $y=70$ sanlar eýedirler. Şeýle häsiýetli sanlaryň galan $(x, y)$ jübütlerini tapmaly.

**20.** Eger $n$ berlen otrisatel däl bitin san bolsa, onda aşakdaky deňlemeleriň her biriniň näçe sany dürli otrisatel däl çözüwleri bar?

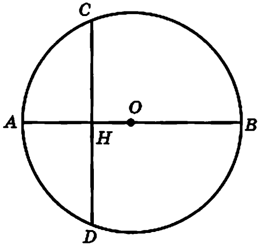
a) $x+y=n$; b) $x+y+z=n$.

**21.** Goý $[x]$, $x$-dan uly bolmadyk iň uly bitin sany belleýän bolsun. Berlen $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{n^2-1}], n = 2,3,\ldots$ jeme deň bolan $n$-e bagly aňlatmany tapmaly.

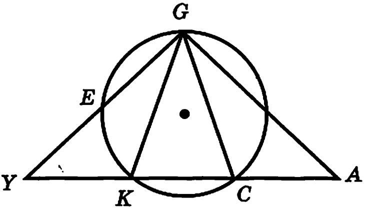
22. Suratdaky töwerekleriň radiuslary 8 *sm* we 6 *sm*, olaryň merkezleriniň arasyndaky uzaklyk 12 *sm*-e deň. Kesişme nokatlaryň biri bolan $P$ nokatdan $QP$ we $PR$ hordalar deň bolar ýaly edilip, $QR$ göni çyzyk geçirilipdir. $QP$ uzynlygyny irrasional aňlatma görnüşinde tapmaly.




23. Suratda $AB$ diametr $CD$ hordany $H$ nokatda kesýär. $AB$ kesimiň uzynlygy ikibelgili bitin san. Bu sanyň sifrleri ters tertipde ýazylsa, $CD$ kesimiň uzynlygy alnar. $H$ nokatdan $O$ merkeze çenli aralyk položitel rasional san. $AB$ kesimiň uzynlygyny tapmaly.




24. $GKA$ esasy 2 uzynlykly $GK$ kesim bolan deňýanly üçburçluk. $GA$ we $AK$ kesimleriň her biriniň uzynlygy $a$ deň. Goý, $C$ nokat $AK$ kesimi deň iki bölege bölsün we $W$ bolsa $GCK$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek bolsun. Goý, $Y$ bilen $AK$ dowamynda $GY$ we $W$ töweregiň kesişme $E$ nokadyna çenli $EY$ aralyk $\frac{a}{2}$ deň bolar ýaly edip alnan nokat bellenen bolsun. Eger $x$ bilen $EC$ uzynlygy we $y$ bilen bolsa $KY$ uzynlygy bellenen bolsa, onda $ay=x^2$ we $xb=y^2$ deňlikleriň dogrudygyny subut etmeli.




25. Goý, $m$ we $n$ (berkidilen) 1-den uly bitin sanlar ($m$-jübüt san) we $f$ hakyky bahalary kabul edýän we nola deň bolmadyk, hakyky sanlarda kesgitlenen hem-de:

a) ähli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ üçin

$$f\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}\right) = \frac{f^m(x_1) + f^m(x_2) + \ldots + f^m(x_n)}{n};$$

b) $f(1986) \neq 1986$;

ç) $f(1986) \neq 0$

şertleri kanagatlandyrýan funksiýa bolsun. Onda $f(1987)$ deňligi subut etmeli.

**26.** Seredilýän $f(x)$ funksiýa hemme hakyky $x$ üçin kesgitlenen. Eger hemme $a$, $b$ üçin $f(a+b)=f(a\cdot b)$ we $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ bolsa, onda $f(1988)$-i hasaplamaly.

**27.** Deňsizligi çözmeli:

$$x^{-3x-8} > x^7, \text{ bu ýerde } x>0.$$

**28.** Ýiti burçly üçburçlukda iki beýikligiň esaslaryny birikdirýän kesimiň uzynlygy 24 *sm*-e deň we $M$ bu kesimiň ortasydyr. Eger bu kesimi kesmeýän tarapyň uzynlygy 26 *sm*-e deň we $N$ bu tarapyň ortasy bolsa, onda $MN$ kesimiň uzynlygyny tapmaly.

**29.** Deňlemäniň näçe hakyky kökleri bar:

$$\frac{x}{1988} = \sin x?$$

**30.** Berlen $x^4 - px^3 + q = 0$ deňlemäniň bitin köklere eýedigini bilip, ýönekeý $p$ we $q$ sanlary tapmaly.

**31.** Goý, $[x]$ bilen $x$-den uly bolmadyk iň uly bitin san bellenen bolsun. Berlen $x^2 - 19[x] + 88 = 0$ deňlemäniň bitin däl çözüwlerini tapmaly.

**32.** Içinden çyzylan güberçek sekizburçlugyň meýdanynyň $r + S\sqrt{t}$ görnüşde aňladyň, bu ýerde $r$, $S$ we $t$ natural sanlardyr.

**33.** Goý, $n$ berlen položitel bitin san bolsun. Eger $x$ we $y$

$$xy = nx + ny$$

deňligi kanagatlandyrýan položitel bitin sanlar bolsalar, onda $x$-iň alyp biljek iň uly bahasyny tapmaly.

**34.** Her bir bitin $n$ üçin $f(n)$ funksiýa

$$f(n)=\begin{cases} n-3, & n\geq 2000, \\ f(f(n+5)), & n<2000 \end{cases}$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Onda:

a) $f$ (1988)-i hasaplamaly;

b) $f(n)$=1997 bolan ähli položitel bitin $n$-leri tapmaly.

**35.** $x^2-ax+9a=0$ deňlemäniň kökleri bitin sanlar bolar ýaly $a$ parametriň ähli bahalaryny tapmaly.

**36.** Birnäçe položitel sanlar berlen. Olaryň ähli jübüt-jübütden köpeltmek hasyllarynyň jemi 1-e deň. Bir sany bozup galan sanlaryň jemi $\sqrt{2}$ sandan kiçi edip bolýandygyny subut etmeli.

**37.** 7 sany wektor berlen. Olaryň islendik üçüsiniň uzynlygynyň jeminiň galan dördüsiniň uzynlyklarynyň jemine deňdigi mälim. Ähli wektorlaryň jeminiň nol wektordygyny subut etmeli.

**38.** Taraplary 12 *sm* bolan kwadratda 1990 nokat ýerleşen. Taraplary 11 *sm* bolan deňtaraply üçburçluk bilen olaryň 498-e çenlisini ýapyp boljakdygyny subut etmeli.

**39.** Islendik iki sany köpeldip, üstüne 1990 san goşulanda natural sanyň kwadraty bolýan dört natural san tapmak mümkinmi?

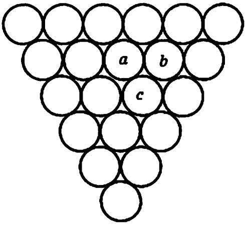
**40.** Eger $a$, $b$, $c$ položitel sanlar bolsa, onda

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

deňsizligi subut etmeli.

**41.** $OC$ hordaly $S_1$ töwerek berlen. Merkezi $O$ nokatda bolan $S_2$ töwerek $OC$ hordany $C$ nokatdan tapawutly $D$ nokatda, $S_1$ töweregi bolsa $A$ we $B$ nokatlarda kesýär. $D$ nokadyň $ABC$ üçburçlugyň bissektrisalarynyň kesişme nokady bolýandygyny subut etmeli.

**42.** $ABCD$ gönüburçlugyň içinde ýatan $M$ nokat $\angle BMC+\angle AMD=180°$ şerti kanagatlandyrýar. $BCM$ we $DAM$ burçlaryň jemini tapmaly.




**43.** $7^x-3\cdot2^y=1$ deňlemäniň hemme natural çözüwlerini tapmaly.

**44.** Bir setirde durýan islendik iki sanyň tapawudynyň moduly olaryň aşagynda duran sana deň bolar ýaly (ýagny $c=|a-b|$) 1-den 21-e çenli natural sanlary berlen öýjüklere ýerleşdirip bolarmy?

**45.** $x^5-x^3-x^2+1=y^2$ deňlemäni bitin sanlarda çözmeli.

**46.** Ýüzden geçmeýän 55 sany natural san alnan. Bularyň arasyndan tapawutlary: a) 9-a; b) 11-e deň bolan iki sany tapyp bolarmy?

**47.** Goý, $f(x)$ funksiýa $x$-yň islendik položitel bahalary üçin kesgitlenen we položitel bahalary kabul edýän bolsun. Eger $a$, $b$ we $c$ – üçburçlugyň taraplary bolsa, onda $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ hem käbir üçburçlugyň taraplarydygy mälimdir. Islendik $x$ üçin $f(x)\le Ax+B$ deňsizligi kanagatlandyrýan şeýle bir položitel $A$ we $B$ sanlaryň tapyljakdygyny subut etmeli.

**48.** Eger $a^5-a^3+a=2$ deňlik belli bolsa, $a^6>3$ deňsizligi subut etmeli.

**49.** Goý, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ddots+\frac{1}{1}}}}=\dfrac{m}{n}$ bolsun, bu ýerde deňligiň çep böleginde 1988 drob çyzygy bar, sag bölegindäki $\dfrac{m}{n}$ drob gysgalmaýan drobdyr. Onda $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{m}{n}\right)^2=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{n^2}$ deňligi subut etmeli.

**50.** Käbir $n$ natural sanda $2^n$ we $5^n$ sanlar şol bir sifrden başlanýar. Ol nähili sifr bolup biler?

**51.** Parallelogramyň iki depesi $ABCD$ güberçek dörtburçlugyň $AB$ we $CD$ taraplarynyň ortasynda, beýleki iki depesi bolsa $BC$ we $AD$ taraplarynyň ortasynda ýerleşen. Parallelogramyň meýdanynyň $ABCD$ dörtburçlugyň meýdanyndan iki esse kiçidigini subut etmeli.

**52.** Islendik $a$, $b$, $c$ položitel sanlar üçin

$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli. Deňligiň diňe $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ bolanda ýerine ýetýänligini subut etmeli.

**53.** Garşylykly iki taraplarynyň uzynlyklary $a$ we $b$ bolan dörtburçluk $d$ diametrli töweregiň daşyndan çyzylan. $ab \geq d^2$ deňsizligi subut etmeli.

**54.** $ABCD$ güberçek dörtburçlugyň diagonallary $O$ nokatda kesişýärler. Eger dörtburçlugyň taraplarynyň kwadratlarynyň jemi, diagonallaryň $O$ nokatda bölünýän kesimleriniň kwadratlarynyň jeminden iki esse uly bolsa, onda ýa diagonallaryň perpendikulýarlygyny, ýa-da iň bolmanda diagonallaryň biriniň $O$ nokatda deň bölege bölünýändigini subut etmeli.

**55.** Suratda görkezilen jedweliň islendik setirindäki ýa-da islendik sütünindäki ähli alamatlary garşylykly alamata üýtgetmäge rugsat berilýär. Şeýle işleri amala aşyrmak netijesinde alnan goşmaklaryň we aýyrmaklaryň mukdarlarynyň tapawudynyň modulynyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | − | + | − | − | − |
| + | − | + | + | − | + | − | − |
| + | − | − | + | + | − | + | − |
| + | − | − | − | + | + | − | + |
| + | + | − | − | − | + | + | − |
| + | − | + | − | − | − | + | + |
| + | + | − | + | − | − | − | + |

**56.** Islendik $x$, $y$ üçin $\cos(x+y)+2\cos x+2\cos y+3\geq 0$ deňsizligi subut etmeli.

**57.** $ABCD$ güberçek dörtburçlukda $AC$ we $BD$ diagonallar geçirilen. Eger $\angle BAC=50°$, $\angle CAD=40°$, $\angle CBD=20°$, $\angle BDC=25°$ bolsa, onda diagonallaryň arasyndaky ýiti burçlary tapmaly.

**58.** a) goý, islendik $x>0$ üçin $f(x)$ funksiýa kesgitlenen we aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan bolsun:

1) $(0; +\infty)$ aralykda $f(x)$ funksiýa berk artýar;

2) islendik $x>0$ üçin $f(x)\cdot f(f(x)+\frac{1}{x})=1$.

Onda $f(1)$-i tapmaly.

b) bölekdäki şertleri kanagatlandyrýan $f(x)$ funksiýa mysal getirmeli.

**59.** Taraplary arifmetiki progressiýany düzýän gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlaryny kesgitlemeli.

**60.** $\alpha$ burçuň içinde biri-birine galtaşýan iki tegelek çyzylan. Bu tegelekleriň radiuslarynyň gatnaşygyny tapmaly.

**61.** Kubuň granlarynyň her birini 4-e deň kwadratlara böldüler we ähli alnan kwadratlary bar bolan üç reňkleriň biri bilen reňklediler. Eger umumy gapyrgaly kwadratlar dürli reňkler bilen reňklenen bolsa, onda hemmesiniň her reňkden 8 kwadrat bolýandygyny subut etmeli. Şeýle reňklemä mysal getiriň.

**62.** Goý, $ABCDEF$ – $p$ perimetrli güberçek altyburçluk bolsun.

$p > \frac{2}{3}(|AD|+|BE|+|CF|)$ deňsizligi subut etmeli.

**63.** $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\geq x_1(x_2+x_3+x_4+x_5)$ deňsizligi subut etmeli.

**64.** $a$, $b$, $c$, $d$ natural sanlar $ab=cd$ deňligi kanagatlandyrýar. $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ sanlaryň düzmedigini subut etmeli.

65. Goý, $x_1, x_2, ..., x^n$ natural sanlar $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}=\frac{3}{4}$ deňligi kanagatlandyrýan bolsun. Olaryň arasynda iň bolmanda ikisiniň gabat gelýändigini subut etmeli.

66. $ABC$ üçburçlugyň içinde $O$ nokat alnan we onuň üstünden $BC$, $AC$, $AB$ taraplary $A_1$, $B_1$, $C_1$ nokatlarda kesýän $(AO)$, $(BO)$, $(CO)$ gönüler geçirilen. Eger üçburçlugyň $AC$ tarapy onuň taraplarynyň iň uzynydygy belli bolsa, onda $|OA_1|+|OB_1|+|OC_1|<|AC|$ deňsizligi subut etmeli.

67. Labirintiň koridorlary güberçek $n$-burçlugyň hemme taraplary we diagonallary bolýar. Labirinti doly ýagtyldar ýaly oňa çyralaryň iň azyndan näçe sanysy gerek?

68. Eger $a_1=0$ belli bolsa, onda islendik $n\geq2$ üçin $(n+1)^{a_n}=n^{a_{n+1}+1}$ gatnaşygy kanagatlandyrýan $(a_n)$ yzygiderligi tapmaly.

69. Tekizlik taraplarynyň uzynlyklary 1 metr bolan kwadrata bölünen. Bölünme çyzyklary boýunça beýik ýapyk diwar gurlan. Ol tekizligi daşky we içki ýaýlalara bölýär. Diwaryň golaýynda ýeriň aşagyndan gazyp ýokaryk alaka çykypdyr. Ol diňe 1$m$ uzaklygy görýär we diňe ona çenli sanap bilýär. Alakanyň diwaryň içinde ýa-da daşynda ýerleşendigini bilmegi mümkinmi?

70. Ahmet hasaplaýjy gural ýasady, ol üçbelgili sandan onuň sifriniň kubunyň jemini aýyrýar. Hasaplamanyň netijesi iň uly san bolar ýaly Ahmet hasaplaýjy gurala haýsy üçbelgili sany girizmeli? Hasaplamanyň netijesi haýsy iň kiçi položitel san bolmagy mümkin?

71. $O$ töweregiň daşynda ýatan $C$ nokatdan bu töwerege iki galtaşma geçirilen. Olar töwerege $A$ we $B$ nokatda galtaşýarlar. $C$ we $B$ nokatlaryň üstünden $O$ töwerek geçirilen, ol $(AB)$ gönä $B$ nokatda galtaşýar we $O$ töweregi $M$ nokatda kesýär. $(AM)$ gönüniň $[BC]$ kesimi deň bölýändigini subut etmeli.

**72.** Natural sanlaryň hatarynda birligi, hemme jübüt sanlary we üçe kratny ähli sanlary çyzdylar. Galan sanlar $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$, ... artýan yzygiderligi emele getirýär. Islendik $n$ üçin $a_n>3n$ deňsizligi subut etmeli.

**73.** 1989-a deň üçburçluklara bölüp bolýan üçburçlugyň bardygyny subut etmeli.

**74.** *ABCD* güberçek dörtburçlugyň diagonallary özara perpendikulýar. *AB* we *AD* taraplaryň ortasyndan garşylykly taraplara perpendikulýar göni çyzyklar geçirilen. Olaryň *AC* göni çyzygy kesýändigini subut etmeli.

**75.** **60°** burç we burçluk berlipdir. Onuň kömegi bilen iki nokadyň üstünden göni çyzyk we islendik çyzylan göni çyzyklara nokatdan geçýän göni çyzyk bilen perpendikulýar geçirmek bolýar. Burçlugyň kömegi bilen berlen burçy (60°-y) deň bölege bölmeli.

**76.** Ahmet bitin sanlaryň 10-usyny ýatda belledi (dürli bolmaklary hökman däl), soňra bu on sanlardan islendik dokuzynyň mümkin bolan ähli jemlerini hasaplady. Ahmetde 92, 93, ..., 100 sanlar alyndy (gaýtalanýan jemleri Ahmet diňe bir gezek aýtdy). Ol haýsy sanlary ýatda belläpdir?

**77.** $n$ şäheri bolan käbir ýurtda şäherleriň her birinden beýlekisine $K$-dan az bolmadyk ýol çykýar (ýollaryň her biri dogry iki şäheri birikdirýär we her bir iki şäher birden az bolmadyk ýol bilen birikdirilen) we ol her bir bölekde hiç bir iki şäher ýol bilen birikdirilmez ýaly $M$ böleklere bölünipdir. $m \geq \frac{n}{n-K}$ deňsizligi subut etmeli.

**78.** $n{\cdot}n(n>1)$ tagtanyň ähli öýjüklerinde üç reňkde fişkalar ýerleşdirilipdir. Islendik fişkanyň hatarynda beýleki iki reňkli fişkalar duran eken. Haýsy hem bolsa bir reňkde bolan fişkalaryň hatarda durandygyny (eger iki fişkalar umumy tarapy bolan öýjüklerde duran bolsa, onda olara hatarda dur diýilýär) subut etmeli.

**79.** $\overline{ab}⋮c$, $\overline{bc}⋮a$, $\overline{ca}⋮b$ şerti kanagatlandyrýan nola deň bolmadyk dürli jübüt-jübüt $a$, $b$, $c$ sifrler barmy? (bu ýerde $\overline{mn}$– $m$ we $n$ sifrli ikibelgili san).

**80.** $ABCD$ dörtburçlugyň içinde çyzylan töweregiň merkezi $O$ nokat bolsun. Eger $AOB$, $BOC$ we $COD$ üçburçluklaryň perimetrleri deň bolsa, onda $ABCD$ dörtburçlugyň rombdygyny subut etmeli.

**81.** Kubuň üsti boýunça bir depeden beýleki depä gapyrga boýunça ýa-da granlaryň diagonallary boýunça geçip tomzak hereket edýär. Eger öz ýoluňy kesmek we bir depeden iki gezek geçmek gadagan edilýän bolsa, onda kubuň bir depesinden gapma-garşylykly depä çenli (iň daşlaşan depä) iň uzyn ýoly tapmaly.

**82.** Tagtada $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ üçagza ýazylypdyr. $p(x)$ üçagzanyň ýerine $\frac{p(x-1)+p(x-1)}{2}$ üçagzany ýazýarlar we berlen üçagzany bozýarlar. Şeýle çalşyrmalaryň birnäçesinden soňra kökleri ýok bolan üçagzanyň alynýandygyny subut etmeli.

**83.** $ABC$ üçburçlugyň $AB$ we $AC$ taraplarynda degişlilikde, $M$ we $N$ nokatlar $BM=MN=NC$ şert ýerine ýeter ýaly edip alnypdyr. $MM_1$ we $NN_1$ kesimler $AMN$ üçburçlugyň bissektrisalary. $M_1N_1 \parallel BC$ bolýandygyny subut etmeli.

**84.** Dürli sanlaryň 10-usy berlipdir. Olaryň 45 jübüt jemleriniň 40-ysy bitin sanlar bolupdyr. Galan bäş jemiň hem bitindigini subut etmeli.

**85.** Diňe 2 we 0 sifrlerden düzülen sanyň derejesiniň birinji natural sandan uly bolmagy mümkinmi?

**86.** $xy+1$, $yx+1$, $zx+1$ doly kwadrat bolar ýaly $x$, $y$, $z$ täk sanlar barmy?

**87.** $W$ töwerekde $ABCD$ dörtburçluk çyzylypdyr. Bu dörtburçlugyň gapma-garşylykly taraplarynyň dowamy $K$ we $N$ nokatlarda kesişýär. $AKN$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek $W$ töwerege galtaşýar şonda we diňe şonda, haçanda $CKN$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek $W$ töwerege galtaşanda. Subut etmeli.

**88.** Bitin sanly gözenekleriň düwünlerinde depeleri bolan üçburçlugyň içinde dogry bir düwün ýerleşipdir. Üçburçlugyň taraplarynda iň köp mukdarda düwünleriň näçesi ýerleşip biler (üçburçlugyň depeleri hem girýär)?

**89.** $n^2$ san üçin onuň ölçegi diýip her bölegi natural sanyň kwadraty bolan onluk böleklere bölünende bölekleriň iň uly mukdaryna (bölek – birnäçe yzygider gelýän sifrler) aýdylýar (birnäçe nollardan başlanmagy mümkindir). 2000-den uly ölçegli kwadrat barmy?

**90.** $l$ göni çyzyk $AB$ kesimi $D$ içki nokatda kesýär. $l$ göni çyzykda $\angle AXD - \angle XAD = \angle BXD - \angle XBD$ şerti kanagatlandyrýan ähli $X$ nokatlary gurmaly (burçlaryň tapawudynyň otrisatel bolmagy mümkindir).

**91.** Tekizlikde hiç bir iki göni çyzyk parallel däl we hiç bir üç göni çyzyk bir nokatdan geçmeýän 2001 göni çyzyk geçirilipdir. Bu göni çyzyklar tekizligi böleklere bölýär. Burç bolýan nähili iň kiçi bölekler şu ýagdaýda alynmagy mümkin?

**92.** Tagtadan biri 2000 bolan bäş san ýazylypdyr. Islendik sany bozmaga we onuň ýerine $a+b$ sany ýazmaga rugsat berilýär, bu ýerde $a$, $b$ we $c$ galan dört sanlaryň haýsy hem bolsa üçüsi. Şeýle operasiýalaryň kömegi bilen her bir dogry 2000-e deň bolan bäş san alyp bolarmy?

**93.** $ABC$ üçburçlukda $O$ nokat içinde çyzylan töweregiň merkezi. $A$ we $C$ nokatlaryň üstünden $AO$ we $CO$ galtaşýan töwerek geçirilen. Bu töwerek bilen $BA$ we $BC$ göni çyzyklaryň ikinji kesişme nokatlarynyň onuň diametriniň uçlary bolýandygyny subut etmeli.

**94.** Goý üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklary $a$, $b$, $c$ bolsun. $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ deňsizligi subut etmeli.

**95.** Eger $x$ we $y$ natural sanlar bolsa, onda ýeke-täk $\frac{x^2+y}{xy+1}$ görnüşde añladyp bolýan ähli natural sanlary tapmaly.

**96.** Üçburçlugyň burçlarynyň sinusy rasional. Olaryň kosinuslarynyň hem rasionaldygyny subut etmeli.

**97.** $O_1$ we $O_2$ merkezli $S_1$ we $S_2$ töwerekler $A$ we $B$ nokatlarda kesişýärler. Goý $S_1$ töweregiň $M$ erkin nokady we $S_2$ töweregi $MA$ göni çyzyk $P$ nokatda kesýän, $S_2$ töweregi $MB$ göni çyzyk $O$ nokatda kesýän bolsun. Eger $AO_1$ $BO_2$ dörtburçlugy töweregiň içinde çyzyp bolýan bolsa, onda $AO$ we $BP$ göni çyzyklar $S_1$ töwerekde kesişýärler. Subut etmeli.

**98.** $P(x^2-1)$ köpagza $P(x)$ köpagza bölner ýaly 2001 derejeli $P(x)$ köpagza barmy?

**99.** $a, b, c$ sanlar üçin $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq$

$$\geq \frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}$$

ikileýin deňsizlik ýerine ýetýär. $a=b=c$ subut etmeli.

**100.** $\frac{1}{p}$ ($p>5$ – ýönekeý) drobuň onluk dagytmasyndan 2000-nji sifri çyzdylar. Netijede, $\frac{a}{b}$ gysgalmaýan drobuň onluk dagytmasyny aldylar. $b$ sanyň $p$ sana bölünýändigini subut etmeli.

**101.** $P_1$ güberçek köpburçlukda $P_2$ güberçek köpburçluk saklanýar. $k=-\frac{1}{2}$ koeffisiýentli $x \in P_2$ nokada görä islendik gomotetiýa bolanda $P_2$ köpburçlugyň iň bolmanda bir depesiniň $P_1$-iň çäginden çykmaýandygyny subut etmeli.

**102.** $S$ depedäki ähli tekiz burçlary $60^0$ uly $SABC$ piramidanyň $ABC$ üçburçly esasynda erkin $O$ nokat alnypdyr. $SAO$, $SBO$, $SCO$ burçlaryň iň bolmanda biriniň $60^0$ kiçidigini subut etmeli.

**103.** Ikinjiden başlap her biri yzyndakydan bitin san %-inde tapawutlanar ýaly 1, 2, ..., 10 sanlary käbir tertipde hatara ýerleşdirip bolarmy?

**104.** Birlikler we ikilikler bolan $N$ sifr tegelek boýunça ýerleşdirilipdir. Yzly-yzyna goýlan birnäçe sifrlerden emele gelen (sagat strelkasynyň ugruna ýa-da sagat strelkasynyň tersine) sanlara şekillendirilen diýilýär. Şekillendirilen sanlaryň arasynda $N$-iň haýsy iň kiçi bahasynda ýazgysy diňe 1 we 2 sifrlerden durýan ähli dörtbelgili sanlar bolar (şeýle hem 1111 we 2222 sanlarda)?

**105.** Güberçek bäşburçlugyň ähli taraplary deň, ähli burçlary bolsa dürli. Bu bäşburçlugyň maksimal we minimal burçlarynyň onuň bir tarapynda ýanaşyk bolýandygyny subut etmeli.

**106.** Ölçegi $n \cdot m$ öýjük bolan gönüburçlukdan ölçegi $(n-1) \cdot (m-1)$ öýjük bolan gönüburçlugyň bölünip alynmagyndan emele gelen $n \cdot m$ ölçegli burçluga figura diýilýär, bu ýerde $m,\ n \geq 2$. Iki oýunçy nobat boýunça gönüburçluk ýa-da kwadrat emele getirýän erkin nol bolmadyk mukdarda öýjükleri reňklemekden ybarat bolan nobat boýunça göçüm edýärler. Göçümi geçirmek ýa-da bir öýjügi iki gezek reňklemek rugsat berilmeýär. Göçümden soň burçlugyň ähli öýjükleri reňklenen bolsa, şol oýunçy utulýar. Dogry oýnalanda oýunçylaryň haýsysy utar?

**107.** Goý $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ we $f$ käbir sanlar, onsoňam $a$, $c$, $e \neq 0$ bolsun, $x$ ähli bahalarynda $|ax+b|+|cx+d|$ we $|ex+f|$ aňlatmalaryň bahalarynyň deňdigi belli. $ad=bc$ deňligi subut etmeli.

**108.** Eger $n$, $n+1$, $n+2$ we $n+3$ sanlaryň her biri öz sifrleriniň jemine bölünýän bolsa, onda $n$ natural san ýagşy diýilýär. (Mysal üçin, $n$=60398-ýagşy). Sekiz bilen gutarýan ýagşy sanyň iň soňky sifriniň öňündäkisiniň dokuz bolmagy hökmanmy?

**109.** Islendik iki setiriň we islendik iki sütüniniň kesişmesindäki öýjükler 3-den az bolmadyk reňk bilen reňklener ýaly edip, 5·5 tagtanyň öýjüklerini 4 reňkde reňkläp bolarmy?

**110.** Islendik üçburçlugy 3-den az bolmadyk böleklere bölüp, olardan deňýanly üçburçluk düzüp bolýandygyny subut etmeli.

**111.** Ahmet we Bagty şeýle oýun oýnaýarlar: olar nobat boýunça $f(x) = x^2 + ax + b$ üçagzanyň $a$ ýa-da $b$ koeffisiýentleriniň birini üýtgedýärler (ulaldýar ýa-da kiçeldýär): Ahmet 1-e, Bagty 1 ýa-da 3-e. Eger göçümden soňra oýunçylaryň birinde bitin köki bolan üçagza alynsa, onda Bagty utýar. Ahmediň oýnuna baglanyşyksyzlykda islendik başlangyç $a$ we $b$ bitin koeffisiýentlerde Bagtynyň utup bilýändigi dogrumy?

**112.** $ABCD$ parallelogramyň $AB$ we $BC$ taraplarynda degişlilikde, $M$ we $N$ nokatlar $AM=NC$ şert ýerine ýeter ýaly edip alnypdyr, $AN$ we $CM$ kesimleriň kesişme nokady $Q$. $D$ burçuň bissektrisasynyň $DQ$-ny subut etmeli.

**113.** $p + \frac{1}{2}q = 2001$ bolan $y = x^2 + px + q$ kwadratik funksiýalar berlen. Olaryň grafikleriniň bir nokatdan geçýändigini subut etmeli.

**114.** Stolda suwly sekiz stakan dur. Bir stakandan beýleki stakana guýup, ondaky suwuň mukdaryny deňleşdirer ýaly islendik iki stakany almaga rugsat berilýär. Şeýle operasiýalaryň kömegi bilen hemme stakandaky suwlary deň etmek mümkindigini subut etmeli.

**115.** $ABC$ üçburçlugyň $AC$ tarapynyň ortasy $D$ nokat, $ABD$ we $CBD$ üçburçluklaryň bissektrisalary bolsa $DE$ we $DF$ bolsun. $BD$ we $EF$ kesimler $M$ nokatda kesişýärler. $DM = \frac{1}{2}EF$ deňligi subut etmeli.

**116.** Stolda 2001 teňňe ýatyr. Iki adam şeýle oýun oýnaýar. Nobat boýunça göçýärler. Göçümde birinji oýunçy stoldan 1-den 99-a çenli islendik täk sany teňňäni, ikinji oýunçy 2-den 100-e çenli islendik jübüt teňňäni alyp bilýär. Kim göçüm edip bilmese şol utulýar. Dogry oýnalanda kim utar?

**117.** 2001·2001 tagtanyň öýjükleri küşt tertibinde gara we ak reňk bilen reňklenipdir, onuň burçundaky öýjükler gara reňkde reňklenendir. Her bir dürli reňkli jübüt öýjükleriň gara öýjüginiň merkezinden çykyp ak öýjügiň merkezine barýan wektor çyzylypdyr. Hemme çekilen wektorlaryň jeminiň nola deňdigini subut etmeli.

**118.** Üçburçlugyň içinde çyzylan töweregiň merkezi bilen üçburçlugyň taraplarynyň birine görä simmetrik nokat bu üçburçlugyň daşynda çyzylan $S$ töwerekde ýatýar. Üçburçlugyň käbir taraplaryna görä $S$ töweregiň merkezine simmetrik nokadyň hem $S$ töwerekde ýatýandygyny subut etmeli.

**119.** Dogry 5000-burçlugyň 2001 depesi reňklenen. Deňýanly üçburçlugyň depeleri bolýan üç reňklenen depäni alyp bolýandygyny subut etmeli.

**120.** $\underbrace{11111...1}_{81\,sifr}$ san 81-e bölünýärmi?

**121.** $M$ nokat $AOB$ ýiti burçuň içki nokady. $M_1$ nokat $OA$ göni çyzyga görä $M$ nokada simmetrik, $M_2$ nokat $OB$ göni çyzyga görä $M$ nokada simmetrik. $AOB$ burçda saklanýan $M_1M_2$ kesimiň bölegi $M_1M_2$ kesimiň uzynlygynyň ýarysyndan kiçidigini subut etmeli.

**122.** Deňlikde sifrler harplar bilen çalşyrylypdyr. Dürli sifrlere dürli harplar degişlidir. Onda $AB{\cdot}CD{=}EEFF$ deňligiň ýerine ýetmeýändigini subut etmeli.

**123.** Gönüburçlugyň taraplarynyň uzynlygy natural san, perimetr we meýdan şol bir san bilen aňladylýar. Şeýle gönüburçluklaryň ählisini tapmaly.

**124.** Ýedi natural sanlar barada şeýle zat belli: islendik alty sanysynyň jemi 5-e bölünýär. Berlen sanlaryň her biriniň 5-e bölünýändigini subut etmeli.

**125.** $ABC$ üçburçlukda $BC$ esasa $AD$ beýiklik geçirilen. $AC>AB$ ýerine ýetýändigi belli. $DC-DB>AC-AB$ subut etmeli.

**126.** a) ýüz gatly öýde iki düwmeli lift gurlan. Eger birinji düwmäni bassaň, biz ýokaryk 7-nji gata galarys, eger ikinji düwmäni bassaň 9-njy gata aşak düşýäris. 1-nji gatdan 72-nji gata nähili düşmeli? Düwmeleri basmagyň yzygiderligini görkezmeli;

b) eger bir düwmäni basanyňda biri 13-nji gata galdyrýar, beýleki düwmäni basanyňda 8-nji gata aşak düşürýän bolsa, ýigrimi gatly öýde 4-nji gatdan 5-nji gata düşüp bolmaýandygyny subut etmeli.

**127.** $AOB$ burçuň $OA$ tarapynda $OC$ we $OK$ kesimler goýlupdyr ($OK>OC$)$OB$ tarapynda bolsa degişlilikde, olara deň bolan $OD$ we $OM$ kesimler goýlupdyr. Goý $CM$ we $DK$ göni çyzyklaryň kesişme nokady $H$ bolsun. $H$ nokadyň $AOB$ burçuň bissektrisasynda ýatmaýandygyny subut etmeli.

**128.** 6-njy synpda algebra boýunça barlag işi geçirildi. Oglanlaryň orta bahasy 4, gyzlaryňky bolsa 3,25, hemmesi bilelikde 3,6 boldy. Eger synpda 30-dan köp, 50-den az adam bar bolsa, näçe oglan we näçe gyz barlag işi ýazypdyr?

**129.** Eger bir üçburçlugyň esasy, esasynyň burçy we gapdal taraplarynyň jemi degişlilikde, beýleki üçburçlugyň esasyna, esasynyň burçuna we gapdal taraplarynyň jemine deň bolsa, onda bu üçburçluklaryň deňdigini subut etmeli.

**130.** $x^7 + x^5 + 1$ köpagzany iki köpeldijä dagytmaly.

**131.** $ABC$ üçburçlukda $A$ we $B$ depelerden geçirilen medianalaryň uzynlyklarynyň jeminiň $AB$ kesimiň uzynlygynyň birýarym essesinden uludygyny subut etmeli.

**132.** Eger $a+b$ we $AB$ sanlar $c$ sana bölünýän bolsa, onda $a^3+b^3$ sanyň hem $c^3$ sana ($a$, $b$, $c$ – bitin sanlar) bölünýändigini subut etmeli.

**133.** Kwadratyň gapma-garşylykly taraplarynda 7 sany deňululykly üçburçluklaryň depeleri ýatar ýaly edip, bu kwadraty 7 deňululykly üçburçluklara bölüp bolarmy?

**134.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$ deňsizligi subut etmeli.

**135.** 1 radiusly töweregi $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ nokatlar 5 deň dugalara bölýär. $\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_3A_5}+\overrightarrow{A_4A_5}$ wektoryň uzynlygyny tapmaly.

**136.** $2x+5y=xy-1$ deňligi kanagatlandyrýan hemme bitin $x$ we $y$ sanlary tapmaly.

**137.** $2^8+2^5\cdot5^6+5^{12}$ sanyň düzme sandygyny subut etmeli.

**138.** Her bir $+1$ ýa-da $-1$ bolan 22 sanyň köpeltmek hasyly 1-e deň. Olaryň jemleriniň 0-dan tapawutlydygyny subut etmeli.

**139.** Töwerek deň 100 böleklere bölünipdir we her bir bölünme nokatda gök ýa-da gyzyl şarjagaz goýlan. Eger $A$ we $B$ iki şarjagazlaryň arasynda dogry dört şarjagaz ýatan we $A$ gök bolsa, onda $B$ gyzyl şarjagazdyr. Gök şarjagazlaryň gyzyl şarjagazlardan köp bolmagy mümkinmi?

**140.** $1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot99$ we $50^{99}$ sanlaryň haýsysy uly?

**141.** $ABC$ üçburçlugyň içinde onuň taraplaryna $A_1$, $B_1$, $C_1$ nokatlarda galtaşýan töwerek çyzylypdyr. $ABC$ we $A_1$, $B_1$, $C_1$ üçburçluklar meňzeş. $ABC$ üçburçlugyň deňtaraplydygyny subut etmeli.

**142.** Karýerde 200 granit plitalar taýýarlanypdyr, olaryň 120 sanysynyň her biriniň 7 tonna agramy, galanlarynyň bolsa 9 tonna agramy bar. Demir ýol platformasyna 40 tonna çenli ýüklemek bolýar. Plitalary äkitmek üçin platformalaryň iň kiçi sanyny tapmaly.

**143.** Eger $y$ we $z$-iň ýönekeý sanlardygy belli bolsa, onda

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}, \\ x=y\cdot z \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny çözmeli.

**144.** Dörtburçlugyň diagonallarynyň özara perpendikulýar bolmaklary üçin dörtburçlugyň orta çyzyklarynyň deň bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini subut etmeli (Dörtburçlugyň gapma-garşylykly taraplarynyň ortalaryny birleşdirýän kesime onuň orta çyzyklary diýilýär).

**145.** Islendik ikisiniň jemi 6-a bölüner ýaly 1-den 100-e çenli natural sanlaryň arasynda iň uly mukdaryny tapmaly.

**146.** $a, b, c$ natural sanlar $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ aňlatmanyň bahasynyň $a+b+c$ jeme kratnydygyny subut etmeli.

**147.** 1004041 sanyň düzmedigini subut etmeli.

**148.** Diagonallaryň jemi we ýiti burçy boýunça romb gurmaly.

**149.** Eger üçburçlugyň daşynda çyzylan töwerekleriň merkezi bolan üç nokat belli bolsa, onda üçburçlugy gurmaly.

**150.** 19° burçy diňe sirkul we çyzgyç ulanyp, 19 deň böleklere bölmeli.

**151.** Jemi olaryň kublarynyň jemine, jemi olaryň kwadratlarynyň jemine, jemi 1-e deň bolan üç sanyň köpeltmek hasylyny tapmaly.

**152.** 19·65 $sm^2$ gönüburçluk taraplaryna parallel göni çyzyklar bilen tarapy 1 $sm$ bolan kwadratjyklara bölünipdir. Eger ýene diagonal hem geçirilse, bu gönüburçluk näçe böleklere bölüner?

**153.** 1-den 49-a çenli täk sanlar tablisa görnüşinde ýazylypdyr:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 41 | 43 | 45 | 47 | 49 |

Hiç bir ikisi bir setirde ýa-da bir sütünde durmaýan bäş san alynýar. Olaryň jemi näçä deň?

**154.** Haýsy san uly: $\dfrac{\overbrace{100\ldots01}^{1965\,\textit{nollar}}}{\underbrace{100\ldots01}_{1966\,\textit{nollar}}}$ ýa-da $\dfrac{\overbrace{100\ldots01}^{1966\,\textit{nollar}}}{\underbrace{100\ldots01}_{1967\,\textit{nollar}}}$?

**155.** Futbol çempionatyna 30 komanda gatnaşýar. Her iki komanda öz aralarynda bir oýun oýnamaly. Islendik pursatda şol pursada çenli deň sany oýun oýnan iki komandanyň tapdyrýandygyny subut etmeli.

**156.** Tagtada 1-den 1966-a çenli ähli bitin sanlar ýazylypdyr. Islendik iki sany bozup, onuň ýerine olaryň tapawudyny ýazmaklyga rugsat berilýär. Şeýle operasiýany köp gezek gaýtalamak bilen tagtada diňe nollar galar ýaly edip bolmaýandygyny subut etmeli.

**157.** Aşgabatda tanyş aşgabatlylarynyň sany deň bolan iki ýaşaýjynyň tapylýandygyny subut etmeli.

**158.** Her biri 16-dan kiçi 8 dürli natural sanlar berlipdir. Olardan mümkin bolan položitel tapawutlar düzülýär. Bu tapawutlaryň arasynda iň bolmanda deň üç sanysynyň tapdyrýandygyny subut etmeli.

**159.** Jübüt-jübütden dürli agramy bolan dört predmet bar. Çeküw daşsyz jamly tereziniň kömegi bäş gezek çekmek bilen bu predmetleri agramlary artýan tertipde ýerleşdirip bolarmy?

**160.** Birnäçe komandalar woleýbol ýaryşyna gatnaşmaga kabul edildi. Eger $A$ komanda $B$-ni utsa, ýa-da eger şeýle $C$ komanda bar bolup, $A$ komanda $C$-ni utsa, $C$ komanda bolsa $B$ komandany utsa, onda $A$ komanda $B$ komandadan güýçli hasap edilýär. Ýeňiji komandanyň beýleki ähli komandalardan güýçlüdigini subut etmeli.

Bellik: woleýbolda deňme-deň bolanok.

**161.** Ýazgysynda noldan başga ähli sifrler bolan dokuz belgili sanyň sifrleriniň käbiriniň orunlary doldurylandan soň, ol 8 esse kiçeldi. Şeýle ähli sanlary tapmaly.

**162.** Üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklary bitin sanlaryň yzygiderligi. Eger onuň bir medianasynyň bissektrisalaryň birine perpendikulýardygy belli bolsa, onda bu üçburçlugyň taraplaryny tapmaly.

**163.** Käbir obada 1970 ýaşaýjy bar. Wagtly-wagtyna olar biri-biri bilen 10 teňňeligi iki bäş teňňelige çalyşýarlar we tersine. Käbir wagt geçenden soň olaryň her biriniň şeýle çalyşmada 10 teňňe bermegi mümkinmi?

**164.** Eger onuň altynjy derejesiniň onluk ýazgysy 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 sifrlerden durýan bolsa, onda şeýle bitin sany tapmaly.

**165.** Haýsysy uly:

$$\underbrace{88\ldots88}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{33\ldots33}_{68\ sifr} \text{ ýa-da } \underbrace{44\ldots44}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{66\ldots67}_{68\ sifr}?$$

**166.** Käbir döwletde islendik iki şäher howa ýa-da suw ýoly bilen birleşdirilipdir. Islendik şäherden islendik galan şäherlere howa ýoly bilen baryp bolýandygyny ýa-da islendik şäherden galan islendik şäherlere suw ýoly bilen baryp bolýandygyny subut etmeli.

**167.** Woleýbol ýaryşyna 12 komanda gatnaşýar. Komandalaryň hiç biri dogry 7 ýeňiş gazanmady. Şeýle $A$, $B$, $C$ komandalar tapylyp, $A$ komanda $B$ komandany utýar, $B$ komanda bolsa *C*-ni utýar, *C* komanda bolsa, *A* komandany utýar. Subut etmeli.

Bellik: woleýbolda deňme-deň ýok.

**168.** Medianalaryň jemi berlende ähli üçburçluklaryň arasyndan beýiklikleriniň jemi iň uly bolan üçburçlugy görkezmeli.

**169.** Alty ýüz altylyk we birnäçe mukdarda nollaryň kömegi bilen ýazylan sanyň doly kwadrat bolup bilmejekdigini subut etmeli.

**170.** Kwadraty 1973 kwadratlara bölüp bolýandygyny subut etmeli.

**171.** Tagtada sifrleriň üç sütüni ýazylypdyr, onsoňam hiç bir san bir sütünde iki gezek ýazylmandyr. Dördünji sütünde birinji iki sütünlerde dogry bir gezek gabat gelýän ähli sanlar ýazylypdyr. Bäşinji sütünde üçünji we dördünji sütünlerde dogry bir gezek gabat gelýän ähli sanlar ýazylypdyr. Altynjy sütünde ikinji we üçünji sütünlerde dogry bir gezek gabat gelýän sanlar, ýedinji sütünde birinji we altynjy sütünlerde dogry bir gezek gabat gelýän sanlar ýazylypdyr. Bäşinji we ýedinji sütünlerde sanlaryň bir mukdarynyň ýazylandygyny subut etmeli.

**172.** 1974 diagonally güberçek köpburçluk barmy?

**173.** Kartonda bir ölçegli birnäçe dogry üçburçluklar kesilen we üçburçluklaryň her biriniň depelerinde 1, 2, 3 sifrler goýlupdyr. Üçburçluklary bir ýerde topbak edip goýdular we olaryň depelerini üýtgetdiler, soňra üýşmegiň her burçundaky sifrleriň jemini hasapladylar. Alnan sanlaryň hemme üçüsiniň aşakdaky sanlara deň bolmagy mümkinmi:

a) 55? b) 50?

**174.** Ylgamaga üç sprinter gatnaşýar: *A*, *B* we *C*. Şunlukda, *C* sprinter startda saklandy we startdan soňky bolup gitdi, ýöne oňa soňra ylgaw prosessinde alty gezek haýsy hem bolsa iki garşydaşyndan ozmak başartdy ýa-da haýsy hem bolsa iki garşydaşlaryň birine $C$-ni ozmak başardýar (startda soňra $A$, $B$ we $C$ sprinterlere bir wagtda bir çyzykda bolmak başardanok). $B$ sprinter ilkibaşda $A$-dan yza galýar, ýöne finişe $A$-dan öň gelýär, ylgaw prosessinde $A$ sprinter bäş gezek garşydaşlarynyň birinden ozup geçýär ýa-da garşydaşlaryň biri ondan ozup geçýär. Sprinterler nähili tertipde finişe geldiler?

**175.** Käbir ýurtda 1974 şäher bar. Paýtagtdan 101 uçar ýoly, $A$ şäherden 1 uçar ýoly, galan hemme şäherlerden 20 uçar ýoly çykýar. Paýtagtdan $A$ şähere çenli uçup bolýandygyny subut etmeli (ýolda şähere gonup hem barmak mümkin).

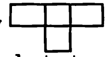
**176.** Ahmet ikibelgili sany ýatdan belledi, Bagty bolsa ony bilmäge çalyşýar. Onuň üçin ol tagtada dürli ikibelgili sanlary ýazýar, Ahmet bolsa, eger ol ýatdan belläni bilen iki onluk razrýadda gabat gelse «+» goýýar, eger birinde bolsa «–» goýýar. Bagtynyň Ahmediň ýatdan bellän sanyny bilmegi üçin tagtada 10-dan köp bolmadyk sany ýazmagynyň ýeterlikdigini subut etmeli.

**177.** $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\ldots+\frac{97}{98}-\frac{99}{100}=$
$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\ldots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}\right)$ subut etmeli.

**178.** a) Ahmet we Bagty 1, 2, 3, 4, 5 sifrleri ulanyp, 20 belgili san ýazdylar. Birinji sifri Ahmet ýazýar, ikinjini Bagty, üçünjini ýene Ahmet we ş.m. Bagty 9-a bölünýän san almak isleýär. Ahmet oňa päsgel berip bilermi?
b) eger ýazylýan 30 belgili san bolsa?

**179.** 100·100 küşt tagtasy bar. Hiç bir ikibir harp hatar durmaz ýaly tagtanyň öýjüklerinde goýup boljak harplaryň iň kiçi sanyny görkezmeli (birinden beýlekisine patyşanyň göçümi bilen geçmek bolanok).

**180.** Küşt tagtasynyň öýjüklerinde sanlaryň her biri özüniň goňşy sanlarynyň orta arifmetik bahasyna deň görnüşde natural sanlar dur. Tagtanyň burçlarynda duran sanlaryň jemi 16-a deň. e2 meýdanda duran sany tapmaly.

**181.** 10·10 küşt tagtasyny  görnüşdäki figura bilen ýapyp bolmaýandygyny subut etmeli.

**182.** *A* şäherden *B* şähere çenli uzaklyk (howa boýunça) 30 km-e deň, *B* şäherden *C* şähere çenli uzaklyk 80 km-e deň, *C*-den *D* çenli 236 km, *D*-den *E* çenli 86 km, *E*-den *A* çenli 40 km. *E*-den *C* çenli uzaklygy tapmaly.

**183.** 1-den 1963-e çenli natural sanlary islendik 2 goňşy san we islendik birinden soň alnan 2 san özara ýönekeý bolar ýaly edip ýerleşdirip bolarmy?

**184.** Üçbelgili sandan onuň sifrleriniň jemini aýyrdylar. Alnan sany hem şonuň ýaly etdiler we ony ýüz gezek dowam etdiler. Netijede, noluň alnandygyny subut etmeli.

**185.** Aralarynda diňe iki birmeňzeş bar bolan kwadrat bilen bütin tekizligi ýapyp bolarmy?

**186.** Tekizlikde 1 *sm* radiusly tegelek, berlen *a, b, c, d, e* göni çyzyklar bu tegelegi kesýär. *X* merkezden 11 *sm* uzaklykda ýerleşýän nokat, *a* göni çyzyga görä *A* nokat *X* nokada simmetrik, *b* göni çyzyga görä *B* nokat *A* nokada simmetrik, ..., *e* göni çyzyga görä *E* nokat *D* nokada simmetrik. *E* nokady tegelegiň içinde ýatyp bilmeýändigini subut etmeli.

**187.** Oýnaýanlaryň ikisi san aýdyşýarlar: birinji bäşden uly bolmadyk natural san aýdýar; ikinji bu sanyň üstüne bäşden uly bolmadyk sany goşup, alnan jemi aýdýar. Onsoň, birinji ýene bäşden uly bolmadyk sany goşýar we ş.m. Kim birinji 100 aýtsa, şol utýar. Utar ýaly birinji oýunçy nähili oýnamaly?

**188.** Okuwçylaryň topary gönüburçluk görnüşde nyzama goýlan. Kalonnalaryň her birinden iň uzyny alynýar we olaryň arasyndan iň gysgasy saýlanýar. Şerengalaryň her birinden iň gysgalary alynýar we olaryň arasyndan iň uzynlary saýlanýar. Iň gysgalarynyň arasynda iň uzyny iň uzynlaryň arasyndan iň gysgasyndan uly bolup bilermi?

**189.** 25 şaryň birmeňzeş daş görnüşi bar. Ýöne olaryň biri agramy boýunça beýlekilerden tapawutlanýar. Jamly terezi bilen çeküw daşsyz iki gezek çekmek bilen onuň beýlekilerden ýeňildigini ýa-da agyrdygyny nähili kesgitlemeli?

**190.** $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ ...\ \cdot98\cdot99\cdot100$ köpeltmek hasyly näçe nol bilen gutarýar?

**191.** $\frac{7^{1968^{1970}}-3^{68^{70}}}{10}$ sanyň bitindigini subut etmeli.

**192.** Islendik 5 bitin sandan jemi 3-e bölünýän 3 sany tapyp bolýandygyny subut etmeli.

**193.** Eger $P$ ýönekeý san we $P>3$ bolsa, onda $P^2-1$ sanyň 24-e bölünýändigini subut etmeli.

**194.** Üç bitin sanlaryň kwadratlarynyň jemi 8-e bölünende 7 galyndynyň galjakdygyny subut etmeli.

**195.** Islendik üç sany köpeldip, üstüne birlik goşanyňda dördünji sana bölünýän şeýle dört natural sany tapmaly.

**196.** Islendik üçüsiniň jemi dördünjä bölünýän dört dürli bitin sanlary tapmaly.

## 9-njy synp üçin olimpiada meseleleri

**197.** Güberçek 100 burçlugyň hiç bir üç diagonaly bir nokatda kesişmeýär. Ony elli diagonal bilen 1200 böleklere bölüp bolýandygyny subut etmeli.

**198.** $n$ sany otrisatel däl $x_1, \dots, x_n$ hakyky sanlar berlen. Eger $x_1+\dots+x_n=n$ bolsa, onda $\frac{x_1}{1+x_1^2}+\dots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\le$ $\le\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n}$ deňsizligi subut etmeli.

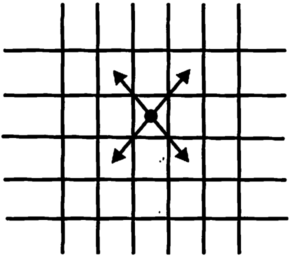
**199.** Yzygiderli bäş natural sanyň köpeltmek hasyly natural sanyň kwadraty bolup bilermi?

**200.** Käbir $a$ we $b$ položitel sanlar üçin

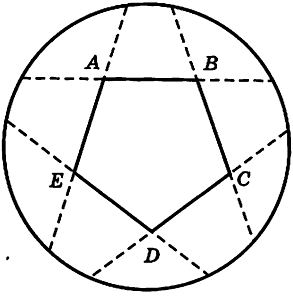
$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ deňlik belli. Islendik $n$ natural

sanlar üçin $\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}}=\frac{1}{(a+b)^{n-1}}$ deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

**201.** $c$-niň hiç bir bahasynda $x(x^2-1)(x^2-10)=c$ deňlemäniň 5 bitin çözüwiniň bolup bilmejekdigini subut etmeli.



**202.** $9\cdot9$ ölçegli tagtanyň öýjükleriniň her birinde tomzak otyr. Jürlewük boýunça tomzaklaryň her biri goňşy öýjükleriň birine (diagonallar boýunça) geçýär. Şunlukda, öýjükleriň käbirinde birnäçe tomzak, käbir öýjükleriň bolsa boş bolmagy mümkin. Eýelenmedik öýjükleriň iň kiçi mümkinçiligini tapmaly.




**203.** Töweregiň içinde hemme taraplary deň bolan $ABCDE$ bäşburçluk ýerleşen. Suratda görkezilişi ýaly, bäşburçlugyň taraplarynyň her biri töwerek bilen kesişýänçä dowam etdirilipdir. $AB$ tarapyň $B$ nokatdan dowamy, $BC$ tarapyň $C$ nokatdan dowamy, $CD$ tarapyň $D$ nokatdan dowamy, $DE$ tarapyň $E$ nokatdan dowamy, $EA$ tarapyň $A$ nokatdan dowamy gyzyl reňk, galan dowamlary bolsa gök reňk bilen reňklenipdir. Gyzyl kesimleriň uzynlyklarynyň jeminiň gök kesimleriň uzynlyklarynyň jemine deňdigini subut etmeli.

**204.** Deň $r$ radiusly $S_1$ we $S_2$ töwerekler $A$ we $B$ nokatlarda kesişýärler. $S_1$ töweregiň $AB$ dugasy $S_2$ töweregiň içinde ýatýan bolsun we ol duganyň ortasyny $K$ nokat bilen belgiläliň. $C$ nokat $S_2$ töweregiň daşynda, $S_1$ töweregiň üstünde ýatýan, $KC$ kesim bolsa $S_2$ töweregi $D$ nokatda kesýän bolsun. $S_{ABCD} \leq r^2$ deňsizligi subut etmeli.

**205.** Töweregiň berlen $BC$ dugasynda erkin $A$ nokat alnypdyr. Eger $ABC$ üçburçlugyň içinden çyzylan töwerek $AB$ we $BC$ taraplara $K$ we $M$ nokatlarda galtaşýan bolsa, onda $KM$ göni çyzygyň töweregiň käbir berkidilen nokadynda galtaşýandygyny subut etmeli.

**206.** Aşakdaky sanlaryň haýsysynyň uludygyny anyklamaly:

a) $79^{\frac{3}{5}} + 1900^{\frac{3}{5}}$ ýa-da $1979^{\frac{3}{5}}$;

b) $100^{101}$ ýa-da $101^{100}$;

ç) $\log_4 5$ ýa-da $\log_5 6$;

d) $\sin^3 1° + \sin^3 4°$ ýa-da $\sin^3 2° + \sin^3 3°$.

**207.** Deňsizlikleri subut etmeli:

a) $4\mathrm{tg}5° \, \mathrm{tg}9° < 3\mathrm{tg}6° \, \mathrm{tg}10°$.

b) $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, bu ýerde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – otrisatel däl hakyky sanlar (Koşi deňsizligi).

ç) $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \leq \left( \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$, bu ýerde $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ položitel sanlar (özgerdilen Koşi deňsizligi).

d) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + 3\frac{z}{x} > \frac{3}{2}$ $(x, y, z > 0)$.

**208.** Deňsizlikler dogrumy?

a) eos 2003 < 1 + cos 2004;

b) $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$;

ç) $\sin 3 \cdot \sqrt[3]{\cos 2} - \sin 2 \sqrt[3]{\cos 3} < \sqrt[3]{\cos 2 \cos 3}$.

**209.** $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{100}{2^{100}}$ aňlatmanyň bahasyny hasaplamaly.

**210.** $\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz, \\ x^2=2(y+z) \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny natural sanlarda çözmeli.

**211.** $a, b, c$ sanlar $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$ gatnaşygy kanagatlandyrýar. $p=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ san nämä deň?

**212.** $ABC$ üçburçlukda $AK$ bissektrisa geçirilen. Eger $ABK$ üçburçlugyň içinde çyzylan we $ABC$ toweregiň daşynda çyzylan töwerekleriň merkezleri gabat gelýändigi belli bolsa, $ABC$ üçburçlugyň burçlaryny tapmaly.

**213.** [0,1] kesimde saklanýan islendik $[a,b]$ kesimde $1+100(b-a)^2$-dan az bolmadyk alnan nokatlar ýatar ýaly [0,1] kesimde nokatlaryň iň uly näçe sanysyny almak bolar?

**214.** Tekizlikde, mysal üçin, birnäçe gyzyl nokatlar alnypdyr. Olardan parallel $\vec{a}$ göçürme bilen şonça gök nokatlar alnan. Gyzyl nokatlaryň her biri kesim bilen käbir gök nokatlara birleşdirilen, onsoňam dürli gyzyl nokat dürli gök nokat bilen birikdirilendir. Eger her bir $K$ gyzyl nokat $\vec{a}$ $(K)$ gök nokat bilen birikdirilen bolsa, onda ähli geçirilen kesimleriň uzynlyklarynyň jeminiň iň kiçi bolýandygyny subut etmeli.

**215.** $(a_k)$ yzygiderlik $a_1=a_2=a_3=1$ we $k>1$ bolanda $a_{k+3}=2a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$ rekurrent usulda berlipdir. $a_{100}$ we bu yzygiderligiň birinji ýüz agzasynyň jemini tapmaly.

**216.** Käbir patyşalykda alty şäher bar. Patyşadan aragatnaşyk ministrligi şeýle buýruk aldy: her bir iki şäheriň arasynda aşakdaky aragatnaşyklaryň birini gurmaly: demir ýoluny, gara ýoluny ýa-da howa ýoluny. Ýöne, patyşanyň keýpi ýok bolara çemeli, ol hiç bir üç şäheri şol bir aragatnaşyk bilen baglanyşdyrylmazlygyny hem-de alty şäheri islendik ýagdnyý-da üç jübüde böleninde jübütlerde ähli aragatnaşyklaryň görnüşiniň dürli bolmazlygyny talap edipdir.

Aragatnaşyk ministrligi patyşanyň buýrugyny ýerine ýetirip bilermi?

**217.** $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ 2 < x^2 < 3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n < x^n < n+1 \end{cases}$ deňsizlikler ulgamynyň iň bolmanda bir çözüwi bolar ýaly iň uly $n$ natural sany tapmaly.

**218.** $a_n = \frac{1}{n}$ yzygiderlikden 1982 agzaly arifmetik progressiýany bölüp almak mümkinmi?

**219.** $ABC$ ýitiburçly üçburçlugyň beýiklikleri $H$ nokatda kesişýärler. $|AB|=c$, $|CB|=a$, $|CA|=b$, $|AH|=x$, $|BH|=y$, $|CH|=z$ belgileme girizeliň. $abc=ayz+bxz+cxy$ deňligi subut etmeli.

**220.** Giňişlikde şekil berlen, onuň islendik tekizlik bilen kesişmesi üçburçluk, kesim, ýa-da boş köplük bolýar. Bu şekiliň üçburçluk, kesim, ýa-da nokat bolýandygyny subut etmeli.

**221.** $3x_{1982}+4$ köpagzany bitin koeffisiýentli üç köpagzanyň kwadratlarynyň jemi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny subut etmeli.

**222.** $ABCD$ güberçek dörtburçluk berlen. $AB$ we $CD$ gönüler $M$ nokatda, $AD$ we $BC$ göni çyzyklar $K$ nokatda kesişýärler. $S_{ABCD} > (|AB|\cdot|CD| \sin\angle AMD + |BC|\cdot|AD| \sin\angle AKB)/2$ deňsizligi subut etmeli.

**223.** $\alpha$, $\beta$ we $\gamma$ islendik bahalary üçin $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ üç sanlaryň iň bolmanda birisiniň $\frac{1}{2}$-den uly däldigini subut etmeli.

**224.** $[0,1]$ kesimde berlen $f(x)$ funksiýanyň $f(0)=f(1)=0$ şerti we islendik $a, b \in [0,1]$ üçin $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a) + f(b)$ deňsizligi kanagatlandyrýandygy belli bolsa, $f(x)=0$ deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwiniň bardygyny subut etmeli. Tożdestwolaýyn nola deň bolmadyk, görkezilen şertleri kanagatlandyrýan funksiýanyň bardygyny anyklamaly.

**225.** Položitel bitin sanlaryň hem tertiplendirilen jübütlerinde kesgitlenen $f(x,y)$ funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe: $f(x,x)=x+2$, $f(x,y)=f(y,x)$ we $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$. Funksiýanyň $f(7, 9)$ bahasyny tapmaly.

**226.** Merdiwanyň on basgançagy bar. Oglan, her bir wagt birliginde bir ýa-da iki basgançaga galýar. Oglan näçe usul bilen ýokaryk çykyp biler?

**227.** Goý a, b $\lg(1+a^2)-\lg a+2\lg 2=1-\lg(100+b^2)+\lg b$ deňligi kanagatlandyrýan hakyky sanlar bolsun. $a+b$ jemi tapmaly.

**228.** Merkezi B-de bolan birlik $ADC$ töwerek $AC$ kesimi diametr hökmünde alnyp gurlan. $BED$ töwerek $AC$ kesime $B$ nokatda $ADC$ töwerege bolsa $D$ nokatda galtaşýar. $A$ nokatdan $BED$ töwerege geçirilen galtaşma $BED$ töwerege $E$ nokatda galtaşýar we $BD$ dowamy bilen $F$ nokatda kesişýär. $AF$-i tapmaly.

**229.** Eger $f(x)=\dfrac{9^x}{9^3+3}$ bolsa, onda

$f\left(\frac{1}{1995}\right)+f\left(\frac{2}{1995}\right)+\ldots+f\left(\frac{1994}{1995}\right)$ jemi tapmaly.

**230.** Goý $x$, $y$ we $z$ položitel sanlar $\begin{cases} x+y=13, \\ y^2+z^2-yz=25, \\ x^2+z^2+xz=144 \end{cases}$

deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrsyn. $z$-iň bahasyny tapyň.

**231.** Goý, $CH$ kesim $ABC$ üçburçlugyň beýikligi bolsun. Goý, $R$ we $S$, degişlilikde, $ACH$ we $BCH$ üçburçluklaryň içinden çyzylan töwerekleriň $CH$ galtaşma nokatlary bolsun. Eger $AB$=1995, $AC$=1994 we $BC$=1993 bolsa, onda $RS$ tapmaly.

**232.** $ABCD$ trapesiýada $AB$ tarap $DC$ tarapa parallel we $S_{\Delta ABC}:S'_{\Delta ACD}=1:3$. Eger $E$ we $F$ degişlilikde, $BC$ we $DA$ taraplaryň ortalary bolsalar $\frac{S_{ABEF}}{S'_{EFDC}}$ drobuň bahasyny tapmaly.

**233.** $ABC$ üçburçlugyň taraplary 3, 4 we 5 birlige deň. $A'$ nokat $BC$ tarapa görä $A$ nokada görä simmetrik bolan nokat. Şonuň ýalyda $B'$ we $C'$ nokatlar, degişlilikde, $CA$ we $AB$ taraplara görä $B$ we $C$ nokatlara görä simmetrik nokatlardyr. $A'B'C'$ üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

**234.** Eger $ABC$ üçburçlukda $AB^2+BC^2+CA^2$ aňlatmanyň san bahasy $ABC$ üçburçlugyň meýdanynyň 5 essesine deň, onda ctg$\angle A$+ctg$\angle B$+ctg$\angle C$ aňlatmanyň bahasyny tapmaly.

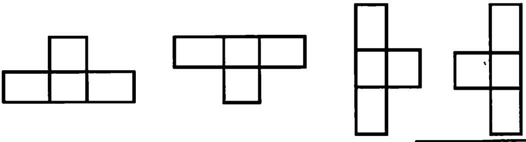
**235.** Töweregiň içinden çyzylan $ABCD$ dörtburçlugyň taraplarynyň uzynlygy deňdir: $AB$=25, $BC$=39, $CD$=52 we $DA$=60. $BD$ dioganalyň uzynlygyny tapmaly.

**236.** Eger $a$, $b$, $c$ – berlen $x^3-2x^2-3x-4=0$ deňlemäniň üç dürli kökleri bolsa, onda $\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

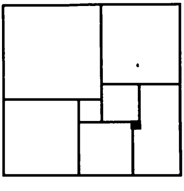
**237.** Ýüz sany hakyky sanyň jemi nola deň. Ol sanlary $a_1 \geq 0$, $a_1+a_2 \geq 0$, $a_1+a_2+ \dots a_{99} \geq 0$ bolar ýaly edip belgiläp boljakdygyny subut ediň.

**238.** $2^{2006}+1$ sany, her biri 1000-den kiçi bolmadyk iki natural sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde dagadyp ýazyň.

**239.** 6·6 ölçegli kwadratyň öýjüklerinde 1-den 36-a çenli sanlary, aşakdaky görnüşli ähli şekillerdäki sanlaryň jemi 2-ä bölüner ýaly edip ýerleşdirip bolarmy?



**240.** Gönüburçluk suratda görkezilişi ýaly edilip kwadratlara bölünipdir. Seredilen kwadratyň meýdanynyň 1 mm$^2$ deňligi belli bolsa gönüburçlugyň taraplarynyň uzynlyklaryny tapyň.



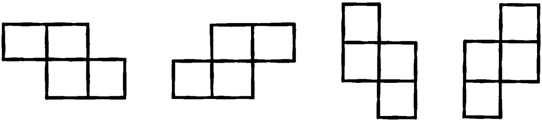
**241.** $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ görnüşli ähli ýönekeý sanlary tapyň. Bu ýerde $n$ natural san we $[X]$ ýazgy $X$ sanyň bitin bölegini aňladýar.

**242.** Jemi hasaplamaly:
$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{99}{100!}$.

**243.** $ABC$ üçburçlugyň $BC$, $CA$, $AB$ taraplarynyň üstünde degişlilikde $A_1$, $B_1$, $C_1$ nokatlar $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ kesimler $O$ nokatda kesişer ýaly we $AO{\cdot}A_1O=BO{\cdot}B_1O=CO{\cdot}C_1O$ deňlik ýerine ýeter ýaly edilip alnypdyr. $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ kesimleriň $ABC$ üçburçlugyň beýiklikleridigini subut ediň.

**244.** Deňlemeler ulgamyny çözüň:
$$\begin{cases}4x^2-3y=xy^3;\\ x^2+x^3y^2=2y.\end{cases}$$

**245.** 6·6 ölçegli kwadratyň öýjüklerinde 1-den 36-a çenli sanlary, aşakdaky görnüşli islendik şekildäki sanlaryň jemi 9-a bölüner ýaly edip ýerleşdirip bolarmy?



**246.** Töwerek boýunça birnäçe (üçden az bolmadyk) san ýazylypdyr. Bu sanlaryň her biri onuň iki gapdalynda duran iki sanyň köpeltmek hasylyna deň. Näçe san ýazylypdyr?

**247.** $\frac{\alpha}{\beta}\geq\frac{\gamma}{\alpha}$ şerti kanagatlandyrýan islendik $\alpha>1$, $\beta>1$, $\gamma>1$ sanlar üçin $\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}\geq\frac{\lg\gamma}{\lg\alpha}$ deňsizligiň ýerine ýetýänligini subut ediň.

**248.** $x_1$, $x_2$, ... yzygiderlik $x_1=0$, $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$, $n=1, 2, \ldots$ rekurrent usul bilen berlipdir. Yzygiderligiň ähli agzalarynyň bitin sanlardygyny subut ediň.

249. Islendik $t$ san üçin $t^4 - t + 0,5 > 0$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

250. Güberçek dörtburçlugyň iki gapma-garşylykly tarapynyň ortasyndan geçýän göni çyzyk dörtburçlugyň diagonallary bilen deň burçy emele getirýär. Diagonallaryň deňdigini subut etmeli.

251. Senatda 30 senator bar. Olaryň islendik ikisi dost ýa-da duşman. Senatorlaryň her biri başga dogry altysy bilen duşman. Senatorlaryň her üçüsi komissiýa emele getirýär. Hemme üç agzasy jübüt-jübütden dost ýa-da hemme üçüsi jübüt-jübütden duşman bolan komissiýalaryň umumy sanyny tapmaly.

252. a) gönüburçluk bolmadyk 15-e deň köpburçluklara bölüp bolýan gönüburçluk barmy?

b) görkezilen şertli kwadrat barmy?

253. 1990·1990 jedweliň merkezine görä simmetrik öýjükler dürli reňkde bolup, onuň islendik setirinde we islendik sütüninde deň gara we *AK* öýjükler bolar ýaly onuň öýjüklerini *AK* we gara reňk bilen reňkläp bolarmy?

254. Jemi 1-e deň bolan islendik $a_1, a_2, \dots, a_n$ položitel sanlar üçin $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$ deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli.

255. [0; 1] kesimiň uçlarynda iki çekirtge otyr. Kesimiň içinde birnäçe nokatlar bellenipdir. Çekirtgeler kesimde bellenen nokatlar boýunça böküp bilýär: çekirtgeleriň bökmezden öňki we böküşden soňky ýagdaýy olaryň bökýän bellenen nokatlaryna görä simmetrikdir, onsoňam [0; 1] kesimden çykmaýan böküş etmeklige rugsat berilýär. Çekirtgeleriň her biri biri-birine baglanyşyksyz böküp ýa-da ýerinde galyp bilýär. [0; 1] kesimiň bellenen kesimler bilen bölünen kesimleriniň birinde elmydama iki çekirtgäniň hem bile bolmagy üçin böküş etmäniň iň az sanyny görkezmeli.

**256.** 1, 2, ... , 1990 daşlardan durýan 1990 üýşmek bar. Bir ädimde islendik üýşmekleriň toplumyndan daşlaryň deň sanyny zyňmaga rugsat berilýär. Daşlaryň hemmesini zyňyp bolýan ädimleriň iň az sanyny görkezmeli.

**257.** $f(x)=ax^2+bx+c$ kwadrat üçagzanyň hemme koeffisiýentleri položitel we $a+b+c=1$. $x_1\cdot ... \cdot x_n=1$ deňligi kanagatlandyrýan islendik $x_1, x_2, ... ,x_n$ položitel sanlar üçin $f(x_1)\cdot ... \cdot f(x_n)\geq 1$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

**258.** Meýdany 1-e deň bolan tegelegiň içinde 2005 sany nokat ýatyr. Bu nokatlaryň arasyndan depeleri şu üç nokatda bolan üçburçlugyň meýdany 0,001-den kiçi bolar ýaly üç nokady saýlap alyp bolýandygyny subut etmeli.

**259.** Hemme $x$ we y hakyky sanlar üçin

$$f((x+y)^2)=f(x^2)+f(y^2)+2xy \qquad (1)$$

deňligi kanagatlandyrýan hakyky sanlar köplüginde kesgitlenen ähli $f$ funksiýalary tapmaly.

**260.** Hakyky sanlaryň köplüginde kesgitlenen we islendik $x$, $y$ üçin

$$f(x+2^y)=f(2^x)+f(y) \qquad (2)$$

deňligi kanagatlandyrýan hemme $f(x)$ funksiýalary tapmaly.

**261.** Islendik $x$ we $y$ hakyky sanlar üçin

$$f(x+f(y))=y^2+f(x) \qquad (6)$$

deňligi kanagatlandyrýan hemme $f : R\to R$ funksiýalary tapmaly.

**262.** Goý $Q^+$ položitel rasional sanlaryň köplügi bolsun. $x \in Q^+$ üçin:

1) $f(x+1)=f(x)+1$;

2) $f(x^2)=f^2(x)$

şertleri kanagatlandyrýan $f$: $Q^+\to Q^+$ funksiýany tapmaly.

**263.** Iki $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$ we $\{g(1), g(2), ... g(n), ...\}$ köplükleriň birleşmesi bolan ähli $N$ natural sanlaryň köplügi berlen we $f(1)<f(2)< ... <f(n)< ...$, $g(1)<g(2)< ... < g(n) < ...$

şertler ýerine ýetýän bolsun, onsoňam $n \in N$ üçin

$$g(n)=f(f(n))+1 \qquad (16)$$

deňlik ýerine ýetýän bolsun. $f(240)$-y tapmaly.

**264.** $f{:}Z \to Z$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrýar:

1) islendik $n$ bitin sanlar üçin $f(f(n))=n$;

2) islendik $n$ bitin sanlar üçin $f(f(n+2)+2)=n$;

3) $f(0)=1$.

$f(1995)$ we $f(-1994)$ bahalary tapmaly.

**265.** Kletkaly kagyza birnäçe kletkalardan ybarat bolan figura çekilipdir. Iki oýunçy nobat boýunça onuň kletkalaryna atanak we nol goýýarlar. Kim öz belgisiniň 3-üsini yzygider wertikal, gorizontal ýa-da diagonal boýunça goýsa, şol utýar. Dogry oýnalanda elmydama birinji oýunçy utar ýaly figuradaky kletkalaryň iň kiçi sany näçe bolmaly?

**266.** Hakyky koeffisiýentli iki köpagza şol bir nokatlarda bitin bahalary kabul edýär. Ýa olaryň jeminiň, ýa-da tapawudynyň hemişelikdigini subut etmeli.

**267.** $ABC$ üçburçlugyň $AB$, $AC$, $BC$ taraplarynda $AB_1C_1$, $A_1BC_1$, $A_1B_1C$, $A_1B_1C_1$, üçburçluklaryň perimetrleri deň bolar ýaly degişlilikde $C_1$, $B_1$, $A_1$ nokatlar alnypdyr. $A_1B_1C_1$nokatlaryň $ABC$ üçburçlugyň taraplarynyň ortasydygyny subut etmeli.

**268.** Meýdançada 18 adam ýygnanypdyr. Olardan 4-üsi tanyş bolup, 4-üsi nätänyş adamlaryň tapyljakdygyny subut etmeli (her bir iki adam tanyş, ýa-da nätanyş).

**269.** $a_n = 2\sqrt{a_{n-1}^2 - a_{n-1}^4}$ rekurrent formula bilen yzygiderlik berlipdir we $o<a_o<a_1<......<a_{26}$ belli. $a_o<7{\cdot}10^{-8}$ subut etmeli.

**270.** $5^n$ sanyň onluk ýazgysynyň sifrleriniň arasynda iň bolmanda yzygider 1968 nol bolan $n$ natural sany tapmaly.

**271.** Tetraedranyň içki nokadyndan onuň depelerine çenli uzaklyklaryň jemi onuň gapyrgalarynyň uzynlyklarynyň jeminden kiçidigini subut etmeli.

**272.** 1,5 radiusly tegelegi ýapar ýaly 1 radiusly tegelekleriň iň kiçi sanyny görkezmeli.

**273.** $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ bitin koeffisiýentli köpagzalar. $f_1(a)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(a)$ düzme sanlar bolar ýaly şeýle bir bitin $a$ sanyň bardygyny subut etmeli.

**274.** $x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n$ şerti kanagatlandyrýan islendik $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ natural sanlar üçin

$$\frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} <$$

$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

**275.** $abc=1$, $a^3>36$. $\frac{2}{3}a^2 < a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ deňsizligi subut etmeli.

**276.** Bir aldawçy kwadrat görnüşli ýer alypdyr we onuň daşyny haýat aýlapdyr we ynanjaň oba arçynyndan birnäçe gezek aşakdaky operasiýalary ýerine ýetirmäge rugsat berýän kagyz alypdyr: haýadyň iki nokadyndan göni çyzyk geçirilmeli, göni çyzygyň bir tarapy boýunça iki nokadyň arasyndaky haýady ýykmaly we göni çyzyga görä ýykylan haýadyň bölegine simmetrik edil şonuň ýaly bölek haýady göni çyzygyň beýleki tarapynda gurmaly. Şunuň ýaly ýol bilen ol öz ýeriniň meýdanyny giňeldip bilermi?

**277.** $A$, $B$, $C$ – töweregiň nokatlary we $|AC|=|BC|$, $P$ – töweregiň üçki nokady we $APC>BPC$.
$|AP|<|BP|$ deňsizligi subut etmeli.

**278.** $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ položitel sanlar,
$x^4+a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-...-a_n=0$ deňlemäniň 2 položitel kökünüň bolup bilmeýändigini subut etmeli.

**279.** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hakyky sanlar. Islendik $k$ natural san üçin $1 \le k \le n$, $A_k$ bilen $a_k, \dfrac{a_{k-1}+a_k}{2}, \ldots, \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ sanlaryň iň ulusyny belgiläliň. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sanlaryň iň kiçisiniň hemme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanlaryň orta arifmetiginden uly däldigini subut etmeli.

**280.** $ABC$ üçburçlugyň $A$ depesinden erkin $l$ göniçyzyk geçirilen. $B$ we $C$ depäniň bu göni çyzyga proýeksiýasyny $B_1$ we $C_1$ bilen, $B_1$ nokadyň $AC$ göni çyzyga proýeksiýasyny $B_2$ bilen, $C_1$ nokadyň AB göni çyzyga proýeksiýasyny $C_2$ bilen belgiläliň. $B_1B_2$ we $C_1C_2$ göni çyzyklaryň kesişme nokadynyň $ABC$ üçburçlugyň beýiklikleriniň birinde ýa-da onuň dowamynda ýatýandygyny subut etmeli.

**281.** Tegelek boýunça jemi 1-e deň bolan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bitin sanlar ýerleşen. Her bir $k$ üçin $N_k$ bilen $b_k, b_k+b_{k+1}, +\ldots+b_n, b_k+\ldots+b_n+b_1, \ldots, b_k+\ldots+b_n+b_1+\ldots+b_{k-1}$ sanlaryň arasyndaky položitel sanlaryň mukdaryny belgiläliň. Hemme $N_k$-nyň dürlüdigini subut etmeli.

**282.** $x^3+y^3+z^3=2$ deňlemäniň tükeniksiz köp bitin kökleriniň bardygyny subut etmeli.

**283.** Natural $k$ sanyň haýsy bahasynda $\dfrac{k^2}{(1{,}01)^k}$ iň uly baha eýe bolýar?

**284.** Yzygider 99 dokuzlyk ýazylypdyr. Sag tarapyna ýene dogry 100 sifr ýazyp, alnan 199-belgili sanyň doly kwadrat bolýandygyny subut etmeli.

**285.** $ABCD$ güberçek dörtburçlugyň $BC$ tarapynyň üstünde $M$ nokat alnan. $ABD$, $AMD$ we $ACD$ üçburçluklaryň içinden çyzylan töwerekleriň arasynda iň bolmanda deň bolmadyk ikisiniň bardygyny subut etmeli.

**286.** Berk artýan natural sanlaryň yzygiderliginde her bir san üçünjiden başlap, öňündäki haýsy hem bolsa iki sanyň jemine deň. Bu yzygiderlikde tükeniksiz köp düzme sanlaryň bardygyny subut etmeli.

**287.** Bäş otrisatel däl sanlaryň jübüt-jübütden tapawutlarynyň absolýut ululyklarynyň jemi 1-e deň. Bu sanlaryň jeminiň iň kiçi bahasyny tapmaly.

**288.** Tekizlikde $2k+3$ nokat şeýle ýerleşipdir: hiç bir üç nokat bir göni çyzykda, hiç bir dört nokat bir töwerekde ýatmaýar. Käbir üç nokatdan geçýän töweregiň içinde berlen nokatlaryň dogry k sanysynyň ýatýandygyny subut etmeli.

**289.** Bütin koeffisiýentli $a_0x^k+a_1x^{k-1}+...+a_{k-1}x+a_k=p$ deňlemäniň $p=1$, $p=2$, $p=3$ bolanda bütin kökleri bar. $p=5$ bolanda deňlemäniň birden köp bütin kökünïň ýokdugyny subut etmeli.

**290.** Bir tegelekde birnäçe komanda woleýbol ýaryşyny geçirdiler. Haýsy hem bolsa iki $A$ we $B$ komanda alnyp, eger $A$ komanda $B$-ni utsa, onda $B$-ni utýan we $A$-dan utulan käbir $C$ komanda bardyr. Bu ýaryşa nähili iň kiçi sanly komanda gatnaşyp biler?

**291.** Tarapy 1-e deň bolan kwadratyň içinde dörtburçluk çyzylypdyr. Dörtburçlugyň içinde tarapy birinji kwadratyň tarapyna parallel we $\frac{1}{2}$-e deň bolan kwadrat çyzylan. Içki kwadratyň depesiniň dörtburçlugyň taraplarynyň ortasy bolýandygyny subut etmeli.

**292.** Goý, tekizlik taraplarynyň uzynlygy 1-e deň bolan öýjüklere bölünen bolsun. Tekizlikde tarapy $a$ deň bolan kwadrat ýerleşdirýärler. Bu kwadratyň depeleriniň sany $(a+1)^2$ sandan köp bolmadyk öýjükleri ýapýandygyny subut etmeli.

**293.** Planetanyň üstünden şar görnüşli 37 asteroid (nokat) uçýar. Wagtyň islendik pursadynda planetanyň üstünden 17-den az bolmadyk asteroidler görünýän nokadyň tapylýandygyny subut etmeli.

**294.** Käbir adamlaryň toparynda deň tanyşlary bolan (bir toparda) her iki adamyň umumy tanyşlary ýok. Bu toparda ýa-ha hemmesini biri-birini tanamaýandygyny ýa-da haýsy hem bolsa biriniň diňe bir tanşynyň bardygyny subut etmeli.

**295.** Gönüburçly tablisanyň öýjüklerine natural sanlar ýazylypdyr. Islendik setiriň hemme sanlaryny iki esse artdyrmaga we islendik sütüniň hemme sanlaryndan 1-i aýyrmaga rugsat berilýär. Şeýle hem operasiýalaryň kömegi bilen diňe nollardan durýan tablisany almak bolýandygyny subut etmeli.

**296.** Kwadratyň taraplary yzygider 1, 2, 3, 4 sanlar bilen belgilenipdir. Erkin $A$ nokat we $K$ tarap üçin $A$ nokada görä $k$ nokada $A$ nokatlaryň simmetrik proýeksiýalaryny $A_k$ bilen belgiläliň. $A_1$, $A_{12}$, $A_{123}$, $A_{1234}$, $A_{12341}$, $A_{123412}$ we ş.m. nokatlaryň her biri berlen kwadratyň içinde ýatýan ähli şeýle $A$ nokatlary tapmaly.

**297.** 100-den kiçi 100 natural sanyň jemi 200-e deň. Bu sanlardan jemi 100-e deň bolan birnäçe sanlary saýlap alyp, bolýandygyny subut etmeli.

**298.** $a, b, c, p$ sanlaryň $a^2+b^2=1$, $c^2+p^2=1$, $ac+bp=0$ şertleri kanagatlandyrýandygy belli. $ab+cp$ tapmaly.

**299.** $A$ nokat berlen we bu nokada degişli bolmadyk jübüt-jübütden kesişmeýän dört şar bar. $A$ nokatdan çykýan islendik şöhle bilen şarlaryň birisini kesip bilermi?

**300.** $x_0=0$, islendik $k$ natural san üçin $|x_k|=|x_{k-1}+1|$ deňligi kanagatlandyrýan $x_0$, $x_1$, ... yzygiderlik berlen. $x_1+x_2+x$... ...$x_{1975}$ haýsy iň kiçi baha eýe bolýar?

**301.** $ABC$ üçburçlugyň $BC$, $AC$, $AB$ taraplarynda $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ kesimler $D$ nokatda kesişer, $A_1C_1$ we $BB_1$ kesimler bolsa $E$ nokatda kesişer ýaly edip, $A$, $B$, $C$ nokatlar saýlap alnan. Eger $|BD|=2|B_1D|$ bolsa, onda $|BE|=|B_1E|$ deňligi subut etmeli.

**302.** $x_0$, $x_1$, ... , $x_p$ sanlaryň her biri 0-a ýa-da 1-e deň.

$$x_0+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+\frac{x^p}{(\sqrt{2})^p}\le(1+\sqrt{2})\sqrt{x_0+\frac{x_1}{2}+\ldots+\frac{x_p}{2^p}}$$

deňligi subut etmeli.

**303.** *ABCDE* deňtaraply güberçek bäşburçlukda $ACE=\frac{1}{2}BCD$. *ACE*-ni tapmaly.

**304.** Islendik $x, y, z \in [0,1]$ üçin $3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2xyz(x+y+z)\le 3$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

**305.** $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ sanyň bitin sandygyny subut ediň we onuň näçä deňdigini tapyň.

**306.** Üçburçlugyň iki beýikliginiň uzynlyklarynyň jemi bu beýiklikleriň inderilen taraplarynyň uzynlyklarynyň jeminden uly bolup bilermi?

**307.** Goý, *N* san 9-dan uly käbir natural san bolup, onuň ähli sifrleri täk bolsun. *N* san natural sanyň kwadraty bolup bilermi?

**308.** *ABCD* we *AKLM* kwadratlaryň (depeler sagat diliniň ugruna görkezilendir) umumy *A* depesi bar. Olaryň merkezleriniň we *BM* hem-de *DK* kesimleriň ortalarynyň käbir kwadratyň merkezidigini subut ediň.

**309.** Sifrleriniň jemi 25-e deň bolan we 11-e bölünýän ähli üçbelgili sanlary tapyň.

**310.** Futbol ýaryşynda 18 komanda özara 8 gezek duşuşypdyr, ýagny her komanda 8 dürli komanda bilen oýnapdyr. Özara duşuşmadyk 3 komandanyň bardygyny subut ediň.

**311.** $a\le b\le c$ şerti kanagatlandyrýan üç sanyň jemi 0-a deň. $ax+by+c<0$ deňsizlik $x\le y\le z$ şerti kanagatlandyrýan iň bolmanda bir çözüwe eýe bolup bilermi?

**312.** $2n+1$ we $3n+1$ sanlar käbir bitin sanlaryň kwadratlary bolar ýaly edip, $n$ natural san saýlanyp alnypdyr. $5n+3$ ýönekeý san bolup bilermi?

**313.** Uzynlyklary 1-e deň bolan $AB$ we $CD$ kesimler, $\angle AOC=60°$ bolar ýaly $O$ nokatda kesişýärler. $AC+BD \geq 1$-i subut ediň.

**314.** $f(x)$ kwadrat üçagzany $x^2 f\left(\frac{1}{x}+1\right)$ ýa-da $(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ üçagzalaryň biri bilen çalyşmaga rugsat edilýär. Şeýle operasiýalaryň kömegi bilen $x^2+4x+3$ kwadrat üçagzadan $x^2+10x+9$ üçagzany alyp bolarmy?

**315.** $x$, $y$ we $z$ bitin sanlar $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$ şerti kanagatlandyrýar. $x+y+z$ sanyň 27-ä bölünýändigini subut ediň.

**316.** Sanlaryň haýsysy uly:
$20042004 \cdot 200520052005$ ýa-da $20052005 \cdot 200420042004$?

**317.** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2005}$ droblaryň jemi bolan drob gysgalmaýan drob görnüşine getirilenden soňra onuň sanawjysy täk san bolarmy ýa-da jübüt san?

**318.** Tegelekde 1-den 2002-ä çenli sanlary, islendik 11 sany yzygiderli duran sanlaryň arasynda iň bolmanda ikisi 7-ä bölüner ýaly edip ýerleşdirip bolarmy?

**319.** Trapesiýanyň diagonaly ony iki sany özara meňzeş üçburçluga bölýär. Trapesiýanyň gapdal taraplarynyň gatnaşygy 2-ä deň. Trapesiýanyň esaslarynyň gatnaşygyny tapyň.

**320.** $5^n-1$ görnüşli san $4^n-1$ görnüşli sana bölünip bilermi?

**321.** Gutynyň içinde birmeňzeş şarlaryň birnäçesi bar. Haçanda bu şarlary deňtaraply üçburçluk görnüşinde ýerleşdirenlerinde 51 şar artyp galdy. Emma üçburçlugyň her bir tarapyny 1 şar artdyrmak üçin 12 şar ýetmedi. Gutuda näçe şar bar eken?

**322.** Ýitiburçly üçburçlugyň her bir tarapynyň ortasyndan beýleki iki tarapa perpendikulýarlar geçirilipdir. Bu perpendikulýarlar bilen çäklenen altyburçlugyň meýdanynyň üçburçlugyň meýdanynyň ýarysyna deňligini subut ediň.

**323.** Haçanda ikibelgili sanyň sifrleriniň jemini onuň kwadraty bilen goşanlarynda ol ikibelgili sanyň özi alyndy. Ol ikibelgili sany tapyň.

**324.** Haýsy üçbelgili san onuň sifrlerinden (gaýtalamazdan) düzülen ikibelgili sanlaryň jeminiň ýarysyna deňdir?

**325.** $a$, $b$, $c$ nähili bolanda $f(x)=ax^2+bx+c$ funksiýa, islendik $x$, $y \in Z$ üçin $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ şerti kanagatlandyrýar?

**326.** $n^2+2n$ san 4 sifr bilen tamamlanýar. Onuň iň soňky sifriniň öň ýanyndaky sifri tapyň.

**327.** Merkezleri $O_1$ we $O_2$ nokatlarda bolan $w_1$ we $w_2$ töwerekler $A$ nokatda kesişýärler. $O_1A$ göniçyzyk $w_2$ töweregi $K_2$ nokatda, $O_2A$ göni çyzyk bolsa $w_1$ töweregi $K_1$ nokatda kesýär.

$\angle O_1O_2A=\angle K_1K_2A$ deňligi subut ediň.

**328.** Ýyldyzjyklaryň ornuna arifmetiki amallaryň belgilerini goýup, $A$ natural sany tapyň: $83*A*97=8784$.

**329.** $2^{62}+1$ san $2^{31}+2^{16}+1$ sana bölünýärmi?

**330.** $a$-nyň we $b$-niň haýsy bahalarynda aşakdaky deňsizlik dogry $a^2+ab+b^2>3(a+b-1)$?

**331.** $a$, $b$, $c$, $d$ sanlar $a+b+c+d=7$ we $a^2+b^2+c^2+d^2=13$ deňlikleri kanagatlandyrýar. $d$ san haýsy iň uly bahany alyp biler?

**332.** Goý, gönüburçly üçburçlugyň katetleri $a$ we $b$ gipotenuzasy $c$ bolsun. Eger gipotenuza inderilen beýiklik $h$ bolsa, onda $c+h>a+b$ subut ediň.

**333.** $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň hakyky kökleri ýok we $a+b+c<0$. Onda $c$ sanyň alamatyny kesgitläň.

**334.** $ABCD$ gönüburçluk berlipdir. Ol gönüburçlugyň içinden alnan erkin nokadyň üstünden onuň taraplaryna parallel göni çyzyklar geçirilipdir. Ol göni çyzyklar berlen gönüburçlugy dört sany kiçi gönüburçluga bölýär. $A$ we $C$ nokatlary saklaýan iki gönüburçlugyň iň bolmanda birisiniň meýdanynyň berlen gönüburçlugyň meýdanynyň $\frac{1}{4}$-inden uly däldigini subut ediň.

**335.** Eger matematika gurnagyndaky gyzlar onuň: a) 50% az, ýöne 40% köp; b) 44% az, ýone 43% köp bölegini düzýän bolsa, onda gurnagda iň az näçe okuwçy bolup biler?

**336.** Hudaýberdi gorkak bir gazan palawy 10 minutda, bir käse baly 13 minutda we bir çöregi 14 minutda iýip bilýär. Döw bolsa bir gazan palawy 6 minutda, bir käse baly 6 minutda we bir çöregi 7 minutda iýip bilýär. Olaryň ikisi bilelikde bir gazan palawy, bir käse baly we bir çöregi iň az näçe wagtda iýip biler?

**337.** Birnäçe ýaşigiň massasy 10 tonna deň. Bu ýaşikleriň her biriniň massasy bir tonnadan agyr däldir. Bu ýüki bir gezekde äkitmek üçin üçtonnalyk ýük maşynlarynyň iň az näçe sanysy gerek bolar?

**338.** Bir adam her aý özüniň girdejisini we çykdajysyny ýazypdyr. Islendik yzly-yzyndan gelýän 5 aýda onuň çykdajylary girdejilerinden köp, emma bir ýylda onuň girdejisi çykdajysyndan köp bolup bilermi?

**339.** 403 sany, olaryň köpeltmek hasyly hem 403 bolar ýaly, birnäçe natural sanlaryň jemi görnüşinde ýazyp bolarmy?

**340.** a) birnäçe sanyň jemi 1-e deň. Ol sanlaryň kublarynyň jemi 1-den uly bolup bilermi?

b) birnäçe sanyň jemi 1-e deň. Eger ol sanlaryň her biri 1-den kiçi bolsa, onda olaryň kublarynyň jemi 1-den uly bolup bilermi?

**341.** Bir üçburçlugyň ähli taraplary 1 santimetrden kiçi, beýleki bir üçburçlugyň bolsa ähli taraplary 100 metrden uly. Birinji üçburçlugyň meýdany ikinji üçburçlugyň meýdanyndan uly bolup bilermi?

**342.** a) üçburçlugyň ähli üç beýikligi 1 santimetrden kiçi, emma onuň meýdany 100 $sm^2$ bolup bilermi?

b) üçburçlugyň ähli üç beýikligi 2 santimetrden uly, emma onuň meýdany 2 $sm^2$-dan kiçi bolup bilermi?

**343.** Aşakdaky tassyklama dogrumy: güberçek dörtburçlugyň içinde ýatan islendik nokatdan onuň depelerine çenli uzaklyklaryň jemi onuň perimetrinden kiçidir?

**344.** Deňýanly gönüburçly üçburçlugy oňa meňzeş, emma özara deň bolmadyk birnäçe üçburçluga bölüp bolarmy?

**345.** Köp birmeňzeş tegelek teňňeler bar:

a) 24 teňňäni; b) 25 teňňäni, olaryň üçüsi bir-birine galtaşar ýaly edip, tekizlikde ýerleşdirip bolarmy?

**346.** Üç dost bir-biri bilen birnäçe döw küşt oýnapdyrlar. Şonda her iki oýunçy bir-biri bilen deň döw küşt oýnapdyrlar. Soňra olar kimiň ýeňiji bolanlygyny kesgitläp başlapdyrlar. Olaryň birinjisi «Men siziň her biriňiz bilen deňeşdireniňde köp döwde utuş gazandym» diýipdir. Olaryň ikinjisi «Men siziň her biriňiz bilen deňeşdireniňde az döwi utdurdym» diýipdir. Olaryň üçünjisi dymypdyr. Emma oçkolar sanalanda onuň iň köp oçko toplanlygy belli bolupdyr. Şeýle bolup bilermi? (Oçkolar aşakdaky ýaly sanalypdyr: utuş – 1 oçko, deňlik – 0,5 oçko, utulyş – 0 oçko).

**347.** Matematiki gurnagyň her maslahatyndan soň onuň agzalarynyň birnäçesi (gurnagyň agzalarynyň ählisi däl we gurnagyň diňe bir agzasy däl) doňdurma iýmek üçin kafe girýärdiler. Şunlukda, bu gurnagda aşakdaky ýaly berk düzgün saklanýardy: kafe giren her iki okuwçy soňra bilelikde doňdurma iýmeli däl. Gurnagyň iň soňky maslahatynda onuň agzalarynyň diňe ýekelikde doňdurma iýip biljekdikleri ýüze çykaryldy.

a) eger gurnagyň 4 agzasy bolsa, onuň näçe maslahaty bolupdyr? (Mümkin bolan ähli jogaplary getiriň).

b) eger gurnagyň 7 agzasy bar bolsa, onda kafe 7 gezek girmegiň tertibini düzüň.

**348.** Amyderýanyň üstünden bir süri ak gaz uçup barýardy. Derýanyň her bir adajygynda gazlaryň ýarysy we ýene-de ýarym gaz gonup, gazlaryň galany bolsa öz uçuşyny dowam etdirýärdi. Ähli gazlar 7 adajyga gondular. Sürüde näçe gaz bar eken?

**349.** Ilkinji iki agzasy $a_1=2$, $a_2=3$ we $a_{k+2}=\frac{a_{k+1}}{a_k}$ ($k=1,2,3,...$) şert bilen $(a_n)$ yzygiderlik berlipdir. $a_{2004}$ tapyň.

**350.** Iki gabyň her birinde $A$ litr suw bar. Birinji gapdan ondaky suwuň ýarysyny ikinji gaba guýýarlar, soňra bolsa ikinji gapdan ondaky suwuň üçden birini birinji gaba guýýarlar. Soňra birinji gapdaky suwuň dörtden birini ikinji gaba, soňra ikinji gapdaky suwuň bäşden birini birinji gaba guýýarlar we ş.m. Şunuň ýaly 100 gezek gapdan gaba guýulma amala aşyrylandan soňra her gapda näçe suw bolar?

**351.** Iki sany gap bar. Olaryň ikisine bir litr suwy guýdular. Birinji gapdaky suwuň ýarysyny ikinji gaba, soňra bolsa ikinji gapdaky suwuň ýarysyny birinji gaba, ondan soňra birinji gapdaky suwuň ýarysyny ikinji gaba we ş.m. guýdular. Ilkibaşda gapdaky suwuň möçberlerine garamazdan, 100 gezek suwy bir gapdan beýleki gaba guýmadan soň gaplaryň birinde $\frac{2}{3}$ litr, beýlekisinde $\frac{1}{3}$ litr suwuň (1 millilitr takyklyk bilen) boljakdygyny subut ediň.

**352.** Bitin koeffisiýentli $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň 23-e deň diskriminanty bolup bilermi?

**353.** Dogry kwadratyň sifrleriniň jemi 1970-e deň bolup bilermi?

**354.** Ýaryşa 15 küştçi gatnaşýar. Käbir wagtdan soň, olaryň her biri dogry 7 döw oýnamagy mümkinmi?

**355.** Mekdepde 953 okuwçy bar. Olaryň biri beýlekileri bilen tanyş, galanlary biri-biri bilen tanyş däl. Mekdepdäki okuwçylaryň arasynda olaryň iň bolmanda birisiniň tanyşlarynyň sanynyň jübütdigini subut etmeli.

**356.** Her biri +1 ýa-da –1-e deň bolan $n$ sany $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sanlar berlen we $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1=0$. $n$-iň 4-e bölünýändigini subut etmeli.

**357.** $a$ we $b$ özara ýönekeý natural sanlar. $ax+by=ab$ deňlemäniň natural sanlarda çözüwiniň ýokdugyny subut etmeli.

**358.** $6x^2+5y^2=74$ deňlemäni bitin sanlarda çözmeli.

**359.** Eger $b=a-1$ bolsa, onda $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)...(a^{32}+b^{32})=$ $=a^{64}-b^{64}$ deňligi subut etmeli.

**360.** Eger $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ we $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ bolsa onda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ deňligi subut etmeli.

**361.** Goý, $a$, $b$, $c$ dürli sanlar we $c\neq0$ bolsun. Eger $x^2+ax+bc=0$ we $x^2+bx+ca=0$ deňlemeleriň bir umumy köki bar bolsa, onda bu deňlemeleriň beýleki kökleriniň $x^2+cx+ab=0$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut etmeli.

**362.** Tarapy 10 *sm* bolan ak, gyzyl we gök kwadratlar berlen. Eger uly kwadratlaryň her biri kiçi dört kwadratdan düzülen bolsa, onda olardan reňkleri boýunça dürli bolan taraplary 20 *sm* kwadratlaryň näçesini düzmek bolar?

**363.** Bäsleşige bir synpdan 10 okuwçy gelipdir. Olary dört otaga näçe usul bilen paýlamak bolar?

**364.** Agramlary 1*g*, 2*g*, 3*g*, ... , 552*g* bolan 552 çeküw daşlary bar. Olary agramlary boýunça deň bolan üç deň üýşmeklere bölmeli.

**365.** Agramlary 1*g*, 2*g*, ... , 555*g* bolan 555 çeküw daşlary bar. Olary agramlary boýunça deň bolan üç deň üýşmeklere bölmeli.

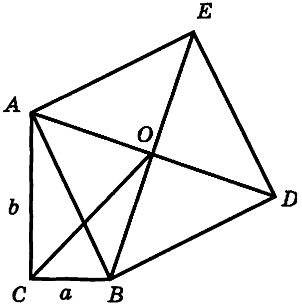
**366.** Küşt ýaryşynda küştçüleriň her biri özüniň oçkolarynyň ýarysyny soňky üç orny eýelän oýunçylar bilen duşuşanda aldy. Bu ýaryşa näçe adam gatnaşypdyr?

**367.** Küşt ýaryşyna 8 adam gatnaşdy we olaryň hemmesi dürli möçberde oçkolar ýygnadylar. Ikinji orny eýelän küştçüniň soňky dört orny eýelän küştçüleriň oçkolary ýaly oçkosy bar. Üçünji we ýedinji orny eýelän küştçüler öz aralarynda nähili oýnapdyrlar.

**368.** Üçburçlugyň medianalarynyň jeminiň onuň ýarym perimetrinden uludygyny we onuň perimetrinden bolsa kiçidigini subut etmeli.

**369.** Radiusy 1-e deň bolan tegelekde jübüt-jübütden aralyklarynyň uzynlygy 1-den uly bolan bäş nokatdan köp nokat alyp bolmaýandygyny subut etmeli.

**370.** Katetleri $a$ we $b$ bolan gönüburçly üçburçlugyň $AB$ gipotenuzasy tarap hökmünde alnyp, üçburçlugyň daş ýanyndan $ABDE$ kwadrat çyzylypdyr. Kwadratyň diagonallarynyň kesişme nokady bolan $O$ nokatdan üçburçlugyň göni burçunyň depesine, ýagny $C$ nokada çenli uzaklygy tapmaly.




**371.** $43^{23}+23^{43}$ jemiň 66 sana galyndysyz bölünýändigini subut etmeli.

**372.** Dokuz güberçek altyburçlukdan güberçek 39-burçluk düzüp bolmaýandygyny subut etmeli.

**373.** $ABC$ üçburçlugyň $AA_0$, $BB_0$, $CC_0$ – medianalary, $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ onuň beýiklikleri. $A_0B_1C_0$, $A_1B_0C_1A_0$ ýapyk döwük çyzygyň uzynlygynyň $ABC$ üçburçlugyň perimetrine deňdigini subut etmeli.

**374.** $x^2-3x-5=0$ deňlemäni çözmäni, kökleri $x_1+\frac{1}{x_2}$ we $x_2+\frac{1}{x_1}$-e deň bolan kwadrat deňleme düzmeli, bu ýerde $x_1$ we $x_2$ berlen kwadrat deňlemäniň kökleri.

**375.** $\angle ABC=\angle MCB=15°$ bolar ýaly $ABCD$ kwadratyň içinde $M$ nokat alnypdyr. $AMD$ üçburçlugyň deňtaraplydygyny subut etmeli.

**376.** $P$ we $P^4-6$ sanlar ýönekeý. $P$-ni tapmaly.

**377.** $y=kx+2$ göniçyzyk $y=x^2$ parabolany koordinatalary $(a,b)$ we $(c,d)$ bolan nokatlarda kesýär. $k$-nyň haýsy bahasynda $|a+c|$ ululyk iň kiçi bolar?

**378.** $x^{19}+x^{76}=2x^{-19+76}$ deňlemäni çözmeli.

**379.** Tablisany ulanman, $\sin 10° > \frac{1}{6}$ subut etmeli.

**380.** $6^{65}$ we $9^{56}$ sanlaryň haýsysy uly?

**381.** $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ güberçek altyburçlugyň içinde $O$ nokat ýatyr. Altyburçlugyň taraplarynyň iň ulusynyň $OA_5$, $OA_6$ taraplaryň iň ulusyndan kiçi däldigini subut etmeli.

**382.** $x_1+x_2+x_3=68$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1121$. Eger $x_1$, $x_2$, $x_3$ ýönekeý sanlar bolsa, onda $x_1\,x_2\,x_3$ köpeltmek hasyly nämä deň?

**383.** Tekizlikde ýatan islendik iki nokat üçin üçünji nokat tapylyp, olar bilen deňýanly üçburçlugyň depelerini emele getirýän 1978 dürli nokatlardan ybarat köplük barmy?

**384.** $a$ sanyň sifrleriniň kwadratynyň jemi $a$ sandan kiçi bolmadyk soňy 4 sifr bilen gutarýan ähli $a$ natural sanlary tapmaly.

**385.** $2p^4-p^2+16$ doly kwadrat bolar ýaly, ähli ýönekeý $p$ sanlary tapmaly.

**386.** $5 \cdot 5$ kwadrat tablisanyň öýjüklerinde her sütüniň, her setiriň we her iki diagonalyň jemleriniň ählisi dürli bolar ýaly edip, +1, –1 we 0 sanlary ýerleşdirip bolarmy?

**387.** Kwadratyň içinde kwadrat däl gönüburçluk çyzylypdyr. Onuň ýarymperimetriniň kwadratyň diagonalyna deňdigini subut etmeli.

**388.** $\overline{abcd} = \overline{ad} \cdot \overline{ada}$ şertden hemme $\overline{abcd}$ dörtbelgili sanlary tapmaly.

**389.** 1000-belgili sanyň bir sifrinden başga ähli sifrleri bäşlikler. Bu sanyň bitin sanyň kwadraty bolmaýandygyny subut etmeli.

**390.** Radiusy 3-e deň tegelekde erkin görnüşde birnäçe tegelekler ýerleşdirilen we olaryň radiuslarynyň jemi 25-e deňdir. 9-dan az bolmadyk tegelekleri kesýän göni çyzygyň tapylýandygyny subut etmeli.

**391.** $(1+x^2+x^4+...+x^{100})(1+x^{102})-102x^{101} \geq 0$ deňsizligi subut etmeli.

**392.** *ABCD* gönüburçlugyň *A* we *C* depelerinden gönüburçlugyň içinde tutuşlygyna ýatýan töweregiň dugasy geçirilipdir. *AQR* we *CRP* figuralaryň meýdanlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly *AB* göni çyzyga parallel, *BC* göni çyzygy *P* nokatda, *AD* göni çyzygy *Q* nokatda kesýän, *AC* dugany bolsa *R* nokatda kesýän göni çyzyk geçirmeli.

**393.** *S* meýdany bolan *ABC* üçburçluga *O* nokada kesişýän *AK* we *BE* medianalar geçirilen. *CKOE* dörtburçlugyň meýdanyny tapmaly.

**394.** Täk san bölüjileri bolan bitin položitel sanyň dogry kwadrat bolýandygyny subut etmeli.

**395.** Her biri 50-den kiçi we islendik ikisi özara ýönekeý bolan dürli natural sanlaryň iň uly mukdaryny tapmaly.

**396.** *ABC* üçburçluk berlen. Onuň taraplarynda *ABKL*, *BCMN* we *ACFG* parallelogramlar gurlan. *KN*, *MF* we *GL* kesimlerden üçburçluk düzüp bolýandygyny subut etmeli.

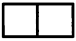
**397.** $x^4+4y^4$ ýönekeý san bolar ýaly, ähli bitin $x$ we $y$ sanlary tapmaly.

**398.** Hemme burçlary kütek bolan güberçek $k$ burçluk berlen. Diagonallaryň uzynlyklarynyň jeminiň taraplarynyň uzynlyklarynyň jeminden uludygyny subut etmeli.

**399.** Küşt ýaryşyna 20 adam gatnaşýar. Hiç kim bilen paýlaşman 19-njy orny alan küştçi 9,5 oçko toplapdyr. Galan küştçileriň arasynda oçkolar nähili paýlanmagy mümkin?

**400.** $1+2^{3456789}$ sanyň düzme sandygyny subut etmeli.

**401.** Dörtburçlugyň meýdany 3 $sm^2$-a deň, onuň diagonallary 6 *sm* we 2 *sm*-e deň. Diagonallaryň arasyndaky burçy tapmaly.

**402.** Küşt tagtasynyň iki öýjügini kesip aýyrdylar.  Görnüşdäki figura bilen galan öýjükleri nähili ýagdaý-da ýapyp bolýar, nähili ýagdaýda bolsa ýapyp bolýan däldir?

**403.** Käbir $A$ natural sany galyndy emele gelýän $A$-dan kiçi hemme natural sanlara böldüler. Alnan galyndylaryň hemmesiniň jemi $A$ sana deň boldy. $A$ sany tapmaly.

**404.** Konduktory bolmadyk awtobusda 40 ýolagçy barýar. Olaryň ýanynda diňe 10, 15 we 20 güýji bolan teňňeleri bar. Ýolagçylardaky ähli teňňe 49 sany. Ýolagçylaryň talap edilýän möçberdäki puly kassa töläp we özaralarynda dogry hasaplaşyp bilmeýändiklerini (bilediň bahasy 5 teňňe) subut etmeli.

**405.** Dörtburçlugyň gapma-garşylykly taraplarynyň ortalarynyň arasyndaky uzaklyklaryň jemi onuň ýarym perimetrine deňdir. Bu dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut etmeli.

**406.** $2^{10}+5^{12}$ sanyň düzmedigini subut etmeli.

**407.** Käbir üçburçlugyň taraplary bolan $a$, $b$ we $c$ sanlar $2(a^8+b^8+c^8)=(a^4+b^4+c^4)^2$ deňligi kanagatlandyrýar. Bu üçburçlugyň gönüburçlukdygyny subut etmeli.

**408.** *ABCDE* bäşburçlukda *AB* tarapyň ortasy *K* nokat, *BC* tarapyň ortasy *L* nokat, *CD* tarapyň ortasy *M* nokat, *DE* tarapyň ortasy *N* nokat, *KM* tarapyň ortasy *P* nokat, *LN* tarapyň ortasy *Q* nokat. *PQ* kesimiň *AE* tarapa paralleldigini we onuň dörtden birine deňdigini subut etmeli.

**409.** 1, 2, 3 sifrlerden mümkin bolan 7-belgili sanlar düzülipdir we hiç bir razrýadda gabat gelmeýän sanlar dürli nomer alar ýaly edip, olaryň her birine 1,2 ýa-da 3 nomer dakylýar. 1111111, 2222222, 3333333 we 1222222 sanlarda nomer birinji sifrleri bilen gabat gelýän eken. Galan sanlaryň hem nomerleriniň birinji sifr bilen gabat gelýändigini subut etmeli.

**410.** $p^{p+1}+2$ ýönekeý san bolar ýaly, ähli ýönekeý $p$ sanlary tapmaly.

**411.** $a+b+c=7$ we $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=0,7$ belli.

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$ aňlatmanyň bahasyny hasaplamaly.

**412.** Goý, $a$ sandan geçmeýän iň uly bitin san $[a]$ bolsun.
$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$ deňlemäni çözmeli.

**413.** $\begin{cases} x^2+xy^2+x^2y^2+xy+x+y-3=0, \\ x^2y+xy+1=0 \end{cases}$

deňlemeler ulgamyny çözmeli.

**414.** Parallelogramyň her tarapyndan käbir nokat alnyp, olary birleşdirip dörtburçluk alnypdyr. Şonda dörtburçlugyň meýdany parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deňdir. Dörtburçlugyň bir diagonalynyň parallelogramyň taraplarynyň birine paralleldigini subut etmeli.

**415.** Futbol ýaryşyna 36 komanda gatnaşýar, onsoňam her iki komanda öz aralarynda bir gezek oýnaýar. Komandalaryň her biriniň 34-den az bolmadyk oýun oýnandygy belli. Toparyň her biriniň içinde eýýam ähli oýunlar oýnalan edip, komandalary 12 komandadan 3 topara bölüp bolýandygyny subut etmeli.

**416.** *ABCD* kwadratyň içinde *C* nokat alnypdyr. *A, B, C* we *D* depelerden degişlilikde. *BK, CK, DK* we *AK* göni çyzyklara perpendikulýarlar geçirilen. Bu perpendikulýarlaryň bir nokatda kesişýändigini subut etmeli.

**417.** Gönüburçly ýaşigiň düýbünde 2·2 we 1·4 ölçegli kerpiçler ýerleşdirilen. Ýaşikden kerpiçleri dökdüler we şonda 2·2 ölçegli kerpiji ýitirdiler. Onuň ýerine 1·4 ölçegli kerpiji tapmak başartdy. Indi ýaşigiň düýbüne kerpiçleri ýerleşdirip bolmaýandygyny subut etmeli.

**418.** Nola deň bolmadyk *k* dürli bitin sanlaryň kwadratlarynyň jeminiň kwadratynyň nola deň bolmadyk bitin sanlaryň *k* kwadratlarynyň jemi bolýandygyny subut etmeli ($k$>2).

**419.** Käbir döwletde her iki şäher ýol bilen birikdirilen. Ýollaryň her birinde diňe bir ugur boýunça herekete rugsat berilýär. Şäherleriň her birinde diňe bir gezek bolup, ähli döwleti aýlanar ýaly ugramak üçin şäheriň tapdyrýandygyny subut etmeli.

**420.** Iki töwerek biri-biri bilen *A* nokatda içki görnüşde galtaşýarlar. Içki töweregiň *A* nokatdan tapawutly *B* nokadyndan daşky töweregi *C* we *D* nokatlarda kesýän galtaşýan çyzyk geçirilipdir. *AB* göni çyzygyň *CAD* burçuň bissektrisasydygyny subut etmeli.

**421.** Adamlaryň käbir toparynda her biriniň dogry bir dosty we dogry bir duşmany bar. Bu adamlary hiç birinde iki dost we iki duşman tapylmaz ýaly edip, iki topara bölüp bolýandygyny subut etmeli.

**422.** Üçburçlugyň depesinden inderilen medianada *A* nokat alnypdyr. *A* nokatdan gapdal taraplara çenli uzaklyklaryň jemi *p* deň. Gapdal taraplary bolsa *a* we *b* deň. Bu uzynlyklary tapmaly.

**423.** Dogry üçburçluk birnäçe gezek özüniň üç tarapynyň birine görä simmetrik şekillendirilýär. Iň soňky gezek alnan ücburçluk, berlen üçburçluk bilen gabat gelýär. Şonda jübüt sany şekillendirmäniň edilendigini subut etmeli.

**424.** a) onbelgili sanyň sifrleriniň jemi 4-e deň. Bu sanyň sifrleriniň kwadratlarynyň jemi nämä deň?

b) dokuzbelgili sanyň sifrleriniň jemi 3-e deň. Onuň sifrleriniň kublarynyň jemi nämä deň?

**425.** $A$ we $B$ tekizligiň her iki nokady üçin $A*B$ bilen $B$ nokada görä $A$ nokada simmetrik nokady belgiläliň. Kwadratyň üç depesi berlipdir. Birnäçe gezek operasiýany ulanyp bu kwadratyň dördünji depesini alyp bolarmy?

**426.** $2^{1971}$ we $5^{1971}$ sanlar bir-biriniň yzynda ýazylypdyr. Ýazylan sifrleriň hemmesi näçe?

**427.** Kwadratlaryň iň soňky üç sifri şol tertipde berlen sanyň sifrleri bolan ähli üçbelgili sanlary tapmaly.

**428.** Goý $a$ we $b$ sanlary $x^2-5y^2$ görnüşde aňladyp bolýan bolsun, bu ýerde $x$ we $y$ käbir bitin sanlar. $a \cdot b$ sany hem $x^2-5y^2$ görnüşde aňladyp bolýandygyny subut etmeli.

**429.** $0, a_1a_2a_3 \ldots$ tükeniksiz onluk drob berlen, bu ýerde $a_1$, $a_2$ erkin sifrler, $a_3$ bolsa $a_1+a_2$ jemi 10-a böleninde emele gelen galyndy, $a_4$ bolsa $a_2+a_3$ jemi 10-a bölenińdäki galyndy we ş.m. Drobuň arassa periodikdigini subut etmeli.

**430.** $pqr=5(p+q+r)$ deňligi kanagatlandyrýan hemme $p$, $q$, we $r$ ýönekeý sanlary tapmaly.

**431.** On sanyň jemi nola deň, jübüt-jübütden köpeltmek hasyly hem nola deň. Bu sanlaryň kublarynyň jeminiň hem nola deňdigini subut etmeli.

**432.** Goý, $a^2+b^2+c^2=1$, $m^2+n^2+p^2=1$ bolsun. $-1 \leq am+bn+$ $+cp \leq 1$ deňsizligi subut etmeli.

**433.** $x=1-1968(1-1968x^2)^2$ deňlemäni çözmeli.

434. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{99}+x_{100}+x_1=0 \\ x_{100}+x_1+x_2=0 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözmeli.

435. Yzygider 99 dokuzlyk ýazylypdyr. Sag tarapyna ýene dogry 100 sifr ýazyp, alnan 199-belgili sanyň doly kwadrat bolýandygyny subut etmeli.

436. 18 adam ýygnanypdyr. Olaryň arasynda 4 jübüt tanyş ýa-da 4 jübüt nätanyş adamlaryň tapyljakdygyny subut etmeli (her bir iki adam ýa-da tanyş, ýa-da nätanyş).

437. $p+q=30$ bolan, bitin koeffisiýentli $x^2+px+q$ görnüşde kwadrat üçagzalara garalýar. Şunuň ýaly näçe üçagzanyň bitin köki bar?

438. Jemi 201-e deň, köpeltmek hasyly 201-e bölünýän iki natural sanyň ýokdugyny subut etmeli.

439. $5^n$ sanyň onluk ýazgysynyň sifrleriniň arasynda iň bolmanda yzygider 1968 nol bolan $n$ natural sany tapmaly.

440. $abc=1$, $a^3>36$. Onda $\frac{2}{3}a^2<a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ deňsizligi subut etmeli.

441. $a(n+1)-(n^2+n+1)$ san galyndysyz $n^3$-a bölüner ýaly islendik $n$ natural san üçin şeýle bir $a$ natural sany alyp bolýandygyny subut etmeli.

442. Matematika boýunça şäher bäsleşigine iki ekizler gatnaşdy. Olaryň ýene doganlary barmy we näçe ýaşlarynda diýen soraga ekizler şeýle jogap berdiler: «Biziň doganymyz bar, onuň ýaşy iki deň sifrler bilen ýazylýar, hemme üçümiziň ýaşlarymyzyň jemi ikinji sifri birinji sifrden iki esse uly bolan iki belgili san». Doganlaryň ýaşlaryny kesgitlemeli.

443. $a>b>c$ bolan $a$, $b$, $c$ hakyky sanlar berlen.
$a^2b+b^2c+c^2a>b^2a+a^2c+c^2b$ deňsizligi subut etmeli.

**444.** Eger ýatdan bellenen sandan 11-i aýyrsaň, onda tapawut 11-e galyndysyz bölüner. Eger ol sandan 7-ni aýyrsaň, onda tapawut 7-ä galyndysyz bölüner. Eger ol sandan 13-i aýyrsaň, onda tapawut 13-e galyndysyz bölüner. Ýatdan bellenen sany tapyň.

**445.** 4-e bölüninde galyndyda 3, 5-e bölüninde galyndyda 4, 6-a bölüninde bolsa galyndyda 5 alynýan iň uly üçbelgili sany tapyň.

**446.** Kakasy we ogly iki agajyň arasyndaky uzaklygy ädimläp ölçediler. Kakasynyň bir ädiminiň uzynlygy 70 *sm*, oglunyňky bolsa 56 *sm*-e deň. Eger olaryň aýak yzlary 10 gezek gabat gelen bolsa, agaçlaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

**447.** Syýahatçylaryň topary gaýykly, awtobusly we pyýada jemi 475 *km* ýol geçdiler. Olar gaýykly pyýada ýöränlerinden 160 *km* köp ýol geçdiler, awtobusda bolsa pyýada ýöränlerinden 5 esse köp ýol geçdiler. Syýahatçylar gaýykly, awtobusly we pyýada näçe ýol geçipdirler?

**448.** Iki sanyň jemi 495. Ol sanlaryň biri nol bilen tamamlanýar. Eger noly çyzsaň, onda ikinji san alynýar. Bu sanlary tapyň.

**449.** Ogly bolanda ejesiniň 28 ýaşy bardy. Eger 1998-nji ýylda ogly ejesinden 4,5 esse kiçi bolsa, onda 2004-nji ýylda ejesiniň we oglunyň näçe ýaşy bolar?

**450.** Iki sebetde 140 alma bar. Eger birinji sebetdäki almalaryň 0,3 bölegi ikinji sebetdäki almalaryň 0,36 böleginden 3 esse az bolsa, sebetleriň her birinde näçe alma bar?

**451.** Agramlary deň bolan $A$ we $B$ gaplaryň ikisine-de suw guýlupdyr. Içi suwly $A$ gabyň agramy içi suwly $B$ gabyň agramynyň 0,8 bölegini düzýär. Eger $B$-niň içindäki suwy $A$ guýsaň, onda $A$-nyň agramy $B$-niň agramyndan 8 esse köp bolar. Ilkibaşda $B$-de $A$-daka garanyňda 50 *g* suwuň köplügini bilip, her bir gabyň agramyny we olardaky suwuň möçberini tapyň.

**452.** Oba bilen şäheriň arasyndaky uzaklyk 114 *km*-e deň. 6 sagat 00 minutda şäherden oba tarap ýük maşyny çykyp ugrady. 6 sagat 45 minutda bolsa obadan şähere tarap, ýük maşynynyňkydan 8 *km/sag* uly tizlik bilen awtobus çykyp ugrady. Eger olar 7 sagat 45 minutda duşuşan bolsalar, ýük maşynynyň we awtobusyň tizliklerini tapyň.

**453.** Oglan we gyz arasyndaky uzaklyk 143 m bolan aralygy ädimläp ölçediler. Olaryň ädimleriniň uzynlyklary dürli bolany üçin olaryň yzlary 20 gezek gabat geldi. Gyzyň ädiminiň uzynlygy 55 sm. Oglanyň ädiminiň uzynlygyny tapyň.

**454.** 166 litr suw sygýan wannany 22 minutda doldurmak üçin, 1 minutda 6,75 litr gyzgyn suw akýan krany açdylar. Soňra bu krany ýapyp, 1 minutda 8,5 litr sowuk suw akýan krany açdylar. Her bir krany näçe wagtlap açypdyrlar?

**455.** Iki haltada 140 *kg* un bar. Eger birinji haltadaky unuň 1/8 bölegini alyp ikinji halta guýsaň, olardaky unlar deňleşer. Her bir haltada ilkibaşda näçe un bar eken?

**456.** Howuzy suwdan doldurmak üçin turba geçirilipdir. Turbanyň hapalanmagy sebäpli ondan gelýän suwuň möçberi 60% azalypdyr. Netijede, howuzy suwdan doldurmak üçin sarp edilýän wagt näçe göterim artypdyr?

**457.** Ýaglylygy 35% bolan 5 litr gaýmagyň üstüne ýaglylygy 20 % bolan 4 litr gaýmagy goşdular. Soňra bolsa 1 litr suwy goşup gardylar. Alnan garyndynyň ýaglylygy näçä deň?

**458.** Düzüminde 60% mis we 80% mis bolan iki erginden, düzüminde 75% mis bolan 40 *kg* ergin almak üçin her bir erginden näçe kilogram almaly?

**459.** Üç sanyň jemi 3898,32-ä deň. Eger bu sanlaryň biriniň oturyny bir sifr saga geçirseň, onda ol sanlaryň ulusy; eger şol otury bir sifr çepe geçirseň sanlaryň kiçisi alnar. Bu sanlary tapyň.

**460.** Yzly-yzyna gelýän iki täk sanyň kwadratlarynyň tapawudynyň 8-e bölünýändigini subut etmeli.

**461.** Eger iki sanyň her birini 3-e böleniňde galyndyda 1 alynýan bolsa, onda olaryň köpeltmek hasylyny 3-e böleniňde hem galyndyda 1 alynýandygyny subut etmeli.

**462.** Deňýanly üçburçlugyň daşky burçlarynyň 80°-a deň. Gapdal tarapa geçirilen beýiklik bilen esasyň arasyndaky burçy tapmaly.

**463.** Deňýanly üçburçlugyň bir daşky burçy 118°-a deň. Kiçi burçlaryň depelerinden geçirilen beýiklikleriň arasyndaky burçy tapmaly.

**464.** Tekizlikde islendik üçüsi bir göni çyzygyň üstünde ýatmaz ýaly edip, 7 nokat alnypdyr. Nokatlaryň her ikisiniň üstünden göni çyzyk geçirilipdir. Jemi näçe göni çyzyk geçirilipdir?

**465.** 103 tarapy bolan köpburçlukda näçe sany diagonal geçirip bolar? Jogabyňyzy esaslandyryň.

**466.** Üç sany deňiz garakçysy oljalaryny bölüşmek isleýärler. Olaryň her biri: «Men oljany deň bölerdim, emma beýlekiler maňa ynanmaýar» diýip pikir edýär. Eger garakçylar iki bolan bolsa, onda oljany ýeňillik bilen bölüp bolardy: olaryň biri oljany ikä bölerdi, ikinjisi bolsa uly hasap eden bölegini özüne alardy. Bu üç garakçynyň her biri öz alan paýynyň oljanyň iň bolmanda üçden birini düzýänligi barada ynamy bolar ýaly edip bu işi nähili amal etmeli? (Oljanyň düzümi şeýle bir dürli welin, onuň aýratyn böleklerini özara deňeşdirmek mümkin däl).

**467.** Diňe iki taýpanyň adamlary ýaşaýan ada bir akyldar gelip düşüpdir. Bu taýpalaryň biriniň wekilleri dogruçyllar, beýlekisiniňki bolsa diňe ýalançylar eken. Akyldar ýoluň iki ýola bölünýän ýerine ýetende ýerli ýaşaýjydan bu ýollaryň haýsysynyň oba eltýändigini soramaly bolupdyr. Ol haýsy taýpanyň wekili bilen gürleşýändigini bilmändir. Emma ol ýeke-täk sorag berip onuň jogaby boýunça haýsy ýoluň oba eltýändigini kesgitläp bilipdir. Ol nähili sorag beripdir?

**468.** Bir gutuda iki sany gara şar, ikinji gutuda iki sany ak şar, üçünji gutuda bolsa bir ak we bir gara şar bar. Her bir gutynyň daşyna, ondaky şarlaryň reňkini görkezýän: *AA; GG; AG* ýaly ýazgylar berkidilipdir. Garagoluň biri bu ýazgylary, gutudaky şarlaryň reňkini ýalňyş görkezer ýaly edip çalşyrypdyr. Bu gutularyň islendiginden onuň içine seretmän şar çykaryp bolýar. Iň azyndan näçe şar çykaryp üç gutynyň her biriniň içindäki şarlaryň reňkini kesgitläp bolar. (Her bir çykarylan şar ikinji şar çykarylmazdan öň yzyna salynýar).

**469.** 10 sany haltada teňňeler bar. Dokuz sany haltada her biriniň agramy 10 *g* bolan hakyky teňňeler, bir haltada bolsa her biriniň agramy 11 *g* bolan galp teňňeler bar. Terezide bir gezek çekmek arkaly, haýsy haltada galp teňňeleriň bardygyny kesgitlemeli.

**470.** 6 sany okuwçydan ybarat islendik toparda ýa bir-biri bilen tanyş 3 okuwçynyň bardygyny, ýa-da her biri beýleki ikisini tanamaýan 3 okuwçynyň bardygyny subut ediň.

**471.** Eger natural $x$, $y$, $z$ sanlar

$$x^n+y^n=z^n$$

deňlemäni kanagatlandyrýan bolsalar, onda $\min(x, y)\geq n$-ni subut etmeli.

**472.** Käbir şäherde ýolagçy gatnadýan awtobuslaryň ýollary aşakdaky ýaly gurnalypdyr: a) her ýolda üç sany duralga bar; b) iki awtobus ýolunyň ýa umumy duralgasy ýok, ýa-da diňe bir umumy duralgasy bar. Eger baryýogy dokuz sany duralganyň barlygy belli bolsa, onda bu şäherde iň kän näçe sany awtobus ýoly bolup biler?

**473.** Tegelek 6 sany sektora bölünipdir we her sektorda bir teňňe ýatyr. Bir göçerde haýsy hem bolsa bir teňňäni goňşy sektorlaryň haýsy hem bolsa birine süýşürmäge rugsat berilýär. Dogry 20 göçüm edip ähli teňňeleri bir sektora ýygnap bolarmy?

**474.** 6 «A» synpda 30 okuwçy okaýar. Haçanda okuwçylar diktant ýazanlarynda bir okuwçy 12 ýalňyş, galan okuwçylar bolsa ondan az ýalňyş goýberdiler. Synpda deň sanly ýalňyşlyga ýol beren iň bolmanda 3 okuwçynyň bardygyny subut ediň.

**475.** 7 sany oglan bilelikde 100 kömelek tapdylar. Olaryň her biri dürli möçberde kömelek ýygnapdyrlar. Bilelikde 50-den az bolmadyk kömelek tapan, üç oglanyň bardygyny subut ediň.

**476.** Tagtada 5 sany bitin san ýazylypdyr. Olary jübüt-jübütden goşup, aşakdaky on sany aldylar: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Tagtada haýsy 5 san ýazylypdyr? Şu usul bilen aşakdaky on sany alyp bolarmy: 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 20?

**477.** 5–9-njy synplaryň 30 okuwçysy 40 galam aldylar. Şunlukda, bir synpyň her bir okuwçysy deň sanly galam, dürli synplaryň okuwçylary bolsa dürli sanly galam satyn aldylar. Näçe okuwçy diňe bir galam satyn alypdyr?

**478.** Islendik altybelgili sanyň sifrlerini, täze alnan altybelgili sanyň ilkinji üç sifriniň jemi soňky üç sifriniň jeminden 10-dan az san tapawutlanar ýaly edip, çalşyp bolýandygyny subut etmeli.

**479.** Jemi položitel bolan birnäçe san tegelek boýunça ýerleşdirilipdir. Bu sanlaryň içinden onuň özi položitel bolan we sagat peýkamynyň ugry boýunça gelýän san bilen jemi položitel bolan we ş.m. sany saýlap boljakdygyny subut ediň.

**480.** Uzynlygy 300 *km* bolan töwerek görnüşinde birleşýän, gara ýoluň ugrunda şol bir görnüşli maşynlar goýlupdyr. Ol maşynlardaky umumy benziniň möçberi jemi 301 *km* geçmek üçin ýeterlik. Sürüji öz islegi boýunça maşynlaryň birini saýlap alýar. Ol öň duran maşynyň deňine ýetende ondaky benziniň ählisini öz maşynyna guýup bilýär. Sürüjiniň duran maşynlaryň benzinini ulanyp, töwerek görnüşindäki ýoluň ählisini, ýagny 300 *km* geçip biljekdigini subut ediň.

**481.** Okuwçy depderinden ýyrtylyp alnan bir tagta kagyzda uly adam sygar ýaly deşik deşip bolarmy?

**482.** $(x^2+...)(x+1)=(x^4+1)(x+2)$ deňlemede bir san bozulypdyr we ýerine üç nokat goýlupdyr. Bu deňlemäniň kökleriniň biri 1-e deň bolsa, bozulan sifri tapyň.

**483.** Aman öz wagtynyň 1/3 bölegini mekdepde okamaga, 1/4 bölegini futbol oýnamaga, 1/5 bölegini aýdym diňlemäge, 1/6 bölegini telewizor görmäge, 1/7 bölegini bolsa matematikanyň meselelerini çözmäge sarp edýär. Şeýdip ýaşap bolarmy?

**484.** Dört sany jübüt-jübütden goşdular we 6 sany jem aldylar. Ol jemleriň iň kiçileriniň dördüsi 1, 5, 8 we 9. Galan iki jemi we ilkibaşdaky dört sany tapyň.

**485.** Bir ýylda iň köp näçe sany dynç güni bolup biler?

**486.** Aýna, Bahar, Gözel we Jeren konsertde aýdym aýtdylar. Olar her bir aýdymy üç bolup ýerine ýetirdiler. Aýna hemmelerden köp, jemi 8 aýdym aýtdy. Bahar bolsa hemmelerden az, jemi 5 aýdym aýtdy. Jemi näçe aýdym aýdylypdyr?

**487.** Morze elipbiýiniň harplary belgilerden, ýagny nokatdan (·) we kese çyzykdan (–) durýar. Eger her bir harp bäşden köp bolmadyk belgiden durýan bolsa, onda bäş belginiň kömegi bilen jemi näçe harpy aňladyp bolar?

**488.** Aman, Mergen we Anna kagyzdan uçar ýasaýarlar. Eger Aman 5 uçary artyk ýasan bolsa, onda ol beýleki ikisiniňki ýaly uçar ýasardy. Eger Mergen 9 uçary artyk ýasan bolsa, onda ol beýleki ikisiniňki ýaly uçar ýasardy. Eger Meredowyň iň az uçar ýasanlygy, Esenowyň ýasan uçarlarynyň sanynyň 3-e galyndysyz bölünýänligi, Nuryýewiň ýasan uçarlarynyň 11-ligi belli bolsa, olaryň familiýalaryny we her biriniň näçe uçar ýasanlygyny kesgitläň.

**489.** Maşynly we welosipedli birwagtyň özünde şäherden oba tarap ugradylar. Welosipedli ýoluň üçden birini geçenden soň durdy we maşynly oba çenli ýoluň üçden biri galýança garaşdy. Maşynly oba baryp dessine yzyna şähere tarap ýola rowana boldy. Maşynly şähere çalt bararmy ýa-da welosipedli oba?

**490.** Böwenjik ýazda 25% horlandy, tomus bolsa 20% semredi, güýz 10% horlandy, gyş bolsa 20% semredi. Ol bir ýylyň dowamynda horlandymy ýa-da semredi?

**491.** Aýna, Bahar, Gözel we Jeren ylgamak boýunça ýaryşdylar. Kim nähili ýer eýeledi diýen sowala olar aşakdaky ýaly jogap berdiler:

Aýna: Men birinji we iň soňky ýeri almadym.
Bahar: Men iň soňky bolup gelmedim.
Gözel: Men birinjiligi aldym.
Jeren: Men iň soňky bolup pellehana geldim.

Bu jogaplaryň üçüsiniň dogry, biriniň bolsa ýalňyşdygy belli. Kim ýalan sözläpdir? Kim birinji bolup gelipdir?

**492.** $A$ we $B$ şäherler deryanyň boýunda biri-birinden 10 km daşlykda ýerleşýär. Motorly gaýyga $A$-dan $B$-e we tersine, $B$-den $A$-a ýüzmek üçin köp wagt gerekmi ýa-da kölde 20 km ýüzmek üçin köp wagt gerekmi?

## 1995-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 10-njy synp

**493.** 1-den 100-e çenli natural sanlaryň hemmesi yzly-yzyna ýazylan:

**1234567891011...9899100.**

Soňra käbir sifrleriň arasynda «+» alamatlary goýlan. Şeýle alnan sanyň 1995-e bölünmeýändigini subut etmeli.

**494.** $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}$ sanyň rasionaldygyny ýa-da däldigini aýdyňlaşdyrmaly.

**495.** Otrisatel däl $b_1$, $b_2$, $b_3$ we $b_4$ sanlaryň jemi 1 bolanda $b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4$ aňlatmanyň iň uly bahasyny tapmaly.

**496.** *ABCD* trapesiýanyň gapdal taraplaryny diametr edip gurlan tegelekler bir-birine galtaşýan bolanlarynda, şu trapesiýanyň içinden töwerek çyzyp boljakdygyny subut etmeli.

**497.** Iki oglan şeýle oýny oýnaýarlar. Tagtada «10» san ýazylan. Her bir oýunçy öz göçüminde tagtada ýazylan «$n$» sany «$n+a$» çalyşýar, bu ýer-de «$a$» san «$n$» sanyň 10-dan kiçi bolan islendik bölüjisi. Kim ilkinji bolup, 19951995 sandan uly sany ýazsa, şol utulýar. Dogry oýnalanda kim utar: oýnap başlan birinjimi ýa-da onuň garşydaşy?

## 9-njy synp

**498.** $x^2+ax+b+1=0$ deňlemäniň kökleri natural sanlardyr. $a^2+b^2$ sanyň düzme sandygyny subut etmeli.

**499.** 10 şary 4 gutuda näçe usul bilen ýerleşdirip bolar?

**500.** *ABC* we *DEF* üçburçluklar şol bir töweregiň içinden çyzylandyr. Olaryň perimetrleriniň deňliginiň

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$$

şert bilen deňgüýçlüdigini subut etmeli.

## 8-nji synp

**501.** 3·3·1 ölçegli 77 gönüburçly otluçöp gaplary bar. Olaryň hemmesini 7·9·11 ölçegli gönüburçly guta ýerleşdirip bolarmy?

**502.** Orazyň jübüsinde 100-den az manat bar. Eger ol 5 doňdurma alsa 4 manady, 6 doňdurma alsa 3 manady, 7 keks alsa 1 manady galar. Onuň näçe puly bar?

**503.** $127^{23}$ ýa-da $513^{18}$ san ulumy?

**504.** $\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2}+\frac{2\cdot2+1}{2^2\cdot3^2}+\frac{2\cdot3+1}{3^2\cdot4^2}+\ldots+\frac{2\cdot1994+1}{1994^2\cdot1995^2}$ jemi tapmaly.

**505.** Ýitiburçly $ABC$ üçburçlugyň $AA_1$ we $CC_1$ beýiklikleri $O$ nokatda kesişýärler. Eger $OA=OC$ bolsa, $ABC$ üçburçlugyň deňýanlydygyny subut ediň.

## 1996-njy ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 10-njy synp

**506.** $59049^{59049,1}$ we $59050^{59049}$ sanlaryň haýsysy uly?

**507.** $1+2\cdot2^x+3\cdot3^x<6^x$ deňsizligi çözüň.

**508.** Üç deň kwadrat hatara birleşdirilen we birinji kwadratyň çep aşaky depesi ikinji we üçünji kwadratlaryň sag ýokarky depeleri bilen birikdirilen. Bu kesimleriň kwadratyň ýokarky esaslary bilen emele getirýän burçlaryň jeminiň 45°-a deňligini subut etmeli.

**509.** $[(4+\sqrt{17})^p]-4^{p+\frac{1}{2}}$ tapawudyň $p$ sana bölünýändigini subut etmeli ($p>2$ ýönekeý san, $[x]$ – $x$ sanyň bitin bölegi).

**510.** $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$ toždestwony subut etmeli, bu ýerde $A+B+C=180°$.

**511.** $ABC$ üçburçlugyň içinden erkin nokat alnan we onuň üstünden (geçýän) üçburçlugyň taraplaryna parallel bolan 3 göniçyzyk geçirilipdir. Bu göni çyzyklar $ABC$ üçburçlugy 6 bölege bölýärler, şunlukda, ol bölekleriň üçüsi üçburçluklardyr. Eger bu üçburçluklaryň meýdanlary $S_1$, $S_2$, $S_3$ bolsalar, onda $S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ bolýandygyny subut etmeli.

## 9-njy synp

**512.** $1024^{1024,1}$ we $1025^{1024}$ sanlaryň haýsysy uly?

**513.** Islendik üçburçlugyň $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ burçlary üçin $\cos\alpha + \text{eos}\,\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli.

**514.** Islendik $a \in R$ üçin taraplary $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$ bolan üçburçluklaryň bardygyny we ol üçburçlugyň meýdanynyň $a$ sana bagly däldigini subut etmeli.

**515.** $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ tapawudyň $p$ sana bölünýändigini subut etmeli ($p>2$ ýönekeý san, $[x]$ – $x$ sanyň bitin bölegi).

**516.** Eger $ax^2+bx+c$ kwadrat üçagza $x$ üýtgeýän ululygyň islendik bitin bahasynda bitin bahalary kabul edýän bolsa onda $2a$, $a+b$, $c$ sanlaryň bitindigini subut etmeli.

**517.** $ABC$ üçburçlugyň içinde $\angle MBA=30°$ we $\angle MAB=10°$ bolar ýaly edip, $M$ nokat alnan. Eger $\angle ACB=80°$ we $AC=BC$ bolsa, onda $\angle AMC$-ni tapmaly.

## 8-nji synp

**518.** $27^{91}-3^{93}$ tapawut 10-a bölünýärmi?

**519.** $2xy+x+y=83$ deňligi kanagatlandyrýan hemme $x$ we $y$ bitin sanlary tapmaly.

**520.** $ABCD$ güberçek dörtburçlukda $\angle BAC=20°$, $\angle BCA=35°$, $\angle BDC=40°$, $\angle BDA=70°$. Bu dörtburçlugyň diagonallarynyň arasyndaky burçy tapmaly.

**521.** Ýazgysy 1996 bilen başlanýan we 6-a, 7-ä, 8-e hem-de 9-a bölünýän näçe sany sekizbelgili san bar.

**522.** Içine teňňe salnan birnäçe halta bar. Şol haltalaryň birinde diňe galp teňňeler, beýleki haltalaryň ählisinde bolsa hakyky teňňeler bar. Hakyky teňňeleriň agramy galp teňňelerden 1 gram agyr. Gramlara çenli takyklykda çekip bilýän terezi bar. Haltalaryň içindäki teňňeleriň sany ýeterlikçe köp bolsa, haýsy haltada galp teňňäniň bardygyny azyndan näçe gezek terezide çekip kesgitläp bolýar?

**523.** Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň uzynlygy $a$ we $b$. Üçburçlugyň daşyndan onuň gipotenuzasy tarapy bolan kwadrat gurlan. Üçburçlugyň göni burçunyň depesinden kwadratyň merkezine çenli uzaklygy tapmaly.

## 1997-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 10-njy synp

**524.** $x_1$, $x_2$, $x_3$ sanlaryň $\varphi(x)=x^3-3x-1$ kopagzanyň köklerídigini bilip $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$ jemi hasaplaň.

**525.** Hakyky sanlaryň $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... yzygiderligiň hemme $n$ we $m$ nomerleri $|a_n+a_m-a_{n+m}|\le\frac{1}{n+m}$ deňsizligi kanagatlandyrýar. Bu yzygiderligiň arifmetik progressiýadygyny subut ediň.

**526.** Eger berlen $S$ meýdanly $ABCD$ dörtburçlugyň içinde ýatan $O$ nokat üçin $2S=OA^2+OB^2+OD^2+OC^2$ bolsa, onda $ABCD$ dörtburçlugyň kwadratdygyny we $O$ nokadyň onuň merkezidigini subut ediň.

**527.** ln1,01 we 0,00995 sanlaryň haýsysy uly?

**528.** $f(x)=\mathrm{arctg}3^{x-15}$ bolsa $f(0)+f(1)+...+f(30)$ jemi tapmaly.

**529.** $AD$ we $BC$ esaslary $a$ we $b$ ($a<b$), diagonallarynyň arasyndaky burç 90°, gapdal taraplarynyň dowamlarynyň arasyndaky burç bolsa 45° bolan trapesiýanyň beýikligini tapmaly.

## 9-njy synp

**530.** Goý $x_1, x_2, ..., x_n$ sanlar $\varphi(x)$ kopagzanyň kökleri bolsun. $\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...+\frac{1}{x-x_n}$ jemi $\varphi(x)$ funksiýanyň üsti bilen aňlatmaly.

**531.** Haýsy $n$-de $\frac{\lg 2\cdot\lg 3\cdot...\cdot\lg n}{10^n}$ ululyk iň kiçi bahany kabul edýär?

**532.** Uzynlyklary $a$, $b$ we $c$ bolan kesimlerden üçburçluk düzmek bolar. $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ kesimlerden hem üçburçluk düzüp bolýandygyny subut ediň.

**533.** $x+\frac{1}{x}$ bitin san. Islendik natural $n$ üçin $x^n+\frac{1}{x^n}$ sanyň hem bitindigini subut etmeli.

**534.** Islendik üçburçluguň $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ burçlary üçin $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geq\frac{3}{4}$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut ediň.

**535.** $ABCD$ içinden çyzylan dörtburçluk. $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ deňligiň dogrudygyny subut ediň.

## 8-nji synp

**536.** 1997·1998·1999·2000+1 sanyň bitin sanyň kwadratydygyny subut ediň.

**537.** $1-2x+2x^4>0$ deňsizligiň islendik w san üçin ýerine ýetýändigini subut etmeli.

**538.** Eger $ABCD$ içinden çyzylan dörtburçluk bolsa, onda $\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BD\cdot BC+DA\cdot DC}$ deňligi subut etmeli.

**539.** Eger $a^5-a^3+a=2$ bolsa, onda $a^6>3$ bolýandygyny subut etmeli.

**540.** $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ sanlar otrisatel däl we olaryň jemi 1-e deň. $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_5$ ululygyň iň uly bahasyny tapmaly.

**541.** Eger gönüburçly üçburçlugyň taraplary arifmetik progressiýany düzýän bolsalar, onda onuň tapawudynyň içinden çyzylan töweregiň radiusyna deňdigini subut etmeli.

## 1999-njy ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 9 (10)-njy synp

**542.** $n$ sany san berlen, $p$ olaryň köpeltmek hasyly. $p$ bilen ol sanlaryň her biriniň tapawudy täk san. Berlen $n$ sanyň hemmesiniň irrasionaldygyny subut etmeli.

**543.** Tegelek kölüň kenarynda 6 arça ösýär. Biriniň depeleri ol arçalaryň üçüsine, beýlekisininki beýleki üçüsine gabat gelýän iki üçburçlugyň beýiklikleriniň kesişme nokatlaryny birikdirýän kesimiň ortasynda kölüň düýbünde hazyna bar. Ýöne berlen 6 nokady nädip iki üçlüge bölmelidigi belli däl. Hazynany tapmak üçin kölüň düýbüne näçe gezek çümmeli bolar?

**544.** Berlen natural sanyň sifirleriniň üsti bilen ýazylyp, ony ters tertipde ýazanyňda berlen san bilen gabat gelse onda oňa simmetrik san diýip atlandyralyň. Üstüne 1995-i goşanyňda simmetrik san alynýan ähli simmetrik sanlary tapyň.

**545.** Tegelek stoluň başynda 10 adam otyr, olaryň hersiniň öňünde birnäçe hoz bar. Hozlaryň jemi 100. Umumy habardan soň her bir adam, jübüt hozy bar bolsa, hozlarynyň ýaryny, täk hozy bar bolsa, ilki bir hozy soňra galan hozlarynyň ýaryny özüniň sagyndaky goňşusyna berýär. Şular ýaly hadysa birnäçe gezek gaýtalanandan soňra her adamyň öňünde 10 hozuň boljakdygyny subut ediň.

**546.** $n$-iň haýsy iň kiçi bahasynda $\left[\frac{10^n}{x}\right] = 1989$ deňlemäniň bitin çözüwi bolar. $[a]$ bilen $a$ sanyň bitin bölegi belgilenýär.

**547.** Islendik $a$ üçin $a^{1974}+a^4+a^2+1>a^{1973}+2a^2$ deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

**548.** Islendik $a$, $b$ üçin $(a+b)^4<8(a^4+b^4)$ deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

## 2000-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 8(9)-njy synplar

**549.** Türkmeniň Altyn asyrynyň başlanmagyna bir ýyl galanda Muhammediň ýaşy onuň doglan ýylynyň sifrleriniň jemine deň boldy. Muhammet häzir näçe ýaşynda ?

**550.** $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ deňligi göz öňünde tutup, $2000x^{222222}+1999x^{111111}-1998$ aňlatmanyň bahasyny tapmaly.

**551.** 8$^a$ synpyň 30 okuwçysy matematika boýunça barlag işini ýerine ýetirdi. Olaryň her birine «2-lik», «3-lük», «4-lük», «5-lik» bahalaryň biri goýuldy. Alnan bahalaryň jemi 93-e deň, şunlukda, «üçlükleriň» sany «dörtlükleriň» sanyndan köp, ýöne «dörtlükleriň» sany 10-a bölünýär, «bäşlikleriň» sany bolsa jübüt san. Barlag işinde bahalaryň her birinden näçesiniň alnandygyny kesgitlemeli.

**552.** $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+1/(a_{n-1}+1)$, $(n=2, 3, ...)$ yzygiderlik üçin $13<a_{100}<15$ bolýandygyny subut etmeli.

**553.** Eger erkin $ABCD$ dörtburçlukda içki bissektrisalar geçirilse, onda $A$ we $C$ burçlaryň bissektrisalarynyň $B$ we $D$ burçlaryň bissektrisalary bilen kesişme nokatlarynyň dördüsiniň hem bir töwerekde ýatýandygyny subut etmeli.

## 9(10)-njy synplar

**554.** 2-ä ulaldylan öz sifrleriniň köpeltmek hasylyna deň bolan hemme ikibelgili sanlary tapyň.

**555.** Položitel $x$-ler üçin $f(x)=(x^5+x^3+6)/x$ funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

**556.** $ABC$ üçburçlugyň $A$ burçunyň bissektrisasy garşysyndaky tarapy $a$ we $b$ $(a>b)$ iki kesime bölýär. $ABC$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerege $A$ depede galtaşýan göni $BC$ gönini $D$ nokatda kesýär. $AD$ kesimi tapmaly.

**557.** $x_1<x_2<x_3<x_4$ deňsizligi kanagatlandyrýan $x_1$, $x_2$, $x_3$ we $x_4$ sanlar käbir $f(x)$ we $g(x)$ kwadrat üçagzalar üçin $f(g(x))=0$ deňlemäniň kökleri bolup hyzmat edýärler. $x_1+x_4=x_2+x_4$ bolýandygyny subut etmeli.

**558.** $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+1/(a_{n-1}+1)^2$ $(n=2, 3, 4, ...)$ yzygiderlik üçin $17<a_{2000}<18$ bolýandygyny subut etmeli.

**559.** $B$ depesindäki burç 20° bolan deňýanly $ABC$ $(AB=BC)$ üçburçlugyň $AB$ tarapynda $BM=AC$ bolan $M$ nokat alnan. $AMC$ burçy tapmaly.

## 2001-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

## 8(9)-njy synplar

**560.** Islendik natural $n$ üçin $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$ deňsizligi kanagatlandyrýan položitel sanlaryň $a_1$, $a_2$, ... yzygiderliginiň nola ýygnanýandygyny subut etmeli.

**561.** Islendik $a \in R$ üçin taraplary $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$ bolan üçburçluklaryň bardygyny we ol üçburçlugyň meýdanynyň $a$ sana bagly däldigini subut etmeli.

**562.** Eger $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ bolsa, onda $a_1+a_2+...+a_{2001}$ jemi tapmaly.

**563.** Eger $a+b\geq 1$, $a>0$, $b>0$ bolsa, onda $\forall n \in N$ üçin $a^{2^n}+b^{2^n}\geq \dfrac{1}{2^{2^n-1}}$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

**564.** Trapesiýanyň meýdany 1-e deň. Bu trapesiýanyň uly diagonalynyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

## 9-njy synp

**565.** Her biri –1 ýa-da +1 bolan $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sanlar $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_1 = 0$ deňligi kanagatlandyrýarlar. $n$-iň 4-e bölünýändigini subut etmeli.

**566.** $ABCD$ trapesiýada $AD$ we $BC$ – esas, $O$ – diagonallaryň kesişme nokady. $S_1 = S_{\Delta AOD}$, $S_2 = S_{\Delta BOC}$ berlen. Trapesiýanyň meýdanyny tapmaly.

**567.** $n\geq 2$ natural sanlar üçin $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{3n}{2n+1}$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etmeli.

# 2002-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

## 8-nji synp

**568.** $p+q=2002$ bolan bitin koeffisiýentli $x^2+px+q$ görnüşli kwadrat üçagza garalýar. Bitin kökleri bolan şeýle köpagzalaryň näçesi bar.

**569.** 999 droby saklaýan $\dfrac{1}{2}*\dfrac{2}{3}*\dfrac{3}{4}*\ldots*\dfrac{999}{1000}$ aňlatma berlen. Hemme ýyldyzlary arifmetik amal belgileri bilen çalşyryp, nola deň bolan aňlatmany almak mümkindigini subut etmeli.

**570.** $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2 \le (a^2+b^2+c^2)^3$ deňsizligi subut etmeli.

**571.** Küşt ýaryşyna grossmeýstrleriň we ussatlaryň jemi ı sanysy gatnaşdy. Ýaryş gutarandan soň her bir oýunçynyň ;oplan oçkosynyň deň ýarysynyň ussatlaryň garşysyna oý-ıap alandygy belli boldy. $n$-iň käbir bitin sanyň kwadratydygyny ѕubut ediň.

**572.** Goý, $O$ nokat $ABCD$ parallelogramyň diagonallarynyň kesişme nokady bolsun. $P$ nokat bolsa $A$, $O$, $B$ nokatlaryň üstünden geçýän töweregiň $BC$ göniçyzyk bilen kesişýän ikinji nokady bolsun. $AP$ göni çyzygyň $A$, $O$, $D$ nokatlaryň üstünden geçýän töwerege galtaşýandygyny subut etmeli.

## 9-njy synp

**573.** $14p + \frac{1}{143q} = 2002$ bolan $y=x^2+px+q$ kwadratik funksiýalara garalýar. Olaryň grafikleriniň bir nokadyň üstünden geçýändigini subut etmeli.

**574.** $1!\cdot3-2!\cdot4+3!\cdot5-4!\cdot6+\ldots-2000!\cdot2002+2001!$ aňlatmanyň bahasyny tapmaly.

**575.** Eger $x \neq k\pi$ bolsa, onda

$$\frac{1+2\cos x+3\cos^2 x+\ldots}{2+6\cos x+12\cos^2 x+20\cos^3 x+\ldots}$$

aňlatmanyň $\sin^2\frac{x}{2}$-a deňdigini subut etmeli.

**576.** Eger $a$, $b$, $c$ položitel sanlar bolsalar, onda

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

## 2003-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler (adaty mekdepler)

### 1-nji gün
### 9-njy synp

**577.** $[x]$ $x$-dan uly bolmadyk iň uly bitin san.

$$x+\frac{2003}{x}=[x]+\frac{2003}{[x]}$$

deňlemäniň bitin däl çözüwini (çözüwlerini) tapmaly.

**578.** $a$, $b$, $c$, $d$ natural sanlar $ab=cd$ deňligi kanagatlandyrýarlar. $a^{2003}+b^{2003}+c^{2003}+d^{2003}$ sanyň düzme san boljakdygyny subut ediň.

**579.** Tekizlikde taraplary 1*sm* bolan kwadrat ýatyr. Kwadrata diametrleri 0,001 santimetrden kiçi bolan ýaşyl tegelekler oklanýar, özi hem dürli tegeleklere degişli islendik iki nokadyň arasyndaky uzaklyk 0,001 *sm*-e deň bolmaly däl şerti bilen. Kwadratyň ýaşyl reňke boýalan böleginiň meýdanynyň 0,35 santimetrden kiçi boljagyny subut ediň.

**580.** 1 we –1 sanlardan islendik tertipde uzynlygy $2^k$ ($k$ – natural san) bolan hatar düzülýär. Soňra ol hatary şeýle düzgün boýunça üýtgedýärler: islendik sany yz ýanyndaka köpeldip, şol sanyň ýerine ýazýarlar; iň soňky $2^k$-njy sany birinji sana köpeldip, iň soňky sanyň ýerine ýazýarlar. Alnan täze hatary ýene-de şol düzgün boýunça üýtgedýärler we ş.m. Birnäçe ädimden soň diňe 1-den durýan hataryň boljagyny görkeziň.

### 8-nji synp

**581.** $x^2+y^2+z^2\geq k(xy+yz+zx)$ deňsizlik $k$-nyň haýsy bahalarynda islendik $x$, $y$, $z$ üçin ýerine ýeter?

**582.** Güberçek $ABCD$ dörtburçlukda $AB$ tarap $BD$ diagonala deň, $\angle BAC=30°$, $\angle CAD\neq 30°$ we $AC$ diagonal $BCD$ burçuň bissektrisasy bolup hyzmat edýär. $ADC$ burçy tapmaly.

## 2-nji gün
## 9-njy synp

**583.** Eger üç položitel sanyň jemi 2-ä deň, olaryň jübüt-jübütden köpeltmek hasyllarynyň jemi 1-e deň bolsa, bu üç sanyň köpeltmek hasylynyň alyp biljek iň uly bahasyny tapmaly.

**584.** Taraplary $AB=5$, $BC=11$, $CD=14$ we $AD=10$ bolan güberçek $ABCD$ dörtburçlugyň meýdany 90 *sm*-e deň. $\angle ACD$ we $\angle BAC$ jemini tapmaly.

**585.** $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ islendik sanlar üçin şeýle bir $k\in[1, 2, \ldots, n]$ san tapylyp, islendik $1\geq b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$ sanlaryň $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$ deňsizligi kanagatlandyrýanlygyny subut etmeli.

**586.** Uzynlygy 1-e deň kesime ($AD$) tötänden iki nokat oklanýar. $B$ we $C$ şol nokatlar.


$AB=x$, $AC=y$ belgilemeleri girizeliň. $AB$, $BC$, $CD$ kesimlerden üçburçluk gurup bolýan halynda $M(x, y)$ nokada ýaşyl nokat diýip at bereliň. Hemme ýaşyl nokatlaryň emele getirýän figurasynyň meýdanyny tapyň.

**587.** Her biri +1 ýa-da –1 bolan 50 san töwerek boýunça ýerleşdirilen. Bir sowalda üç ýanaş sanyň köpeltmek hasylyny bilse bolýar. Bu sanlaryň hemmesiniň köpeltmek hasylyny bilmek üçin iň pesinden näçe sowal bermek zerurdyr.

## 8-nji synp

**588.** Tagtada 1, 2, 3, ..., 2003 sanlar ýazylan. Bir göçümde olaryň islendik sanysyny öçürip olaryň ýerine öçürilen sanlaryň jeminiň 11-e bölünendäki galyndyny ýazmaga rugsat edilýär. Birnäçe göçümden soň tagtada biri 1001 bolan iki san galýar. Ikinji san haýsy?

**589.** Položitel $\alpha$, $\beta$ we $\gamma$ burçlaryň jemi 180°-a deň.
$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}$ deňsizligi subut etmeli.

**590.** Fiksirlenen $P$ nokatdan deň taraply $ABC$ üçburçlugyň $A$ we $B$ depelerine çenli uzaklyk $AP=2$, $BP=3$-e deň. $PC$ uzaklygyň iň uly alyp biljek bahasyny kesgitlemeli.

**591.** $R$ radiusly şar üçburçly piramidanyň hemme gapyrgalaryna galtaşýar. Şaryň merkezi piramidanyň beýikliginiň üstünde ýatyr. Piramidanyň dogrudygyny subut etmeli.

## Ýöriteleşdirilen mekdepler

### 1-nji gün
### 9-njy synp

**592.** Eger hemme hakyky $x$ we $y$ üçin $f(x+y^2)=f(x)+2(f(y))^2$ we $f(1)\neq0$ bolsa, onda $f(2003)$-i tapmaly.

**593.** $a$, $b$, $e$, $d$, $e$ hakyky sanlar $a+b+c+d+e=37$
$2^a+2^b+2^c+2^d+2^e=1024$ şertleri kanagatlandyrýarlar. Onda $a$ sanyň alyp biljek iň uly bahasy näçe?

**594.** Deň aralyklardan geçirilen üç parallel gönüleriň üçüsini kesýän töwerek geçirilen. $DA$ horda $A$ nokatda galtaşýan we $E$ nokatdan geçýän töwerek $AF$ hordanyň dowamyny $N$ nokatda kesýär. $N$, $E$ we $C$ nokatlaryň bir gönüde ýatýanyny subut etmeli.

**595.** $ABC$ üçburçlukda $AB^2+AC^2+BC^2$-yň san bahasy $ABC$ üçburçlugyň meýdanyndan bäş esse uly. $\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C$-ni tapmaly.

**596.** Agzalary položitel bitin sanlar bolan arifmetiki progressiýa berlen. Onuň bir agzasy doly kwadrat. Progressiýanyň tükeniksiz köp kwadratlary saklaýandygyny subut etmeli.

## 8-nji synp

**597.** $a, b, c, d$ položitel sanlar $abcd=1$-i kanagatlandyrýarlar. $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+dc+ac+bd+ad+bc\geq10$ boljagyny görkezmeli.

**598.** $A=20022002\cdot200320032003$ we $B=20032003\cdot200220022002$ sanlaryň haýsysy uly?

## 2-nji gün
## 9-njy synp

**599.** Eger hakyky $x$ we $y$ üçin $f(x)+f(y)-f(x\cdot y)=x+y$ bolsa, onda $f(x)$-i tapmaly.

**600.** $\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}}_{2003\ gezek}=y$ deňlemäniň bütin köklerini tapmaly.

**601.** $BD$ $\Delta ABC$-niň bissektrisasy, $AD=a$, $DC=b$ bolsun. $BD$ kesimiň ortasyndan galdyrylan perpendikulýar $AC$ tarapyň dowamy bilen $M$ nokatda kesişýänçä dowam etdirilýär. $MD$ kesimi tapmaly.

**602.** $a_1$, $a_2$, ... položitel sanlaryň yzygiderligi islendik $n\in N$ üçin $a_n^2\leq a_n-a_{n+1}$ deňsizligi kanagatlandyrýar. Islendik $n\in N$ üçin $a_n<\frac{1}{n}$ boljakdygyny subut etmeli.

**603.** Töwerek onuň daşynda ýatýan $P$ we $Q$ nokatlar berlen. $P$ nokatdan $PAB$ kesiji geçireliň we $A$, $B$, $Q$ nokatlardan geçýän töwerek guralyň. Şeýle töwerekleriň hemmesiniň $Q$ nokatdan başga ýene-de bir nokatdan geçýändiklerini görkezmeli .

### 8-nji synp

**604.** $U$, $V$ natural sanlar. Islendik natural $k$ san üçin $KU+2$ we $KV+3$ sanlaryň 1-den uly bolan umumy bölüjisi bar. $\frac{U}{V}$ nämä deň bolup biler?

**605.** Eger $a, b, c$ üçburçlugyň taraplary, $P$ – perimetri we $S$ onuň meýdany bolsalar, onda

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{P}$,

2) $P^2\geq 12\sqrt{3S}$

deňsizligiň dogrudygyny görkeziň.

## 2004-nji ýylda matematikadan döwlet bäsleşigine hödürlenen meseleler (adaty mekdepler)

### 8-nji synp (2-nji gün)

**606.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$ deňsizligi subut etmeli.

**607.** $x^{x^{x^x}}=(19-y^x)\cdot y^{x^y}-74$ deňlemäni natural sanlarda çözmeli.

**608.** $x^2ax-1=0$ deňlemäniň $x_1$ we $x_2$ kökleri, $a$ täk san. $x_1^4+x_2^4$ we $x_1^5+x_2^5$ sanlaryň özara ýönekeý bitin sanlardygyny subut etmeli.

**609.** Iki töwerek $A$ we $D$ nokatlarda kesişýärler. Birinji töwerege $A$ nokatdan geçirilen galtaşýan göniçyzyk ikinji töweregi $B$ nokatda kesýär. $A$ nokatdan geçýän ikinji töwerege galtaşýan göniçyzyk birinji töweregi $C$ nokatda kesýär.

$\frac{|AB|^2}{|AC|^2}=\frac{|BC|}{|CD|}$ deňligi subut ediň.

## 9-njy synp (1-nji gün)

**610.** Eger $a+b+c=0$ belli bolsa, onda $a^3+b^3+c^3=3abc$ deňligi subut etmeli.

**611.** $2^{2004}$ we $5^{2004}$ sanlar biri-biriniň yzyndan ýazylypdyr. Jemi näçe sanbelgi ýazylypdyr?

**612.** $2^{3^{100}}+1$ sanyň $3^{101}$ sana bölünýändigini subut etmeli.

**613.** $ABC$ üçburçlukda $BC$ tarapa parallel bolan $DE$ göniçyzyk geçirilipdir. Ol $ABC$ üçburçlukdan $ADE$ üçburçluk kesip alýar. Goý, $M$ nokat $BC$ tarapa degişli bolsun. Eger $ABC$ we $ADE$ üçburçluklaryň meýdanlary degişlilikde, $S$ we $S_1$-e deň bolsa, onda $ADME$ dörtburçlugyň meýdanyny tapyň.

## 9-njy synp (2-nji gün)

**614.** $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot99$ we $50^{99}$ sanlaryň haýsysy uly?

**615.** $x_1+x_2+x_3=68$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1121$. Eger $x_1$, $x_2$, $x_3$ ýönekeý sanlar bolsa, onda $x_1x_2x_3+26$ nämä deň?

## Ýöriteleşdirilen mekdepler

## 8-nji synp (1-nji gün)

**616.** Ähli natural bölüjileriniň (1-i we sanyň özüni hem hasaba alarys) köpeltmek hasyly dogry 2001 nol bilen gutarýan natural san barmy?

**617.** Käbir $x$ üçin $\cos3x=a\sin2x$ we $\sin3x=b\cos4x$ deňlikleriň ýerine ýetýändigi belli, bu ýerde $a$ we $b$ rasional sanlar. $\sin3x$-iň rasional sandygyny subut etmeli.

## 8-nji synp (2-nji gün)

**618.** Bäşbelgili san 41-e bölünýär. Ondan alnan sanlary tegelek goýmakdan alnan sanlaryň hem 41-e bölünýändigini subut etmeli.

**619.** Iki yzygider bitin nokatlardaky $y=x^2+ax+b$ kwadrat üçagzanyň bahalary degişlilikde, natural sanlaryň iki yzygiderliliginiň kwadraty bolýar. Ähli bitin nokatlarda üçagzanyň bahalarynyň dogry kwadratdygyny subut ediň.

**620.** $k+1$ natural san 24-e bölünýär. $k$ sanyň ähli natural bölüjileriniň jeminiň hem 24-e bitin bölünýändigini subut ediň.

## 9-njy synp (1-nji gün)

**621.** Stoluň üstünde 2003 teňňeler ýatyr. Iki okuwçy şeýle oýun oýnaýarlar. Nobat boýunça oýnaýarlar. Birinji oýunçy stoldan 1-den 99-a çenli islendik täk sany teňňeleri, ikinji oýunçy bolsa 2-den 100-e çenli islendik jübüt teňňeleri alyp bilýärler. Kim göçüm edip bilmese şol utulýar. Dogry oýnalanda kim utar?

**622.** Goý, $\cos x \neq 0$ bolsun. $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4$ deňsizligi subut etmeli.

## 9-njy synp (2-nji gün)

**623.** $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$ ulgamyň hakyky çözüwlerini tapmaly.

**624.** $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$; $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Bu sanlardan $\frac{a_i \cdot a_j}{a_i + a_j} (i < j)$ görnüşdäki drob düzýärler. Şeýle ähli droblaryň jeminiň $\frac{n-1}{4}$ geçmeýändigini subut etmeli.

**625.** Goý, umumy merkezi bolan $a$ taraply iki deň kwadratyň birleşmesi $\Phi$ bolsun.

a) ýokarky kwadraty nähili öwreniňde biziň Watanymyzyň gerbiniň araçägi alynýar? Meýdanyny, perimetrini we meýdanyň perimetre bolan gatnaşygyny tapmaly.

b) $\Phi$ meýdanyň $\Phi$ perimetre bolan gatnaşygynyň mümkin bolan bahalaryny tapmaly.

## 2005-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleler

### 1-nji gün

### 8-nji synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler

**626.** Natural $n \in N$ sanyň berlen bahasy üçin jemi $6n$-e deň bolan natural sanlaryň üçlüginiň näçesiniň bolup biljekdigini kesgitlemeli.

**627.** Küşt ýaryşynda her bir oýunçy oçkolarynyň hemmesiniň ýarysyny soňky üç ýeri eýelän oýunçular bilen duşuşykda toplapdyr. Ýaryşa näçe oýunçy gatnaşypdyr? Ýaryşyň tablisasyny düzmeli.

**628.** $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ köpagzanyň üç dürli hakyky köki bar, $P(Q(x))$ köpagzanyň bolsa hakyky kökleri ýok, bu ýerde $Q(x)=x^2+x+2005$. $P(2005)>\frac{1}{64}$ deňsizligi subut etmeli.

**629.** Birlik inedördülde depeleri inedördüliň taraplarynda ýatan dörtburçluk çyzylan.Onuň bir tarapynyň $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ä deň ýa-da ondan uly boljakdygyny subut etmeli.

### 9-njy synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler

**630.** $(C_n^0)H_2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ deňligi subut etmeli.

**631.** Küşt ýaryşyna 8-nji synpdan iki adam we birnäçe 9-njy synp okuwçylary gatnaşdylar. 8-nji synp okuwçylarynyň ikisi bilelikde 8 oçko topladylar, 9-njy synp okuwçylarynyň her biriniň toplan oçkolary şol bir sana deň boldy. 9-njy synp okuwçylarynyň näçesi ýaryşa gatnaşdy? (Oýunçylaryň her biri beýleki oýunçylar bilen diňe bir gezek oýnaýar). Hemme çözüwleri tapmaly.

**632.** $a_1, a_2, ..., a_n$ – položitel sanlardyr. $x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - ... - a_n = 0$ deňlemäniň iki položitel köküniň bolup biljekdigini subut etmeli.

## 2-nji gün
## 8-nji synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler

**633.** $p$ we $q$ ýönekeý sanlardyr. Eger $x^4-px^2+q=0$ deňlemäniň bitin kökleriniň bardygy belli bolsa, ol ýönekeý sanlary tapmaly.

**634.** $abc=1$, $a^3>36$. $\frac{2}{3}a^2 < a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ deňsizligi subut etmeli.

**635.** Stolda 2005 sany teňňe bar. Iki oýunçy oýun oýnaýarlar. Olar gezek-gezegine göçýärler. 1-nji göçümde 1-nji oýunçy stoldan teňňeleriň 1-den 99-a çenli islendik täk sanyny alyp biler. 2-nji oýunçy teňňeleriň 2-den 100-e çenli islendik jübüt sanyny alyp biler. Kim Öz gezeginde göçüm edip bilmese şol oýunçy hem utulýar. Oýun dogry oýnalanda kim utýar?

**636.** Eger $a, b, c$ üçburçlugyň taraplary, $S$ onuň meýdany bolsa onda, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ deňsizligiň adalatlydygyny subut etmeli.

## 9-njy synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler

**637.** Jübüt-jübütden dürli üçbelgili sanlaryň 117-sinden ybarat islendik köplükden sanlarynyň jemi deň bolan jübüt-jübütden kesişmeýän 4 bölek köplügi alyp bolýandygyny subut etmeli.

**638.** Goý, $a$, $b$, $c$ položitel sanlar we $abc=1$ bolsun.

$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ deňsizligi subut etmeli.

**639.** Iki oýunçy nobat boýunça tagtada $p$-den geçmeýän natural sanlary ýazýar. Oýnuň düzgüni eýýam ýazylan sanyň bölüjisini ýazmagy gadagan edýär. Nobatdaky göçümi edip bilmeýän oýunçy utulýar. Oýny derňemeli. $p$-niň haýsy bahasynda birinji oýunçy utýar?

## 8-nji synp

1. Subut etmeli deňsizligimizi $x^2y^2$–$a$ köpeldip, ony $x^6y^2+y^6x^2 \le x^8+y^8$ görnüşde ýazalyň. Bu deňsizlik $x^8-x^6y^2-y^6x^2+y^8 \ge 0$, ýagny $(x^6-y^6)(x^2-y^2) \ge 0$ deňsizlige deňgüýçlüdir. Soňky deňsizlik $|x|>|y|$ bolanda iki ýaýyň hem položitel, $|x|<|y|$ bolanda iki ýaýyň hem otrisatel, $|x|=|y|$ bolanda iki ýaýyň hem nola deň bolýandygy üçin adalatlydyr. Şunlukda, subut etmeli deňsizligimiz hem dogrudyr. Deňlik diňe $|x|=|y|$ bolanda ýerine ýetýändir.

2. a) bolmaz. Hakykatdan-da, $\frac{1}{7}$ drobdan başga hemme droblaryň jemini (käbir alamatly) alsak we olaryň ählisini umumy maýdalawja getirsek, onda maýdalawjyda 8·9·5·11 san bolar, ýagny $\frac{1}{7}$ drob bilen bilelikde hemme jem $\frac{k}{8\cdot9\cdot5\cdot11}\pm\frac{1}{7}$ deň bolar, bu ýerde $k$ – bitin san. Ýöne, bu jem nola deň däldir, çünki sanawjyda $7k\pm8\cdot9\cdot5\cdot11$ san alynýar. Ol nola deň däldir (birinji goşulyjysy 7-ä bölünýär, emma ikinjisi bölünmeýär).

b) a) ýagdaýda geçirilen tassyklamalaryň görkezişine görä $\frac{1}{7}$ drob hökman bozulmalydyr. Şunuň ýaly tassyklamanyň görkezişi ýaly $\frac{1}{11}$ droby hem bozmak gerekdir.

Eger $\frac{1}{9}$ drobdan başga ähli droblaryň jemini (käbir alamatly) alsak we olary umumy maýdalawja getirsek, onda maýdalawjyda 8·3·5 san bolar, ýagny hemme jem $\frac{e}{8\cdot3\cdot5}\pm\frac{1}{9}$-e deň bolar, bu ýerde $e$ – bitin san. Ýöne bu jem nola deň däldir, çünki sanawjyda nola deň bolmadyk $3e\pm8\cdot5$ san alnar (birinji goşulyjy 3-e bölünýär, ikinji goşulyjy 3-e bölünmeýär). Diýmek, $\frac{1}{9}$ droby hem bozmak gerek. Soňunda, galan droblar $\frac{m}{8\cdot3}\pm\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}$ jemi berýär (bu ýerde birinji goşulyjy käbir alamatly $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ droblaryň jemidir). Bu jem hem noldan tapawutlydyr, çünki onuň $\frac{m}{8\cdot3}+\frac{\pm2\pm1}{10}$ görnüşi bardyr, ýagny ikinji drob täk sanawjylydyr, ýagny sanawjy nola deň däldir. Şunlukda, $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ droblaryň iň bolmanda birisi bozulmalydyr.

$\frac{1}{8}$ drobdan başga ähli galan droblaryň jeminiň (käbir alamatlary bilen alnan) $\frac{n}{4\cdot3}$ görnüşi bardyr we hemme jem $\frac{n}{4\cdot3}\pm\frac{1}{8}=\frac{2n+3}{3\cdot8}$ deňdir. Ol nola deň däldir, çünki sanawjy täkdir. Diýmek, $\frac{1}{8}$ droby hem bozmak gerek.

Aralarynda gerekli alamaty goýmak kyn bolmadyk $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ droblar galar: $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=0$

3. Hawa, bolýar. Hakykatdan-da, $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $(n+10)$ massaly islendik 10 çeküw daşlary, her bir topara $2n+11$ umumy massaly 2 çeküw daşy düşer ýaly 5 topara bölmek bolar:

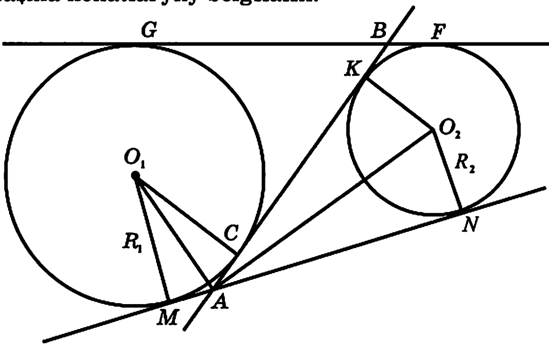
| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| $n+1$ | $n+2$ | $n+3$ | $n+4$ | $n+5$ |
| $n+10$ | $n+9$ | $n+8$ | $n+7$ | $n+6$ |

16 *g*-dan 25 *g*-a çenli, 26 *g*-dan 35 *g*-a çenli, 36 *g*-dan 45 *g*-a çenli, ..., 1976 *g*-dan 1985 *g*-a çenli massaly çeküw daşlary degişlilikde, bu nusga görä toparlara böleliň, soňra 1 *g*-dan 15 *g*-a çenli massaly galan çeküw daşlary aşakdaky görnüşde paýlalyň:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | II | III | IV | V |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Şunlukda, 1985 sany çeküw daşlary 5 topara bölüp bolýar.

**4.** Suratda görkezilişi ýaly, töwerekleriň merkezini we galtaşma nokatlaryny belgiläliň.



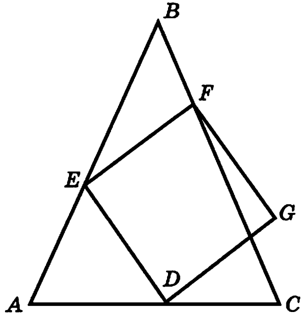

Şol bir töweregiň galtaşmalarynyň umumy nokadyndan galtaşma nokada çenli kesimleriniň deňdigini göz öňünde tutup, yzygiderli alarys:

$GF=GB+BF=CB+BF=CK+KB=CK+2KB$; $MN=MA+$ $+AN=MA+AK=MA+AC+CK=2AC+CK$. Simmetrikdiginden $GF=MN$ bolýar, onda $AC+KB$. Şoňa görä-de, $AK=AC+CK=$ $=CK+KB=CB$ we $R_1 \cdot R_2=AM \cdot AN$ ýa-da $\frac{R_1}{AM}=\frac{AN}{R_2}$ (*) subut etmek ýeterlikdir.

$O_1MA$ we $ANO_2$ üçburçluklar gönüburçludyr. $O_1$ we $O_2$ nokatlar degişlilikde, $MAC$ we $KAN$ burçlaryň bissektrisalarynda ýatýarlar, onda $O_1AO_2$ burçuň ululygy 90°-a deňdir (iki ýanaşyk burçlaryň ýarysynyň jemi ýaly). Şonuň üçin $O_1A \perp AO_2$, $O_1M \perp AN$ we $MO_1A$ we $NAO_2$ burçlar deňdir (özara perpendikulýar taraplaryň burçy ýaly). Şoňa görä-de, $O_1MA$ we $ANO_2$ üçburçluklar meňzeşdir, bu ýerden bolsa (*) gelip çykýar.

**5.** Eger $a$, $b$ we $c$ sanlaryň bir alamaty bar bolsa, onda iki deňsizlikler ulgamynyň hem ýerine ýetjekdigi aýdyňdyr. Tersine, tassyklamany subut edeliň. Goý $a \le b \le c$ we iki deňsizlikde ýerine ýetýän bolsun. Onda, eger $a<0$, $b>0$, $c>0$ bolsa, birinji deňsizlikden $bc>|ab|$ deňsizligi alarys, bu ýerden $\frac{1}{bc} < \frac{1}{ab}$ we ikinji deňsizlik ýerine ýetenokdyr. Şuňa meňzeşlikde, $a<0$, $b<0$, $c>0$ ýagdaýa-da seretmek bolar.

**6.** Goý, üçburçlugyň tarapy $2a$, kwadratyň tarapy bolsa $x$ bolsun.



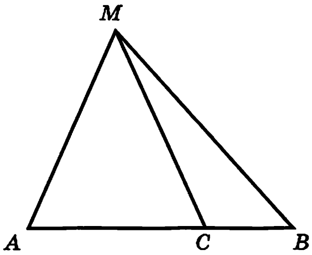

Onda $x>a$ ýagdaý mümkin däldir (kwadratyň iki depesi üçburçlugyň çäginden çykýar). $x<a$ bolanda $\angle AED>60°$, şonuň üçin $\angle BEF<30°$, $\angle BFE>90° \Rightarrow \angle GFC>0$.

**7.** Tekizlikde iki parabolanyň simmetriýa oklary koordinata oklary hasaplap, $y=ax^2+b$ we $x=cy^2+d$ parabola deňlemeleri alarys. Parabolalar dört nokatda kesişýärler, onda $a, b, c, d$ koeffisiýentler $|d| > \sqrt{-\frac{b}{a}}$ we $|b| > \sqrt{-\frac{d}{c}}$ şertleri kanagatlandyrmalydyr. Parabolanyň kesişme nokatlary

$$\begin{cases} y = ax^2 + b \\ x = cy^2 + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax^2 + b \\ \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{a^2(1-4cd) + c^2(1-4ab)}{4a^2c^2} \end{cases}$$

ulgamy kanagatlandyrýar. $1-4c>0$, $1-4ab>0$, onda ikinji deňleme merkezi $O\left(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2a}\right)$ nokatda, radiusy

$r = \frac{1}{2|ac|}\sqrt{a^2(1-4cd)+c^2(1-4ab)}$ bolan töwerekdir.



**8.** Goý, $M$ nokat $AB$ gönüde ýatmaýan we $\angle ACM = \angle AMB$ (surata seret) bolsun.

$AMB$ we $ACM$ üçburçluklaryň degişli burçlary deňdir, onda olar meňzeşdir we şunlukda, $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$.

Bu ýerden $AM = \sqrt{AC \cdot AB}$, ýagny $M$ nokat merkezi $A$ nokatda, radiusy $\sqrt{AC \cdot AB}$ bolan töwerekde ýatýar.

Tersine, eger $AB$ gönüde ýatmaýan $M$ nokat bu töweregiň erkin nokady bolsa, onda $AM^2=AC \cdot AB$ deňlikden $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$ gelip çykýar, ýagny $AMB$ we $ACM$ üçburçluklar meňzeşdir. Şunlukda, $\angle$AMB=$\angle$ACM.

**9.** Goý $f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_{2n+1}\cos(2n+1)x$. Onda

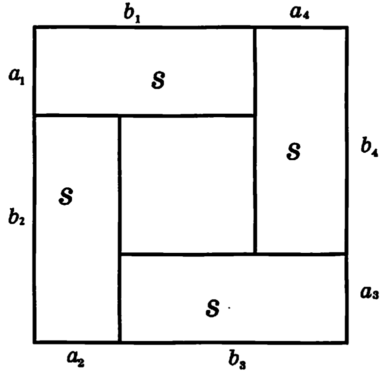
$$|a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}| = \frac{|f(0)-f(\pi)|}{2} \le \frac{|f(0)|+|f(\pi)|}{2} \le$$

$\le \max(|f(0)|, |f(\pi)|)$. Bu ýerden, $x=0$, ýa-da $x=\pi$ elmydama berlen deňsizligi kanagatlandyrýandygy gelip çykýar.

**10.** Eger $b=0$ bolsa, onda meseläniň şertini $x_1=a$, $x_2=x_3=x_4=0$ sanlar kanagatlandyrýar. Goý, $b\neq 0$ we $x$ – käbir (häzirlikçe näbelli) rasional san bolsun. Eger $x_1=x$, $x_2=-bx$, $x_3 = \frac{1}{x}$, $x_4 = -\frac{1}{x}$, bolsa, onda $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4=b$ bolýar. Şunlukda, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4=x-bx=(1-b)x$. Şoňa görä-de, eger $b\neq 1$ bolsa, onda $x = \frac{a}{1-b}$ goýsak, dört $\left(x, -bx, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ rasional sanlar gerekli şertleri kanagatlandyrar.

$b=1$ bolanda, ýeňil barlamak bolar, mysal üçin, $x_1=-x$, $x_2=4x$, $x_3 = \frac{1}{2x}$, $x_4 = -\frac{1}{2x}$ sanlar, bu ýerde $x = \frac{a}{3}$ gözlenilýän bolýar.

**11.** Suratda görkezilişi ýaly, goý, $S$ meýdanly gönüburçluklaryň taraplary $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ sanlar bolsun.




$a_1>a_2$ diýip güman edeliň. Onda $\frac{S}{a_1}<\frac{S}{a_2}$, ýagny $b_1<b_2$. Bu ýerden we $a_1+b_2=a_2+b_3$ deňlikden $b_3>b_2$ gelip çykýar. Onda $a_2=\frac{S}{b_2}>\frac{S}{b_3}=a_3$, ýagny $a_2>a_3$. $a_3>a_4$ we $a_4>a_1$ hem şuňa meňzeş subut edilýär.

Şunlukda, $a_1>a_3>a_3>a_4>a_1$. Alnan gapma-garşylyk $a_1=a_2$ bolýandygyny subut edýär.

Edil şuňa meňzeşlikde $a_1=a_2=a_3=a_4$ deňlik subut edilýär. Alnan deňlik gerek tassyklamany subut edýär.

**12.** Üýtgeýän ululykly deňsizlikleri subut etmegiň bir usulyna garalyň. Ol aşakdaky ýagdaýa esaslanýar. Eger berlen köplükde üýtgeýän ululyklaryň ähli deň we deň däl bahalarynda deňsizligiň dogrulygy görkezilse, onda üýtgeýän ululykly deňsizlik subut edildi diýip kabul edilýär. Deňsizligiň subudy iki etapda geçirilýär: 1) üýtgeýän ululyklaryň hemme özara deň bahalary üçin deňsizligiň ýerine ýetirilişini barlalyň; 2) ornuna goýmanyň kömegi bilen (mysal üçin, $a$ we $b$ üýtgeýän ululyklaryň ýerine $b$ we $h>0$ ululyklary peýdalanjakdyrys, bu ýerde $\forall a>b$ üçin $a=b+h$)

üýtgeýän ululyklaryň hemme özara deň däl bahalary üçin deňsizligi subut edeliň. Eger mysalda üýtgeýän ululyklaryň pozisiýasy özara üýtgeýän bolsa, onda 2) etapda üýtgeýän ululyklaryň bahalarynyň özara ýerleşişiniň bir halyna garamak ýeterlikdir; şeýle hem iki etapyda birine birleşdirmek bolýandyr (mysal üçin, $a \geq b \Leftrightarrow a=b+h$, bu ýerde $h \geq 0$).

1. $3a^3+7b^3>9ab^2$, $a>0$, $b>0$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy: 1) $\forall a=b$ üçin $3a^3+7b^3=10a^3>9ab^2=9a^3$.

2) a) $\forall a>b \Leftrightarrow a=b+h$, bu ýerde $h>0$. Onda $3a^3+7b^3=3(b+h)^3+$ $+7b^3=10b^3+9b^2h+9bh^2+3h^3$, $9ab^2=9(b+h)b^2=9b^3+9b^2h$.

$3a^3+7b^3>9ab^2$ bolýandygy aýdyňdyr.

b) $\forall a<b \Leftrightarrow b=a+p$, bu ýerde $p>0$. Onda $3a^3+7b^3=3a^3+7(a+p)^3=$ $=10a^3+21a^3p+21ap^2+7p^3$, $9ab^2=9a(a+p)^2=9a^3+18a^2p+9ap^2$.

$3a^3+7b^3>9ab^2$ bolýandygy düşnüklidir. Deňsizlik subut edildi.

2. Eger $3a+b=1$ we $a>0$, $b>0$ bolsa, onda $3a^3+b^3 \geq \frac{1}{16}$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy: 1) $\forall a=b$ üçin alarys $3a+b=4a=1$, $a=\frac{1}{4}$. Onda $3a^3+b^3=4a^3=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{16}$.

2) a) goý, $a<b \Leftrightarrow b=a+h$, $h>0$. Onda $3a+b=4a+h=1$, bu ýerden $a=\frac{1-h}{4}$.

$$3a^3+b^3=3\left(\frac{1-h}{4}\right)^3+\left(\frac{1-h}{4}+h\right)^3=\frac{4+36h^2+24h^3}{64}>\frac{4}{64}=\frac{1}{16}.$$

b) $\forall a>b \Leftrightarrow a=b+p$, $p>0$. Onda $3(b+p)+b=1$, bu ýerden $b=\frac{1-3p}{4}$. $0<p<\frac{1}{3}$ bolýandygyny görmek kyn däldir. Onda

$$3a^3+b^3=3\left(\frac{1-3p}{4}+p\right)^3+\left(\frac{1-3p}{4}\right)^3=\frac{4+36p^2-24p^3}{64}>\frac{4}{64}=\frac{1}{16}.$$

Deňsizlik subut edildi.

3. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, $a>0$, $b>0$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy: 1) $\forall a=b$ üçin $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{a}{a}=2$.

2) goý, kesgitlilik üçin $a>b$ bolsun $\Leftrightarrow a=b+c$, $c>0$. Onda

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(b+c)^2+c^2}{(b+c)b}=\frac{2(b+c)b+c^2}{(b+c)b}=2+\frac{c^2}{(b+c)b}>2.$$

Deňsizlik subut edildi.

**4.** $x^n+y^n\ge\dfrac{(x-y)^n}{2^{n-1}}$ $(x\ge 0, y\ge 0, n\in N)$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy: $x+y=c$ goýalyň we goý, kesgitlilik üçin $x\le y$ bolsun $\Leftrightarrow y=x+\Delta x$, $\Delta x\ge 0$. Onda alarys $x+x+\Delta x=c$, bu ýerden $x=\dfrac{c-\Delta x}{2}$. Indi $x^n+y^n=\left(\dfrac{c-\Delta x}{2}\right)^n+\left(\dfrac{c-\Delta x}{2}+\Delta x\right)^n=$

$$=\left(\frac{c-\Delta x}{2}\right)^n=\frac{2c^c+F(\Delta x)}{2^n}\ge\frac{c^n}{2^{n-1}}=\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}},$$ sebäbi $F(\Delta x)\ge 0$.

**5.** $a^2+b^2+c^2\ge ab+ba+ac$ deňsizligi subut etmeli.

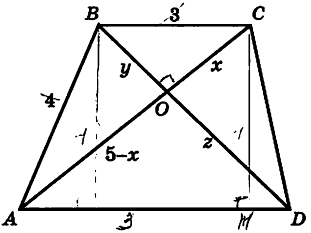
Subudy: goý, $a\le b\le c$ bolsun. Indi, $b=a+h_1$, $h_1\ge 0$; $c=a+h_2$, $h_2\ge 0$ ornuna goýma girizeliň we aşakdaky tapawudy bahalandyralyň: $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)=a^2+(a+h_1)^2+(a+h_2)^2-a(a+h_1)-(a+h_1)(a+h_2)-a(a+h_2)=a^2+a^2+2ah_1+h_1^2+a^2+2ah_2+h_2^2-a^2-ah_1-a^2-ah_1-ah_2-h_1h_2-a^2-ah_2=h_1^2+h_2^2-h_1h_2=(h_1-h_2)^2+h_1h_2$.

$\forall h_1$ we $h_2$ otrisatel däl bahalarynda tapawudyň otrisatel däldigi aýdyňdyr. Diýmek, $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$.

**6.** $a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0$, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ deňsizligi subut etmeli.

Subudy: goý, kesgitlilik üçin $a\le b\le c$ bolsun $\Leftrightarrow b=a+h_1$, $h_1\ge 0$; $c=a+h_2$, $h_2\ge 0$. Onda $a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+(a+h_1)^3+(a+h_2)^3-3a(a+h_1)(a+h_2)=3a^3+3a^2h_1+3ah_1^2+h_1^3+3a^2h_2+3ah_2^2+h_2^3-3a^3-3a^2h_1-3a^2h_2-3ah_1h_2=3a((h_1-h_2)^2+h_1h_2)+h_1^3+h_2^3\ge 0$.

**13.** $BOC$ we $DOA$ üçburçluklaryň meňzeşliginden $\dfrac{5-x}{x}=\dfrac{z}{y}$ deňligi alarys.



Bu ýerden $\frac{5-x}{x}+1=\frac{z}{y}+1,\ \frac{5}{x}=\frac{z+y}{y},\ 5\cdot\frac{y}{x}=z+y.$

Trapesiýanyň diagonallary perpendikulýar bolany üçin onuň meýdanyny aşakdaky ýaly taparys:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(y+z)=\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\frac{y}{x}=\frac{25}{2}tg\Theta=$$

$$=\frac{25}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{50}{3}.$$

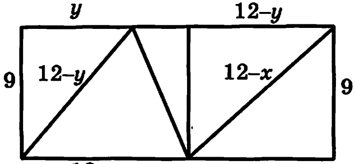
**14.** $2xy\le x^2+y^2$ deňsizligi ulanyp alarys:

$(8-e)^2=(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+$
$+2bd+2cd\le a^2+b^2+c^2+d^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(a^2+d^2)+(b^2+c^2)+$
$+(b^2+d^2)+(c^2+d^2)\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)=4(16-e^2).$

Bu ýerden $(8-e)^2\le 4(16-e^2)$, $5e^2-16e\le 0$, $0\le e\le\frac{16}{5}$.

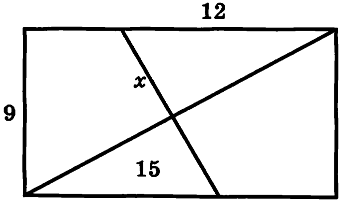
Diýmek, $e$ iň uly $e=\frac{16}{5}$ bahany $a=b=c=d=\frac{6}{5}$ bolanda alýar.

**15. 1-nji usul.** Gyraky gönüburçly üçburçluklara Pifagor teoremasyny ulanyp alarys: $x^2+9^2=(12-x)^2$; $y^2+9^2=(12-y)^2$.




Bu deňlemeleri $x$ we $y$-a görä çözüp alarys $x=y=\frac{21}{8}$.

Epiniň uzynlygy $c=\sqrt{9^2+(12-y-x)^2}=\frac{45}{4}$ $sm$-e deňdir.




**2-nji usul.** Simmetriýa görä, epin diagonaly iki deň bölege bölmelidir we oňa perpendikulýar bolmalydyr. Şeýlelikde, $\frac{x}{15}=\frac{9}{12}$.

Epin $2x=\frac{15\cdot 9}{12}=\frac{45}{4}$ $sm$ uzynlyga eýe bolar.

**16.** Rasional $a$, $b$, $c$ sanlaryň berlen deňlemeleriň kökleridigi üçin $x^3+ax^2+bx+c=(x-a)(x-b)(x-c)$ deňlik dogrudyr. Bu deňlikde, degişlilikde, $x=-a$ we $x=a$ bahalary goýup alarys: $c(ab+1)=0$ we $2a^3+(ab+c)=0$. Bu ýerden $c=0$. Şeýlelikde, başky toždestwo $x^2+ax+b\equiv(x-a)(x-b)$ görnüşe geçer. Ondan bolsa, Wiýet teoremasyna görä $a+b=-a$ we $ab=b$ deňlikleri alarys. Diýmek, $a=1$, $b=-2$.

**17.** Äşgär $(-x-1)^3=-(x+1)^3$ deňlikden, $P(-x)-1$ köpagzanyň $(x-1)^3$ aňlatma bölünmeýändigi görünýär; bu ýerden we $P(x)+1$ köpagzanyň $(x-1)^3$ aňlatma bölünýändiginden $P(x)+1+P(-x)-$ $-1=P(x)+P(-x)$ jemiň $(x-1)^3$-a bölünýändigi görünýär. Şuňa meňzeşlikde, $P(x)+P(-x)$ jemiň $(x+1)^3$ hem bölünýändigi gelip çykýar. Diýmek, $P(x)+P(-x)$ jem $(x-1)^3(x+1)^3$ köpeltmek hasylyna hem bölüner. Bölüjiniň altynjy derejeli köpagzalygyndan $P(x)+P(-x)=0$ bolar, ýagny $P(-x)=-P(x)$, $P(x)$ – täk funksiýadyr we $P(0)=0$. Şonda $P(x)+1=(x-1)^3(Ax^2+Bx-1)=$ $=(x^3-3x^2+3x-1)(Ax^2+Bx-1)$. Dördünji we ikinji derejelerdäki koeffisiýentler $B-3A=0$ we $3+3B-A=0$ deňlikleri berýär. Olardan alarys: $A=-\frac{3}{8}$, $B=-\frac{9}{8}$.

**18.** Berlen deňlemede $y=0$ bahany goýup alarys: $f(x)f(0)-f(0)=x$. Bu ýerden $f(0)\cdot(f(x)-1)=x$, diýmek, $f(0)=0$ we $f(x)=\frac{x}{f(0)}+1$.

Indi bolsa $x=0$ bahany goýup, $f(0)=1$ we $f(x)=x+1$ deňlikleri alarys. Şeýlelikde, $(x+1)(y+1)-(xy+1)=x+y$, ýagny çözüw dogrudyr.

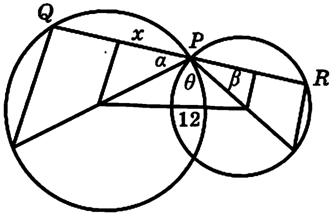
**19.** Şerte görä, $xy-2000=x+y$, $(x-1)(y-1)=2001=3\cdot23\cdot29$. Şerte görä, $x<y$ we $2000<xy<3000$, $x-1=23$ ýa-da 29-a deň bolmalydyr. Netijede, (24; 88) ýa-da (30; 70).

**20.** a) çözüwler $(x, y)=(0; n)$, $(1; n-1)$, ..., $(n; 0)$. Diýmek, $n+1$ sany çözüw bar.

b) $z=k$, $k=0, 1, ..., n$ üçin $n-k+1$ sany dürli çözüw bardyr. Şeýlelikde, $(n+1)+n+...+1=0{,}5(n+1)(n+2)$ sany çözüwi bardyr.

**21.** $[1]+[\sqrt{2}]+\dots+[\sqrt{n^2-1}]=(2^2-1^2)\cdot 1+$
$+(3^2-2^2)\cdot 2+\dots+[n^2-(n-1)^2](n-1)=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+$
$+\dots+(n-1)\cdot n^2-1^3-2^3-\dots-(n-1)^3=(2-1)\cdot 2^2+$
$+(3-1)\cdot 3^2+\dots+(n-1)\cdot n^2-1^3-2^3-\dots-(n-1)^3=$
$=-1^3-2^2-3^2-\dots-(n-1)^2+n^3-n^2=-1^2-2^2-3^2-$
$-\dots-(n-1)^2+(n-1)n^2=\dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$

**22. 1-nji usul.**




Şerte görä, $QP=PR$, $8\cos\alpha=6\cos\beta$. Ortaky üçburçluga kosinuslar teoremasyny ulanyp alarys:

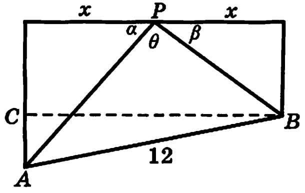
$$\cos\theta=\frac{8^2+6^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 6}=-\frac{11}{24}.$$

Şeýlelikde,

$$\frac{11}{24}=-\cos\theta=-\cos(\pi-(\alpha+\beta))=\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}\cos^2\beta-\sqrt{(1-\cos^2\beta)(1-\frac{9}{16}\cos^2\beta)}.$$

Alnan deňligi $\cos\beta$ görä çözüp, $\cos\beta=\sqrt{\dfrac{65}{72}}$-i alarys. Onda $PQ=2\cdot 6\cos\beta=\sqrt{130}$.

**2-nji usul.**



$ABC$ üçburçluga Pifagor teoremasyny ulanyp alarys:

$(2x)^2 + (\sqrt{64 - x^2 - 36 - x^2})^2 = 12^2,$

$4x^2 + 64 - x^2 + 36 - x^2 - 2\sqrt{(64 - x^2)(36 - x^2)} = 144,$

$(64-x^2)(36-x^2)=(x^2-22)^2,$

$2304-100x^2+x^4=x^4-44x^2+484,$

$x = \sqrt{\frac{65}{2}}$, $PQ=2x=\sqrt{130}$.

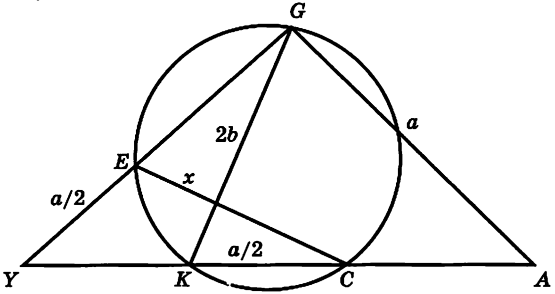
**23.** Goý, $x$, $y$ degişlilikde, $AB$ kesimiň uzynlygynyň onluklarynyň we birlikleriniň sany bolsun. Onda $AB=10x+y$, $CD=10y+x$ bolar. Goý, $p=OH$ bolsun. $OCH$ üçburçluk üçin Pifagor teoremasyny ulanyp alarys:

$$p^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - CD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{99(x^2 - y^2)}.$$

$p$ sanyň rasionaldygy sebäpli $x+y=11$ we $x-y=1$ ýa-da 4. Çözüw bolup, diňe $x=6$, $y=5$ bahalar hyzmat edýär.

**24.** Şol bir $EK$ duga daýanýandyklary üçin $\angle YGK=\angle ECK$, diýmek, $\Delta YCE$ we $\Delta YGK$ meňzeşdirler.




Şeýlelikde, $\frac{CE}{EY} = \frac{GK}{KY}$, $xy=ab$. $GKA$ üçburçlugyň deňýanlydygy üçin $b/a=\cos\angle GKA=\cos\angle GEC$. $CEY$ üçburçluga kosinuslar teoremasyny ulanyp alarys $\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot x\left(-\frac{b}{a}\right)$, $y(y+a)=x(x+b)$. Alnan

$$\begin{cases} xy = ab, \\ y(y+a) = x(x+b) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamynda $a$-ny ýa-da $b$-ni ýok edip, $ay=x^2$ we $bx=y^2$ bolýandygyny alarys.

**25.** a) şertden $x_1=x_2=...=x_n=x$ bolanda, islendik $x$ üçin $f(x^m)=f^m(x)$ deňligi alarys. Goý, $y_i=x_i^m$ bolsun. Şonda (a) $f\left(\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}\right)=\frac{f(y_1)+f(y_2)+...+f(y_n)}{n}$ görnüşe geler.

Goý, $x$ položitel bitin san we $y_1=x-1$, $y_2=...=y_{n-1}=x$, $y_n=x+1$ bolsun, şonda alarys

$$f(x)=\frac{f(x-1)+(n-2)f(x)+f(x+1)}{n},$$

$$f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1).$$

Bu deňlikden $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... yzygiderligiň arifmetiki progressiýadygy görünýär. $f(0)=f^m(0)$ we $f(1)=f^m(1)$ deňliklerden, $f(0)$ we $f(1)$ bahalaryň her biriniň 0 ýa-da 1 deňligi görünýär. Ýagny, $f(0)$, $f(1)$, ... yzygiderlik 0, 0, 0, ..., ýa-da 0, 1, 2, 3, ..., ýa-da 1, 0, –1, –2, ..., ýa-da 1, 1, 1, ... yzygiderlikleriň haýsy hem bolsa biri bilen gabat gelýändir. Birinjisi (ç) şerte, ikinjisi (b) şerte garşy gelýär; üçünji bolsa $f(x^m)=f^m(x)$ deňlige garşy gelýär. Diňe 1, 1, 1, ... yzygiderlikde $f(1987)=1$ deňlik mümkindir.

**26.** Her bir $x$ üçin $f(x)=f(x+0)=f(x\cdot 0)=f(0)$ deňlikler ýerine ýetýär, diýmek, $f$ hemişelik funksiýadyr:

$$f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},\ f(1988)=-\frac{1}{2}.$$

**27.** Položitel $x$ üçin berlen $x^{-3x-8}>x^7$ deňsizlikden $x^{3x+5}<1$ alynýar. Soňky deňsizligiň ini tarapyndan hem kök alyp, $x^{x+5}<1$ deňsizligi alarys. Eger $0<x<1$ bolsa, onda $x^{x+5}<1$. Eger-de $x>1$ bolsa, onda $x^{x+5}>1$. Şeýlelik bilen deňsizligiň çözüwi $0<x<1$ aralykdyr.

**28.** Goý, $A$, $B$, $C$ üçburçlugyň depeleri we $A'$, $B'$ degişlilikde, $A$ we $B$ depelerden inderilen beýiklikleriň esaslary bolsun. $\angle AB'B=\angle AA'B=90°$ bolany üçin $A$, $B'$, $A'$, $B$ nokatlar diametri $AB$ we merkezi $N$ bolan töweregiň üstünde ýatýarlar. Şeýlelikde, $NA'B'$ deňýanlydyr: $NA'=NB'=13$. Diýmek, $A'B'=24$.

$MN=13^2-12^2=5$.

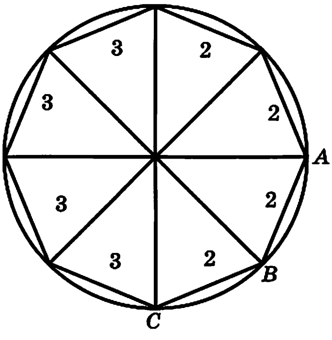
**29.** Berlen $\frac{x}{1988}=\sin x$ deňlemäniň hakyky kökleri $y=\frac{x}{1988}$ we $y=\sin x$ funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokatlarynyň absissalarydyr. Bu funksiýalaryň grafiklerinden we $632{,}8<\frac{1988}{\pi}<633$ deňsizliklerden $(0;\,2\pi)$ aralykda bir kök, $[2k\pi;\,(2k+2)\pi]$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,15$ kesimleriň her birinde 2 kök hem-de $[632\pi;\,1988)$ aralykda hem 2 köküň barlygy görünýär. Şeýlelikde, 0 we kökleriň öňünde minus goýsak, ýene-de kök bolýanlygyny nazarda tutup, berlen deňlemäniň hakyky kökleriniň sanynyň $1+2\cdot(1+2\cdot316)=1267$ bolýandygyny taparys.

**30.** Goý, $r$ bitin kök bolsun. Şonda $q=pr^3-r^4=r^3(p-r)$. Diýmek, $q$ ýönekeý san bolany üçin $r=1$ we $q=p-1$ bolar. Şeýlelikde, $p=3$, $q=2$.

**31.** Berlen deňlemeden $x^2=19[x]-88\geq0$. Diýmek, $x>0$. Onda $[x]^2<x^2=19[x]-88$ ýa-da $[x]^2-19[x]+88<0$. Şeýlelikde, $8<[x]<11$. Bu ýerden $[x]=9$ ýa-da 10. Onda $x^2=19[x]-88=$ $=19\cdot9-88=83$ ýa-da $x^2=19\cdot10-88=102$.

Jogaby:
$x=\sqrt{83};\ x=\sqrt{102}$.

**32.** Goý, $O$ – merkez, $A$, $B$ we $C$ bolsa, $AB=2$ we $BC=3$ bolýan depeler bolsun.



Onda $\angle AOC = \frac{3+2}{3+3+3+3+2+2+2+2}\cdot 360°=90°$.

$\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 270°=135°$.

Kosinuslar teoremasyny ulanyp alarys:

$AC = \sqrt{2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos 135^\circ} = \sqrt{4+9+6\sqrt{2}} = \sqrt{13-6\sqrt{2}}$

we daşyndan çyzylan töweregiň radiusy $\frac{AC}{\sqrt{2}}$ deňdir ($AOC$ deňýanly gönüburçly üçburçluk bolany üçin). Şeýlelikde, sekizburçlugyň meýdany:

$4S_{OABC} = 4(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta OAC}) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cdot(13+6\sqrt{2})\right) =$

$= 13+12\sqrt{2}$.

**33.** $x\cdot y\cdot n>0$ bolany üçin berlen deňligiň iki tarapyny $xyn$ köpeltmek hasylyna bölüp alarys:

$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Bu ýerden $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{x}$, $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{y}$.

Diýmek, $x\geq n+1$, $y\geq n+1$. $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ deňlikden $x$ näbelliniň $x=n+1$ we $x=n(n+1)$ bahalary alyp biljekdigi görünýär.

Eger $x>n(n+1)$ bolsa, onda $y<n+1$ bolar we biz gapma-garşylyga geleris. Şeýlelikde, $x$-yň alyp biljek bahalarynyň iň kiçisi $n+1$, iň ulusy bolsa $n(n+1)$ bolar.

**34.** Aşakdaky deňliklere

$1998=f(2001)=f(f(2004))=f(1999)=f(f(2002))=$ $=f(1997)=f(f(2000))=f(1995)$ we $1997=f(2000)=f(f(2003))=$ $=f(1998)=f(f(2001))=f(1996)$ üns berip, (gaýdym) ters induksiýa boýunça $n\leq 1996$ üçin

$$f(n)=\begin{cases}1998, & \text{eger } n \text{ täk bolsa,}\\ 1997, & \text{eger } n \text{ jübüt bolsa}\end{cases}$$

bolýandygyny görkezip bileris. Birinji $n=1996$, $1995$ ýagdaýlarda tassyklama dogrudyr. Tassyklama $n\geq k$ üçin dogrudyr diýip güman edeliň. Eger $k$ täk bolsa, onda

$f(k-2)=f(f(k+3))=f(1997)=1998$.

Eger $k$ jübüt bolsa, onda

$f(k-2)=f(f(k+3))=f(1998)=1997$.

Şeýlelikde: a) $f(1998)=1997$ we b) $f(n)=1997$ deňligi kanagatlandyrýan položitel bitin sanlar: $n=2, 4, 6, ..., 2000$.

35. Goý, $x^2-ax+9a=0$ deňlemäniň kökleri $x_1$, $x_2$ bolsun. Onda Wiýet teoremasy boýunça $x_1+x_2=a$, $x_1 \cdot x_2=9a$ deňlikleri ýazyp bileris. Şunlukda, $9(x_1+x_2)=x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot x_2-9(x_1+x_2)=0$. Deňligiň iki bölegine hem 81-i goşalyň we ony aşakdaky görnüşde ýazalyň: $81=(x_1-9)(x_2-9)$. Ýöne 81 sany 2 bitin köpeldijä aşakdaky 6 usul bilen dagytmak mümkindir:

$81=(\pm 1)\cdot(\pm 81)=(\pm 3)\cdot(\pm 27)=(\pm 9)\cdot(\pm 9)$.

Şunlukda, $a=x_1+x_2=(x_1-9)+(x_2-9)+18$ sanyň deregine aşakdaky 6 sanlaryň biriniň bolmagy mümkindir: $\pm 82+18$, $\pm 30+18$, $\pm 18+18$, ýagny 100, −64, 48, −12, 36, 0.

$a$ parametriň tapylan ähli bahalarynda berlen deňlemäniň bitin kökleriniň bardygyny gönümel barlamak bilen göz ýetirmek bolýar.

36. $x_1$ san tagtada ýazylan sanlaryň iň ulusy, $x_2, ..., x_n$ bolsa galanlary bolsun. Onda

$$(x_2+\ldots+x_n)^2=\sum_{i=2}^{n} x_i^2+\sum_{2\le i<j\le n} 2x_ix_j \qquad (1)$$

$x_i^2 < 2x_1x_i (i=2,\ldots,n)$ deňsizlikleri jemläliň we $\sum_{i=2}^{n} x_i$ jemiň alnan bahalandyrmasyny (1) goýalyň. Onda alarys:

$$(x_2+\ldots+x_n)^2 < \sum_{i=2}^{n} 2x_1x_i+\sum_{2\le i<j\le n} 2x_ix_j=\sum_{1\le i<j\le n} 2x_ix_j.$$

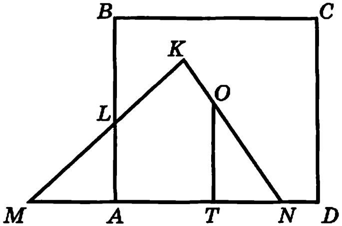
Bu ýerden $(x_2+...+x_n)^2<2$, $x_2+...+x_n<\sqrt{2}$. Diýmek, $x_1$ sany bozup, talap edilýän netijä geleris.

37. $a_1, a_2, ..., a_7$ bilen wektorlary, olaryň jemini $A$ bilen belgiläliň.

$B=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$, $i=1, 2, ..., 7$ belgileme girizeliň we $a_8=a_1$, $a_9=a_2$ diýip hasaplalyň. Şert boýunça $|B_i|=|A-B_i|$, $i=1, 2, ..., 7$. $B$ deňlikleriň iki bölegini hem kwadrata götereliň we goşalyň, onda alarys:

$7A^2 - 2A \cdot \sum_{i=1}^{7} B_i = 0$, bu ýerden $7A^2 - 2A \cdot 3A = 0$, $A^2 = 0$.

Şoňa görä-de, $\vec{A} = \vec{0}$.




**38.** 1990=497·4+2. Şonuň üçin bize görkezilen ölçegli dört üçburçluk bilen 12·12 kwadraty ýapyp bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

Üçburçlugyň bir tarapy bilen kwadratyň bir tarapy bir göni çyzykda ýatar ýaly, üçburçlugyň beýleki bir tarapy kwadratyň $O$ merkezinden geçer ýaly edip ýerleşdireliň. Onda

$ND = DT - TN = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}}$, $MA = 11 - (12 - ND) = 5 - \frac{6}{\sqrt{3}}$,

$AL = MA \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6$. $AL > ND$ deňsizligiň dogrudygyny ýeňil barlamak bolýar. Şoňa görä-de, $MKN$ üçburçluk we bu üçburçlugy $O$ nokadyň daşyndan 90°, 180° we 270° aýlamakdan alnan üç üçburçluklar $ABCD$ kwadraty doly ýapýandyr.

**39.** $(2n)^2 = 4n^2$ we $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, onda natural sanyň kwadraty 4-e bölünende galyndy 0 ýa-da 1 bolar.

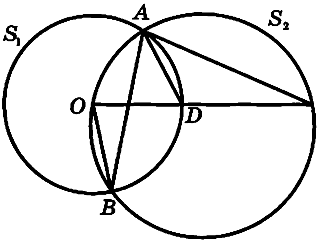
1990 san 4-e bölünende 2 galyndy galýar. Şonuň üçin, eger gözlenilýän sanlar bar bolsa, onda olaryň iki sanysynyň köpeltmek hasylyny 4-e bölenińde 2 ýa-da 3 galyndy galar. Şunlukda, iň bolmanda olaryň üçüsi täkdir. Bu üç täk sanyň her birini 4-e bölenińde 1 ýa-da 3 galyndy berýär. Olaryň iki sanysynyň deň galyndysy bardyr. Bu iki sanyň köpeltmek hasylyny 4-e bölenińde 1 galyndy galýar, bu bolsa mümkin däldir. Diýmek, şeýle sanlar ýokdur.

**40.** Bu deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata göterip, deňgüýçli deňsizlik alarys:

$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+2(\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+)$
$+\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)}+\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)}>(a+b)(b+c)(a+c)$,
ýa-da $(a+b)(b+c)(a+c)=ab(a+b)+bc(b+c)+$
$+ac(a+c)+2abc$, $2(b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+$
$+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)})>2abc$.

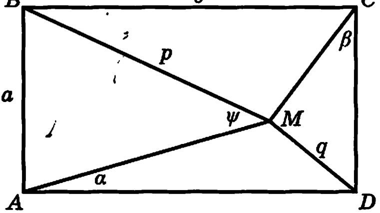
Soňky deňsizlik aýdyňdyr, çünki
$\sqrt{ac(a+b)(b+c)}>\sqrt{ac\cdot ac}=ac$.

**41.** $AD$ kesimiň $A$ burçuň bissektrisasydygyny subut edeliň.




Içinden çyzylan burç baradaky teorema görä $\angle BAC=\angle BOC$. Şu teorema görä $\angle BAD=0{,}5\angle BOD$. $BAD$ burç $S_2$ töweregiň içinden çyzylan we $BD$ duga daýanýar. $BOD$ burç bolsa şu duga daýanýan merkezi burçdur. Şunlukda, $\angle BAD=0{,}5\angle BOD=0{,}5\angle BOC=0{,}5\angle BAC$. $BD$ kesimiň $B$ burçuň bissektrisasydygy hem şuňa meňzeş subut edilýär.

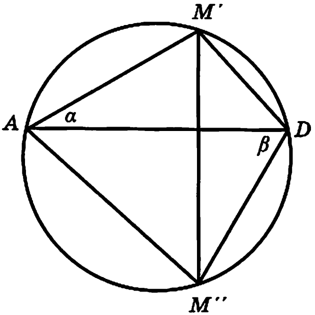
**42. Birinji çözülişi:** $\angle DAM=\alpha$, $\angle BCM=\beta$, $\angle BMC=\varphi$, $\angle BMA=\psi$, $AB=a$, $BC=b$, $BM=p$, $MD=q$ goýalyň:



Onda $\angle AMD=180°-\varphi$, $\angle CMD=180°-\psi$. *ABM, CDM, BCM, DAM* üçburçluklara sinuslar teoremasyny ulanyp, aşakdaky deňlikleri alarys:

$$\frac{a}{\sin\psi}=\frac{p}{\cos\alpha}=\frac{q}{\cos\beta},$$
$$\frac{b}{\sin\varphi}=\frac{p}{\sin\beta}=\frac{q}{\sin\alpha}.$$

Şunlukda, $\sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta\cos\beta$, $\sin2\alpha-\sin2\beta=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=0$. $\alpha$ we $\beta$ ýiti burçlar bolany üçin ýa $\alpha=\beta$, ýa-da $\alpha+\beta=90°$ bolar. Emma birinji ýagdaýda $p=q$ alarys. Bu ýerden *ABCD* kwadrat, *M* onuň merkezidigi gelip çykýar.




**Ikinji çözülişi:** *ABCD* gönüburçlukdan *AMD* we *BMC* üçburçluklary keseliň we olary *AD* we *BC* taraplary gabat geler ýaly edip, ýanaşdyryp goýalyň. Netijede, *AD* we *M′M″* diagonallary perpendikulýar bolan içinden çyzylan *AM′DM″* dörtburçluk alarys.

Onda $\alpha+\beta=\angle M'AD+\angle AM'M''=90°$.

**43.** Berlen deňleme aşakdaky deňlemä deňgüýçlüdir:

$$\frac{7^x-1}{7-1}=2^{y-1} \text{ ýa-da } 7^{x-1}+7^{x-2}+\ldots+1=2^{y-1}.$$

Eger $y=1$ bolsa, onda $x=1$. Bu birinji çözüwdir. Goý, $y>1$ bolsun. Bu halda sagda jübüt san, çepde $x$ täk sanlaryň jemi durandyr. Onda $x$ jübüt san bolmaly we deňlemäni şeýle ýazyp bolar:

$(7+1)(7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+1)=2^{y-1}$, ýa-da $7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+1=2^{y-4}$.

Bu ýerden $y\geq4$ we $x=2$, $y=4$ jübüt ikinji çözüw bolýanlygy gelip çykýar. $y>4$ bolanda çözüwiň ýokdugyny görkezeliň. Sagda jübüt san, çepde $\frac{x}{2}$ täk sanlaryň jemi dur, diýmek, $x$ 4-e bölünýär.

Onda deňlemäni $(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+...+1)=2^{y-4}$ görnüşde ýazyp bolýar, bu ýerden $2^{y-4}$-üň 50-ä bölünýänligi gelip çykýar. Bu mümkin däldir. Jogaby: $\{(1; 1), (2; 4)\}$.

**44.** Berlen öýjüklerde 1-den 21-e çenli sanlary talap edilýän görnüşde ýerleşdirmek başartdy diýip güman edeliň. Öýjüklere sanlary ýazmagyň başga usulyna garalyň. Birinji setirdäki 6 öýjügiň her birine ýazylan sanlary üýtgetmän, ikinji setirdäki öýjükleriň her birine olaryň ýokarsynda duran birinji setirdäki öýjükleriň jemine deň bolan sany ýazalyň. Galan hemme setirleri şuňa meňzeş dolduralyň. Onda öýjükleriň her birinde, bu öýjüklerde ilki başda ýazylan sanlaryň jübütligi bilen gabat gelýän san bolar. Diýmek, indi bu öýjükleriň her birine ýazylan sanlaryň jemi täk bolar, çünki ilki başda ýazylan sanlaryň jemi $1+2+...+21=231$-e deňdir, ýagny täk sandyr. Görnüşi ýaly, biziň öwürmelerimiz netijesinde alnan jemiň jübütligi üýtgemeýär. Görkezilen täze usulda, birinji setirdäki öýjüklere ýazylan islendik $a, b, c, d, e, f$ natural sanlar üçin, ähli öýjüklerdäki sanlaryň jeminiň jübüt sandygyny görkezmek kyn däldir. Gapma-garşylyk alyndy. Şunlukda, talap edilýän usul bilen sanlary ýerleşdirip bolanok.

**45.** $x=0, y=\pm1; x=\pm1, y=0$ çözüwlerden başga çözüwleriniň ýokdugyny tersinden güman edip subut edeliň. Goý, $x$, $y$ bitin çözüwleri bolsun we $x\neq-1, 0, 1$. Deňlemäniň çep bölegini

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)=y^2$$

köpeldijilere dagydalyň. Biziň ýagdaýymyzda, $x-1\neq0$, onda $y^2$ san $(x-1)^2$ sana bitin bölüner we şeýlelikde, $y$ san $(x-1)$ sana bitin bölüner. Bu ýerden $(x+1)(x^2+x+1)=\left(\frac{y}{x-1}\right)^2$ bitin sanyň kwadraty diýen netijä gelýäris. $x^2+x+1=(x+1)x+1$ görnüşe görä $x+1$ we $x^2+x+1$ köpeldijileriň ýeke-täk umumy bölüjileri ýokdur, onda olaryň her biri bitin sanyň kwadraty bolýar. Hususy halda, $x+1\geq0$. Biziň ýagdaýymyzda $x\neq0, 1, -1$, şoňa görä-de, $x\geq2$ we

$$x^2<x^2+x+1<(x+1)^2\cdot x^2+x+1$$

san bitin sanyň kwadraty diýip gapma-garşylyk aldyk.

46. a) hawa. $55=9\cdot 6+1$, onda alnan sanlaryň içinde 9-a bölüniňde deň galyndy berýän ýedi san tapylar. 9-a bölüniňde deň galyndy berýän 1-den 100-e çenli sanlaryň arasynda 12 sandan köp däldir, onda bu ýedi sanlaryň arasynda ikisiniň tapawudy 9 bolar.

b) hökman däl. Mysal:

1, 2, 3, ..., 11;
23, 24, ..., 33;
45, 46, ..., 55;
67, 68, ..., 77;
89, 90, ..., 99.

Setirleriň her birinde sanlaryň tapawudy 10-dan geçmeýär, dürli setirleriň sanlarynyň tapawudy bolsa iň azyndan 12 san bolýar.

47. Goý, $0<x<2$ bolsun. Onda taraplarynyň uzynlyklary 1, 1, $x$ bolan üçburçluk bardyr. Şert boýunça taraplarynyň uzynlyklary $f(1)$, $f(1)$, $f(x)$ bolan üçburçluk bardyr. Üçburçluk deňsizligi boýunça $f(x)<2f(1)$. Indi islendik bitin $n\geq 2$ üçin $f(n)\leq(n-1)f(2)$ deňsizligiň dogrudygyny matematiki induksiýa usuly bilen subut edeliň. $n=2$ bolanda deňsizligiň dogrudygy aýdyňdyr Goý, ol käbir $n=k$ üçin ýerine ýetýän bolsun. $n=k+1$ bolanda deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut edeliň. Taraplarynyň uzynlyklary 2, $k$, $k+1$ bolan üçburçluk bardyr, çünki $k\geq 2$. Şert boýunça taraplarynyň uzynlyklary $f(2)$, $f(k)$, $f(k+1)$ bolan üçburçluk bardyr. Üçburçluk deňsizligi boýunça $f(k+1)<f(2)+f(k)\leq(k-1)f(2)+f(2)=kf(2)$ we ş.m.

Soňra, goý $x\geq 2$, $n=[x]$ bolsun, onda $2\leq n\leq x<n+1$. Taraplarynyň uzynlyklary $n$, $x$, $n+1$ bolan üçburçluk bardyr. Şonuň üçin taraplarynyň uzynlyklary $f(n)$, $f(x)$, $f(n+1)$ bolan üçburçluk bar. Alarys: $f(x)<f(n)+f(n+1)\leq((n-1)+n)f(2)<2xf(2)$.

Islendik $x$ üçin $f(x)\leq 2xf(2)+2f(1)$, şonuň üçin $A=2f(2)$, $B=2f(1)$ şertleri kanagatlandyrýar.

48. $a\neq 0$ we $a\neq 1$ bolýandygy düşnüklidir. $a^6+1>4$ deňsizligi subut etmek ýeterlikdir. Onuň üçin $a^5-a^3+a=2$ deňligi göz öňünde tutup, jemiň kuby üçin formulany ulanyp alarys:

$$a^6+1=(a^2+1)(a^4-a^2+1)=(a^2+1)\cdot\frac{a^5-a^3+a}{a}=$$

$=(a^2+1)\cdot\frac{2}{a}=2\left(a+\frac{1}{a}\right)$. $a^6+1>0$ bolýanlygyndan

$(a^2+1)\cdot\frac{2}{a}>0$ we $a>0$ gelip çykýar. Onda sanyň orta arifmetiki we orta geometriki bahasy baradaky teorema boýunça $a+\frac{1}{a}>2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ we $a^6+1>4$.

**49.** Goý, $k$ drob çyzykly $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\frac{1}{1}}}}$ görnüşdäki

aňlatmanyň bahasy $a_k$ bolsun. Eger $a_k=\frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ – gysgalmaýan drob) bolsa, onda $a_{k+1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{m}{n}}=\frac{n}{n+m}$, şeýle hem

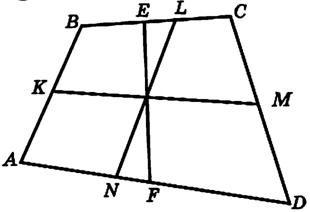
$\frac{n}{m+1}$ drobuň gysgalmaýandygy aýdyňdyr. $\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)^2=\frac{5}{4}+\frac{1}{n^2}$

deňligiň $\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m+n}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{(m+n)^2}$ deňlige deňgüýçlüdigine göz ýetirmek kyn däldir (bu deňlikleriň ikisi hem $m^2+mn-n^2=1$ deňlige deňgüýçlüdir). Edil şunuň ýaly $\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{n^2}$ deňlik $\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m+n}\right)^2=\frac{5}{4}+\frac{1}{(m+n)^2}$ deňlige deňgüýçlüdir (bu deňlikleriň ikisi hem $m^2+mn-n^2=-1$ deňlige deňgüýçlüdir). Şunlukda, $k$-nyň artmagy bilen $\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)^2=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{n^2}$ (1) deňlikdäki alamat gezekleşýär. $k=1$ bolanda (1) deňlik goşmak alamaty bilen dogrudyr, onda $k=1988$ bolanda (1) deňlik aýyrmak alamaty bilen dogrudyr.

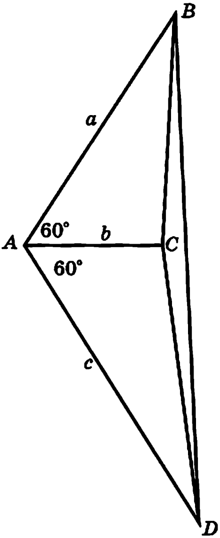
**50.** $2^5=32$ we $3^5=3125$. Onda gözlenilýän sifriň 3 bolmagy mümkindir. Başga sifrleriň gabat gelmeýändigini subut edeliň. Goý, $2^n$ we $5^n$ sanlar $a$ sifr bilen başlanýan we degişlilikde, $s+1$ we $t+1$ sifrleri bar bolsun. Onda $n>3$ bolanda $a\cdot10^s<2^n<(a+1)\cdot10^s$ we $a\cdot10^t<5^n<(a+1)\cdot10^t$ deňsizlikler dogrudyr. Bu deňsizlikleri köpeldip, $a^2\cdot10^{s+t}<10^n<(a+1)^2\cdot10^{s+t}$

ýa-da $a^2<10^{n-s-t}<(a+1)^2$ deňsizligi alarys. $1\le a$ we $a+1\le 10$ deňsizliklerden $n-s-t=1$ gelip çykýar. Diýmek, $a^2<10$ we $(a+1)^2>10$. $a$ sifrdir, onda $a=3$.

**51.** Berlen parallelogramyň depelerini *K, L, M, N* bilen, *ABCD* dörtburçlugyň *BC* we *AD* taraplarynyň ortasyny bolsa *E* we *F* bilen belgiläliň.




*EMFK* dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut etmek kyn däldir. Şeýlelikde, *KM* we *EF* kesimleriň ortasy gabat gelýär.




Ýöne *KM* kesimiň ortasy *LN* kesimiň ortasy bilen hem gabat gelýändir, çünki *KLMN* – parallelogram. Şeýlelikde, *EF* we *LN* kesimleriň ortasy gabat gelýär. Bu iki ýagdaýda mümkindir:

1) haçanda *L* bilen *E*, *N* bilen *F* gabat gelende;

2) haçanda *ELFN* dörtburçluk parallelogram bolanda we şoňa görä-de, $BC\|AD$. Islendik ýagdaýda-da *KLMN* we *EMFK* parallelogramlar deňululyklydyr. Indi *EMFK* meýdanyň *ABCD* meýdanyň ýarysyny düzýändigini subut etmek galýar. Ol *EM, MF, FK, KE* kesimleriň *BCD, CDA, DAB, ABC* üçburçluklaryň orta çyzygydygyndan ýeňil gelip çykýar.

**52.** Suratda şekillendirilen *ABC, ADC* we *ABD* üçburçluklara garalyň.

*ABC* üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanyp alarys:

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cos(\angle BAC)\cdot AB\cdot AC$ ýa-da $BC^2=a^2\cdot ab+b^2$.

Şuňa meňzeşlikde alarys:

$DC^2=b^2-bc+c^2$; $BD^2=a^2+ac+c^2$.

*BCD* üçburçluk üçin aşakdaky deňsizligi ýazyp bileris:

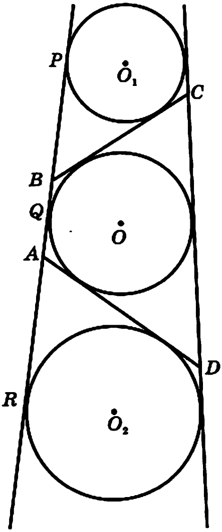
$BC+CD\geq BD$ ýa-da

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Bu ýerde deňlik *C* nokat *BD* kesimde ýatanda ýerine ýetýär, ýagny üçburçlugyň meýdany *ABC* we *ADC* üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir.

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin(\angle BAD)=ac,\ S_{ABC}=ab,\ S_{ADC}=bc.$$

Diýmek, $ac=ab+bc$ ýa-da $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ bolanda we diňe şonda deňligiň ýerine ýetýänligini alarys.




**53.** *d* diametrli töweregiň daşyndan çyzylan we esasynyň uzynlyklary *a* we *b* bolan islendik deňýanly trapesiýa üçin $ab=d^2$ deňligiň ýerine ýetýänligini ýeňil barlap bolýar.

Indi meseläniň şertlerini kanagatlandyrýan erkin *ABCD* dörtburçluga garalyň we suratda görkezilişi ýaly goşmaça çyzyklar geçireliň. $BC=QP$, $AD=RQ$ ýeňil görkezmek bolýar. Şoňa görä-de, *O* berkidilen töwerek bolanda *P* we *R* nokatlar *Q* nokada golaýlaşdygyça *AB* we *CD* göni çyzyklaryň uzynlyklary *BC* we *AD* göni çyzyklaryň uzynlyklaryndan kiçi bolar. Haçanda $O_1$ we $O_2$ töwerekler *O* töwerege galtaşan ýagdaýynda minimuma eýe bolunýar. Şonuň üçin $a>a'$, $b>b'$ (bu ýerde $a'$ we $b'$–*d* diametrli töweregiň daşyndan çyzylan deňýanly trapesiýanyň esaslary). Şeýlelikde, $ab\geq a'b'=d^2$.

**54.** Diagonallaryň arasyndaky $AOB$ burçy $\alpha$ bilen belgiläliň, onda kosinuslar teoremasy boýunça alarys:

$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\alpha$,

$BC^2=BO^2+CO^2+2BO\cdot CO\cos\alpha$,

$CD^2=CO^2+DO^2-2CO\cdot DO\cos\alpha$,

$DA^2=DO^2+AO^2+2DO\cdot AO\cos\alpha$.

Bu gatnaşyklary goşup alarys:

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)-$

$-2\cos\alpha(AO\cdot BO\cdot BO\cdot CO+CO\cdot DO\cdot DO\cdot AO)$.

Meseläniň şertleri $\cos\alpha\cdot(AO-CO)(BO-DO)=0$ deňlige deňgüýçlüdir. Şunlukda, $\cos\alpha=0$ ýagny $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ýa-da $AO=CO$, ýa-da $BO=DO$. Subut edildi.

**55.** Beýan edilen operasiýa her gezek ýerine ýetirilende jedweldäki goşmaklaryň mukdary jübüt san üýtgär. Ilkibaşda jedwelde 36 goşmak bardy, diýmek, birnäçe operasiýalar ýerine ýetirilenden soňra jedwelde täk sany goşmak galar. Eger haýsy hem bolsa bir pursatda jedwelde $m$ sany goşmak galsa, onda goşmaklaryň we aýyrmaklaryň mukdarynyň tapawudynyň moduly $|m-(64-m)|=|2m-64|$ deň bolar. Islendik täk $m$ üçin bu ululyk 2-den kiçi bolmaz. Diýmek, 2-ä rugsat berlen operasiýalary ýerine ýetirmek bilen eýe bolmak bolar. Mysal üçin, aşaky setirdäki we çepdäki üçünji sütündäki alamaty üýtgetmek ýeterlikdir.

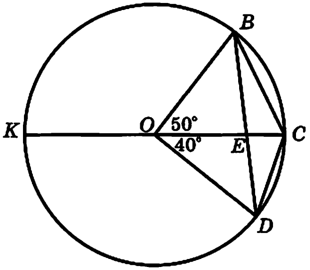
**56.** Aşakdaky deňlikden gelip çykýar:

$$\cos(x+y)+2\cos x+2\cos y+3=\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)^2\left(1+\cos\frac{x-y}{2}\right)+$$
$$+\left(1-\cos\frac{x+y}{2}\right)^2\left(1-\cos\frac{x-y}{2}\right).$$

**57.** $BCD$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerege garalyň. Goý, töweregiň merkezi $O$ bolsun, onda $\angle BOC=2\angle BCD=50°$, $\angle COD=2\cdot\angle BDC=40°$, çünki merkezi burç içinden çyzylan burçdan iki esse uludyr. Indi $O$ we $A$ nokatlaryň gabat gelýändigini subut edeliň:

$\angle BOC=\angle BAC=50°$, $\angle COD=\angle CAD=40°$.

$\alpha$ burç bilen kesim görünýän nokatlaryň geometriki orny kesimi saklaýan göni çyzyga görä simmetrik töweregiň iki dugasyndan durýar.




*A* we *O* nokatlar *BCD* burçuň içinde ýatýar. Şonuň üçin *BC (CD)* kesime daýanýan iki dugadan *BCD* burçuň daşynda ýatýanyny taşlalyň. Iki duga ikiden köp bolmadyk nokatda kesişýärler. Olaryň biri *C* nokat, diýmek, ikinji nokat *A*=*O*. Goý, diagonallaryň kesişmesi *E* nokat bolsun, *CO* kesimiň dowamynyň töwerek bilen kesişmesi *K* nokat bolsun. Onda $\angle KCD=0{,}5\cdot\angle KOD=0{,}5(180°-40°)=70°$. Indi *CED* üçburçluga garap, alarys: $\angle CED=180°-25°-70°=85°$.

**58.** a) goý, $f(1)=a$ bolsun. Onda $x=1$ üçin meseläniň şertinden $af(a+1)=1$ we $f(a+1)=\frac{1}{a}$ gelip çykýar. Indi $x=a+1$ goýup alarys:

$$f(a+1)f\left(f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right)=1 \text{ ýa-da } f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a.$$

Şunlukda, $f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=f(1)$. $f$ funksiýanyň artýandygyndan $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1$ we $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ gelip çykýar. Eger $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ bolsa, onda gapma-garşylyk alarys: $1<a=f(1)<$ $<f(1+a)=\frac{1}{a}<1$. Şonuň üçin diňe bir mümkinçilik galýar: $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

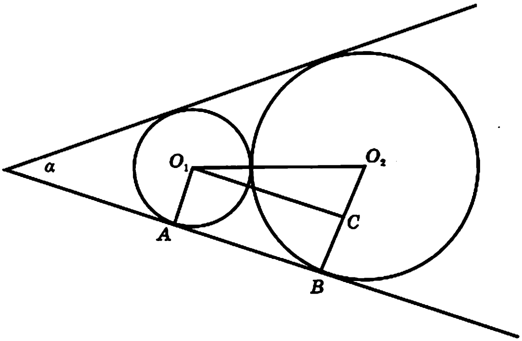
b) $f(x)=\frac{a}{x}$, $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Bu funksiýa meseläniň şertlerini kanagatlandyrýandyr. Hakykatdan-da

$$f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{\frac{a}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{a^2}{a+1}=1,$$ çünki $a^2=a+1$.

**59.** Goý, gönüburçly üçburçlugyň taraplary $a$, $b$, $c$ ($a \le b \le c$), $a$ katet bilen $c$ gipotenuzanyň arasyndaky burç $\alpha$ bolsun. Şert boýunça $c-b=b-a$, şoňa görä-de, $c-c\sin\alpha=$ $=c\sin\alpha-c\cos\alpha$, ýagny $1+\cos\alpha=2\sin\alpha$. $\alpha$ burç üçin bu deňlemäni $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ görnüşde ýazyp bolýar. Bu ýerden $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2$ we $\alpha=2\operatorname{arctg}2$. Ikinji ýiti burç $\beta=\pi/2-\alpha=$ $=\pi/2-2\operatorname{arctg}2$ bolýar.

Jogaby: $2\operatorname{arctg}2$, $\pi/2-2\operatorname{arctg}2$.

**60.** Goý, berlen tegelekleriň merkezleri $O_1$ we $O_2$ hem-de burçuň bir tarapynyň tegeleklere galtaşma nokatlary $A$ we $B$ bolsun.




Eger $r=O_1A$, $R=O_2B$ we $O_1C$ kesim $AB$ kesime parallel bolsa, onda $O_1O_2=r+R$, $O_2C=R-r$, $\angle O_2O_1C=\alpha/2$. $O_1O_2C$ üçburçlukdan alarys: $O_2C=O_1O_2\sin\alpha/2$, ýagny $R-r=(R+r)\sin\alpha/2$. Netijede, alarys:

$r(1+\sin\alpha/2)=R(1-\sin\alpha/2)$. Şoňa görä gözlenilýän gatnaşyk $r/R=(1-\sin\alpha/2)/(1+\sin\alpha/2)$ bolar.

**61.** Kubuň depeleriniň birinden üç kwadrata garalyň. Bu kwadratlary reňklemek üçin ähli üç reňki hem ulanmak zerurdyr. Kubuň hemme depelerine degişli kwadratlaryň jemi 24 sanydyr. Onda her reňkden 8 kwadrat bolar. Reňklemegiň mysaly aşakdaky suratda görkezilendir.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 2 | | | | |
| | | 2 | 3 | | | | |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| | | 3 | 2 | | | | |
| | | 2 | 3 | | | | |

**62.** $ABCD$ döwük çyzygyň uzynlygy oňuň ujuny birleşdirýän $AD$ kesimiň uzynlygyndan kiçi däldir. Şoňa görä-de, $AB+BC+CD \geq AD$. Şuňa meňzeş ýene bäş deňsizlik adalatlydyr. Hemme alty deňsizligi hem goşup we çözüp $3p \geq 2(AD+BE+CF)$ alarys. Bu ýerden subut etmeli deňsizligimiz gelip çykýar.

**63.** Deňsizligiň sag bölegindäki hemme agzalary onuň çep bölegine geçireliň we aşakdaky görnüşde toplalyň:

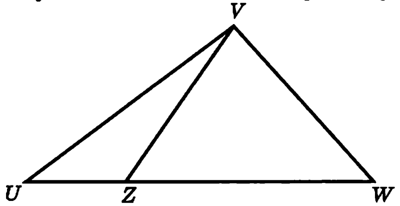
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) =$$
$$= \left(x_2^2 - x_1x_2 + \frac{x_1^2}{4}\right) + \left(x_3^2 - x_1x_3 + \frac{x_1^2}{4}\right) + \left(x_4^2 - x_1x_4 + \frac{x_1^2}{4}\right) +$$
$$+ \left(x_5^2 - x_1x_5 + \frac{x_1^2}{4}\right) = \left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(x_4 - \frac{x_1}{2}\right)^2 +$$
$$+ \left(x_5 - \frac{x_1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

**64.** Natural sanlaryň ýönekeý köpeldijilere dagytmagyň ýeke-täkligi esasynda şeýle $u$, $v$, $w$, $t$ natural sanlar tapylyp, $a=u \cdot v$, $b=w \cdot t$, $c=u \cdot w$, $d=v \cdot t$ deňlik ýerine ýeter. Şoňa görä-de,
$$a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}=(u \cdot v)^{1984}+(w \cdot t)^{1984}+(u \cdot w)^{1984}+(v \cdot t)^{1984}=$$
$$=u^{1984}(v^{1984}+w^{1984})+t^{1984}(v^{1984}+w^{1984})=(u^{1984}+t^{1984})\,(v^{1984}+w^{1984}).$$
Bu san düzme sandyr.

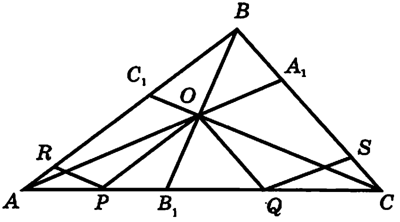
**65.** Ähli sanlar dürli diýip güman edeliň. Onda $2 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ we şunlukda, $x_{i} \geq i+1$. Şonuň üçin
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}.$$ Islendik $k \geq 2$ üçin
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$ deňsizlik dogrudyr. Onda

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{n+1}<\frac{3}{4}.$$ Bu bolsa şerte garşy gelýär.

**66.** Ilkibaşda aýdyň bir bellik edeliň. Eger $UVW$ üçburçlugyň $UW$ tarapynda $Z$ nokady alsak, onda $\angle UZV$ ýa-da $\angle WZV$ iki burçuň haýsysynyň kütek bolýandygyna baglylykda $VZ<VU$ ýa-da $VZ<VW$ deňsizlik ýerine ýetýär.




Eger $UW$ tarap üçburçlugyň iň uzyn tarapy bolsa, onda $VZ<UW$ deňsizlik ýerine ýetýär.




Goý, $P$ we $Q$ nokatlar $AC$ tarapyň $OP||AB$ we $OQ||BC$ şertleri kanagatlandyrýan nokatlary, $R$ we $S$ nokatlar bolsa degişlilikde, $AB$ we $BC$ taraplaryň $PR||OC_1$ we $QS||OA_1$ şertleri kanagatlandyrýan nokatlary bolsun.

Ýokarda edilen bellige görä, $ARP$ we $QSC$ üçburçluklaryň $AP$ we $QC$ taraplary iň uzyndyr we $OB_1<PQ$. Şonuň üçin
$$OA_1+OB_1+OC_1=PR+OB_1+QS<AP+PQ+QC=AC.$$

**67.** Jogaby: $n-1$ çyra. Hakykatdan-da, $n$ burçlugyň birden başga hemme depelerinde çyra goýup, biz bütin labirinti ýagtylandyrýarys. Başga tarapdan, eger bütin labirint ýagtylýan bolup we depeleriň birinde çyra ýok bolsa, onda bu depeden çykýan diagonallaryň we taraplaryň her birinde hökman bir çyra bolmalydyr. Şunlukda, çyralaryň sany $n-1$-den az däldir.

**68.** Jogaby: $a_n=\log_{n+1}(n!)$.

Hakykatdan-da, logarifmirläp, alarys:

$a_n=a_{n-1}\log_{n+1}n+\log_{n+1}n$, we eger $n\geq2$ bolsa, onda

$a_n=a_{n-1}\log_{n+1}n+\log_{n+1}n=a_{n-2}\log_{n+1}(n-1)+\log_{n+1}(n-1)+$

$+\log_{n+1}n=...=a_1\log_{n+1}1+\log_{n+1}1+\log_{n+1}2+...+\log_{n+1}n=$

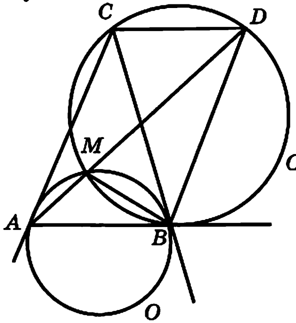
$=\log_{n+1}(n!)$.

Eger $n=1$ bolsa, onda formula ýene-de dogrudyr.

**69.** Mümkin. Oňa, diwar hemme wagt onuň sag tarapynda bolar ýaly bütin diwary aýlanmagy we hinine dolanyp gelmegi gerekdir. Şonda çepe öwrüm edende onuň hereketiniň ugrunyň wektory 90°-a öwrüler, saga öwrüm edende bolsa – 90°-a öwrüler. Eger ol diwaryň içinde ýerleşen bolsa, onda onuň hinine dolanyp gelmegi boýunça wektoryň öwrüm burçunyň jemi 4·90°-a deň bolar. Eger ol diwaryň daşynda bolsa, onda –4·90°-a deň bolar. Alaka 90° öwrümi 10-uň moduly boýunça hasaplaýar: eger ol 4 bolsa, onda diwaryň içinde, eger 6 bolsa, onda diwaryň daşynda ýerleşýändir.

**70.** Goý, $abc$ käbir üçbelgili san bolsun. $100a+10b+c-(a^3+b^3+c^3)=(100a-a^3)+(10b-b^3)+(c-c^3)$ san deňligiň sag bölegindäki her bir goşulyjy özüniň maksimumyna eýe bolan halatynda iň uly bolar. Goşulyjylar $a=6$, $b=2$, $c=0$ ýa-da 1 bolanda maksimuma eýe bolýarlar. Şunlukda, 620 we 621 sanlar girizilende iň uly netijä eýe bolunýar. Ol 396-a deňdir. Soňra $100a-a^3=99a-(a-1)a(a+1)$, $10b-b^3=9b-(b-1)b(b+1)$, $c-c^3=(c-1)c(c+1)$ bolýandygy üçin bu sanlaryň her biri 3-e bölüner. Diýmek, hasaplamanyň netijesi 3-e bölünýän san bolar. $856-(8^3+5^3+6^3)=3$. Diýmek, 3 san hasaplamanyň netijesi bolan iň kiçi položitel sandyr.

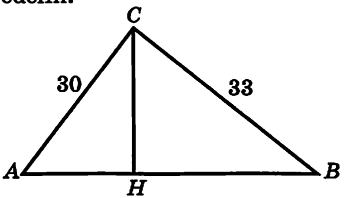
**71.** $AM$ kesimi $O'$ töwerek bilen kesişýänçä dowam edeliň. Kesişme nokadyny $D$ bilen belgiläliň. Töwerege galtaşýanyň we hordanyň emele getirýän burçy, şeýle hem içinden çyzylan burç onuň taraplarynyň arasynda çäklenen duganyň ýarysy bilen ölçenýär.



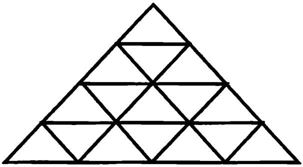

Onda $\angle CAM=\angle ABM=\angle ADB$, $\angle MAB=\angle MBC=\angle MDC$, bu ýerden $ABCD$ – parallelogramdygy gelip çykýar. Parallelogramda diagonallaryň kesişme nokady olary deň böleklere bölýär. Şunlukda, biziň tassyklamamyz subut edildi.

**72.** Goý, käbir $n$ natural sanlar üçin $a_n \leq 3n$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsun. Bu bolsa 1-den $3n$-e çenli sanlaryň arasynda iň bolmanda $n$ sanyň çyzylmadykdygyny aňladýar. Ýone her bir $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$ ýa-da $6k+4$, $6k+5$, $6k+6$ üç sanda 2-ä ýa-da 3-e bölünýän iki san çyzylýandyr. 1 bilen birlikde 1-den $3n$-e çenli $3n$ sanlaryň $2n+1$-i cyzylýar we $n-1$ san galýar. Şunlukda, $a_n > 3n$.

**73.** Katetleri 30 *sm* we 33 *sm* bolan gönüburçly üçburçluk üçin talap edilýän häsiýetiň ýerine ýetýändigini subut edeliň.

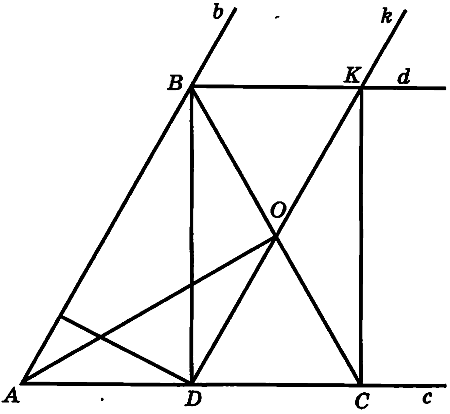



*CN* beýiklik bu üçburçlugy iki meňzeş üçburçluklara bölýär. Islendik üçburçlugy berlen üçburçluga meňzeş $n^2$-a deň üçburçluklara bölüp bolýandygyny bellälіň. Mysal üçin, $n$=4 bolanda suratda görkezilendir. $ACH$ üçburçlugy 1 *sm* gipotenuzaly berlen üçburçluga meňzeş $30^2$-a deň üçburçluklara böleliň. Şuňa meňzeşlikde $BCH$ üçburçlugy sonuň ýaly $33^2$-y üçburçluklara bölmek bolar. Berlen üçburçlugy bölmek netijesinde alnan üçburçluklaryň umumy mukdary $30^2+33^2=1989$-a deňdir.



**74.** Goý, degişlilikde, $AB$, $AC$, $AD$ kesimleriň ortasy $M$, $N$, $K$ bolsun. Üçburçlugyň orta çyzygy onuň tarapyna perpendikulýardyr, onda iki geçirilen göni we $AC$ göni $MNK$ üçburçlugyň beýikliginiň ýatan gönüsidir. Şoňa görä-de, olar bir nokatda kesişýärler.

**75.** $ABC$ deňtaraply üçburçlukda $A$ depeli berlen burçuň bissektrisasy AO beýiklik bolýar.



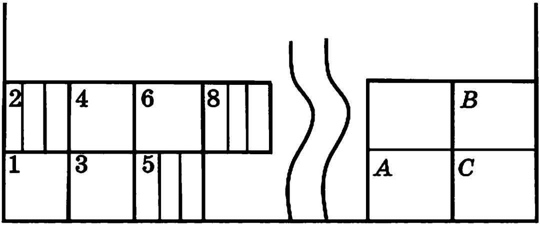

Şeýle üçburçlugy guralyň. Berlen burçuň $Ac$ tarapynda erkin $D$ nokatdan burçuň $Ab$ tarapyndaky $B$ nokat bilen kesişýänçä perpendikulýar indereliň. $Bd \| Ac$ ($Bd \perp BD$) şöhle we $Dk \| Ab$ ($DM \perp Ab$, $Dk \perp DM$) şöhle geçireliň. Goý, $Bd$ we

$Dk$ kesişme nokady $K$ bolsun, onda $ABKD$ parallelogram, ýagny $BK=AD=\frac{1}{2}AB$. Goý, $KC\perp AC$, onda $DBKC$ gönüburçluk $\Rightarrow DC=BK$. Diýmek, $AC=2BK=AB$ we $\Delta ABC$ – berlen.

**76.** Goý, Ahmet $n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_{10}$ sanlary ýatda belläp, $S$ bolsa olaryň jemleri bolsun. Ahmediň aýdan sanlary $10S-(n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_{10})=9S$ jemli, $S-n_1$, $S-n_2$, ..., $S-n_{10}$ sanlaryň arasynda saklanýar. Ahmet diňe dokuz sany aýtdy, diýmek, $S-n_1$, ..., $S-n_{10}$ sanlaryň arasynda iki birmeňzeş $x$ san bar. Şoňa görä $x-92+\ldots+100=9S$, ýagny $x=9S-9*96$. Diýmek, $x$ san 9-a bölünýär, şunlukda, $x=99$. Bu ýerden $S=107$. Şeýlelikde, Ahmet 107–92, 107–93, ..., 107–99, 107–99, 107–100, ýagny 7, 8, 9, ..., 15 sanlary ýatda belläpdir.

**77.** Hakykatdan-da, $m$ böleklere şeýle bölmeklige garalyň. Onda bölekleriň birinde $\frac{n}{m}$ az bolmadyk şäherler bardyr. Ýöne, şert boýunça bu bölekde şäherleriň her biri diňe beýleki bölekdäki şäherler bilen birikdirilen bolmagy mümkin, şonuň üçin, ondan $n-\frac{n}{m}$ köp bolmadyk ýol çykýar. Diýmek, $K \le n-\frac{n}{m}$. Bu deňsizligi çözüp, $m \ge \frac{n}{n-K}$-i alarys.

**78.** Meseläniň şerti ýerine ýeter ýaly tagtada fişkalar ýerleşipdir diýip güman edeliň, ýagny islendik fişkanyň beýleki iki reňkden bolan iki goňşy fişkalary bar bolsun. Tagtanyň çep aşaky öýjügine garalyň. Onuň bilen goňşy iki öýjüklerde beýleki iki reňkli fişkalar ýerleşen bolmalydyr. Öýjük 1-de ak, öýjük 2-de gyzyl, öýjük 3-de ýaşyl fişkalar bar diýip hasap etmek bolar.



Onda öýjük 4-de diňe ak fişkanyň ýerleşen bolmagy mümkin (onuň bilen goňşy 2 we 3 öýjüklerde eýýam ýaşyl we gyzyl fişkalar bar). Ýöne, onda öýjük 5-de gyzyl fişka (gyzyl reňkli fişka öýjük 3-däki ýaşyl fişka bilen hatarda durýar). Onda derrew alarys: öýjük 6-da ýaşyl fişka we ş.m. Biz 1, 2 we 3 öýjüklerden fişkalar boýunça fişkalary ýerleşdirmegiň birbahaly dikeltmesini alarys. Şunlukda, 1 we 4, 3 we 6, 5 we 8, ..., $A$ we $B$ jübüt öýjüklerde bir reňkli fişkalar dur. Diýmek, $C$ öýjükde fişka bilen hatarda beýleki iki reňkli fişkalaryň biri-de ýok. Gapma-garşylyk alyndy.

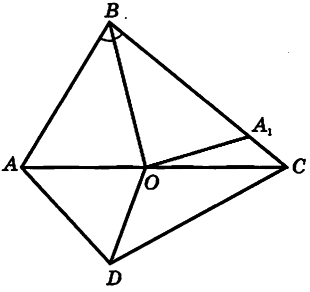
**79.** Eger $a, b, c$ sifrleriň biri täk bolsa, onda hemmesi täkdir (täk sanyň jübüt sana bölünmegi mümkin däldir). Şonuň üçin eger $a, b, c$ sifrleriň biri jübüt bolsa, onda hemmesi jübütdir. Bu ýagdaýda $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sifrleriň üçlügi hem meseläniň şertini kanagatlandyrýar. Şonuň üçin eger meseläniň şertlerini kanagatlandyrýan sifrleriň üçlügine mysal bar bolsa, onda täk sanlardan bolanda-da mysal bardyr.

Eger $a, b, c$ sifrleriň biri 5-e deň bolsa, onda galan sifrler hem 5-e bölünýär. Onda ähli sifrler 5-e deňdir. Ýöne, bu mümkin däldir, sebäbi ähli sifrler jübüt-jübütden dürlüdirler. Diýmek, $a, b, c$ sifrler 1, 3, 7, 9 bolup bilerler.

Ondan başga-da, eger sifrleriň biri 3-e bölünse, onda galan sifrleriň jemi 3-e bölünýär. Ýöne, görkezilen sifrleriň ikisiniň jemi 3-e bölünýär, eger bu sifrler diňe 3 we 9 bolanda. Şonuň üçin hemme sifrler 3 we 9 bilen gabat gelýär, bu bolsa olar dürli diýenimize garşy gelýär.

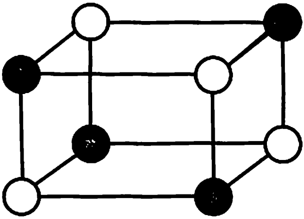
Jogaby: beýle $a, b, c$ sifrler ýokdur.

**80.** $AB=BC=CD$ subut edeliň. Goý, bu beýle däl bolsun, mysal üçin, $AB<BC$ bolsun. $BA_1=BA$ kesimi $BC$-de goýalyň. Burçda çyzylan töweregiň merkezi onuň bissektrisasynda ýatýar, şonuň üçin, $\angle A_1BO=\angle ABO$. Bu ýerden, $\Delta A_1BO=\Delta ABO$ gelip çykýar. Diýmek, $A_1BO$ we $CBO$ üçburçluklaryň perimetrleri deňdir. Ýöne, onda $A_1O=A_1C+CO$, şunlukda, $A_1=C \Rightarrow BA=BC$.

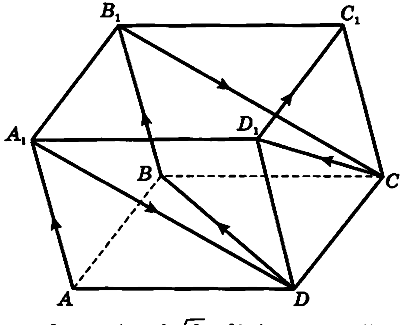



Şuňa meňzeşlikde, $BC=CD$-ni alarys. Eger dörtburçluk töweregiň daşyndan çyzylan bolsa, onda onuň gapma-garşylykly taraplarynyň uzynlyklarynyň jemi deňdir diýen tassyklamadan meseläniň tassyklamasy gelip çykýar.

**81.** Kubuň 8 depesi bardyr, onda ýol 7-den köp bolmadyk kesimi saklaýar. Goý, olaryň arasynda $a$ kesimiň uzynlygy 1, $b$ kesimiň uzynlygy $\sqrt{2}$ bolsun. Kubuň depelerini iki reňkde reňkläliň:



Ýoluň başlangyjynyň we soňunyň dürli reňki bardyr, onda marşrutda reňkleriň üýtgemesiniň täk sany bolup geçmelidir. Gapyrga boýunça hereket depeleriň reňkini üýtgedýär, diagonal boýunça bolsa ýokdur. Diýmek, $a$ täk san. $a\neq 1$ subut edeliň.

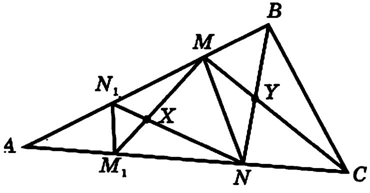



Ýoluň uzynlygy $1+6\sqrt{2}$ diýip göz öňüne getireliň. 6 diagonal bar, onda üç yzly-yzyna gidýän diagonallarda ýol başlanýar we gutarýar. 4 diagonalyň yzly-yzyna gitmegi mümkin däldir (ýoluň özi bilen kesişme ýüze çykýar), diýmek, ýol üç diagonallar + gapyrga + üç diagonallar bilen düzülýär. Iki depeden özara kesişmeýän üç diagonaly ýeketäk görnüşde geçirip (simmetriklige çenli takyklykda) bolýar, ýöne bu ýol gapyrgalary birikdirmeýär. $3+4\sqrt{2}$ uzynlykly ýola mysal getireliň (surata seret):

$$A \to A_1 \to D \to B \to B_1 \to C \to D_1 \to C_1$$

**82.** $\frac{p(x-1)+p(x-1)}{2}=ax^2+bx+c+a$. Şonuň üçin, $n$ bozulmadan soňra $ax^2+bx+c+na$ üçagza ýüze çykýar. Onuň $D=b^2-4ac-4na^2$ diskriminanty $n>\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ bolanda otrisatel bolýar we üçagzanyň köki ýokdur.

**83. Birinji çözülişi.** $MNC$ deňýanly üçburçluk üçin $MNA$ burç daşkydyr (surata seret).




Şonuň üçin, $\angle MNA=\angle NMC+\angle NCM=2\angle NCM$. $NM_1$ bissektrisadyr, onda $\angle ANN_1=\frac{1}{2}\angle MNA=\angle NCM$. Iki burçy boýunça ($\angle A$ umumy ). Şunlukda,

$$\frac{AN_1}{AN}=\frac{AM}{AC}. \qquad (1)$$

Şuňa meňzeş tassyklamalary geçirip, $AMM_1$ we $ABN$ üçburçluklaryň meňzeşliginden alarys:

$$\frac{AM_1}{AN}=\frac{AM}{AB} \qquad (2)$$

deňligi (2) deňlige bölüp, $\frac{AN_1}{AM_1}=\frac{AB}{AC}$ alarys. $AN_1M_1$ we $ABC$ üçburçluklar üçin $\angle A$ umumy burç, onda olar meňzeşdir.

Diýmek, $\angle AN_1M_1=\angle ABC$. Şunlukda, $M_1N_1 \| CB$.

**Ikinji çözülişi.** Goý, $BM=MN=NC=a$, $AM=b$, $AN_1=b_1$, $AN=C$, $b_1:(b-b_1)=c:a$. Onda üçburçlugyň bissektrisasynyň häsiýeti boýunça $AN_1:N_1M=AN:NM$, ýagny $b_1:(b-b_1)=c:a$, bu ýerden $b_1 = \frac{bc}{a+c}$. Şuňa meňzeşlikde, $c_1 = \frac{bc}{a+b}$. Diýmek, $AN_1:AM_1=b_1:c_1=(a+b):(a+c)=AB:AC$.

**84.** Islendik $x$ sany bitin we drob bölekleriň jemi görnüşinde ýeke-täk görnüşde aňladyp bolýandyr: $x=[x]+\{x\}$, bu ýerde $0\leq\{x\}<1$ we $[x]\in Z$. $x$ sanyň bitin bolmagy üçin onuň drob bölegi nola deň, ýagny $\{x\}=0$ bolmalydyr. $x$ we $y$ iki sanyň jeminiň bitin bolmagy üçin olaryň drob bölekleriniň jemi nola ýa-da bire deň bolmalydyr, çünki $x+y=[x]+\{x\}+[y]+$ $+\{y\}=[x]+[y]+\{x\}+\{y\}$, bu ýerden $0\leq\{x\}+\{y\}<2$. $x+y$ san bitin, onda $\{x\}+\{y\}=0$ ýa-da $\{x\}+\{y\}=1$. Eger hemme $a_i(i=1, 2, ..., 10)$ sanlaryň deň $\{a_i\}=a(i=1, ..., 10)$ drob bölegi bar bolsa, onda $a+a=2a=0$ ýa-da $2a=1$. Onda bu sanlaryň hemme jübütleriniň jemleri bitin bolýar.

Drob bölekleri dürli bolan iki sanyň bolmagynyň mümkin däldigini subut edeliň. Goý, drob bölekleri dürli bolan iki san bar bolsun. Goý, olar $a_1$ we $a_2$ bolsun, bu ýerde $0\leq\{a_1\}<\{a_2\}<1$. $a_1+a_i$ we $a_2+a_i$ $(i=3, ..., 10)$ iki jemden iň bolmanda biriniň bitin däldigini görkezeliň. Hakykatdan-da, eger $a_1+a_i$ we $a_2+a_i$ sanlar bitin bolsa, onda olaryň tapawudy hem bitin sandyr. Ýöne, $(a_2+a_i)-(a_1+a_i)=[a_2]-[a_1]+\{a_2\}-\{a_1\}$ bitin däldir, çünki $0<\{a_2\}-\{a_1\}<1$. Şeýlelikde, bu ýagdaýda, bir sekizden az bolmadyk bitin däldir. Gapma-garşylyk alyndy. Diýmek, ähli sanlaryň drob bölekleri birdir. Şunlukda, ähli jübüt jemler bitin sandyr.

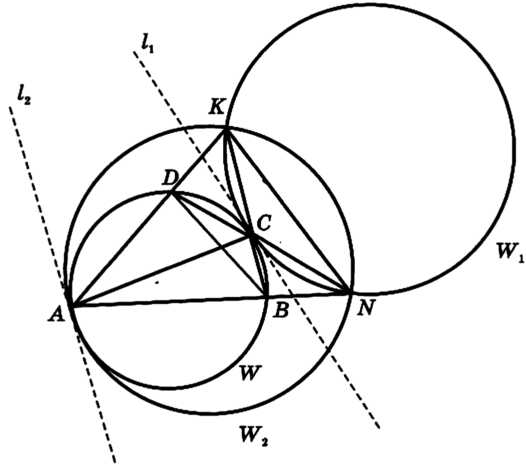
**85.** Goý, 2...20...0–$k$ derejeli $2...2\underbrace{0...0}_{l} = n^k$ (sanyň ýazgysynda soňky $l$ sifr nollardyr, ikilikleriň arasynda nollaryň duş gelmegi mümkin) natural san bolsun. Bu ýerden $1...0...1\cdot 2^{l+1}\cdot 5^{l}=(2^{a1}\cdot 5^{a2})^k=2^{ka1}\cdot 5^{ka2}\cdot ...$, bu ýerden $a_1$, $a_2$ bitin sanlar. Sany ýönekeý köpeldijilere dagytmagyň ýeke-täkliǵi esasynda alarys: $l+1=k\alpha_1$, $l=k\alpha_2$, bu ýerde $1=(l+1)-l=k\alpha_1-k\alpha_2=k(\alpha_1-\alpha_1)$. Bu ýerden bolsa $k=1$ gelip çykýar.

Jogaby: Mümkin däl.

**86.** Goý, şeýle sanlar bar bolsun. Onda $xy+1=U^2$, $yz+1=V^2$, $zx+1=W^2$, bu ýerde $U, V, W$ jübüt sanlar, ýagny $U=2a$, $V=2b$, $W=2c$. Şeýlelik bilen, $xy=4a^2-1$, $yz=4b^2-1$, $zx=4c^2-1$. Bu deňlikleri köpeldip alarys: $(xyz)^2=4A-1$, bu ýerde $A$ käbir natural san. Biz gapma-garşylyga geldik, çünki täk sanyň kwadraty 4-e bölünende 1 galyndy berýär.

**Bellik.** $xy+1$, $yz+1$, $zx+1$ doly kwadrat bolan $(xyz)$ natural sanlaryň üçlüginiň tükeniksiz köpüsi bardyr. Mysal üçin: (2, 4, 12).

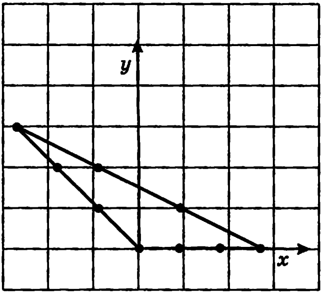
**87.** **Birinji çözülişi:** $CKN$ we $AKN$ üçburçluklaryň daşyndan çyzylan töwerekleri degişlilikde, $W_1$, $W_2$ bilen belgiläliň. Eger $W_1$ töwerek $W$ töwerege galtaşýan bolsa, onda $W_2$ töweregiň $W$ töwerege galtaşýandygyny subut edeliň. Goý, $l_1$ göni çyzyk $W_1$ we $W$ töwereklere $C$ nokatda galtaşýan, $l_2$ göni çyzyk $W$ töwerege $A$ nokatda galtaşýan



bolsun. $ST$ we $li$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçy $\angle STli$ bilen belgiläliň. Onda $\angle KNC=\angle KCl_1=\angle BCl_1=\angle CDB \Rightarrow BD \| KN \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle NKD=\angle BDA=\angle BAl_2=\angle NAl_2 \Rightarrow l_2$ göni çyzyk $W_2$ töwerege galtaşýar. Tersine, şuňa meňzeşdir.

**Ikinji çözülişi.** Goý, $W$, $W_1$ we $W_2$ töwerekleriniň radiuslary degişlilikde $r$, $r_1$ we $r_2$ bolsun. Goý, $W_2$ töwerek $W$ töwerege $A$ nokatda galtaşýan bolsun. Onda merkezi $A$ nokatda we $K=\frac{r_2}{2}$ koeffisiýentli $H_1$ gomotetiýa $W$ töweregi $W_2$-ä geçirýär. Şunlukda, $H_1(D)=K$, $H_1(B)=N$, bu ýerden $KN \| DB$ we $KN=KDB$. Ýöne, onda $C$ merkezli we $K^1=-K$ koeffisiýentli $H_2$ gomotetiýa $\Delta CDB$ üçburçlugy $\Delta CNK$ üçburçluga geçirýär. Şunlukda, $H_2$ gomotetiýa $\Delta CDB$ daşynda çyzylan töweregi $\Delta CNK$ daşynda çyzylan töwerege geçirýär, ýagny $H_2(W)=W_1$. Bu bolsa $W$ we $W_1$ töwerekleriň galtaşýandygyny aňladýar, çünki gomotetiýanyň merkezi olaryň birinde ýatýar. Tersine, şuňa meňzeşdir.

**88.** Jogaby: 9 (depeleri hasap edeniňde). Mysal. Depeleri (0, 0), (3, 0), (–3, 3) bolan üçburçluk (surata seret).




Üçburçlugyň taraplarynda düwünleriň sanynyň köp bolmagynyň mümkin däldigini subut edeliň. Taraplarynda ýatan gözenegiň düwünleri taraplary deň böleklere bölýär. Iki ýagdaýa garalyň.

1) haýsy hem bolsa bir tarapyň içinde iň bolmanda üç nokat, beýleki tarapyň içinde bolsa iň bolmanda iki nokat

ýatyr. Onda üçburçlugyň içinde üçden az bolmadyk düwün ýatyr. Hakykatdan-da, $AB$ tarapda $A$ we $B$ tapawutly $AC_1=C_1C_2=C_2C_3$ şerti kanagatlandyrýan $C_1$, $C_2$, $C_3$ düwünler, $AC$ tarapda bolsa $AB_1=B_1B_2=B_2B_3$ şerti kanagatlandyrýan $B_1$, $B_2$, $B_3$ düwünler ýatýar, şunlukda, $B_3=C$ bolmagy hem mümkindir.

Onda $B_2C_2$ kesimiň ortasy we $B_3C_3$ kesimi deň hiç bölege bölýän nokatlar hem gözenegiň düwünleridir.

2) bir tarapyň içinde (mysal üçin, $AB$ tarapda) iň bolmanda 5 düwün ýatyr, galan taraplaryň içinde bir düwünden ýatyr. Üçburçlugyň içinde ýatan $O$ düwüni üçburçlugyň taraplarynda ýatan ähli düwünler bilen birikdireliň. Onda üçburçluk depeleri düwünlerde bolan üçburçluklara bölünýärler we olar içinde, hem-de araçäklerinde hiç hilli düwün saklamaýarlar. Şeýle üçburçluklaryň her biriniň meýdany $\frac{1}{2}$-e deňdir. Onda $OAB$ üçburçlugyň meýdany $OAC$ we $OBC$ üçburçluklaryň meýdanlarynyň jeminden uly bolýar. Bu meýdanlaryň gatnaşygy $OAB$ üçburçlugyň içinde ýatan $CO$ şöhläniň bölegininiň uzynlygynyň $OC$ kesime bolan gatnaşygyna deňdir. Şeýlelik bilen, $O$ nokada görä simmetriýa bolanda $C$ nokadyň obrazy $OAB$ üçburçlugyň içinde ýatýar, ýöne, başga tarapdan bu düwündir. Gapma-garşylyk alyndy.

Galan ýagdaýlarda üçburçlugyň taraplarynda dokuzdan köp düwünleriň bolmagy mümkin däldir.

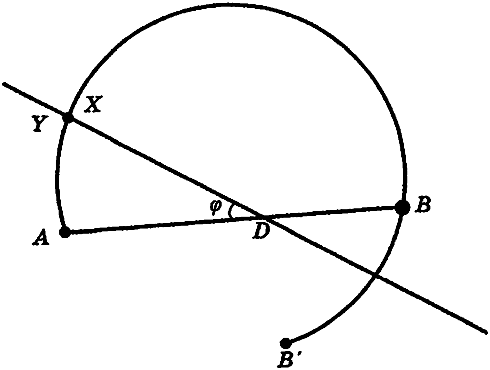
**89.** $$(10^k-3)^2=10^{2k}-6\cdot 10^k+9=\underbrace{999\ldots999}_{k-1\,dokuzlyk}400\ldots009$$

sana garalyň. $K=2000$ alalyň we biz talap edilýän sany alarys.

Jogaby: bar.

**90.** Goý, $l\perp AB$. Eger $AD=DB$ bolsa, onda $X$ deregine $D$ tapawutly $l$-iň islendik nokadyny almak bolýar. Eger $AD\neq DB$ bolsa, onda gözlenilýän $X$ nokat ýokdur. $l$ we $AB$ perpendikulýar däl bolsun. Goý, $\varphi=\angle ADX<\frac{\pi}{2}$. Onda, $\angle AXD+\angle XAD+\varphi=\pi$ we $\varphi=\angle BXD+\angle XBD$ deňlikleri goşup, alarys: $(\angle AXD-\angle BXD)+$ $+(\angle XAD-\angle XBD)=\pi-2\varphi$. Başga tarapdan, şert boýunça $\angle AXD-\angle BXD=\angle XAD-\angle XBD$. Diýmek, meseledäki deňlik aşakdaka ekwiwalentdir: $\angle AXD-\angle BXD=\frac{\pi}{2}-\varphi$. Goý, $B'$ nokat $l$-e görä $B$ nokada simmetrik bolsun. Onda $\angle BXD=\angle DXB'$ we $\angle AXD=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

Bu ýerden şeýle çyzgy gelip çykýar. Ýokarky ýarymtekizlikde $X$ nokady gözläliň (surata seret). Onuň üçin, $AD$ kesimi saklaýan $AB'$ araçäkli ýarym tekizlige garalyň.

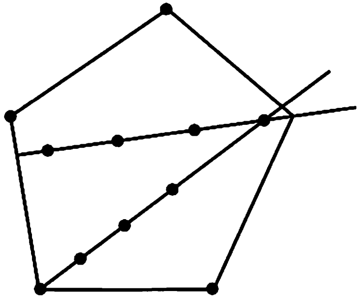


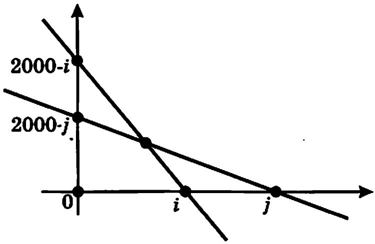

Bu ýarymtekizlikde dugany guralyň we ondan $AB'$ kesim $\frac{\pi}{2}-\varphi$ burç bilen görünýär. $DY$ şöhle bilen bu duganyň kesişmesini alalyň. $\angle ADB'=\pi-2\varphi>\frac{\pi}{2}-\varphi$. Şunlukda, $DY$ şöhlede $\angle AXB'=\frac{\pi}{2}-\varphi$ şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk bir $x$ nokat tapylýar.

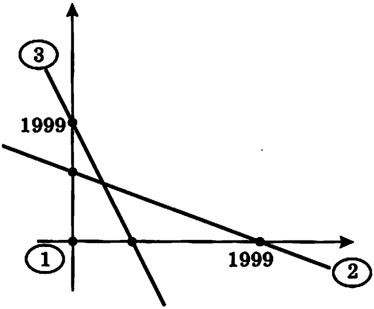
Şuňa meňzeşlikde $DZ$ şöhlede şerti kanagatlandyrýan $X'$ nokat tapylýar. Diýmek, meseläniň iki çözüwi bar.

**91**. Bu göni çyzyklaryň ähli kesişme nokatlarynyň güberçek daşyna garalyň (bu nokatlaryň ählisini saklaýan ln kiçi meýdanly güberçek köpburçluk). Ol köpburçluk bolýar, köpburçlugyň bolsa üçden az bolmadyk depesi bardyr. Bu köpburçlugyň her bir depesi geçirilen göni çyzyklaryň haýsy hem bolsa ikisiniň kesişme nokadydyr. Bu depelerden güberçek köpburçlugyň daşky bölegine çykýan göni çyzyklaryň şöhleleri burç emele getirýärler (surata seret). Diýmek, bu göni çyzyklaryň tekizligi bölmegi netijesinde alnan bölekleriniň arasynda üçden az bolmadyk burç bardyr. Bölekleri dogry üç burça deň bolan 2001 göni çyzyklaryň mysalyny getireliň. Koordinata oklary iki göni çyzyklara, galan 1999 göni çyzyklaryň deňlemeleri aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$\frac{x}{i}+\frac{y}{2000-i}=1 \ (i=1, 2, ..., 1999).$$








Koordinata oklary bolmadyk islendik iki göni çyzyklar burç emele getirip bilmezler, çünki bu göni çyzyklaryň kesişmeginden emele gelen dört şöhleleriň her biri oklaryň birini kesýändir (surata seret).

Üçburç berýär: *ok*–(1), $\frac{x}{1999}+\frac{y}{1}=1$ gönіçyzyk we abssissa *a*, *b*, $\frac{x}{1}+\frac{y}{1999}=1$ göniçyzyk we ordinata *oky*–(3), (surata seret).

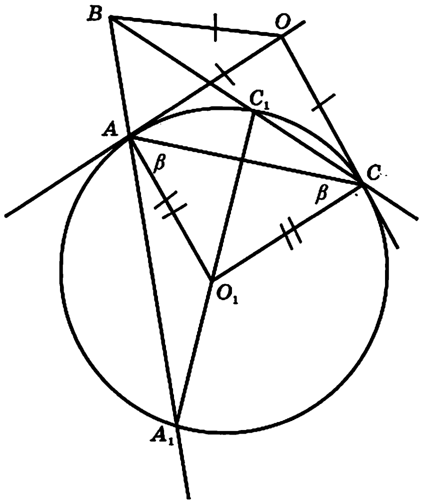
Jogaby: 3.

**92.** Goý, tagtada ($a$, $b$, $c$, $d$, 2000) san ýazylan bolsun. $A$ we $b$ sanlaryň ýerine $x=c+d-2000$ san ýazalyň ($x$, $x$, $c$, $d$, 2000) täze toplumda $c$ we $d$ sanlary $2000+x-x=2000$ san bilen çalşyralyň. Indiki ($x$, $x$, 2000, 2000, 2000) toplumda $x$ sanyň ýerine $2000+2000-2000=2000$ san ýazalyň. Netijede, gözlenilýän (2000, 2000, 2000, 2000, 2000) toplumy alarys.

**93.** Goý, $0_1$ nokat gurlan 10 töweregiň merkezi bolsun (surata seret) (beýleki ýagdaýlar üçin seretmek şuňa meňzeş) $AOC$ deňýanly üçburçlukdan alarys:

$\angle OAC=\frac{1}{2}(\pi-\angle AOC)=\frac{\pi}{2}-\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\angle B$ (bu ýerde $\angle ABC$ – içinde çyzylan, $\angle AOC$ – merkezi). Ýöne $AO$ göniçyzyk $w$ töweregiň galtaşyjysydyr, şonuň üçin, $\angle O_1AO$ göni $\Rightarrow\angle CAO_1=\angle B\Rightarrow\angle O_1AA_1=\pi-\angle BAC-\angle CAO_1=\pi-\angle A-\angle B$.

Şeýlelik bilen, $\angle AA_1O_1=\angle O_1AA_1=\angle C$.




$\angle O_1C_1C=\angle O_1CC_1=\angle O_1CA+\angle ACB=\angle B+\angle C.$

Şoňa görä $\angle A_1O_1C_1=\angle A_1O_1A+\angle AO_1C-\angle C_1O_1C=\pi-2\angle C+\pi-2\angle B-(\pi-2(\angle B+\angle C))=\pi$, diýmek, $A_1C_1$ göniçyzyk $w$ töweregiň diametridir.

**94.** $a+b>c>0$ üçburçluk deňsizligini kwadrata göterip we ony $(a-b)^2$-a köpeldip alarys:

$(a+b)^2(a-b)^2\geq c^2(a-b)^2$ ýa-da $a^4-2a^2b^2+b^4\geq a^2c^2-2abc^2+b^2c^2$.

Şuňa meňzeşlikde,

$b^4-2b^2c^2+c^4\geq b^2a^2-2bcc^2+c^2a^2$ we

$a^4-2a^2c^2+c^4\geq a^2b^2-2acc^2+c^2b^2$.

Alnan deňsizlikleri goşup we 2-ä bölüp, talap edilýän deňsizligi alarys.

Bellik. Mälim bolşy ýaly, üçburçlugyň taraplary üçin $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq abc$ deňsizlik dogrudyr. Bu deňsizligi $a+b+c$ köpeldip we ýaýlary açyp, talap edilýän deňsizligi hem almak bolýar, çünki $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c)=$

$=-((a+b)^2-c^2)((a-b)^2-c^2)=-((a-b)^2(a+b)^2-(a+b)c^2-$
$-(a-b)^2c^2+c^4)=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2b^2a^2.$

**95.** Eger (1, $y$) jübüde seretsek ($y$ islendik natural san), onda 1 sany tükeniksiz sany usul bilen görkezilen görnüşde aňladyp bolýar. Goý, indi $\frac{x^2+y}{xy+1}=N>1$ bolsun, onda $x^2-Nxy+y-N=0$.

Bu deňlemäniň natural çözüwiniň bolmagy üçin, onuň diskriminantynyň dogry kwadrat bolmagy zerurdyr, ýagny

$N^2y^2-4y+4N=k^2$.

$Ny-2<k<Ny+2$ subut edeliň. Hakykatdan-da,

$k^2-(Ny-2)^2=4Ny-4y+4N-4=(N-1)(4y+y)>0$ we

$(Ny+2)^2-k^2=4Ny+4y+4-4N=4N(y-1)+4y+4>0$

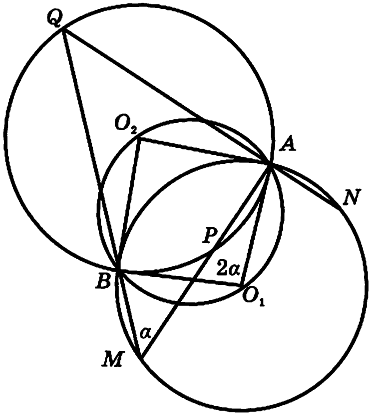
Goý, $k=Ny\pm1$ bolsun, onda

$k^2=N^2y^2\pm2Ny+1\Rightarrow N^2y^2-4y+4N=N^2y^2\pm2Ny+1\Rightarrow$
$\Rightarrow4(N-y)=\pm2Ny+1$, nädogry, sebäbi çep bölegi jübüt, sag bölegi bolsa täk. Diýmek, $k^2=N^2y^2$ ýa-da $N=y$, şunlukda, $x^2-y^2\cdot x=0\Rightarrow x=y^2 (x\neq0)$.

Şeýlelikde, $N>1$ san aňlatmaga mümkinçilik berýän ýeke-täk usul, ol $x=N^2$, $y=N$ jübüt almakdyr.

**96.** Goý, üçburçlugyň burçlary $\alpha$, $\beta$ we $\chi$ bolsun. Sinuslar teoremasyna görä $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$ we $c=\sin\chi$ taraply üçburçluk berlen üçburçluga meňzeşdir. Şeýlelik bilen, $\alpha$, $\beta$ we $\chi$ burçly we taraplary rasional üçburçluk bardyr. Onuň üçin, kosinuslar teoremasyndan $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ deňlikden $\cos\alpha$-nyň rasionaldygy gelip çykýar. $\cos\beta$ we $\cos\chi$ rasionaldygy şuňa meňzeş görkezilýär.

**97.** Goý, $\angle BMA=\alpha$ we $N$ nokat $AQ$ we $BP$ göni çyzyklaryň kesişmesi bolsun (surata seret). Onda meseläniň tassyklamasy $\angle BNA=\alpha$ deňlige deňgüýçlüdir. Alarys: $\angle BO_1A=2\alpha$ (merkezi burç)$\Rightarrow\angle BO_2A=\pi-2\alpha\Rightarrow\angle BQA=\frac{\pi}{2}\cdot\alpha\Rightarrow\angle MAQ=\frac{\pi}{2}\cdot$




$\angle NPA=\pi-\angle BPA=\angle BQA=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Bu ýerde $\angle BNA=\alpha$-ny alarys.

**98.** $P(x)$ köpagzany $P(x)=(x+a)^{2001}$ görnüşde gözläliň. Onda, $P(x^2-1)=(x^2-1+a)^{2001}$, $P(x)=(x+a)^{2001}$ we eger $x^2-1a\vdots x+a$ bolsa, onda şert ýerine ýetýär. Ýöne $x^2-1+a=x^2-a^2+(a^2+a-1)$ köpagza $x+a$ iki agza bölünýär, eger-de $a^2+a-1=0$ bolsa, ýagny $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ bolanda.

Jogaby: bar. Mysal üçin, $P(x)=(x+a)^{2001}$, bu ýerde $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**99.** Deňsizligiň sag we çep bölekleri deňdir, çünki

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}-\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right)=$$

$$\frac{a^2b^2}{a+b}+\frac{b^2c^2}{b+c}+\frac{c^2a^2}{c+a}=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

Şunlukda, ähli üç aňlatmalar deňdir. Onda birinjiden ikinjini aýryp, alarys:

$$0=\frac{a^2-c^2}{a+b}+\frac{b^2-a^2}{b+c}+\frac{c^2-b^2}{c+a}=$$

$$=\frac{a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2-a^4-b^4-c^4}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

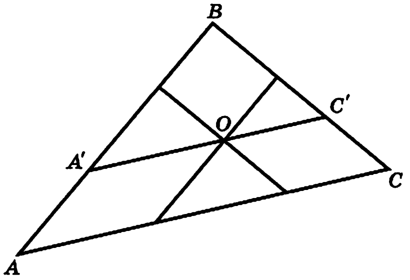
Sanawjy 0-a deň, onda

$a^2=b^2=c^2$ we $a+b\neq0$, $b+c\neq0$, $c+a\neq0$ göz öňünde tutup, $a=b=c$ alarys.

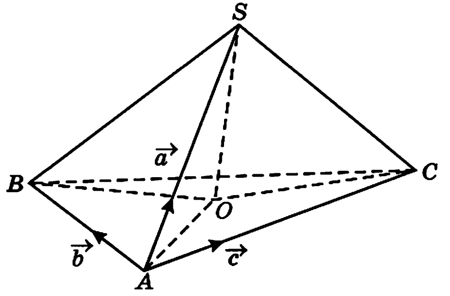
**100.** Şertden $10^{2000}\,|p$ we $10^{1999}|\,b$ sanlaryň bir drob bölekleriniň bardygy gelip çykýar. Diýmek, $10^{2000}|p-10^{1999}a|$

$b=\dfrac{10^{2000}b-10^{1999}ap}{bp}$ san bitindir. Onda $10^{2000}b-10^{1999}ap$ san $p$ bölünýär, şunlukda, $10^{2000}b$ san $p$ sana bölünýär. $10^{2000}$ san $p$ san bilen özara ýönekeý, onda $b$ san hem $p$ sana bölünýär.

**101.** Depeleri $P_2$-niň depelerinde bolan $ABC$ üçburçluga garalyň. Ol garalýan $H$ gomotetiýanyň $X$ merkezini saklaýar. Onuň bardygy aýdyňdyr. Onuň $H$ depeleriniň biriniň $\Delta ABC$-niň içinde galýandygyny görkezeliň. Bu ýerden meseläniň tassyklamasy gelip çykýar, çünki $P_2$ köpburçluk $P_1$ köpburçlugyň içinde ýatýar. $\Delta ABC$ üçburçlugyň medianalarynyň $O$ kesişme nokadyndan onuň taraplaryna parallel göni çyzyklar geçireliň (surata seret). Onda $X$ nokat bu göni çyzyklar tarapyndan bölünen üçburçluklaryň biriniň içinde bolýar. Goý, mysal üçin $X$ nokat reňklenen bölekde ($\Delta A'B'C'$) ýatýan bolsun. onda $k=-1/2$ koeffisiýentli we merkezi $X$ nokatda bolan gomotetiýada $B$ depe $ABC$ üçburçlugyň daşyna çykmaz. Beýleki bölekler üçin hem şuňa meňzeşdir. Meseläniň tassyklamasy subut edildi.



**102.**

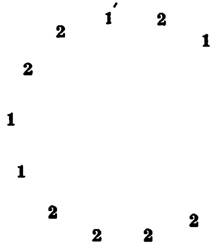



Şert boýunça $SAB$ üçburçlukda $(ASB)\frac{\pi}{3}$, diýmek, $SAB$ we $SBA$ burçlardan kiçisi $\frac{\pi}{3}$-den kiçidir (surata seret). Şuňa meňzeşlikde, piramidanyň iki beýleki gapdal granlarynyň iň kiçi burçlarynyň her biri $\frac{\pi}{3}$-den kiçidir. Gapdal granlaryň haýsy hem bolsa iň kiçi iki burçlaryň umumy depesiniň bardygyny görkezeliň. Goý, ol beýle däl bolsun. Goý, $\angle SAB$, $\angle SBC$ we $\angle SCA$ piramidanyň gapdal granlarynyň iň kiçi burçlary bolsun. Üçburçlukda, uly burçuň garşysynda uly tarap ýatýar, şoňa görä onda SB<SA, SC<SB, SA<SC⇒SA<SA deňsizlik ýerine ýeter. Gapma-garşylyk. Şunlukda, gapdal granlaryň haýsy hem bolsa iki iň kiçi burçunyň umumy depesi bardyr. Goý, mysal üçin, bu $SAB$ we $SAC$ burçlar bolsun. Onda $\angle SAO<\frac{\pi}{3}$, $\angle SAC<\frac{\pi}{3}$. Bu ýerden $\angle SAO<\frac{\pi}{3}$, deňsizligiň gelip çykýandygyny görkezeliň. Hakykatdan-da, eger $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ – $AC$, $AB$ we $AC$ şöhleleriň birlik wektorlary bolsa, onda $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle SAB=\cos\angle SAB>\frac{1}{2}$. Şuňa meňzeşlikde, $\vec{a}\cdot\vec{c}>\frac{1}{2}$-i alarys. $O$ nokat $AB$ we $AC$ şöhleleriň arasynda ýatýar, şonuň üçin, $\vec{AO}=x\vec{b}+y\vec{c}$, bu ýerde $x>0$, $y>0$. Şunlukda, $\cos\angle SAO=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{AO}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{AO}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot(x\vec{b}+y\vec{c})}{|\vec{AO}|}>$

$$> \frac{1}{2}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+2xy\vec{b}\cdot\vec{c}}} > \frac{1}{2} \text{ çünki } \vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\angle BAC > 1.$$

Bu bolsa $\angle SAO < \frac{\pi}{3}$ aňladýar.

**103.** Bolanok. Goý, $n$ sany $k\%$ üýtgetmek bilen $l$ san alnan bolsun (bu ýerde $n$, $l$-natural sanlar, $k$ – bitin san). Onda $l = n + \frac{n\cdot k}{100} = \frac{100n+nk}{100} = \frac{n(100+k)}{100}$. Bu ýerden $n$ we 100 özara ýönekeý sanlar bolsa, onda $l$ sanyň $n$ sana bölünýändigi gelip çykýar. Şoňa görä-de, eger $n$=7 bolsa, onda indiki bir san 7-ä bölünmelidir. Ýöne 1, 2, ..., 10 sanlaryň arasynda 7-den başga 7-ä bölünýän san başga ýokdur. Diýmek, 7 diňe iň soňky bolup biler. Şuňa meňzeşlikde, 9-yň iň soňky bolup biljekdigini görkezmek bolýar. Ýöne iň soňky orunda diňe bir san bolup biler, şoňa görä talap edilýän ýerleşdirme mümkin däldir.

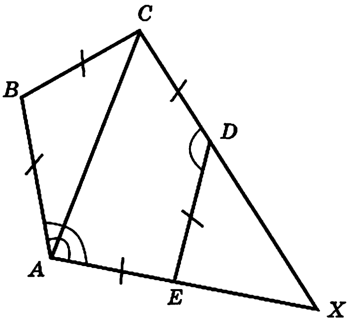


**104.** 1111, 2112 we 2122 şekillendirilen sanlaryň umumy birlikleriniň bolmagy mümkin däl, 2222, 1221 we 1211 şekillendirilen sanlarda umumy ikilik. Şunlukda, eger şekillendirilenleriň arasynda bu sanlaryň ählisi gabat gelse, onda tegelek boýunça 14-den az bolmadyk sifr ýerleşmeli, ýagny 7 birlik we 7 ikilik. $N$=14 deňlik umumy, sifrleriň ýerleşişiniň degişli mysaly aşakdaky suratda görkezilendir.

Jogaby: 14.

**105.** Mälim bolşy ýaly, 180° kiçi iki duga uly hordany dartýar, şoňa görä-de, gapdal taraplary deň iki deňýanly üçburçluklarda uly burçly depelisiniň uly esasy bolýar.

Goý, $ABCDE$ bäşburçlugyň burçlarynyň iň kiçisi $A$ bolsun. $D$ we $C$ maksimal bolmagynyň mümkin däldigini görkezeliň. $ABE$ we $BCD$ üçburçluklaryň deň gapdal taraplary bar we $\angle A < \angle C$, şonuň üçin, $BD > BE$.




Üçburçlukda uly tarapyň garşysynda uly burç ýatýar, şunlukda, $\angle BED > \angle BDE$.

$$\angle BDC = \frac{180^\circ - \angle c}{2} = 90^\circ - \frac{\angle c}{2} < 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \frac{180^\circ - \angle A}{2} \angle AEB.$$

$$\angle D = \angle BDC + \angle BDE < \angle AEB + \angle BED = \angle E$$

Şunlukda, $\angle D$ maksimal bolmagy mümkin däl. Şuňa meňzeşlikde, $\angle C$-niň hem maksimal bolmagynyň mümkin däldigi görkezilýär. Diýmek, maksimal we minimal burçlar bir tarapa ýanaşyk bolýar.

**106.** Birinji oýunçy üçin utuş strategiýasyny görkezeliň. $m \leq n$ hasap etmek bolar. Eger $m=2$ bolsa, onda birinji özüniň burçlugynyň ähli uly taraplaryny reňkleýär, ikinjä bolsa bir öýjük galýar, netijede, birinji oýunçy utýar. Soňra $n \geq m \geq 3$ hasap edeliň. Bu ýagdaýda birinji burçdan başlap uly tarapyň $n-m+1$ öýjügini reňkleýär, ondan soňra $m-1$ öýjükden ybarat iki birmeňzeş zolak galýar. Soňra birinji oýunçy beýleki ikinjiniň göçümini simmetrik gaýtalaýar. Bu prosesi ikinjiniň göçüminden soňra birden köp bolmadyk öýjükden durýan ýeke-äk reňklenmedik gönüburçluk galýança dowam etmelidir. Eger reňklenmedik bir öýjükli gönüburçluklaryň sany şu pursada çenli täk bolsa, onda birinji biröýjükli bolmadyk gönüburçlugy tutuşlaýyn reňkleýär. Eger jübüt bolsa, onda bir reňklenmedik öýjügi goýýarys. Şunlukda, onuň göçüminden soňra her biri bir öýjükli bolan reňklenmedik öýjükleriň täk mukdary galýar, şonuň üçin iň soňky göçümi ikinji oýunçy mejbury ýagdaýda edýär we netijede utulýar.

Jogaby: $n$ we $m$ gatnaşyga baglanyşyksyzlykda birinji oýunçy utýar.

**107.** Goý, $x_0=-\frac{f}{e}$ diýeliň. Onda $|ex_0+f|=\left|e\cdot\left(-\frac{f}{e}\right)+f\right|=$ $|-f+f|=0$. Islendik sanyň moduly otrisatel däldir, onda $0=|ex_0+f|=|ax_0+b|+|cx_0+d|\geq 0$. Diýmek, $|ax_0+b|=|cx_0+d|=0$. Bu ýerden $ax_0+b=0$ we $cx_0+d=0$. Şunlukda, $x_0=-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, şoňa görä $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ýa-da $ad=bc$.

**108.** Goý, $n=c_1...c_k^8$ ýagşy san tapylan bolsun, bu ýerde $c_1...$, $c_k$ sifrler, $c_k\neq 9$. Onda $n+1=c_1...c_k^9$. $n+3=c_1...c'_k1$, bu ýerde $c'k=c_k+1$. $n+1$ we $n+3$ sanlar täkdirler, olaryň sifrleriniň jemi degişlilikde $c_1+c_2+...+c_k+9$ we $c_1+c_2+...+c_k+2$-ä deňdir. Bu jemler 7 bilen tapawutlanýar, şonuň üçin olaryň biri jübütdir. Ýöne, jübüt san täk sany bölünjisi bolup bilmeýär. Gapma-garşylyk alyndy.

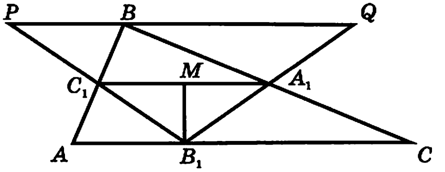
Jogaby: hökman.

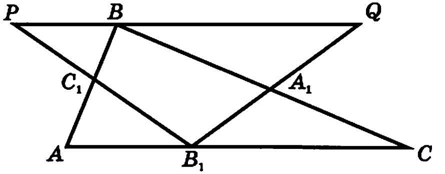
**109.** Goý, mysal üçin, $a$ sütüniň $A$ we $B$ setiriniň her birinden bir öýjük reňklenen bolsun (surata seret).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| $B$ | 1 | | | | |
| | | | | | |
| $A$ | 1 | | | | |
| | | | | | |
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |

$A$ we $B$ setirlerde ýerleşen $b, c, d, e$ sütünlerden öýjükleriň jübüdine garalyň. Güman etmämize görä, bu jübütlerde 1 reňkli öýjükler ýokdur. Diýmek, bu (2, 3), (2, 4), (3, 4) reňkleriň jübüdi bolup biler. Ýöne, onda Dirihle prinsipine görä bu jübütleriň biri iki gezek gabat gelýär. Iki setiriň ($A$ we $B$) we iki sütüniň kesişmesinde bu iki jübütleri saklaýan dört öýjükler ýerleşendir, ýöne diňe iki reňkde reňklenendir. Gapma-garşylyk. Jogaby: ýok.

**110.** Goý, $\Delta ABC$ üçburçlugyň uly tarapy $AC$, $A_1C_1$ kesim $AC$ kesime parallel orta çyzyk, $A_1C_1$ kesimiň ortasy $M$ nokat bolsun. $\angle A$ we $\angle C$ ýitiburçdur, onda $M$ nokat $AC$ kesimiň içine proýektirlenýär. Goý, $B_1$ bu proýeksiýa bolsun *(surata seret).*




$B_1C_1$ we $B_1A_1$ iki kesim edeliň. $\Delta A_1B_1C_1$-iň $B_1M$ medianasy we beýikligi, onda $C_1B_1=A_1B_1$. $A_1$-e görä $Q$ nokat $B_1$ nokada simmetrikdir, $C_1$-e görä $P$ nokat $B_1$ nokada simmetrikdir. $\Delta BQA_1=\Delta CB_1A_1$, $\Delta AC_1B_1=\Delta BC_1P$. $\Delta PQB_1$ üçburçluk $\Delta C_1A_1B_1$ üçburçluga meňzeşdir, diýmek, ol deňýanlydyr.

**111.** Ilkibaşda Bagty $b$ koeffisiýent [–2,0] aralyga düşýänçä $b$ koeffisiýentli üýtgedýär. Ahmet 1 göçümde onuň ýerine ýetirmegine päsgel berip bilmeýär. Indi, eger:

1) $b=0$ bolsa, onda Bagty utýar ($f=x^2+ax$ üçagzanyň bitin kökleri bar);

2) $b=-1$, onda Ahmet utulmazlyk üçin, hökman $b=-2$ almalydyr çünki, eger ol $b=-1$-i galdyrsa, onda indiki göçümde Bagty $b=0$ eder. Şunlukda, $b=-2$ koeffisiýent alnan we Ahmet ony üýtgedip bilenok, çünki $b=-1$ ýa-da $b=-3$ koeffisiýent bilen Bagty özüniň göçümi bilen derrew 0-a öwrer.

Bagty [–1; 1] aralyga $a$ koeffisiýent düşýänçä 3-e üýtgeder. Eger $a=\pm1$ bolsa, onda ol utar: $f=x^2\pm x-2$ üçagzanyň bitin kökleri bardyr. Eger $a=0$ bolsa, onda Ahmet indiki göçümi bilen şeýle üçagza alar.

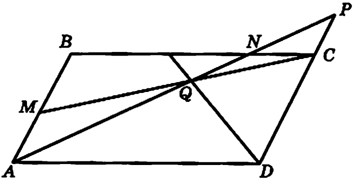
Jogaby: dogry.

**112.** Goý, $AN$ we $DC$ göni çyzyklaryň kesişmesi $P$ nokat bolsun (surata seret). Onda meseläniň tassyklamasy aşakdaky deňlige deňgüýçlüdir: $\frac{PQ}{QA} = \frac{PD}{DA}$. Goý, $AB=CD=a$, $AD=BC=b$,

$AM=CN=c$ we $CP=x$ bolsun. Onda $NCP$ we $ADP$ üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{x}{x+a} = \frac{c}{b}$ gelip çykýar, bu ýerden

$x = \frac{ac}{b-c}$ we $PD = x + a = \frac{ab}{b-c}$. $AMQ$ we $PCQ$ üçburçlugyň

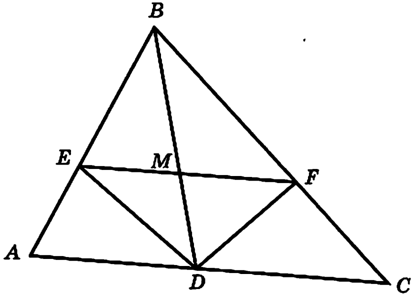
meňzeşliginden $\frac{PQ}{QA} = \frac{PC}{AM} = \frac{x}{c}$ gelip çykýar. Meseläniň tassyklamasy $\frac{PQ}{QA} = \frac{x}{c} = \frac{a}{b-c} = \left(\frac{ab}{b-c}\right):b = \frac{PD}{DA}$ deňlikden gelip çykýar.




**113.** $x_0=2$ nokatda üçagzanyň bahasyna garalyň. Onda $x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2p + q = 4 + 2\left(p + \frac{q}{2}\right) = 4006$. Ýagny, hemme üçagzalaryň grafikleri (4; 4006) nokatdan geçýärler.

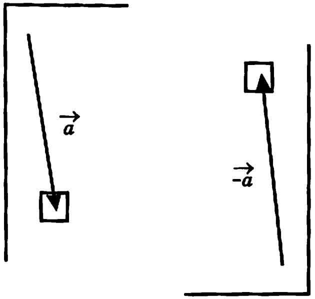
**114.** Stakanlary iki-ikiden böleliň we her jübütdäki stakanlaryň suwunyň möçberini deňläliň. Soňra her jübütden bir stakan alarys. Eger bize olaryň suwunyň mukdaryny deňlemek başartsa, onda şuňa meňzeş tejribäni galan 4 stakan üçin ýerine ýetirip, ähli stakanlardaky suwuň deň bolmagyny gazanarys. Saýlanan 4 stakany alalyň we olary jübütden böleliň. Ondan soňra, her jübütdäki stakana guýlan suwuň mukdaryny deňleşdirýäris. Her jübütden bir stakan alalyň we ondaky suwlaryň mukdaryny deňläliň. Şuňa meňzeş tejribäni galan iki stakan üçin hem ýerine ýetirip, biz talap edilýän deň mukdarda suw guýlan 4 stakan alarys.

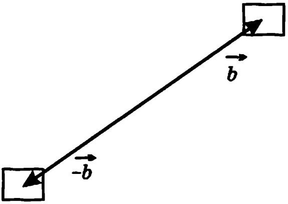
**115.** Üçburçlugyň bissektrisasynyň häsiýeti boýunça alarys: $BE:EA=BD:DA=BD:DC=BF:FC$. Diýmek, $EF\|AC$, bu ýerden $EM:MF=AD:DC=1:1$, ýagny $EDF$ üçburçlugyň medianasy $DM$ bolýar. Ýöne, $\angle EDF=\angle EDB+\angle FDB=\frac{1}{2}\angle ADB+$ $+\frac{1}{2}\angle CDB=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle CDB)=90°$. Şunlukda, gönüburçly üçburçlugyň medianasynyň häsiýeti boýunça $DM=\frac{1}{2}EF$ bolýar.




**116.** Jogaby: Birinji utar. Birinji oýunçyň strategiýasyny beýan edeliň. Birinji göçümde ol stoldan hökman 81 teňňe almaly. Her bir indiki göçüminde, eger ikinji oýunçy $x$ teňňe alsa, onda birinji hökman $101-x$ teňňe almalydyr. Ol muny elmydama edip biler, çünki $x$ san 2-den 100-e çenli jübüt san bolsa, onda $(101-x)$ san 1-den 99-a çenli täk sandyr. $2001=101\cdot19+81+1$, onda 19 şeýle jogapdan soňra, birinji oýunçyň göçüminden soňra stolda 1 teňňe galar we ikinji oýunçy göçüm edip bilmeýär, ýagny utulýar.

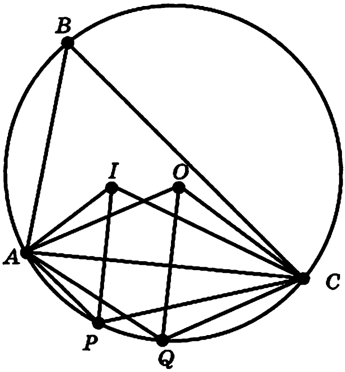
**117.** Kwadratyň merkezinde ýatmaýan islendik gara öýjük we islendik ak öýjük üçin olara simmetrik bolan jübüt ak we gara öýjükler bardyr. Her jübütden emele gelen iki wektoryň jemi *(surata seret)* nola deňdir.




Merkezdäki öýjük üçin (ol gara reňkli), ondan çykýan ähli wektorlar nol jemi bolan jübütlere bölünýärler, çünki hemme ak öýjükler kwadratyň merkezine görä simmetrik jübüt öýjüklere bölünýärler *(surata seret)*.

**118.** Goý, berlen $ABC$ üçburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan töweregiň merkezi $I$ we $O$ bolsun *(surata seret)*. Bu üçburçlugyň $AC$ tarapyna görä $P$ we $Q$ nokatlar $I$ we $O$ nokatlara simmetrikdir.




Onda simmetrikdiginden alarys: $\Delta AIC=\Delta APC$ $\angle APC=$ $=\angle AIC=180°-\angle IAC-$ $-\angle ICA=180°-\frac{1}{2}\angle BAC-$ $-\frac{1}{2}\angle BCA=180°-\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow(180°-\angle ABC)=$ $=90°+\frac{1}{2}\angle ABC$. Başga tarapdan, $ABCP$ dörtburçluk içinden çyzylandyr, şoňa görä $\angle APC+\angle ABC=180°$.

Diýmek, $90°+\frac{1}{2}\angle ABC+\angle ABC=180°\angle ABC=60°$.

Onda $\angle ABC=2\angle ABC$ (merkezi burç)$=120°$. Diýmek, $\angle AQC=120°=180°-\angle ABC$. Bu bolsa, $Q\in S$ aňladýar.

**119.** 5000-burçlugyň depelerini sagat strelkasynyň ugry boýunça 1-den 5000-e çenli sanlar bilen belgiläliň. Ondan soňra depeleri 1000 sany bäşliklere şeýle görnüşde böleliň: birinji bäşlige 1, 1001, 2001, 3001 we 4001 nomerli depeleri, ikinji bäşlige 2, 1002, 2002, 3002 we 4002 nomerli depeleri we ş.m. alalyň. Her bäşligiň depeleri dogry bäşburçluk emele getirýär. Haýsam bolsa, bir bäşlige iň bolmanda 3 reňklenen depeleriň düşýändigini görkezeliň. Hakykatdan-da, eger her bäşlikde ikiden köp bolmadyk reňklenen depe bar bolsa, onda hemme reňklenen depeler 2000-den köp däldir. Diýmek, bir bäşlige düşýän üç depe bardyr. Olar deňýanly üçburçlugyň depelerinde ýatýarlar, çünki dogry bäşburçlugyň islendik üç depesi deňýanly üçburçlugyň depesi bolýandyr.

**120.** Bölünýär. $\underbrace{111...111}_{81\,birlik}=\underbrace{11...11}_{9\,birlik}\times\underbrace{100...0100...001}_{9\,birlik,\,64\,nol}$.
Köpeldijileriň her biri 9-a bölünýär. Diýmek, köpeltmek hasyly hem 81-e bölünýär.

**121.** Goý, $A_1$ we $B_1$ nokatlar $M_1M_2$ kesimiň degişlilikde, $OA$ we $OB$ şöhleler bilen kesişme nokady bolsun. Onda $M_1A_1=MA_1$, $M_2B_1=MB_1$. Üçburçluk deňsizligi boýunça alarys: $A_1B_1<MA_1+MB_1=M_1A_1+M_2B_1$, bu ýerden $A_1B_1<\frac{1}{2}M_1M_2$.

**122.** $AB\cdot ÇD=EEFF$ deňlik mümkin däl. Sebäbi $EEFF=$ $=1000E+100E+10F+F=11(100E+F)$ bolany üçin ýokardaky deňligiň sag bölegi 11-e bölünýär, emma onuň çep bölegi 11-e bölünmeýär.

**123.** Goý, $a$ we $b$ gönüburçlugyň tarapynyň uzynlyklary we $a\geq b$ bolsun. Şert boýunça, $ab=2a+2b$, bu ýerden $(a-2)(b-2)=4$, ýagny $\begin{cases}a-2=4,\\b-2=1;\end{cases}$ ýa-da $\begin{cases}a-2=2,\\b-2=2.\end{cases}$

Diýmek, talap edilýän iki gönüburçluk bar. Olaryň ölçegleri: 6·3 we 4·4.

**124.** Ähli sanlar 5-e bölünende deň galyndy bermelidir, deň galyndy berýän alty sanyň jemi diňe her biri 5-e bölünende 5-e bölünýändir.

**125.** Goý, $B_1$ nokat $D$ görä $B$ nokada simmetrik bolsun. Üçburçluk deňsizligi boýunça alarys:

$$DC-DB=DC-DB_1=CB_1>AC-AB_1=AC-AB.$$

**126.** a) 4 gezek + 7 düwmäni we üç gezek − 9 düwmäni basmak gerek.

b) 5-nji gata diňe 13-nji gatdan düşüp bolýar, emma 13-nji gata bolsa hiç bir gatdan düşüp bolanok.

**127.** $CM$ we $DK$ kesimler $AOB$ burçuň bissektrisasyna görä simmetrik bolanda biri-birine şekillendirilýär, onuň kesişme nokady öz-özüne şekillendirilýär ýagny bissektrisada ýatýar.

**128.** Eger synpda $X$ oglanlar we $Y$ gyzlar bar bolsa, onda $4X+3{,}25Y=3{,}6(X+Y)$, bu ýerden $8X=7Y$. Synpda jemi $X=Y=X=\frac{8X}{7}=\frac{15X}{7}$ adam bar. 15 sana bölünýän 30-dan uly we 50-den kiçi san ýeke-täk 45-dir. Diýmek, synpda 24 gyz we 21 oglan bar.

**129.** $OAO_1$ burçuň $AO$ şöhlesinde $C$ nokady, $AO_1$ şöhlede $B$ we $B_1$ nokatlary $AB<AB_1$ şert ýerine ýeter ýaly edip alalyň. Onda $AB+BC<AB+BB_1+B_1C=AB_1+B_1C$, bu ýerden $AO_1$ şöhle boýunça $B$ nokat hereket edende $ABC$ üçburçlugyň gapdal taraplarynyň jeminiň monoton artýandygy gelip çykýar. Diýmek, üçburçluk esasy, esasynyň burçy we gapdal taraplarynyň jemi bilen birbahaly berilýär.

**130.** $x^7+x^5+1=x^7+x^6+x^5-x^6+1=x^5(x^2+x+1)-$
$-(x^3+1)(x^3-1)=(x^2+x+1)\cdot(x^5-(x^3+1)(x-1))=(x^2+x+1)\cdot$
$\cdot(x^5-x^4+x^3-x+1).$

**131.** Goý, $AA_1$ we $BB_1$ medianalaryň kesişme nokady $O$ bolsun. Onda $AB<AO+OB=\frac{2}{3}AA_1+\frac{2}{3}BB_1$, ýagny $1{,}5AB<AA_1+BB_1$.

**132.** $a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)$. Köpeldijileriň her biri $c$ sana bölünýär, diýmek, olaryň köpeltmek hasyly hem $c^2$ sana bölünýär.

**133.** Bir üçburçlugyň meýdany kwadratyň meýdanynyň $\frac{1}{7}$-e deňdir, onuň beýikligi kwadratyň tarapydyr, diýmek, üçburçlugyň meýdany hökman kwadratyň tarapynyň $\frac{2}{7}$-ä deň bolýar. Kwadratyň tarapyny şeýle uzynlykly böleklere bölüp bolanok.

**134.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=$
$=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}=\frac{13}{60}>\frac{1}{5}$.

**135.** Goý, töweregiň merkezi $O$ bolsun.
$\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_3A_5}+\overrightarrow{A_4A_5}=(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_5})+(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_5})+$
$+(\overrightarrow{A_3O}+\overrightarrow{OA_5})+(\overrightarrow{A_4O}+\overrightarrow{OA_5})$.

$\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{A_3O}+\overrightarrow{A_4O}+\overrightarrow{A_5O}=\vec{O}$, onda jem $5\overrightarrow{OA_5}$-e deňdir, onuň uzynlygy bolsa 5-e deňdir.

**136.** Berlen deňleme $(x-5)(y-2)=11$ deňlige deňgüýçlüdir.
Jogaby: $\begin{cases}x=-6,\\ y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\ y=-9;\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\ y=13;\end{cases}$ $\begin{cases}x=16,\\ y=3.\end{cases}$

**137.** $2^8+2^5\cdot5^6+5^{12}=(2^4)^2+2\cdot2^4\cdot5^6+(5^6)^2=(2^4+5^6)^2$.

**138.** Eger jem 0-a deň bolsa, onda +1 we −1 sanlar 11-e deň bolardy we köpeltmek hasyly −1-e deň bolardy. Bu bolsa şerte garşy gelýär.

**139.** Mümkin däl. Sagat strelkasy boýunça 4 şarjagazdan soň her gök şarjagazdan gyzyl şarjagaz ýatýar, onda gyzyl şarjagazlar az däldir.

**140.** $1\cdot2\cdot\ldots\cdot99=(50-49)\cdot(50-48)\ldots(50-1)\cdot50\cdot(50-1)\ldots$
$\ldots(50+48)\cdot(50+49)=(50^2-49^2)(50^2-48^2)\ldots(50^2-1)\cdot50<50^{99}$.

**141.** Goý, $ABC$ üçburçlugyň $\alpha\geq\beta\geq\varphi$ burçlary bolsun. Onda $A_1$, $B_1$, $C_1$ üçburçlugyň burçlary $90^\circ-\frac{\varphi}{2}\geq90^\circ-\frac{\beta}{2}\geq90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ deňdir. Üçburçluklaryň meňzeşliginden alarys:

$\alpha=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$, $\beta=90^\circ-\frac{\beta}{2}$, $\varphi=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, bu ýerden $\alpha=\beta=\varphi=60^0$ deňlik gelip çykýar.

**142.** Bir platforma 5-den köp bolmadyk plita ýerleşýär, diýmek, 200:5=40-dan az bolmadyk platforma gerek. 40 platforma ýetýär: olaryň her birine 7 tonnadan 3 plita we 9 tonnadan 2 plita ýüklemeli.

**143.** Ulgamdan $\frac{1}{yz}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ gelip çykýar, bu ýerden $y=z+1$ alarys. Ýönekeý sanlaryň ýeke-täk jübüt yzygiderligi bar: $z=2$, $y=3$. $x=yz$ deňlemeden $x=6$-ny taparys.

**144.** Berlen dörtburçlugyň taraplarynyň ortalarynda depeleri bolan dörtburçluga garalyň. Onuň taraplary berlen dörtburçlugyň diagonallaryna paralleldir, şunlukda, ol parallelogramdyr we onuň bir burçy berlen dörtburçlugyň diagonallarynyň arasyndaky burça deňdir, dörtburçlugyň orta çyzygy bolsa bu parallelogramyň diagonallarydyr. Haçanda parallelogramyň diagonallary deň bolanda, diňe şol ýagdaýda ol gönüburçluk bolýar.

**145.** Islendik iki alnan sanyň jeminiň 6-a bölünýändiginden hemme alnan sanlary 6-a böleniňde deň galyndyny berýändigi gelip çykýar: 0 (şeýle sanlar 16), ýa-da 3 (şeýle sanlar 17). 17-den köp alyp bolanok.

**146.** $(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$ görnüşe getirmeli.

**147.** $1004041=10^6+1+4(10^3+10)=(10^2+1)(10^4-10^2+1)+$
$+\ldots+4(10^2+1)\cdot10=101\cdot9941$.

**148.** Romby gurmak üçin rombuň tarapy we diagonallaryň ýarysyndan emele gelen gönüburçly üçburçlugy gurmak ýeterlikdir. Bu üçburçlukda biz burçy we katetleriň jemini bilýäris. Berlen burçlar bilen erkin gönüburçly üçburçluk gurup, gomotetiýanyň kömegi bilen berleni alarys, soňra romby alarys.

**149.** Berlen üçburçlugyň depeleri berlen nokatlar depeleri bolan üçburçlugyň beýikliginiň esasy bolýar.

**150.** Umumy depeli 19° boýunça 19 burçy yzygiderli gurup, 1° burçy alarys.

**151.** Goý, $a$, $b$, $c$ berlen sanlar bolsun. Şert boýunça $a^2+b^2+c^2=1$ onda $|a|$, $|b|$, $|c|\leq1$. Eger sanlaryň iň bolmanda biri absolýut ululygy boýunça 1-e deň bolsa, onda beýleki ikisi nola deňdir we olaryň köpeltmek hasyly $abc=0$ bolýar. Eger sanlaryň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda $abc=0$ bolýar. Eger hemme sanlar absolýut ululygy boýunça 1-den kiçi bolsa we nola deň bolmasa, onda $a^3<a^2$, $b^3<b^2$, $c^3<c^2$ we diýmek, $a^3+b^3+c^3<a^2+b^2+c^2=1$. Ýöne, $a^3+b^3+c^3=1$. Şonuň üçin beýle zat bolup bilmez. Diýmek, köpeltmek hasyly nola deňdir, ýagny $abc=0$.

**152.** Diagonal gönüburçlugyň içinde ýerleşen kiçi kwadratjyklaryň biriniň käbir $O$ depesinden geçýär diýip güman edeliň. Goý, diagonal çykýan $A$ nokatdan $AB$ kesime parallel $O$ nokatdan geçýän göni çyzygyň $AC$ tarap bilen kesişme nokadyna çenli uzaklyk $x$ bolsun. $y$ bilen bolsa şol depeden $AC$ kesime parallel $O$ nokatdan geçýän göni çyzygyň $AB$ tarap bilen kesişme nokadyna çenli uzaklygy belläliň. Onda $\frac{x}{y}=\frac{65}{19}$, $19x=65y$. $x$ we $y$ natural sanlar, onda $x \vdots 65$, diýmek, $x\geq65$. Bu mümkin däl. Diýmek, diagonal gönüburçlugyň içinde ýerleşen kiçi kwadratlaryň hiç biriniň depesinden geçmeýär. Diagonal geçirilen gönüçyzyklaryň $18+64=82$ sanysyny kesýär (gönüburçlugyň taraplaryny hasap etmäniňde), onda ol 83 kwadraty 2 bölege bölýär. Diýmek, hemme bölekler $19\cdot65+83=1318$.

**153.** Hiç bir iki san bir setirde, bir sütünde durmaýar, setirleriň we sütünleriň sany bolsa bäşden, onda sütünleriň her birinde we setirleriň her birinde dogry bir san bolýar. Her sütünde dogry bir san bar, onda bir sanyň birlikleriniň mukdary 1-e deň, 3, 5, 7, we 9 birlikleriň mukdary dogry birine deň. Setirleriň her biri alnan sanyň birine deň, onda bir sanyň onluklarynyň mukdary 0-a deň, dogry biriniň onluklaryň mukdary 1, 2, 3, we 4-e deň. Sanlaryň jemi hemme sanlaryň birlikleriniň jemine we hemme sanlaryň onluklarynyň jemine deň, onda gözlenilýän jemi taparys:

(1+3+5+7+9)+(0+10+20+30+40)=125.

**154.** $1+10^2>2\cdot 10$, onda $10^{1966}(1+10^2)>10^{1966}\cdot 2\cdot 10$, şunlukda,

$$\frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}>\frac{10^{1967}+1}{10^{1968}+1} \text{ ýa-da } \frac{\overbrace{100\ldots01}^{1965\,nol}}{\underbrace{100\ldots01}_{1966\,nol}}>\frac{\overbrace{100\ldots01}^{1966\,nol}}{\underbrace{100\ldots01}_{1967\,nol}}.$$

**155.** Komandalar 0-dan (hiç bir oýun häzir oýnalanok) 29-a çenli (eýýam hemmesi bilen oýnalanda) oýun oýnap bilýär, ýagny oýnalan oýunlaryň mukdarynyň 30 dürli wariantlary bardyr. Eger hemme 30 komandanyň oýunlarynyň sany dürli bolsa, onda hemme 30 wariant bolardy, ýagny bir wagtda 29-dan 0 oýun oýnan komanda bolardy, bu bolsa mümkin däldir. 29 oýun oýnan komanda hemmesi bilen oýnaýar, şonuň üçin galan ähli komandalar iň bolmanda bir oýundan oýnaýarlar, ýagny, eger 29 oýun oýnan bar bolsa, onda 0 oýun oýnan ýokdur.

Şonuň üçin, berlen pursatda oýunlarynyň sany deň bolan iki komanda bardyr.

**156.** 1+2+3+...+1966=(1+2)+(3+4)+...+(1965+1966).

Ýaýlarda duran goşa sanyň her biriniň jemi täk sandyr, şeýle jübütler ählisi 1966:2=983 täk mukdardadyr, şunlukda, 1-den 1966-a çenli sanlaryň jemi täk sandyr. Täk we jübüt sany bozup, bir operasiýada, biz olaryň ýerine täk nyň ýazarys ýagny täk sany tagtada ýazylan sanlaryň jemini kemelderis (biziň bozan täk we jübüt sanlarymyzyň jemi), soňra biz ony täk san ulaldarys (bozulan sanlaryň tapawudy) we şonuň bilen tagtada ýazylan sanlaryň jeminiň jübütligi üýtgemez. Şuňa meňzeşlikde, tagtada ýazylan sanlaryň jeminiň jübütliginiň iki jübüt sany bozanyňda-da we iki-täk sany bozanyňda-da üýtgemeýändigi subut edilýär. Şeýlelik bilen, biz tagtada ýazylan sanlaryň jeminiň jübütliginiň operasiýanyň beýan edilen şertlerinde üýtgemeýändigini subut etdik. Şunlukda, ol şeýle tejribeleriň islendik sanyny geçireniňde soňra-da üýtgemeýär. Ilkibaşda tagtada ýazylan sanyň jemi täkdir, onda tejribäniň beýan edilen islendik sanyndan soňra-da täkligine galar, onda nollaryň islendik mukdarynyň jemi görnüşinde jübütdir. Şunlukda, şeýle tejribäni köp gezek gaýtalamak bilen tagtada diňe nollar bolar ýaly etmek bolýan däldir.

**157.** Goý, Aşgabatdaky ýaşaýjylaryň mukdary $n$ bolsun. Aşgabatlylaryň her biriniň 0-dan $n-1$-e çenli tanyş aşgabatlylarynyň bolmagy mümkindir. Ýöne, kimde bolsa biri $n-1$ aşgabatly bolan tanyş bolsa, onda hemme aşgabatlylar onuň bilen tanyş we tanyşlary 0 bolan aşgabatlylar tapdyrmaz. Eger 0 tanşy bar bolan aşgabatly bar bolsa, onda hemmesi bilen tanyş aşgabatly ýokdur. Netijede, tanyşlygyň jemi $n-1$ warianty bar. (ýa-da her bir aşgabatlynyň 0-dan $n-2$ tanyş aşgabatlylary bolup biler, ýa-da 1-den $n-1$-e çenli tanyşlary). Eger tanyşlygyň her wariantynda birden köp bolmadyk adam bolýan bolsa, onda Aşgabatda hemme ýaşaýjy $n-1$-den köp däldir. Diýmek, tanyş aşgabatlylarynyň sany deň bolan iki aşgabatly tapdyrýandyr.

**158.** Sanlary kemelýän tertipde ýerleşdireliň:

$a_1>a_2>...>a_8 \cdot (a_1-a_2)+(a_2-a_8)+...+(a_7-a_8)=a_1-a_8$ aňlatma düzeliň. Eger çep bölege girýän aňlatmalaryň arasynda üç deňleri ýok bolsa, onda olaryň jemi 1+1+2+2+3+3+4=16-dan az bolmaýar. Başga tarapdan, bu jem 16-dan kiçi bolmalydyr, çünki $a_1$ we $a_8$ sanlaryň ikisi hem 16-dan kiçidir. Alnan gapma-garşylyk, garalýan aňlatmanyň çep böleginde saklanýan tapawutlaryň arasynda iň bolmanda deň üç sanysynyň bardygyna şaýatlyk edýär.

**159**. Predmetleri iki jübüte böleliň. Birinji jübütdäki predmetleriň massalary $m_a$, $m_b$, ikinji jübütdäki predmetleriň massalaryny $m_c$ we $m_d$ bolsun. Birinji çeküw bilen $m_a$ we $m_d$-ni deňeşdireliň, ikinji çeküw bilen $m_c$ we $m_d$-ni deňeşdireliň. Goý, kesgitlilik üçin $m_a>m_b$, $m_c>m_d$ bolsun. Üçünji çeküw bilen $m_a$ we $m_c$ deňeşdireliň. Goý $m_a>m_c$ bolsun. Dördünji çeküw bilen $m_c$ we $m_b$-ni deňeşdireliň. Haçanda $m_c>m_b$ bolan ýagdaýynda, bäşinji çeküw bilen $m_b$ we $m_d$-ni deňeşdireliň. Şunlukda, eger $m_b>m_d$ bolsa, onda predmetleriň massalary $m_d<m_b<m_c<m_a$ tertipde ýerleşer, eger $m_b<m_d$ bolsa, onda $m_b<m_d<m_c<m_a$ tertipde ýerleşer. Haçanda $m_c<m_b$ bolan ýagdaýynda, bäşinji çeküw hökman däldir, çünki, $m_d<m_c<m_b<m_a$ aýdyňdyr. Eger üçünji çeküwiň netijesi $m_a<m_c$ bolsa, onda dördünji çeküw bilen $m_a$ we $m_d$ deňeşdirilýär. Eger $m_a>m_d$ bolsa, onda bäşinji çeküw bilen $m_b$ we $m_d$ deňeşdireliň; tersine bolan ýagdaýynda $m_b<m_a<m_d<m_c$ tertipde ýerleşdirilýär. $m_b$ we $m_d$ predmetleri çekmegiň netijesi ($m_a>m_d$ şert bolanda) $m_d<m_b<m_a<m_c$ ýa-da $m_b<m_d<m_a<m_c$ ýerleşmeleriň birini berýär.

**160**. Deňme-deň bolanok, onda ýeňiji komanda bu oýunlaryň iň uly sanysyny utan komandadyr (ýa-da, eger oýunlaryň iň uly sanysyny utan birnäçe bolsa, onda şeýle komandalaryň biri). Ýeňiji komanda ondan güýçli bolmadyk şeýle *K* komanda tapylýar diýip güman edeliň. Onda *K* komanda ýeňiji komandany utýar (tersine, ýeňiji komanda *K*-dan güýçli) we *K* komanda ýeňiji komandanyň utan ähli komandalaryny utýar (tersine, eger ýeňiji komandanyň utan haýsy hem bolsa bir komandasy *K* komandany utsa, onda ýeňiji komanda *K*-dan güýçli bolar), ýagny *K* komanda ýeňiji komandanyň iň uly sany oýunda utanyndan iň bolmanda 1 oýun köp utan bolmaly. Diýmek, ýeňiji komanda güýçli bolmadyk komanda bar diýip, güman edip, biz gapma-garşylyga geldik. Şunlukda, biziň güman etmämiz nädogry we ýeňiji komanda beýleki ähli komandalardan güýçli.

**161.** 1-den 9-a çenli sifrlerden düzülen iň uly san 987654321-e deň. Bu sanyň $\frac{1}{8}$ bölegi $1234567890\frac{1}{8}$-e deň. Berlen sanyň $\frac{1}{8}$ bölegi 1-den 9-a çenli sifrlerden durýar we $\frac{1}{8}\cdot 987654321$ uly bolmagy mümkin däl, onda ol diňe 123456789-a deň bolup biler. Şunlukda, gözlenilýän san $123456789\cdot 8=987654312$ deň.

**162.** Üçburçlugyň perpendikulýar medianasynyň we bissektrisasynyň bir depeden çykmagy mümkin däldir. Hakykatdan-da, üçburçlugyň burçy ululygy boýunça 180°-dan kiçi, bissektrisasy ony iki deň burça bölýär we olaryň her biri 180°:2=90° kiçi hem-de mediana bu iki burçlaryň birinde ýatýar, ýagny onuň we bissektrisasynyň arasyndaky burç üçburçlugyň burçunyň ýarysyndan kiçi, 90° kiçi bolýar. Goý, *ABC* üçburçlukda *CAB* burçuň bissektrisasy *AD*, *AC* tarapa mediana $BE (AE=EC=\frac{1}{2}AC)$, $AD \perp BE$ we *AD* we *BE* kesişme nokady *H* bolsun. *AHE* we *AHB* üçburçluklar deňdir, çünki gönüburçly üçburçluklaryň $E\hat{A}H = B\hat{A}H$ ýiti burçlary deň we *AH* umumy katetleri bardyr. Şonuň üçin, $AB=AE=\frac{1}{2}AC$. Üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklary yzygiderli sanlar, şoňa görä olar 1 ýa-da 2 bilen tapawutlanýarlar. Eger $AC=AB+1=2AB$ bolsa onda $AB=1$, $AC=2$, $BC=0$ ýa-da $BC=3$ (çünki taraplaryň uzynlyklary yzygiderli sanlardyr), ýöne $BC=0$ bolup bilmez, $BC=3$ bolanda $BC=AB+AC$, ýagny *A*, *B* we *C* nokatlar bir göni çyzykda ýatýar. Eger $AC=AB+2=2AB$ bolsa, onda $AB=2$, $AC=4$, bu ýerden $BC=3$-i alarys. Diýmek, üçburçlugyň taraplary 2, 3, 4 bolýar.

**163.** Eger bu mümkin bolsa, onda hemme ýaşaýjylar wagtyň bu böleginde 10·1970=19700 köpük bererdi. Bu san 3-e bölünmeýär. Ýöne, her bir çalyşmada 3-e köpük berilýär (bir ýaşaýja iki bäşlik, beýlekisine 10 teňňe), onda berlen köpükleriň sany çalşyrylanlaryň üçeldilen sanyna deňdir, ýagny elmydama 3-e bölünýär. Şoňa görä-de, käbir wagt aralygynda her bir ýaşaýjynyň dogry 10 köpük bermegi mümkin ýagdaý däldir.

**164.** Goý, gözlenilýän san $a$ bolsun. $10^6$ sanyň ýazgysy 7 sifrden durýar, $a^6$ bolsa 8 sifrden durýar, onda $a>10$. $20^6=2^6\cdot10^6=64\cdot10^6$ sanyň ýazgysy 8 sifrden durýar we 6-dan başlaýar, $a^6$ ýazgynyň birinji sifri 4-den uly däl, onda $a<20$. $a^6$ sanyň sifrleriniň jemi 18-e deň we 9-a bölünýär, onda $a$ san 3-e bölünýär. Şoňa görä $a$ san 12, 15 ýa-da 18-e deň. Ýöne $15^6$ san 5 bilen gutarýar, bu setirler bolsa ýazgyda ýok, $12^6=2985984$, $18^6=34012224$. Bu ýerden $a=18$ bolýandygy görünýär.

**165.** $\underbrace{44\ldots4}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{66\ldots67}_{68\ sifr}=\underbrace{44\ldots4}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{66\ldots66}_{68\ sifr}+\underbrace{44\ldots4}_{19\ sifr}>$

$>\underbrace{44\ldots4}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{66\ldots6}_{68\ sifr}=4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{19\ sifr}\cdot6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{68\ sifr}=24\cdot\underbrace{11\ldots1}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{68\ sifr}=$

$=8\cdot\underbrace{11\ldots1}_{19\ sifr}\cdot3\cdot\underbrace{11\ldots1}_{68\ sifr}=\underbrace{88\ldots8}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{33\ldots1}_{68\ sifr}.$

Diýmek, $\underbrace{88\ldots8}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{68\ sifr}<\underbrace{44\ldots4}_{19\ sifr}\cdot\underbrace{66\ldots67}_{67\ sifr}.$

**166.** Islendik bir şäher alalyň. Eger ondan islendigine howa ýoly bilen baryp bolýan bolsa, ondan islendik şäherden islendigine howa ýoly bilen barmak bolýandyr.Eger ondan islendik şähere suw ýoly bilen baryp bolýan bolsa, onda islendik şäherden islendigine suw ýoly bilen baryp bolýandyr. (Birinji şäherden saýlanan şähere barmak we ondan ikinji şähere barmak ýeterlikdir). Ýöne, erkin saýlanan şäherden elmydama islendigine howa ýoly bilen ýa-da suw ýoly bilen barmak bolýandyr. Hakykatdanda, eger bu beýle däl bolsa, onda şeýle $A$ şäher tapylyp, oňa çenli saýlanan $X$ şäherden howa ýoly bilen baryp bolanok (we $A$ we $X$ arasyndaky gatnaşyk suw bilen) we şeýle $B$ şäher bar bolup, oňa çenli $X$ şäherden suw boýunça baryp bolýan däldir (onda $B$ we $X$ howa ýoly bilen birleşdirilendir). Ýöne, $A$ we $B$ arasynda aragatnaşyk bar. Eger $A$-dan $B$-e çenli suw boýunça baryp bolýan bolsa, onda $X$-dan $B$-e çenli suw boýunça baryp bolar (ilki başda $X$-den $A$-çenli, soňra $A$-dan $B$-e çenli), ýöne $X$-den $B$-e çenli suw boýunça baryp bolanok. Eger $A$ we $B$ arasyndaky gatnaşyk howa boýunça bolsa, onda $X$-dan $A$-a çenli howa boýunça barmak bolýar (ilkibaşda, $X$-den $B$-e çenli, soňra $B$-den $A$-a çenli), ýöne $X$-den $A$-a çenli howa boýunça baryp bolanok. Şunlukda, $A$ we $B$ şäherler bir wagtda bar bolup bilenok ýa-da $X$-den islendik şähere çenli suw boýunça barmak bolýar, hem-de $X$-den islendik şähere çenli howa boýunça barmak bolýar.

**167.** Komanda 0-dan 11-e çenli ýeňiş gazanyp biler (ýaryşda komandalaryň ýeňişleriniň mukdarynyň jemi 12 wariantybardyr). Eger hemme komandalaryň ýeňişleriniň sany dürli bolsa, onda hemme 12 wariant amala aşardy, ýöne 7 ýeňiş gazanan komanda ýok. Şoňa görä-de, deň ýeňiş gazanan iki komanda bar. Bu komandalar biri-biri bilen oýnapdyrlar. Goý, bu duşuşykda ýeňiş gazanany $A$, ýeňileni $B$ komanda bolsun. $B$-niň utan hemme komandalaryna garalyň ($A$ iň bolmanda bir komandany utýar ($B$ komandany), onda $B$ komanda iň bolmanda bir komandany utýar). Eger $A$ hemme komandalary ýeňen bolsa, onda ol $B$ komandadan iň bolmanda bir oýun köp utar. Ýöne $B$ komanda näçe duşuşykda ýeňen bolsa, $A$ komanda şonça duşuşykda utýar. Şonuň üçin, $B$ utulan komandalarynyň arasyndan, şeýle bir $C$ komanda tapylyp, $C$ komanda $A$-ny utýar. Bu $A$, $B$ we $C$ komandalar gözlenilýän komandalar bolýar.

**168.** Üçburçlugyň tarapyna geçirilen beýiklik bu tarapa geçirilen medianadan uzyn däldir, çünki beýiklik bu depeden tarapa geçirilen perpendikulýardyr, mediana bolsa ýapgyt çyzykdyr. Eger beýiklik mediana bilen gabat gelmese, onda ol medianadan gysgadyr (çünki perpendikulýar ýapgyt çyzykdan gysgadyr). Üçburçlugyň beýiklikleriniň jemi onuň medianalarynyň jeminden uly däldir. Haçanda her bir beýiklik şol tarapa geçirilen mediana bilen gabat gelse, beýiklikleriň jemi medianalaryň jemine deň bolýar. Eger beýiklik mediana bilen gabat gelse, onda üçburçluk deňýanlydyr. Eger beýiklikleriň üçüsi hem mediana bilen gabat gelse, onda üçburçluk deňtaraplydyr. Şeýlelik bilen, medianalaryň jemi berlende ähli üçburçluklaryň arasynda beýiklikleriň iň uly jemi bolany deňtaraply üçburçlukdyr.

**169.** Biziň sanymyz doly kwadrat bolup bilýär diýip güman edeliň. Islendik sanyň kwadratynyň jübüt derejeli ýönekeý köpeldijilere dagytmasyna 2 we 5 sanlaryň girýändigi üçin, biziň sanymyzyň bölünýän iň uly derejesi 10-uň jübüt derejesidir, ýagny ol jübüt san soňy nol bilen gutarýar. Onda, bu nollary taşlap, ýene dogry kwadrat alarys. Bu san 6 bilen gutarýar, onda ol 2-ä bölünýändir. Onda ol hökman 4-e bölüner. Diýmek, onuň soňky iki sifri bilen emele gelen san hem 4-e bölünýär. Ýöne bu san 06-a ýa-da 66-a deňdir. Emma 6 we 66 san 4-e bölünmeýär. Gapma-garşylyk. Diýmek, altylygyň we nollaryň kömegi bilen dogry kwadrat bolýan sany ýazyp bolanok.

**170.** Eger kwadraty 16 kwadratlara bölüp, soňra olaryň 9 sanysyny bir kwadrata birleşdirsek, onda biz kwadraty 8 kwadratlara bölmegi alarys. Eger haýsy hem bolsa alnan kwadratjyklary 4 bölege bölsek, onda kwadratjyklaryň sany 3 esse artar. Şeýle operasiýany 655 gezek ýerine ýetirip, biz $8+3\cdot655=1973$ kwadratjyklary alarys.

**Bellik:** Kwadraty 4 kwadrata we bäşden uly islendik sany kwadratlara bölüp bolýandygyny ýeňil subut etmek bolýar. 2, 3 we 5 kwadratlara kwadraty bölüp bolanok.

**171.** Bäşinji sütüne diňe eger ol bir sütünde gabat ýa-da ähli ilkibaşdaky üç sütünlerde gabat gelen sanlaryň düşýändigini subut edeliň. Hakykatdan-da, bu ýagdaýda, bäşinji sütüne sanlaryň düşjekdigi aýdyňdyr. Goý, dogry iki sütünlerde sanlar gabat gelsin. Eger bu sütünler birinji we ikinji bolsa, onda bu san üçünji we dördünji sütünlerde duş gelmez. Eger bu haýsy-da bolsa başga iki sütün bolsa, onda ol üçünji we dördünji sütünlerde duş gelýärler. Iki ýagdaýda-da ol bäşinji sütüne girmeýär. Şuňa meňzeşlikde, bu sanyň ýedinji sütüne girýändigi subut edilýär. Şunlukda, bäşinji we ýedinji sütünlerde şol bir sanlar ýazylan. Subut edildi.

**172.** $m$-burçlugyň diagonallarynyň mukdary $\frac{m(m-3)}{2}$-e deňdir, onda $\frac{m(m-3)}{2}=1974$ deňlemäniň bitin sanlarda çözüwiniň ýokdugyny subut etmek ýeterlikdir. $m$ we $m-3$ sanlar 3 bölünende ($m$ bitin bolanda) deň galyndy berýär, onda çep bölegi ýa-da 3 bölünenok, ýa-da 9-a bölünýär. Ýöne 1974 san 3-e bölünýär we 9-a bölünmeýär, bu bolsa tassyklamany subut edýär.

**173.** a) alnan hemme üç sanlaryň jemi–bu ähli üçburçluklaryň depelerinde ýazylan hemme sifrleriň jemidir. Üçburçlugyň her birinde sifrleriň jemi 1+2+3=6-a deňdir. Şoňa görä-de, ähli üçburçluklaryň depeleriniň sifrleriniň jemi topbakdaky üçburçluklaryň sanynyň 6 essesine deňdir. Eger alnan üç sanlaryň ählisi 55-e deň bolsa, onda olaryň jemi 55·3=165-e deň bolar, bu täk sandyr. Şonuň üçin, alnan üç sanlaryň hemmesi 55-e deň bolup bilmez.

b) kartondan 25 üçburçluk keseliň, olary bäş bäşliklere böleliň we olaryň depelerini şeýle görnüşde belgiläliň: 3, 2 we 1; 3, 1 we 2; 2, 1 we 3; 1, 3 we 2; 1, 3 we 2. Birinji, ikinji we üçünji depeleri gabat geler ýaly edip, olary goşalyň. Onda her burçuň jemi şuňa deň bolar: 3+3+2+1+1=2+1+1+3+3= =1+2+3+2+2=10. Şeýle bäşlikleriň bäşisini goşup, her burçuň sifrleriniň jemi 50-ä deň bolan topbak alarys.

**174.** Ylgaw prosessinde $x$ sprinter $y$-den geçse ýa-da $y$ sprinter $x$-dan geçse, onda $xy$ görnüşdäki waka ozmak diýip atlandyralyň. Eger $AB$ görnüşdäki ozmak jübüt san bolsa, onda $B$ finişe $A$-dan soň gelýär, bu şerte garşy gelýär. Diýmek, $AB$ görnüşdäki ozma täk san bolmaly $AB$ görnüşdäki ozmaklygyň sanynyň jemi we $AC$ görnüşdäki ozma şert boýunça 5-e deň, onda $AC$ görnüşdäki ozma jübüt san bolýar. Diýmek, $C$ finişe $A$ soň gelýär we ylgaýjylar $BAC$ tertipde gelipdirler.

**175.** Paýtagtda we oňa uçup bolýan ähli şäherlere garalyň (ýolda gonmak mümkinçiligi bilen). Goý, $A$ şäher bu şäherleriň sanynda ýok bolsun. Goý, paýtagtdan $K$ şäherlere baryp bolýan bolsun. Onda bu şäherlerden $20K$ çyzyk çykýar, paýtagtdan bolsa 101 çyzyk çykýar, ýagny jemi $101+20K$ çyzyk. Paýtagtdan çykýan her bir ýa-da $K$ şäherleriň birinden çykýan uçar çyzygy paýtagtda gutarýar ýa-da $K$ şäherleriň birinde gutarýar (ol paýtagtdan çykyp baryp bolýan şäherde gutarýar, çünki paýtagtdan baryp bolýan şäherden başlanýar). Şonuň üçin, çykýan uçarçyzyklaryň sany şäheri birleşdirýän çyzyklaryň ikeldilen sanyna deňdir (her çyzyk olary birikdirýän iki şäherden çykýar, ýagny hasaplananda çykýan çyzyk iki gezek hasaplanýar), ýagny jübüt sana deňdir. Ýöne ol $20K+101$ täk sana deňdir. Gapma-garşylyga geldik. Şunlukda, $A$ şäher paýtagtdan baryp bolýan şäherleriň hataryna girýär. $A$ şähere çenli uçup bolýandygyny subut etdik.

**176.** Bagty 11, 22, 33, ..., 99 sanlardan yzygiderlilikde tagtada Ahmet nobatdaky sanyň öňünde «+» ýa-da «–» goýýança ýazýar. Eger bu «+» bolsa, onda Bagty ýa-da Ahmediň bellänini 10-dan az bolmadyk san ýazyp bilýär. Eger bu «–» bolsa, (Goý, nobatdaky sanyň $aa=10a+a$ görnüşi bar bolsun) $a=9$ bolanda ýatda bellenen san 90 bolýar (çünki galan sanlarda gabat gelme bolmady, onda 10 san 1-den 8-e çenli sana deň däl, ýagny 9-a deň. Birlik san 1-den 9-a çenli sifrleriň hiç birine deň däl, ýagny 0-a deň). Eger $a$ san 9-a deň däl bolsa, onda indiki ädimde Bagty $10(a+1)+a$ san ýazar. Eger Ahmet «–» goýsa, onda birlik san $a$ deň. Bagty 11, 22, ..., 99 sanlardan san ýazmagyny dowam edýär (nirede galan bolsa, şol ýerden) indiki «–» onluk sany görkezer. Eger Ahmet hiç zat goýmasa, onda onluk san a deň we şol san ýazmagyny dowam edýär, Bagty indiki «–» bolanda birlik sany bilýär, eger «–» ýüze çykmasa, onda birlik san 0 bolýar. Bagty 10-dan köp bolmadyk san ýazyp sany bildi (11-den 99-a çenli 9-a we $10(a+1)+a$ görnüşindäki san).

**177.** $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\ldots+\frac{97}{98}-\frac{99}{100}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{4}\right)+$
$+\left(1-\frac{1}{6}\right)-\ldots+\left(1-\frac{1}{98}\right)-\left(1-\frac{1}{100}\right)=1-1+1-1+\ldots+$
$+1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{98}+\frac{1}{100}=$
$=0-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right).$

Ýaýlarda durýan sanlaryň jemi

$$\frac{1}{K}-\frac{1}{2K}-\frac{1}{4K}-\frac{1}{8K}-\ldots-\frac{1}{2^iK}$$

sanlaryň jemidir, bu ýerde $i$
$2^iK\leq 50$, $2^{i+1}K>50$, 1-den 49-a çenli ähli täk $K$-lar boýunça, şerti kanagatlandyrýan san.

Ýöne $\frac{1}{K}-\frac{1}{2K}-\frac{1}{4K}-\frac{1}{8K}-\ldots-\frac{1}{2^iK}=\frac{1}{2^iK}$.

$25<2^iK\leq 50$, onda bu jeme diňe $\frac{1}{26}$-den $\frac{1}{50}$-e çenli sanlar girýär, çünki 16-dan 50-ä çenli islendik san $2^iK$ görnüşde aňladylýar we onsoňam ýene täk usulda, onda bu hemme sanlar girýär, onsoňam her biri bir gezekdir. Diýmek, ýaýlardaky aňlatma $\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{50}\right)$ deň, ýagny

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\ldots+\frac{97}{98}-\frac{99}{100}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}\right).$$

**178.** a) Ahmet Bagta päsgel berip bilýär. Onuň üçin Ahmet birinji sifri 1 ýazýar, soňra şeýle hereket edýär: eger Bagty 5 ýazsa, Ahmet 1 ýazýar; eger Bagty 4 ýazsa, Ahmet 2 ýazýar; eger Bagty 3 ýazsa, onda Ahmedem 3 ýazýar; eger Bagty 2 ýazsa, onda Ahmet 4 ýazýar; eger Bagty 1 ýazsa, onda Ahmet 5 ýazýar. Ýagny, Ahmediň we Bagtynyň ýazan sifrleriniň jemi 6-a deň bolar. Bagtynyň 9 ädiminden we Ahmediň 10 ädiminden soňra ýazylan sifrleriň jemi 1+9·6=55-e deň bolar. San 9-a bölüner ýaly, onuň sifrleriniň jemi hökman 9-a bölünmelidir, şonuň üçin Bagty diňe 8 ýazyp bilýär (eger sanyň 9-a bölünmegini isleýän bolsa). Ýöne Bagty düzgün boýunça 8 sifri ulanyp bilenok, şonuň üçin ol näme ýazsada, alnan san 9-a bölünmeýär.

b) Ahmediň islendik hereketinde-de, Bagty 9-a bölünýän san alyp bilýär. Onuň üçin Bagty özüniň her bir ädiminde özünden öň Ahmediň ýazan sifri bilen öz ýazjak sifriniň jemi 6 bolar ýaly san belläp ýazýar. Bagty 15 ädim edýär (çünki san 30 belgilidir) we ýazan sanynyň sifrleriniň jemi 15·6=90 bolar. Sanyň sifrleriniň jemi 9-a bölünýär, onda san 9-a bölüner.

**179.** Harplaryň dörtden az däldigini subut edeliň. 2·2 kwadrata garalyň. Onuň islendik öýjüginden islendik başgasyna patyşanyň göçümi bilen baryp bolýar. Diýmek, şeýle kwadratda islendik iki harp dürlüdir we ähli harplar dörtden az däldir.

Berlen kwadraty 2·2 kwadratlaryň 2500 sanysyna böleliň. Kwadratlaryň her birinde harplary şeýle görnüşde goýalyň: çep aşaky burçda «*a*» harpy goýalyň, çep ýokarky burçda «*b*» harpy goýalyň, sag ýokarky burçda «*c*» we galan burçda «*d*» harpy goýalyň. Şeýle goýmaklygyň meseläniň şertini kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däldir. Şeýlelikde, harplaryň iň kiçi sany dörde deňdir.

**180.** Tagtada ýazylan sanlaryň ählisiniň içinden iň kiçisini alalyň (ýa-da iň ulularynyň birini). Onuň hemme goňşulary ondan kiçi däldir, şonuň üçin, eger iň bolmanda bir goňşy san ondan uly bolsa, onda olaryň orta arifmetik bahasy iň kiçi sandan uludyr. Şonuň üçin iň kiçi sanyň hemme goňşulary oňa deňdir we olar hem iň kiçi san bolýarlar. Şunlukda, olaryň goňşulary hem oňa deňdir we ş.m. şeýlelik bilen, tagtadaky ähli sanlaryň deňdigini alýarys. Burçlarda durýan dört sanyň jemi 16-a deň. Hemme sanlar deň, onda burçdaky sanlaryň her biri 16:4=4-e deňdir. Diýmek, tagtada duran ähli sanlar, şeýle hem e2 meýdanda duran san 4-e deňdir.

**181.** 10·10 tagtany küşt tertibinde reňkläliň. Tagtada figura islendik ýagdaýda duranda-da, bir reňkden 3 öýjügi we başga reňkden 1 öýjügi ýapýar. Figuralaryň her biri ak öýjükleriň täk sanysyny ýapýar. Şonuň üçin, jemde ähli

25 figura ak öýjükleriň täk sanysyny örter (çünki täk sanlaryň täk sany jemi täk sandyr). Ýöne, 10·10 tagtada 50 ak öýjükler jübüt sandyr. Şoňa görä-de, bitin tagtany figuralar bilen ýapmak başartmaýar.

**182.** $AB+BC+DE+EA=30+80+86+40=236$ *(km)*$=|CD|$. *D, E, A; A, B, C; D, A, C* üçlük nokatlara yzygiderli üçburçluk deňsizligini ulanyp *D, E, A, B, C* tertipde *A, B, C, D, E* nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygyny ýeňil subut etmek bolýar. Şunlukda, *E*-den *C*-e çenli uçup barmak üçin $EC=EA+AB+BC=150$ *(km)* ýoly geçmek gerekdir.

**183.** Eger şeýle ýerleşdirme mümkin bolsa, onda iki jübüt san goňşy hatarda durup bilmez ýa-da birinden soň, çünki olar özara ýönekeý däl (2 umumy bölüjileri bar). Ýerleşmedäki ähli jübüt sanlaryň iň çepkisini alalyň. Indiki 2 san täkdir. Ikinji jübüt sany alalyň. Onuň yzyndan ýene-de 2 täk san geler we ş.m. her jübüt sandan soň iň bolmanda 2 täk sanlar gelýär (iň sagdakydan başgasy, çünki ol iň soňky bolmagy mümkin). Şonuň üçin, eger biziň ýerleşmämizdäki jübüt san w bolsa, onda täk sanlar iň bolmanda $2(x-1)$ bolýar ($(x-1)$ her sandan soň iki boýunça (iň sagdakydan başga)). Ýöne, 1-den 1963-e çenli sanlaryň arasynda jübüt san 981, täk sanlar 982 we $(981-1)\cdot 2=1960$ sandan azdyr. Diýmek, talap edilýän ýerleşme mümkin diýip, bir gapma-garşylyga geldik. Şeýlelikde, biziň güman etmämiz nädogry we talap edilýän görnüşde sanlary ýerleşdirip bolanok.

**184.** Her gezek sandan onuň birlik sanyny we birinji iki sifrleriniň jemini aýyrýarlar. Häzirlikçe san üç agza ýa-da iki agza, (ýagny birinji iki sifrleri bilen ýazylan san) onluklaryň sany iň azyndan birlik kemelýär. Ilkibaşda, onluklaryň sany 99-dan köp däl, onda 99 aýyrmadan soňra ol $99-99=0$ ýokaryk geçmez, ýagny alnan san birbahaly bolar. Onda ýüz aýyrmadan soň nol alnar.

**185.** Bolar. Mysal üçin, şeýle: taraplary biri-birine bolan iki deň kwadrat guralyň. Alnan gönüburçlugyň uly tarapynda kwadrat guralyň. Alnan gönüburçlugyň uly tarapyny alalyň we onda kwadrat guralyň we ş.m. Her bir indiki gönüburçlugyň uly tarapynda kwadrat guralyň we şeýle spiral boýunça.

**186.** Goý, biziň 1 *sm* radiusly tegelegimiz we tegelegiň merkezinden $K$ *sm* uzaklykda $M$ nokat, tegelegi kesýän $P$ göni çyzyklar bolsun. $P$ göni çyzyga görä $M_1$ nokadyň $M$ nokada simmetrikdigini we tegelegiň merkezinden ($K$–2) ($K$>2) kiçi bolmadyk uzaklykda ýatýandygyny subut edeliň. $P$ göni çyzyk bilen töweregiň kesişme nokatlarynyň birini $N$, tegelegiň merkezini bolsa $O$ bilen belgiläliň. Onda $OM=K$, $ON=1$ we uzynlygyň häsiýeti boýunça $MN \geq OM-ON=K-1$. $M$ we $M_1$ nokatlaryň simmetrik okunyň üstünde $N$ nokat ýatýar. Onda $M_1N=MN \geq ON=K-1$.

Uzaklygyň häsiýeti boýunça

$$M_1O \geq M_1N-ON=MN-1 \geq K-1-1=K-2.$$

Diýmek, subut etmelimiz $M_1O \geq K-2$. $X$ nokat merkezden 11 *sm* uzaklykda ýatýar, onda subut edilen boýunça $A$ nokat tegelegiň merkezinden 11–2=9 *sm* az bolmadyk uzaklykda ýatýar. $B$ nokat bolsa merkezden 9–2=7 *sm* kiçi bolmadyk uzaklykda, $C$ nokat 5 *sm* az bolmadyk uzaklykda, $D$ nokat 3 *sm* az bolmadyk uzaklykda, $E$ nokat merkezden 1 *sm* az bolmadyk uzaklykda ýatýar. Tegelegiň içinde ýatan islendik nokatdan onuň merkezine çenli uzaklyk 1 *sm* kiçi, onda $E$ nokadyň tegelegiň içinde ýatmagy mümkin däl.

**187.** Birinji oýunçy her gezek ikinji oýunçynyň goşany bilen öz sanynyň jemi 6-a deň bolar ýaly sany goşup bilýär. Onda, eger oýny başlan birinji göçüminde 4-i aýtsa, soňra ikinji oýunçynyň aýdan sanyna baglanyşyksyzlykda ol 10-y aýdyp biler, soňra 16, soňra 22 we ş.m. Onda başlan özüniň 17-nji göçüminde 100-i aýdýar we utýar.

**188.** Goý, iň gysga okuwçylaryň arasyndan iň uzyny «$A$», iň uzynlarynyň arasyndan iň gysgasy «$B$» bolsun. Eger $A$ we $B$ bir şerengede ýa-da bir kolonnada duran bolsalar, onda $A$ we $B$ saýlanyşy boýunça $A$ okuwçy $B$-den uzyn däldir. Eger

$A$ we $B$ bir şerengede, bir kolonnada bolmasa, onda şeýle $C$ okuwçy bar bolup, ol $A$ bilen bir şerengada we $B$ bilen bir kolonnada durýar. Onda $A$ we $B$ saýlanyşy boýunça $A$ okuwçy $C$-den uzyn däldir. $B$ bolsa $C$-den gyzga däldir. Diýmek, $A$ elmydama $B$-den uzyn däldir.

Jogaby: bolup bilmez.

**189.** Çeküw jamynyň her birine 8 şardan goýalyň. Eger jamlar deňagramlaşsa, onda erbet (ýagny beýlekilerden agramy boýunça tapawutlanýar) şar galan 9 şarlaryň arasynda ýerleşendir. Onda ikinji çeküwde bu 9 şarlary çeküw jamynyň birinde goýalyň, beýlekisine 16 eýýam çekilenden 9-syny goýalyň. Erbet şar birinji jamda ýerleşýär, şonuň üçin onuň agramy ikinjiniň agramyndan tapawutlanýar. Eger birinji jam agyr bolsa, onda erbet şar agyrdyr, eger ikinji agyr bolsa, onda galanlary ýeňildir.

Eger birinji çeküw bolanda jamlaryň biri agyr bolsa, onda galan 9 şarlaryň arasynda erbet şar ýokdur. Onda ýa-da şol erbet şar (ol beýlekilerden agyr), ýa-da agyr jamda erbet şar ýok (onda ol beýlekilerden ýeňil, çünki ýeňil jamda ýerleşen). Ikinji çeküwde birinji çeküw jama birinji çeküwdäki agyr şarlardan 8 şary goýalyň, ikinji jama 9 çekilmedik şarlardan 8-sini goýalyň. Eger birinji jam agyr bolsa, onda erbet şar galanlardan agyrdyr, eger jamlar deňagramlaşsa, onda ol iň ýeňil jamdaky 8 şaryň içinde ýerleşendir we galanlardan ýeňildir. (Ikinji jamyň agyr bolmagy mümkin däl, çünki ol birinji çeküw bolanda agyr jamdaky 8 şarlaryň arasynda ýerleşendigini we galanlardan ýeňildigini aňladardy, ýagny bu 8 şar birinji çeküwde ýeňil bolardy).

**190.** $A=1\cdot2\cdot3...100$ sanyň köpeldijileriniň arasynda 5-e bölünýänleri $100:5=20$ sanydyr, olaryň arasynda 25-e bölünýänleri $20:5=4$ sanydyr, diýmek, $A$ san $5^{24}$ sana bölünýär. $A$ sanyň köpeldijileriniň arasynda 50-si jübütdir, şonuň üçin, $A$ san $2^{24}$-e bölünýändir, bu ýerden $A$ sanyň $5^{24}\cdot2^{25}=10^{24}$ sana bölünýändigini alarys. Diýmek, köpeltmek hasyly 24 nollar bilen gutarýar.

**191.** $7^n$ sanyň iň soňky sifri $n$ dereje görkezijä baglydyr we 7, 9, 3, 1 bahalary kabul edýär, onsoňam, eger $n$ dereje görkeziji 4-e bölünýän bolsa, onda $7^n$ sanyň iň soňky sifri birlik bolýar. $3^n$ san 3, 9, 7, 1 sanlaryň biri bilen gutarýar, onsoňam, eger $n$ san 4-e bölünse, onda soňky sifr 1-e deňdir. 68 san 4-e bölünýär, onda 1968 san 4-e bölünýär, bu ýerden $1968^{1970}$ san 4-e bölünýär we $68^{70}$ sanyň hem 4-e bölünýändigini alarys. Diýmek, berlen san bitin sandyr (sanawjydaky drob kiçelýändir we aýrylýan san şol bir 1 sifr bilen gutarýar, şonuň üçin sanawjy 10-a bölünýär).

**192.** Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin.

I. Berlen 5 bitin sanlaryň arasyndan 3-e bölünende şol bir galyndyly 3 san tapylýandyr. Olaryň jemi, 3-e bölünýändir.

II. Şol bir galyndyly üç san ýok, diýmek, 5 sana galyndylaryň ähli üç synpy düşýär, şonuň üçin, 0,1 we 2 galyndylary bolan üç san bardyr, bu san hem gözlenilýän sanlardyr.

**193.** $(P-1)P(P+1)$ san 3-e bölünýär, ýöne $P$ ýönekeý san we $P>3$, diýmek, $P$ san 3-e bölünmeýär, ýagny, $(P-1)\cdot(P+1)$ san 3-e bölünýär. Ondan başga-da, $P$ täk san (ikiden uly, ýönekeý), diýmek, $P-1$ we $P+1$ jübüt san, şonuň üçin olaryň biri 2-ä bölünýändir, beýlekisi bolsa 4-e bölünýär, ýagny $(P-1)(P+1)$ san 8-e bölünýär.

**194.** Islendik bitin san 8-e bölünende aşakdaky sekiz sanlaryň biri galyndy bolýar: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Şonuň üçin, bitin sanyň kwadratyny 8-e böleniňde 0, 1, 4 üç sanlaryň biri galyndy bolýar. Üç sanyň kwadratynyň jemini 8-e böleniňde 7 galyndy bermegi üçin bu galyndynyň täk san bolmagy zerurdyr. Bu diňe iki ýagdaýda mümkindir: ýa-da kwadratlaryň biri, ýa-da hemme üç san 8-e bölünende täk galyndy bermelidir. Birinji ýagdaýda täk galyndy 1 bolýar, iki jübüt galyndynyň jemi 0, 2, 4 deň bolýar ýagny hemme galyndylaryň jemi 1, 2, 3-e deňdir ýagny 7 galyndyny bu ýagdaýda alyp bolanok. Ikinji ýagdaýda, galyndylaryň hemmesiniň jemi 3-e deňdir. Diýmek, üç bitin sanlaryň kwadratlarynyň jemini 8-e böleniňde 7 galyndy alyp bolanok.

**195.** Mysal üçin 1, 2, 3, 7.

**196.** –1, 1, –2, 2.

## 9-njy synp

**197.** Ilkibaşda 100-burçlukdaky erkin diagonallaryň toplumyna garalyň. Bu diagonallary ýeke-ýekeden geçireliň we şonda köpburçluk bölünende bölekleriň sanynyň nähili üýtgeýändigine üns bereliň. Eger öň geçirilen $k$ diagonal bilen täze diagonal kesişse onda bölekleriň sany $k$+1 artar. Netijede, gutarnykly bölekleriň sany 1+ geçirilen diagonallaryň sany + diagonallaryň kesişme nokatlarynyň sany bolar.

Talap edilýän toplumyň gurluşyna geçeliň. Goý, $A$, $B$, $C$ we $D$ – 100-burçlugyň konturynda görkezilen tertipde ýerleşen depeleri hem-de $A$ we $B$ depeleriň arasynda 100-burçlugyň 11 depesi, C we D depeleriň arasynda onuň 10 depesi ýerleşýän bolsun. Eger $A$, $B$, $C$ we $D$ depeleri hasap etmäniňde diagonalyň iki tarapynda 100-burçlugyň deň mukdarda depeleri ýatýan bolsa, onda $A$, $B$, $C$ we $D$ depelerden tapawutly iki depäni birleşdirýän bu diagonala oňat diagonal diýilýär. $A$, $B$, $C$ we $D$ depelerden tapawutly depeleriň her birinden diňe bir oňat diagonal çykýar we olaryň hemmesi jübüt-jübütden kesişýärler. Hemme 48 oňat diagonallary geçireliň. Olar 100-burçlugy $1+48+\frac{48\cdot 47}{2}=1177$ böleklere bölýär. $AB$ diagonal 11 oňat diagonallary kesýär, $CD$ diagonal bolsa 10 oňat diagonallary kesýär. Bu bolsa goşmaça 1+11+1+10=23 bölekleri berýär. Hemmesi bilelikde 1177+23=1200 bölek bolar.

**198.** Berlen deňsizligi aşakdaky deňgüýçli deňsizlik görnüşde ýazalyň: $\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\ldots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}\le 0.$ Bu deňsizligi subut edeliň. Islendik $k$ üçin

$$\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \le \frac{x_k-1}{4}$$ deňsizligiň dogrudygyny görkezeliň.

Hakykatdan-da, eger $x_k \ge 1$ bolsa, onda $(1+x_k^2)(1+x_k) \ge$ $\ge (1+1)(1+1)=4$ bolany üçin ol deňsizlik dogrudyr. Eger $x_k<1$ bolsa, onda $\frac{1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \ge \frac{1}{4}$.

Şoňa görä-de, $\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \le \frac{x_k-1}{4}$. Şunlukda,

$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\ldots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)} \le \frac{x_1-1}{4}+\ldots+$$
$$+\frac{x_n-1}{4}=\frac{x_1+\ldots+x_n-n}{4}=0.$$

**199.** Ýok. Tassyklamany tersine güman etmek bilen subut edeliň. Goý, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = y^2$ bolsun (bu ýerde $x_1, \ldots, x_5$ yzygider alnan natural sanlar). $p$, $p \ge 5$ ýönekeý sanlaryň her biri olaryň birden köpüsine bölünýän däldir, onda $x_i$ sanlaryň islendigi özüniň jübüt derejeli $p$, $p \ge 5$ ýönekeý bölüjisini saklar. $x_i$ bäş sany 4 topara bölmek bolýar:

a) jübüt derejeli 2 we 3 köpeldijileri saklaýanlar (bu sanlar – kwadratlar);

b) täk derejeli 2-ni, jübüt derejeli 3-i saklaýanlar (bu sanlar ikeldilen kwadratlar),

ç) täk derejeli 3-i, jübüt derejeli 2-ni saklaýanlar (bu sanlar – üçeldilen kwadratlar),

d) täk derejede 2-ni we 3-i saklaýanlar (bu sanlar alty esse ulaldylan kwadratlar).

$x_n$ we $x_m$ iki sanlar bir topara düşýärler. Olaryň tapawudy 4-den uly däldir. Dürli iki kwadratlar 3-den az bolmadyk tapawutlanýarlar. Onda $x_n$ we $x_m$ bilelikde a) topara düşýär. Emma bu ýagdaý, haçanda yzygider alnan sanlar 1, 2, 3, 4, 5 bolanda mümkindir. Ýöne $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ kwadrat däldir. Gapma-garşylyk alyndy.

**200.** Berlen deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{a+b} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right)\sin^4 x - \frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{a+b} +$$

$$+\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right)\cos^4 x = 0 \Longleftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2 x\right)^2 = 0.$$

Şunlukda, $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}$, diýmek,

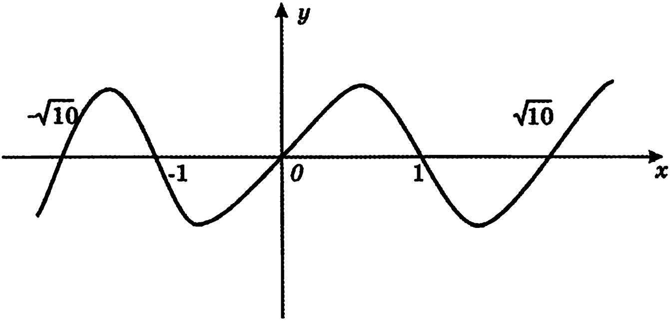
$$\frac{1}{a+b} = \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{\sin^2 x}{a}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\sin^2 x}{a}.$$

Şeýlelikde, $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b}$, şoňa görä-de,

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \sin^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^{n-1} + \cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^{n-1} =$$

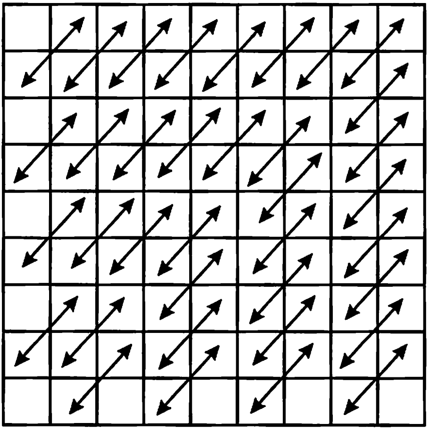
$$= \frac{1}{(a+b)^{n-1}}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

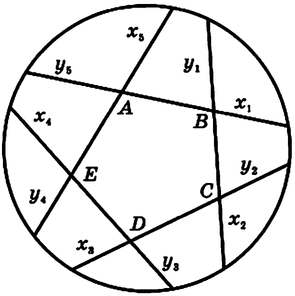
**201.** $f(x)=x(x^2-1)(x^2-10)$ funksiýanyň önüminiň 4 köki bardyr ($(-\sqrt{10}; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \sqrt{10})$ interwallaryň her birinde bir kök ýatýar). Onda tutuş san oky $f(x)$ funksiýanyň monotonlygynyň 5 aralygyna bölünýär.




Eger $f(x)=c$ deňlemäniň 5 bitin köki bolan bolsady, onda olaryň her biri bu aralyklaryň birinde ýatardy. Bu ýerden $c=0$ gelip çykardy (ortaky aralykda ýeke-täk bitin kök $x=0$ bolýar). Emma $c=0$ bolanda deňlemäniň 5 bitin kökleri ýokdur.

**202.** Eýelenmedik öýjükleriň sanynyň 9-dan az däldigini görkezeliň. Tagtanyň goňşy wertikallary dürli reňkli bolar ýaly edip, olary gara we ak reňk bilen reňkläliň. Goý, çepki birinji wertikal ak reňk bilen reňklenen bolsun. Onda jemi 45 ak we 36 gara öýjükler bolar. Gara öýjükde oturan tomzak ak öýjüge, ak öýjükde oturan tomzak gara öýjüge geçýär. Şonuň üçin, gara öýjüklerde oturan 36 tomzak 45 ak öýjüge geçse, onda 9-dan az bolmadyk öýjük eýelenmedik bolar. Suratda haçan eýelenmedik öýjükleriň dogry 9 öýjük bolandygyna mysal getirilendir.





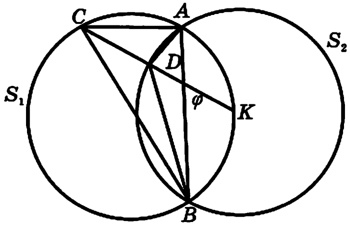

**203.** Bäşburçlugyň taraplarynyň uzynlygyny $a$ bilen, gyzyl dowam etmeleriň uzynlygyny $x_1$, $x_2$, ..., $x_5$, gök dowam etmeleriň uzynlygyny bolsa $y_1$, $y_2$, ..., $y_5$ bilen belgiläliň.

Bäşburçlugyň depeleriniň her biri üçin töweregiň iki kesişýän hordalarynyň kesimleriniň uzynlyklarynyň köpeltmek hasyly baradaky teorema görä aşakdaky bäş deňligi ýazyp bileris:

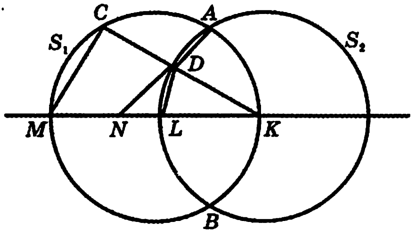
$$x_1(a+y_5)=y_1(a+x_2), \quad x_2(a+y_1)=y_2(a+x_3),$$
$$x_3(a+y_2)=y_3(a+x_4), \quad x_4(a+y_3)=y_4(a+x_5),$$
$$x_5(a+y_4)=y_5(a+x_1).$$

Bu deňlikleri goşup, soňra ýönekeýleşdirip $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$ deňligi alarys.

**204.** $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi$, bu ýerde $\varphi$ – $AB$ we $CD$ diagonallaryň arasyndaky burç. Şoňa görä-de, $S_{ABCD}\leq\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

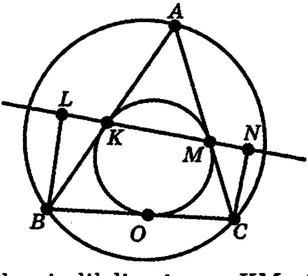



Töweregiň merkezinden $l$ göni çyzygy geçireliň. Goý, $l$ göni çyzygyň $S_1$ töwerek bilen kesişme nokady $K$ we $M$, onuň $S_2$ töwerek bilen kesişme nokady $L$ bolsun. $CD\leq LM$ subut edeliň. $CM$, $DL$ hordalary geçireliň we $DN||CM$, $N\in l$. $\angle MCK=\angle CDN=90°$, onda $MN\geq CD$. $LDK$ burç 180° kiçi duga daýanýan içinden çyzylan burç bolany üçin ýitidir. Şonuň üçin




$N$ nokat $M$ we $L$ nokatlaryň arasynda ýatýar we $CD\leq MN\leq LM$. Goý, töwerekleriň merkezleriniň arasyndaky uzaklyk $d$ deň bolsun, onda $LM=d$, $AB=\sqrt{4r^2-d^2}$, bu ýerden

$$S_{ACBD}\leq\frac{1}{2}AB\cdot LM=\frac{1}{2}\sqrt{d^2(4r^2-d^2)}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2+(4r^2-d^2)}{2}=r^2.$$




**205.** $KM$ göni çyzyga $BL$ we $CN$ perpendikulýar indereliň. $\angle BKL=\angle CMN=90°-\frac{A}{2}$, onda $BL+CN=(BK+CM)\cos\frac{A}{2}=$ $=BC\cdot\cos\frac{A}{2}$ jem hemişelikdir. Diýmek, $BC$ kesimiň ortasy bolan $O$ nokatdan $KM$ göni çyzyga çenli uzaklyk hem hemişelikdir, ýagny $KM$ göni çyzyk merkezi $O$ nokat, radiusy $\frac{1}{2}BC\cos\frac{A}{2}$ bolan töwerege galtaşýar.

**206.** a) ilki bilen umumy meseläni çözeliň: eger $0<a<b$ we $0<p<1$ bolsa, $a^p+b^p$ we $(a+b)^p$ sanlaryň haýsysy uly? $(0; +\infty)$ aralykda $f(x)=(a+x)^p-(a^p+x^p)$ funksiýa garalyň we ony önümiň kömegi bilen derňäliň:

$$f'(x)=p(a+x)^{p-1}-px^{p-1}=p\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^{1-p}-\left(\frac{1}{x}\right)^{1-p}\right]<0,$$

$0<x<+\infty$. Diýmek, $(0; +\infty)$ aralykda $f$ funksiýa kemelýär. Şoňa görä-de, $0<a<b$ deňsizlikden $f(b)<f(a)$, ýagny $(a+b)^p-(a^p+b^p)<(a+a)^p-(a^p-a^p)=a^p(2^p-2)<0$, $a^p+b^p>(a+b)^p$ gelip çykýar. Hususy halda, $79^5+1900^5>1979^5$.

b) $100^{101}<101^{100}$ deňsizligi ýazalyň we onuň iki böleginden $100\cdot101$ derejeli kök alyp, $100^{\frac{1}{100}}<101^{\frac{1}{101}}$, ýa-da $f(100)<f(101)$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. $g:x\to\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiýa garalyň. Eger käbir köplükde $g$ funksiýa artýan (ýa-da kemelýän) bolsa, onda şol köplükde $f$ funksiýa hem artýandyr (ýa-da kemelýändir). Onda $g'(x)>0 \Longleftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Longleftrightarrow x<e$.

Şoňa görä-de, $(3; +\infty)$ interwalda $g'(x)<0$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny $g$ funksiýa kemelýär. Şeýlelikde, $f$ funksiýa hem kemelýär. Onda $f(100)>f(101)$ we gutarnykly $100^{101}>101^{100}$ deňsizligi alarys.

ç) $\log_4 5<\log_5 6$ deňsizligi ýazalyň we ony $f(4)<f(5)$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $f(x)=\log_x(x+1)$ $(x\in(1; +\infty))$. Şu görnüşde

berlen $f$ funksiýany önümiň kömegi bilen barlamak kyndyr. Şonuň üçin, natural logarifma geçeliň: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Onda

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow x\ln x > (x+1)\ln(x+1).$$

$x>1$ bolanda $0<x<x+1$, $0<\ln x<\ln(x+1)$. Onda $x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$. Şonuň üçin $x>1$ bolanda $f'(x)<0$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu bolsa, $f$ funksiýanyň kemelýändigini we garalýan deňsizligiň nädogrudygyny aňladýar, ýagny $\log_4 5<\log_5 6$.

d) $f(x)=\sin^3 x$ ($x\in(0; \frac{\pi}{2})$) deňlik bilen berlen $f$ funksiýa garalyň we $\sin^3 1^0+\sin^3 4^0<\sin^3 2^0+\sin^3 3^0$ deňsizligi $f(4\alpha)-f(3\alpha)<$ $<f(2\alpha)-f(\alpha)$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $\alpha=\frac{\pi}{180}$. Lagranž teoremasyna görä, şeýle $\beta$ we $\gamma$ nokatlar tapylyp, $f(4\alpha)-f(3\alpha)=f'(\beta)\alpha$, $f(2\alpha)-f(\alpha)=f'(\gamma)\alpha$ deňlikler ýerine ýeter, bu ýerde $\beta\in(3\alpha;\ 4\alpha)$, $\gamma\in(\alpha;\ 2\alpha)$. Onda garalýan deňsizlik $f'(\beta)<f'(\gamma)$ görnüşi alar. Bize $f'$ funksiýanyň önümini barlamak gerekdir.

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos x,$$
$$f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x=3\sin x(2-3\sin^2 x),$$

onda ($\alpha$; $4\alpha$) aralykda $f''$ položiteldir, ýagny $f'$ artýar. $\beta>\gamma$, onda $f'(\beta)>f'(\gamma)$. Başgaça aýdylanda, garalýan deňsizlik nädogrudyr, ýagny $\sin^3 1°+\sin^3 4°>\sin^3 2°+\sin^3 3°$.

**207.** a) $f{:}x\to\frac{\operatorname{tg}x}{x}\left(x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\right)$ funksiýa garalyň. Onda $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}x>0\Leftrightarrow x-\sin x\cos x>0\Leftrightarrow 2x>\sin 2x$. Şunlukda, $f$ artýan funksiýa. Şonuň üçin $\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}}<\frac{\operatorname{tg}\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}$,

$\frac{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}}<\frac{\operatorname{tg}\frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}}$ ýa-da $6\operatorname{tg}5°<5\operatorname{tg}6°$, $10\operatorname{tg}9°<9\operatorname{tg}10°$.

Bu deňsizlikleri köpeldip, subut etmeli deňsizligimizi alarys.

b) ilkibaşda islendik $x$ hakyky sanlar üçin

$$e^{x-1}>x \qquad (1)$$

deňsizligiň dogrudygyny subut edeliň, bu ýerde deňlik diňe $x=1$ bolanda ýerine ýetýändir. Hakykatdan-da, eger $f(x)=e^{x-1}-x$ bolsa, onda $f'(x)=e^{x-1}-1$ önüm $x<1$ bolanda otrisateldir we $x>1$ bolanda bolsa položiteldir. Şunlukda, $f(1)=0$ diňe $x=1$ bolanda $f$ funksiýanyň eýe bolýan iň kiçi bahasydyr. Şeýlelikde, islendik $x$ hakyky sanlar üçin, (1) deňsizlige deňgüýçli bolan $e^{x-1}-x\geq 0$ deňsizlik ýerine ýetýändir.

Goý, indi $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – otrisatel däl hakyky sanlar, olaryň orta arifmetik bahalaryny bolsa $A$ bilen belgiläliň. Onda $A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ (1) deňsizlik esasynda $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ položitel sanlar üçin alarys:

$$\frac{x_1}{A}\leq e^{\frac{x_1}{A}-1},$$

$$\frac{x_2}{A}\leq e^{\frac{x_2}{A}-1},$$

$$\text{—————————},$$

$$\frac{x_n}{A}\leq e^{\frac{x_n}{A}-1}$$

Bu deňsizlikleri köpeldip, alarys:

$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{A^n}\leq e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}-n}$. $A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, onda

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\leq A^n \text{ ýa-da } \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \quad (2)$$

Bu Koşi deňsizligidir. Eger $\frac{x_1}{A}=\frac{x_2}{A}=\ldots=\frac{x_n}{A}=1$ ýa-da $x_1=x_2=\ldots=x_n$ bolsa, onda deňlik ýerine ýetýändir. Eger $x_i$ sanlaryň iň bolmanda birisi nol bolsa, onda (2) deňsizlik aýdyňdyr.

ç) $S=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ goýalyň we (1) deňsizlikden gelip çykýan $n$ deňsizligi ýazalyň:

$$x_1\leq Se^{\frac{x_1}{S}-1},$$

$$x_2\leq Se^{\frac{x_2}{S}-1},$$

$$\text{—————————},$$

$$x_n\leq Se^{\frac{x_n}{S}-1}.$$

Bu deňsizlikleriň birinjisini $p_1$ derejä, ikinjisini $p_2$ derejä we ş.m. göterip, soňra olary köpeldip alarys:

$$x_1^{P_1}x_2^{P_2}\dots x_n^{P_n} \le S^{P_1+P_2+\dots+P_n} \cdot e^{\frac{x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_nP_n}{S}-(P_1+P_2+\dots+P_n)} =$$
$$= S^{P_1+P_2+\dots+P_n}.$$

Şunlukda, talap edilýän deňsizligi subut etdik.

$\frac{x_1}{S} = \frac{x_2}{S} = \dots = \frac{x_n}{S} = 1$ ýa-da $x_1=x_2=\dots=x_n$ bolanda garalýan deňsizlik deňlige öwrülýändir.

d) Koşi deňsizligini ulanyp, alarys:

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} \ge$$

$\ge 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27}} = \sqrt[6]{2^4\cdot 3^3} > 2$, bu ýerden bolsa berlen deňsizlik gelip çykýar.

**208.** a) berlen deňsizligi $2003+\cos 2003<2004+\cos 2004$, ýa-da $f(2003)<f(2004)$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $f(x)=x+\cos x$. Onda $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\sin x>0$.

Şoňa görä-de, $\sin x=1$ deňlemäniň köklerini saklamaýan islendik aralykda $f$ funksiýa artýar. Ähli hakyky sanlaryň köplüginde $f$ funksiýanyň artýandygyny subut edeliň. Hakykatdan-da, $a$ we $b$ sanlar

$$a\in\left(\frac{\pi}{2}+2(k-1)\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ b\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi\right)$$

goňşy aralyklarda ýatýan bolsalar, onda subut edilendigine görä, bu aralyklaryň her birinde $f$ funksiýa artýar we $f$ funksiýanyň üznüksizliginden

$$f(a)<f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)<f(b)$$

deňsizlik gelip çykýar. Şunlukda, $f(a)<f(b)$. Eger-de $a$ we $b$ sanlar $\sin x=1$ deňlemäniň kökleriniň arasyndaky goňşy aralyklarda ýatmaýan bolsa, onda $f(a)<f(b)$ deňsizlik ýokarda subut edilen tassyklamany yzygiderli ulanmak bilen subut edilýär.

Gutarnykly alarys: $f(2003)<f(2004)$, diýmek, deňsizlikdäki berlen şertler dogry.

b) berlen deňsizligi $\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$, ýa-da $f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)<2$ görnüşde ýazalyň bu ýerde

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\ (x\in(-1;1)).$$

Onda funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasynda $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} > 0 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{(1+x)^2} < \sqrt[3]{(1-x)^2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x < 0.$

Şunlukda, $(-1; 1)$ interwalda $f$ funksiýa artýar we $(0; 1)$ interwalda bolsa kemelýär. Bu funksiýa özüniň iň uly bahasyny $x=0$ nokatda kabul edýär. Şoňa görä-de, $f\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) < f(0) = 2$, ýagny garalýan deňsizlik dogry.

ç) $\cos 2 \cdot \cos 3 > 0$, onda berlen deňsizligiň iki bölegini onuň sag bölegine bölüp, ony

$\dfrac{\sin 3}{\sqrt[3]{\cos 3}} - 3 < \dfrac{\sin 2}{\sqrt[3]{\cos 2}} - 2$ ýa-da $f(3)<f(2)$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x\left(x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)\right)$.

Differensirlemek üçin amatly bolar ýaly $t=x-\frac{\pi}{2}$ ornuna goýma ulanalyň.
Onda

$f(t) = -\dfrac{\cos t}{\sqrt[3]{\sin t}} - t - \dfrac{\pi}{2} = -\cos t(\sin t)^{-\frac{1}{3}} - t - \dfrac{\pi}{2}\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$f'(t) = \sin^{\frac{2}{3}} t + \frac{1}{3}\sin^{-\frac{4}{3}} t \cdot \cos^2 t - 1 = \frac{2}{3}\sin^{\frac{2}{3}} t + \frac{1}{3}\sin^{-\frac{4}{3}} t - 1\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$f''(t) = \frac{4}{9}\sin^{-\frac{1}{3}} t \cdot \cos t - \frac{4}{9}\sin^{-\frac{7}{3}} t \cdot \cos t = \frac{4}{9}\cos t \cdot \sin^{-\frac{7}{3}} t \cdot (\sin^2 t - 1) <$
$< 0\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Şunlukda $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, aralykda $f'(t)$ funksiýa kemelýär, $f'(t) > f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ýagny $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ funksiýa $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda artýar, $f(x)$ funksiýa bolsa $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ aralykda artýar.

Hususanda, $f(3)>f(2)$, ýagny berlen deňsizlik nädogry.

**209.** $S$ aňlatmanyň $a_1+a_2+...+a_{100}$ görnüşi bardyr, bu ýerde $a_k = \dfrac{k}{2^k} = \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ $(k=1, 2, ..., 100)$. $f(x)=x+x^2+...+x^{100}$ $(x\in(0; 1))$ deňlik bilen $f$ funksiýa garalyň. Onda
$f'(x)=1+2x+3x^2+...+100x^{99}$,
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{100}{2^{99}} = 2S.$

Başga tarapdan $f(x) = \dfrac{x^{101} - x}{x - 1}$ we

$$f'(x) = \frac{(101x^{100} - 1)(x - 1) - (x^{101} - x)}{(x - 1)^2} = \frac{100x^{101} - 101x^{100} + 1}{(x - 1)^2}.$$

Şonuň üçin $S = 2\left(\dfrac{100}{2^{101}} - \dfrac{101}{2^{100}} + 1\right) = 2 - \dfrac{51}{2^{99}}.$

**210.** Birinji deňlemeden $x>y$ we $x>z$ gelip çykýar, şoňa görä-de, ikinji deňlemeden alarys $x^2=2(y+z)\leq 4(x-1)$, ýa-da $(x-2)^2\leq 0$. Şunlukda, $x=2$. Onuň öňündäki deňsizlik $y=z=1$ bolan ýagdaýynda mümkindir. Ornuna goýmak bilen (2, 1, 1) çözüwdigine göz ýetirmek bolar.

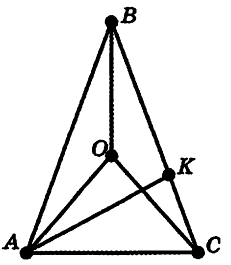
**211.** Berlen gatnaşyklaryň ähli böleklerine 2-ni goşup, alarys:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Bu deňlikleriň iki ýagdaýda ýerine ýetmegi mümkindir: 1) $a+b+c=0$ ýa-da 2) $a=b=c$. Birinji ýagdaýda $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$, bu ýerden $p=-1$. Ikinji ýagdaýda ornuna goýup, $p=8$-i alýarys.

Jogaby: $p=-1$ ýa-da $p=8$.

**212.** Goý, görkezilen iki töwerekleriň umumy merkezi $O$ bolsun. Onda $O$ nokat $ABK$ üçburçlugyň bissektrisalarynyň kesişme nokady bolýar, şoňa görä-de, $\angle BAO=\angle BAK/2=\angle A/4$, $\angle ABO=\angle B/2$.




Başga tarapdan, $O$ nokat $ABC$ üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlarynyň kesişme nokadydyr, şonuň üçin, $ABO$, $BCO$, $CAO$ üçburçluklar deňýanlydyr.

Şunlukda, $\angle BAO=\angle ABO$, bu ýerden $\angle A=2\angle B$. $\angle BAO=\angle ABO=\angle CBO=\angle BCO$, $\angle CAO=\angle ACO$. Şeýlelikde, $\angle C=\angle A=2\angle B$, $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ ýagny $5\angle B=180°$, $\angle B=36°$, $\angle C=\angle A=72°$.

Jogaby: $\angle A=\angle C=72°$. $\angle B=36°$.

**213.** [0, 1/11], [1/11, 2/11], ..., [10/11, 1] kesimleriň her birinde şert boýunça birden köp bolmadyk nokat ýatýar. Şunlukda, [0, 1] kesimde gerekli tertipde 11 nokatdan köp bolmadyk nokatlary ýerleşdirip bolar. Indi, eger biz 11 nokat alsak: 0, 1/10, 2/10, ..., 9/10, 1 onda meseläniň şertleri ýerine ýetýär. Eger $[a, b]\subset[0, 1]$ kesimde alnan nokatlaryň $K$ sanysy ýatýan bolsa, onda $|b-a|\geq(k-1)/10$, bu ýerden

$1+100(b-a)^2\geq1+(k-1)^2\geq1+k-1=k$ şu hem talap edilýärdi.

Jogaby: 11 nokat.

**214.** $A_1, ..., A_n$ bilen gyzyl nokatlary, olara degişli gök nokatlary $B_1, ..., B_n$ bilen belgiläliň. Islendik $K$ üçin $\overrightarrow{A_K B_K} = \vec{a}$. Goý, $A_k$ nokat $B_{i_k}$ nokat bilen birikdirilen bolsun. Tekizlikde erkin 0 başlangyç alalyň we garalýan jemi ýazalyň:

$$|A_1B_{i1}|+|A_2B_{i2}|+...+|A_nB_{in}|=|\overrightarrow{OB_{i1}}-\overrightarrow{OA_1}|+...+$$
$$+|\overrightarrow{OB_{in}}-\overrightarrow{OA_n}|\geq|\overrightarrow{OB_{i1}}-\overrightarrow{OA_1}+...+\overrightarrow{OB_{in}}-\overrightarrow{OA_n}|=$$
$$=|\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}+...+\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OA_n}|=|\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}|=n|\vec{a}|.$$

Soralýan subut edildi.

**215.** $a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}+2a_k$ gatnaşygy birnäçe gezek ulanyp, alarys:

$a_{k+4}=2a_{k+2}+3a_{k+1}+2a_k$

$a_{k+5}=5a_{k+2}+4a_{k+1}+4a_k$

bu ýerden $a_{k+8}+a_{k+4}+a_{k+3}=8(a_{k+8}+a_{k+1}+a_k)$

Indi ýazalyň:

$p_1=a_2+a_3+a_4=6,$ we $q_1=a_1+a_2+a_3=3,$

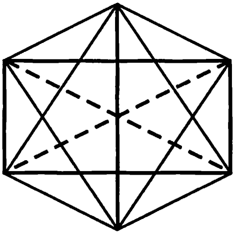
$p_1=a_5+a_6+a_7=6\cdot8^1,$ $q_1=a_4+a_5+a_6=3\cdot8^1,$

$p_{33}=a_{98}+a_{99}+a_{100}=6\cdot8^{32}$ $q_{33}=a_{97}+a_{98}+a_{99}=3\cdot8^{32}$

Bu ýerden alarys:

$$S_{100}=a_1+a_2+...+a_{100}=1+(p_1+p_2+...+p_{33})=1+\frac{6}{7}(8^{33}-1)$$

$$a_{100}=S_{100}-(q_1+q_2+...+q_{33})=1+\frac{6}{7}(8^{33}-1)-$$
$$-\frac{3}{7}(8^{33}-1)=1+\frac{3}{7}(8^{33}-1).$$



**216.** Ýerine ýetirip biler. Mysal suratda getirilen: punktir bilen demir ýol, ýogyn çyzyk bilen gara ýol, inçe çyzyk bilen howa ýoly belgilenendir.

**217.** Berlen deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$\sqrt[n]{n} < x < \sqrt[n]{n+1}$, ýagny

$x \in \Delta_n = (\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n+1})$.

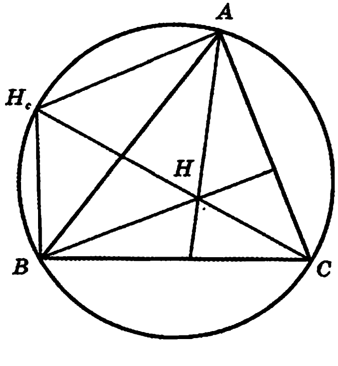
$\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3}$ ($6^3<3^5 \Leftrightarrow 2^3<3^2$, $8>9$), onda eýýam $\Delta_5$ we $\Delta_3$ kesişmeýärler, şunlukda $n\leq 4$. Başga tarapdan,

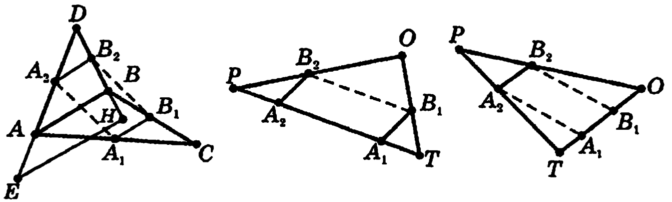
$1 < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3} < 2$ deňsizlik

$\Delta_n$-iň birinji dört interwalynyň $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5})$ interwal boýunça kesişýändigini görkezýär, ýagny $n=4$ bolanda berlen ulgamyň çözüwi bardyr.

**218.** Mümkin. Mysal: $a_k=k/1982!$, $1\leq k\leq 1982$.

**219.** $S=abc/4R$ formulany ulanalyň, bu ýerde $S$ üçburçlugyň meýdany, $a$, $b$, $c$ onuň taraplary, $R$ bolsa üçburçlugyň daşynda çyzylan töweregiň radiusy. $H_c$ nokat $ABC$ üçburçlugyň daşynda çyzylan töwerekde ýatýar we $AB$ gönä görä $H$ nokatda simmetrik. $(AC)\perp(BH)$, $(BC)\perp(AH)$, onda $\angle AH_cB=\angle AHB=\pi-\angle ACB$.






Şunlukda, $AHB$ üçburçlugyň daşynda çyzylan töweregiň radiusy $AH_cB$ üçburçlugyň daşynda çyzylan töweregiň radiusyna ýagny $ABC$ üçburçlugyň daşynda çyzylan töweregiň radiusyna deňdir. $BHC$ we $AHC$ üçburçluklaryň daşynda çyzylan töwerekleriň radiuslary barada hem şuny aýtmak bolar. $ABC$ üçburçlugyň meýdany $AHB$, $BHC$ we $AHC$ üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir, onda ýokarda agzalan formuladan alarys: $\frac{abc}{4R} = \frac{cxy}{4R} + \frac{ayz}{4R} + \frac{bxz}{4R}$, bu ýerden subut etmeli deňligimiz gelip çykýar.

**220.** Eger berlen $\Phi$ şekiliň ähli nokatlary bir göni çyzykda ýa-da bir tekizlikde ýatsa, onda meseläniň şertinden talap edilýän gelip çykýar. Goý, $\Phi$ şekil tekiz däl bolsun we bu kabul etmäni gapma-garşylyga getireliň.

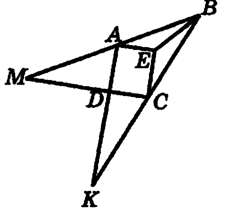
Adaty bolşy ýaly, $\Phi$ şekiliň tekizlik bilen kesişmesine $\Phi$ kesik diýeliň. Kabul etmeden, şekiliň iň bolmanda iki üçburçluk kesiginiň bardygy gelip çykýar. Olaryň birinjisini $ABC$ bilen belgiläliň, ikinjisiniň deregine bolsa ($AB$) we $ABC$ tekizligiň daşyndaky nokatdan geçýän kesigi $DEH$ bilen belgiläliň. $\Phi$ şekiliň $ABC$ tekizlik bilen kesigi $ABC$ üçburçluk, onda $DEH$ kesigiň $DE$ we $DH$ taraplary $A$ we $B$ nokatlaryň üstünden geçmelidir. Lemmany subut edeliň: hakykatdan-da, bu ýagdaýda $E$ we $H$ nokatlar $A$ we $B$ nokatlar bilen gabat gelýär. $ABC$ we $ABD$ üçburçluklaryň $A_1B_1$ we $A_2B_2$ orta çyzyklaryny geçireliň. $A_1B_1B_2A_2$ tekizligiň $\Phi$ kesiginiň üçburçly $POT$ üçburçluk bolmagy zerurdyr. POT üçburçlugyň bir tarapyna $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ dört nokatlaryň iň bolmanda ikisi degişlidir, şoňa görä-de, şekil suratdaky iki görnüşleriň biridir. Iki ýagdaýda-da, $P$ we $E$ nokatlar $ABC$ tekizligiň dürli taraplarynda ýatýarlar, onsoňam $PE$ kesim $(ABC)$-ni $ABC$ üçburçlugyň daşyndaky $M$ nokatda kesýär. Başga tarapdan, meseläniň şertinden $P$ we $E$ nokatlar $\Phi$ şekile degişli bolsa, onda $M$ nokadyň hem $\Phi$ şekile degişli bolýandygy gelip çykýar. Ol garalýan ýagdaýa gapma-garşy gelýär: $\Phi \cap (ABC) = \Delta ABC$. Şunlukda, $E$ nokadyň $A$ nokat bilen gabat gelýändigi subut edildi. Şeýle tassyklamalar $H=B$ bolýandygyny görkezýär. Lemma subut edildi. Indi $ABC$ we $BDC$ tekizlikleriň $\Phi$ kesigine garalyň. Lemmadan onuň $ADC$ we $BDC$ üçburçluk bolýandygy gelip çykýar. Diýmek, $\Phi$ şekil $ABCD$ tetraedr saklaýar, onsoňam $\Phi$ şekiliň granlaryň tekizligi bilen kesişmesi bu granlar bolýar. Emma bu 2-nji suratdaky şekillendirilen ýagdaýa garşy gelýär, ýagny $T$ nokat $\Phi$ şekile we granlaryň tekizligine degişli, ýöne granlaryň özüne degişli däldir. Şunlukda, meseläniň tassyklamasy subut edildi.

**221.** Goý, tersine ýerine ýetsin: käbir bitin koeffisiýentli $P_i(x)$ köpagza üçin $3x^{1982}+4 = P_1^2(x)+P_2^2(x)+P_3^2(x)$ görnüşde aňladylýan bolsun. Bu ýere $x$=1-i goýup,

$$7 = P_1^2(1)+P_2^2(1)+P_3^2(1) \qquad (*)$$

deňligi alarys. Bu ýerden $P_i^2(1) \le 7$, ýagny $|P_i(1) \le 2|$ gelip çykýar. Bolmagy ähtimal $P_i(1)=0, \pm1, \pm2$ bahalary barlap, (*) deňligiň mümkin däldigine göz ýetirmek bolýar.

**222.** Goý, $A$ nokat $MB$ kesimde, $C$ nokat $KB$ kesimde ýatýan bolsun (surata seret).



$AD$ we $DC$ taraplarda $ADCE$ parallelogram guralyň. Onda $S_{ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE\cdot\sin\angle BAE=\frac{1}{2}AB\cdot DC\cdot\sin\angle M$

$S_{CBE}=\frac{1}{2}CB\cdot CE\cdot\sin\angle BCE=\frac{1}{2}CB\cdot AD\cdot\sin\angle K$

$S_{ABCD}>S_{ABE}+S_{CBE}$. Soňky iki formuladan subut etmeli deňsizligimiz gelip çykýar.

**223.** Tersine, güman edeliň: käbir $\alpha, \beta, \gamma$ üçin $\frac{1}{2}<\sin\alpha\cos\beta$, $\frac{1}{2}<\sin\beta\cos\gamma$, $\frac{1}{2}<\sin\gamma\cos\alpha$. Bu üç deňsizlikleri köpeldip, nädogry deňsizlige geleris:

$$\frac{1}{8}<\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma=\frac{1}{8}\sin2\alpha\sin3\beta\sin2\gamma.$$

Soralýan subut edildi.

**224.** Goý, $[0, 1]$ kesimde $f$ funksiýa $f(0)=f(1)=0$ (1)

şerti we islendik $a, b\in[0, 1]$ üçin $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le f(a)+f(b)$ (2)

deňsizligi kanagatlandyrýan bolsun. (2) deňsizlikde $b=a$-ny goýup, islendik $a\in[0, 1]$ üçin $f(a)\le2f(a)$, ýagny $f(a)\ge0$ deňsizligi alarys. Soňra, (2) deňsizlikde $a=0$, $b=1$ goýup, alarys: $f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(0)+f(1)=0$, bu ýerden öň subut edilen $f(a)\ge0$ deňsizligi göz öňünde tutup, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ deňligi alarys. Şuňa meňzeş dowam edip, alarys:

$$f\left(\frac{1}{4}\right)\le f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\le 0\Longrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=0,$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\le 0\Longrightarrow f\left(\frac{3}{4}\right)=0$$

we şuňa meňzeş. Başgaça aýdanyňda, $n$ boýunça induksiýa bilen $\frac{m}{2^n}\in[0,1]$ görnüşdäki islendik sanyň $f(x)=0$ deňlemäniň köki bolýandygyny ýeňil subut etmek bolýar we meseläniň birinji bölegi çözüldi.

Toždestwolaýyn nola deň bolmadyk we (1), (2) şertleri kanagatlandyrýan funksiýa bardyr. Mysal:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ eger } x=\frac{m}{2^n},\ m, n\ge0,\ \frac{m}{2^n}\in[0,1] \text{ bolsa,}\\ 1, \text{ eger galan } x\in[0,1] \text{ bolsa.}\end{cases}$$

**225.** $(x+y)f(x, y)=yf(x, x+y)$ deňlemede $x+y$ derek $z$-i goýup alarys $f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$. Şonda

$$f(7,9)=\frac{9}{9-7}f(7,9-7)=\frac{9}{2}f(7,2)=\frac{9}{2}f(2,7)=$$
$$\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{7-2}f(2,7-2)=\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}f(2,5)=\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}f(2,3)=$$
$$\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}f(2,1)=\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}f(1,2)=\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2-1}f(1,1)=$$
$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot(1+2)=189.$$

**226.** Goý, $a_n$ basgançaklarynyň sany $n$ bolan merdiwandan ýokaryk çykmak usullarynyň sany bolsun. Göni hasaplap alarys $a_1=1$ we $a_2=2$. Eger $n>2$ bolsa, onda oglan başda iki basgançaga galsa, onda ýokaryk $a_{n-2}$ usul bilen, eger-de ol başda bir basgançak galsa, onda ýokaryk $a_{n-1}$ usul bilen çykyp biler. Şeýlelikde, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n>2)$.

Diýmek, $a_n$ yzygiderlik 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 – sanlardan durýar: $a_{10}=89$.

**227. 1-nji usul.** Berlen deňlikden alarys:

$(1+a^2)(100+b^2)=40ab.$

Indi *O.A.–O.G.* deňsizligi ulanalyň:

$(1+a^2)(100+b^2)\geq 2\sqrt{a^2}\,2\sqrt{100b^2}=40ab.$

Deňlik diňe $a=1$, $b=10$ bolanda ýerine ýetýär. Şonda $a+b=11$.

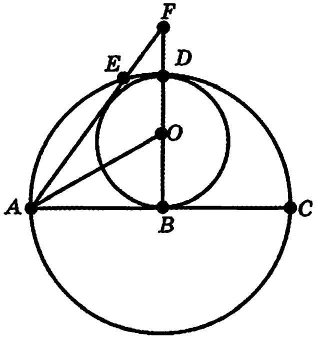
**2-nji usul.** Berlen deňligi $(100+b^2)a^2-40ba+100+b^2=0$ görnüşde ýazyp $a$ görä kwadrat deňleme alarys:

$$a=\frac{40b\pm\sqrt{(40b)^2-4(100+b^2)(100+b^2)}}{2(100+b^2)}.$$

$a$ bahasy hakyky san boljak bolsa, onda determinant otrisatel däl bolmalydyr:

$(40b)^2-4(100+b^2)^2=[40b-2(100+b^2)][40b+2(100+b^2)]=$
$=-2(b^2-20b+100)\cdot 2(b^2+20b+100)=-4(b^2+20b+100)\cdot$
$\cdot(b^2-20b+100)\geq 0$, $(b+10)^2(b-10)^2\leq 0$. Şeýlelikde $b=10$, $a=1$ we $a+b=11$.

**228.** Goý, $O$ nokat $BD$ kesimiň ortasy we $BED$ töweregiň merkezi bolsun.




$\text{tg}\angle OAB = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{1}{2}$ bolany üçin,

$BF = \text{tg}\angle FAB = \text{tg}(2\angle OAB) = \dfrac{2\text{tg}\angle OAB}{1 - \text{tg}^2\angle OAB} = \dfrac{4}{3};$

$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{5}{3}.$

**229.** $f(1-x) = \dfrac{9^{1-x}}{9\cdot\frac{1}{9^x} + 3} = \dfrac{9\cdot\frac{1}{9^x}}{9\cdot\frac{1}{9^x} + 3} = \dfrac{9}{9 + 3\cdot 9^x} = \dfrac{3}{3 + 9^x}$

deňligi peýdalanyp, $f(x)+f(1-x)=1$ görýäris. Diýmek,

$$\sum_{k=1}^{1994} f\left(\frac{k}{1995}\right) = \frac{1994}{2} = 997.$$

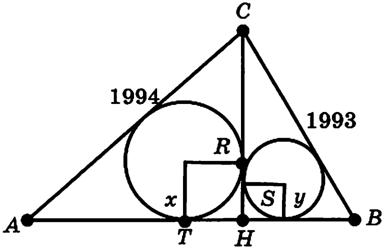
**230.** $x=13-y$ deňligi ulanyp, ikinji we üçünji deňlemeleri aşakdaky ýaly ýazyp alarys:

$\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \dfrac{3z^2}{4} = 25;\ \left(13 - \left(y - \frac{z}{2}\right)\right)^2 + \dfrac{3z^2}{4} = 144.$

Bu ýerde $\dfrac{3z^2}{4}$ ýok edip alarys $y - \dfrac{z}{2} = \dfrac{25}{13}.$

Şonda $\dfrac{3z^2}{4} = \dfrac{3600}{169},\ z = \dfrac{40\sqrt{3}}{13}.$

**231.** Goý, $x$ we $y$, degişlilikde, $ACH$ we $BCH$ üçburçluklaryň içinden çyzylan töwerekleriň radiuslary bolsun. Goý, $T$ bilen $ACH$ üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň $AH$ tarapa galtaşma nokady bellenen bolsun.




Bir nokatdan geçirilen galtaşmalaryň häsiýetine görä $1994=AC=AT+CR=(AH-x)+(CH-x)$ ýa-da $x=\frac{1}{2}(AH+CH-1994)$. Şuňa meňzeşlikde $y=\frac{1}{2}(BH+CH-1993)$.

Pifagor teoremasyna görä $1994^2-AH^2=CH^2=1993^2-BH^2$, ýa-da

$$AH-BH=\frac{1994^2-1993^2}{AH+BH}=\frac{3987}{1995}.$$

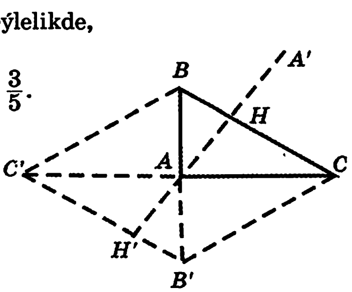
Diýmek, $RS=x-y=\frac{1}{2}(AH-BH-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{3987}{1995}-1\right)=\left(\frac{332}{665}\right)$.

**232.** Goý, $h$ trapesiýanyň beýikligi bolsun.

Berlen $\frac{AB\cdot h}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{CD\cdot h}{2}$ şertden alarys: $CD=3AB$ we

$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)=2AB$. Şeýlelikde,

$$\frac{S_{ABEF}}{S'_{EFDC}}=\frac{\frac{1}{2}(AB+EF)h}{\frac{1}{2}(EF+CD)h}=\frac{3}{5}.$$




**233.** Goý, $BC$ gipotenuza we $A'A$ kesim $BC$, $B'C'$ kesimleri, degişlilikde, $H$, $H'$ nokatlarda kessin.

Şerte görä $A'H \perp BC$, $AH' \perp B'C'$. Bu ýerden $B'C'=BC$, $A'H'=3AH$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$S'_{\Delta A'B'C}=3\cdot S'_{\Delta ABC}=3\cdot 6=18.$$

**234.** Kosinuslar teoremasyny we meýdan üçin formulany ulanyp, alarys:

$$\mathrm{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}}{\sin A}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC\cdot\sin A}=$$

$$=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{4S'_{\Delta ABC}};$$

$$\mathrm{ctg}B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{4S'_{\Delta ABC}};\ \mathrm{ctg}C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{4S'_{\Delta ABC}}.$$

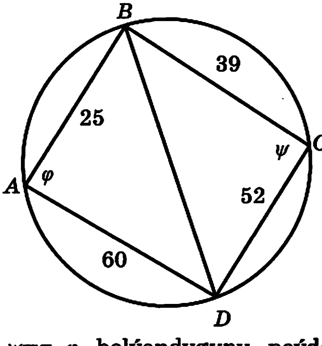
Bu ýerden, $\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C=$

$$=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{4S'_{\Delta ABC}}+\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{4S'_{\Delta ABC}}+\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{4S'_{\Delta ABC}}=$$

$$=\frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4S'_{\Delta ABC}}=\frac{5\cdot S_{\Delta ABC}}{4\cdot S_{\Delta ABC}}=\frac{5}{4}.$$

**235.** $\Delta ABD$ we $\Delta BCD$ üçburçluklara kosinuslar teoremasyny ulanyp, alarys:

$$25^2+60^2-2\cdot 25\cdot 60\cos\varphi=BD^2=39^2+52^2-2\cdot 39\cdot 52\cos\psi.$$




Bu ýerde $\psi=\pi-\varphi$ bolýandygyny peýdalanyp, alarys: $\cos\psi=\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$; $\cos\varphi=0$. Şeýlelikde $\angle A=\angle C=90^0$,

$$BD=\sqrt{25^2+60^2}=\sqrt{625+3600}=\sqrt{4225}=65.$$

Jogaby: $BD=65$.

**236.** Goý, $S_n = \dfrac{a^n - b^n}{a-b} + \dfrac{b^n - c^n}{b-c} + \dfrac{c^n - a^n}{c-a}$. Berlen deňlemäni $x^3=2x^2+3x+4$ görnüşde ýazyp we onuň iki tarapyny hem $x^n$-e köpeldip, alarys: $x^{n+3}=2x^{n+2}+3x^{n+1}+4x^n$.

Bu deňlemede $x$ ornuna $a, b, c$ kökleri goýup alarys:

$a^{n+3}=2a^{n+2}+3a^{n+1}+4a^n$

$b^{n+3}=2b^{n+2}+3b^{n+1}+4b^n$

$c^{n+3}=2c^{n+2}+3c^{n+1}+4c^n$

Bu ýerden öz gezeginde,

$$\frac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a-b} = 2\frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b} + 3\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} + 4\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

$$\frac{b^{n+3}-c^{n+3}}{b-c} = 2\frac{b^{n+2}-c^{n+2}}{b-c} + 3\frac{b^{n+1}-c^{n+1}}{b-c} + 4\frac{b^n-c^n}{b-c}$$

$$\frac{c^{n+3}-a^{n+3}}{c-a} = 2\frac{c^{n+2}-a^{n+2}}{c-a} + 3\frac{c^{n+1}-a^{n+1}}{c-a} + 4\frac{c^n-a^n}{c-a}.$$

Bu deňlikleri goşup, $S'_{n+3}=2S'_{n+2}+3S'_{n+1}+4S'_n$ gaýdym deňlemesini alarys. Göni hasaplamaklyk bilen $S'_0=0$, $S'_1=3$, $S'_2=4$ bahalary alarys. Şeýlelikde,

$S'_3=2S'_2+3S'_1+4S'_0=2\cdot4+3\cdot3+4\cdot0=8+9=17,$

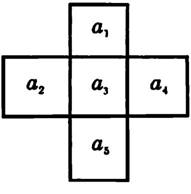
$S'_4=2S'_3+3S'_2+4S'_1=2\cdot17+3\cdot4+4\cdot3=34+12+12=58,$

$S'_5=2S'_4+3S'_3+4S'_2=2\cdot58+3\cdot17+4\cdot4=116+51+16=183.$

Jogaby: $S'_5=183$.

**237.** Eger käbir $C_1, C_2, ..., C_n$ hakyky sanlaryň jemi otrisatel däl bolsa, onda bu sanlaryň arasyndan galan sanlaryň jemi otrisatel bolmaz ýaly şeýle bir sany saýlap alyp boljakdygyny subut etmek ýeterlikdir. Tersinden güman etmek arkaly, ýagny $S-C_i<0$ ($i=1, 2, ..., n$) diýip alarys: $0>(S-C_1)+(S-C_2)+...+(S-C_n)=(n-1)S$. Bu bolsa meseläniň şertine garşy gelýär.

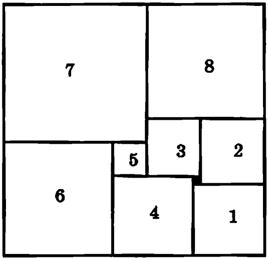
**238.** $2^{2006}+1=(2^{2006}+2^{1004}+1)-2^{1004}=$
$=(2^{1003}+1)^2-2^{1004}=$
$=(2^{1003}+2^{502}+1)(2^{1003}-2^{502}+1).$




**239.** Jogaby: bolmaz. Kwadratyň suratda görkezilen ýaly erkin bölegine seredeliň.

Goý, sanlary soralşy ýaly, ýerleşdirip bolýan bolsun. Şonda suratda görkezilen bölekde $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ natural sanlar ýazylypdyr. Şerte görä $a_1+a_3+a_4+a_5$ we $a_2+a_3+a_4+a_5$ jemleriň ikisi hem jübüt bolmaly. Bu ýerden $a_1$ we $a_2$ sanlaryň ýa ikisiniň hem täk bolmalydygy ýa-da ikisiniň hem jübüt bolmalydygy gelip çykýar. Şuňa meňzeş pikir ýöredip, $a_1$-iň edil $a_4$ ýaly, $a_2$-niň bolsa, edil $a_5$ ýaly jübütlige ýa-da täklige eýe bolýanlygyny subut edip bolýar. Bu ýerden $a_1$, $a_2$, $a_4$, $a_5$ sanlaryň ählisiniň ýa jübütligi, ýa-da ählisiniň hem täkligi gelip çykýar. Onda $a_3$ hem şu sanlaryň jübütligi ýa-da täkligine eýe bolmaly. Saýlap alan suratymyzyň erkinligi üçin kwadratyň ähli sanlary (kwadratyň dört burçundaky sanlardan başgasy) jübüt ýa-da täk bolmaly. Bu bolsa kwadratda 1-den 36-a çenli sanlar ýazylan diýen şerte garşy gelýär.

**240.** Jogaby: 33 *mm* we 32 *mm*. Meýdanlary näbelli kwadratlary suratda görkezilişi ýaly edip belgiläliň.




Goý, $x_1$, $x_2$, ..., $x_8$ ol kwadratlaryň taraplary bolsun. Olaryň arasyndaky görnüp duran gatnaşyklary ýazalyň.

$x_2=x_1-1$; $x_3=x_2-1$; $x_4=x_1+1$; $x_5=x_4-x_3+1$; $x_6=x_4+x_5$; $x_7=x_5+x_6$; $x_8=x_2+x_3$.

$x_1$-i $x$ bilen belgiläp we galan kwadratlaryň taraplaryny hem $x$-iň üsti bilen aňladyp alarys:

$x_2=x-1$; $x_3=x-2$; $x_4=x+1$; $x_5=4$; $x_6=x+5$; $x_7=x+9$; $x_8=2x-3$. $x_1+x_2+x_8=x_6+x_7$ deňlik bize $4x-4=2x-14$ deňlemäni berýär. Bu deňlemäni çözüp, $x=9$ köki alarys. Onda $b=x_7+x_8=33$, $a=x_6+x_7=32$.

**241.** Jogaby: 3 we 5.

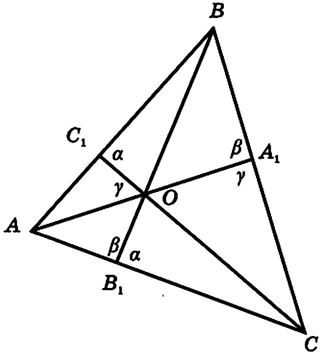
Çözülişi: $P=\left[\frac{n^2}{3}\right]$ belgilemäni girizeliň. Eger $n=3k$ bolsa, onda $P=3k^2$. Eger $n=3k+1$, $k\geq 0$ bolsa, onda $P=(3k+2)k$. Iki ýagdaýda-da diňe $k=1$ bolanda $P$ san ýönekeý bolýar. Eger $n=3k+2$, $k\geq 0$ bolsa, onda $P=3k^2+4k+1=(k+1)(3k+1)$ bolar. Bu san $k\geq 0$ bolanda düzme san, $k=0$ bolanda bolsa 1-e deň.

**242.** Jogaby: $1-\frac{1}{100}$.

Çözülişi: $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ bolany üçin berlen jemi aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\left(\frac{98}{99!}+\frac{1}{99!}\right)-\frac{1}{100!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{97}{98!}+\frac{1}{98!}\right)-\frac{1}{100!}=\ldots=\frac{1}{2!}+\left(\frac{2}{3!}+\frac{1}{3!}\right)-\frac{1}{100!}=1-\frac{1}{100!}.$$

**243.** Meseläniň şertinden $AOB_1$ we $BOA_1$ üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar (sebäbi $\frac{AO}{BO}=\frac{B_1O}{A_1O}$ we wertikal burçlar bolany üçin $\angle BOA_1=\angle AOB_1$).




Ol üçburçluklaryň meňzeşliginden $\angle AB_1B=\angle BA_1A=\beta$-ny alarys.

Edil şuňa meňzeş $\angle BC_1C=\angle CB_1B=\alpha$ we $\angle AC_1C=\angle CA_1A=\gamma$-ny alarys. Onda $\alpha+\beta=180^0$, $\beta+\gamma=180^0$, $\gamma+\alpha=180^0$ bolar.

Bu ýerden $\alpha=\beta=\gamma=90^0$ gelip çykýar.

**244.** Jogaby: (0; 0), (1; 1), $\left(-\frac{1}{2}\sqrt[5]{40}; -\sqrt[5]{50}\right)$.

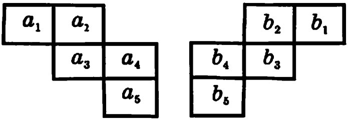
Çözülişi: (0; 0) berlen ulgamyň çözüwi boljakdygy aýdyň. Goý, $x\neq0$ we $y\neq0$ bolsun. Berlen deňlemeler ulgamyny aşakdaky görnüşde ýazalyň: $\begin{cases} 4x^2 - 3y = xy^3 \\ x^2 - 2y = -x^3y^2. \end{cases}$

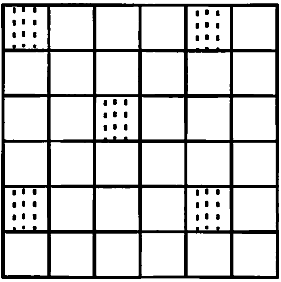
Birinji deňlemäni ikinjä bölüp we $yt=x^2$ belgilemäni girizip alarys: $\frac{4x^2-3y}{x^2-2y}=-\frac{y}{x^2}$; $\frac{4ty-3y}{ty-2y}=-\frac{1}{t}$;

$4t^2-3t=-t+2$; $2t^2-t-2=0$.

Bu deňlemäni çözüp alarys: $\frac{x^2}{y}=1$; $\frac{x^2}{y}=-\frac{1}{2}$. $y$-iň bu bahasyny ulgamyň bir deňlemesinde goýup alarys: 1) $x=1$, $y=1$; 2) $x=-\frac{1}{2}\sqrt[5]{40}$, $y=-\sqrt[5]{50}$.

**245.** Mümkin däl. Muny subut etmek üçin aşakdaky ýaly suratlara seredeliň ($a_i$ we $b_i$ suratlaryň öýjüklerine ýazylan sanlar).



Şert boýunça $a_1+a_2+a_3+a_4$ we $a_2+a_3+a_4+a_1$ jemler 9-a bölünmeli. Diýmek, $a_1$ we $a_5$ sanlar 9-a bölünende şol bir galyndyny bermeli. Şuňa meňzeşlikde $b_1$ we $b_5$ sanlar hem 9-a bölünende şol bir galyndyny bermeli. Şoňa görä-de, suratda görkezilen garaldylan öýjüklerde duran 5 san 9-a bölünende deň galyndylary bermeli.

Bu bolsa mümkin däldir. Sebäbi 1, 2, 3, ..., 36 sanlaryň arasynda 9-a böleniňde şol bir galyndyny berjek 5 san tapylmaz.

**246.** Jogaby: 6.

Çözülişi: Ýazylan sanlaryň möçberini $n$ bilen belgiläliň. Gös-göni barlamak arkaly $n\geq6$ bolmalydygyna göz ýetirýäris. Goý, $a$ ýazylan sanlaryň biri we $b$ sagat diliniň ugruna onuň yz ýanyndan ýazylan san bolsun. Meseläniň şertinden sagat diliniň ugruna $b$-niň yzyndan $\frac{b}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}$ sanlaryň ýazylmalydygy gelip çykýar. Eger $n\geq7$ bolsa, onda $\frac{a}{b}$ sanyň yzyndan $\frac{a}{b}:\frac{1}{b}=a$ san ýazylan bolmaly.

Bu bolsa ýazylan sanlaryň dürli bolmalydygy baradaky meseläniň şertine garşy gelýär. Diýmek, $n$=6. Meselem, 2, 3, $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ sanlar meseläniň şertini kanagatlandyrýar.

**247.** Bu $\alpha, \beta, \gamma$ üçin $x=\lg\alpha>0$, $y=\lg\beta>0$, $z=\lg\gamma>0$ deňlikleri ýazyp bileris.

$2x=2\lg\alpha=\lg\alpha^2\geq\lg\beta\gamma=\lg\beta+\lg\gamma=y+z$.

$y+z\geq2\sqrt{yz}$ bolany üçin $x\geq\sqrt{yz}$ ýa-da $\frac{x}{y}\geq\frac{z}{x}$.

**248.** Meseläniň şertinden islendik $n\geq1$ üçin $x_{n+1}^2-10x_nx_{n+1}+x_n^2-1=0$ deňlik we şuňa meňzeşlikde islendik $n\geq2$ üçin $x_n^2-10x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2-1=0$ deňlik gelip çykýar.

Şeýlelik bilen $x_{n+1}$ we $x_{n-1}$ sanlar $y^2-10x_ny+x_n^2-1=0$ kwadrat deňlemäniň dürli kökleri ($x_{n+1}>x_n>x_{n-1}$) bolup durýar. $n\geq2$ bolanda Wiýetiň teoremasy boýunça alarys: $x_{n+1}+x_{n-1}=10x_n$ (*).

$x_1=0$ we $x_2=1$ bitin sanlar bolany üçin (*) formuladan induksiýa boýunça yzygiderligiň ähli agzalarynyň bitin sanlar bolmalydygyny alýarys.

**249.** Deňsizligiň çep böleginden $t^2$-y aýryp we oňa $t^2$-y goşup alarys:

$$t^4-t+\frac{1}{2}=\left(t^4-t^2+\frac{1}{4}\right)+\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)=(t^2-1)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\geq0.$$

Goşulyjylaryň ikisi hem birwagtda nola deň bolup bilmez. Şoňa görä-de, $t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$.

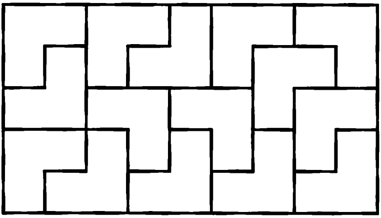
**250.** Goý, $E$ we $F$ nokatlar $ABCD$ dörtburçlugyň degişlilikde, $AB$ we $CD$ taraplarynyň ortasy, $M$ we $N$ nokatlar bolsa $EF$ göni çyzygyň $AC$ we $BD$ diagonallary kesýän (degişlilikde, $M$ we $N$ nokatlaryň gabat gelmegi hem mümkindir), $S$ bolsa, $AD$ tarapyň ortasy bolsun. $AC \| SF$, onda $\angle CMF = \angle EFS$; şuňa meňzeşlikde $\angle BNE = \angle FES$. Şert boýunça $\angle CMF = \angle BNE$, onda $\angle FES = \angle EFS$ we $\angle ESF$ deňýanly. $SF = SE$ deňlikden hem-de $ACD$ we $DBA$ üçburçluklaryň degişlilikde, $SF$ we $SE$ orta çyzygy bolýandygyndan $AC = DE$ gelip çykýar.

**251.** $n$ senatorlardan ikisini $\frac{n(n-1)}{2}$ usul bilen almak bolýar (almagyň tertibi rol oýnamaýar). Ilkibaşda birinjini ($n$ usulda) alalyň, soňra ikinjisini ($n-1$ usulda) alalyň. Şunlukda, jübütleriň her biri iki gezek hasaba alnan $n \cdot (n-1)$ usullar alynýar. Şuňa meňzeşlikde, $n$ senatorlardan üç sanysyny $\frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ usul bilen almak bolýar.

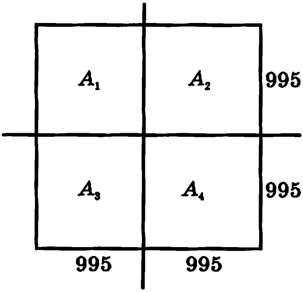
Gözlenilýän komissiýanyň sanyny $x$ bilen, dost hem duşman bar bolan komissiýanyň sanyny $y$ bilen belgiläliň. Onda $x + y = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2 \cdot 3} = 4060$ (*).

Eger senatorlaryň her biri beýleki iki agzasy birwagtda dost ýa-da duşman bolan komissiýanyň tertibini ýazsa, onda $\frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{23 \cdot 22}{2} = 268$ komissiýadan durýan tertip alnar. Ähli tertipde bilelikde $30 \cdot 268 = 8040$ komissiýa görkeziler. Bizi gyzyklandyrýan komissiýanyň her biri üç tertipde, galan her biri komissiýanyň bir tertibinde görkeziljekdigi düşnüklidir. Şoňa görä-de, $3x + y = 8040$ (**). (*) we (**) ulgamdan $x = 1990$ -y alarys.

**252.** a) hawa, bar. Meselem, suratdaky gönüburçluk muňa mysal bolup biler.



b) hemme gorizontal ölçegi 5 esse, wertikal ölçegi 9 esse ulaldalyň. Şonda gönüburçluk kwadrata, hemme burçluklar bolsa deň şekillere öwrüler.




**253.** Jogaby: Bolmaz.

Jedweliň merkezine görä simmetrik bolan öýjükler dürli reňkde reňklenen 1990·1990 jedweliň erkin reňklenmesine garalyň.

Jedweliň gara öýjüklerinde +1 sany, ak öýjüklerinde –1 sany ýazalyň.

995·995 wertikal we gorizontal simmetriýa oklar bilen jedweli 4 kwadrata böleliň (suratda kwadratlar $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ bilen belgilenen). Bu kwadratlaryň her biri öýjükleriň täk sanysyny saklaýar, şonuň üçin, olaryň islendiginde sanlaryň jemi noldan tapawutlydyr. Jedweliň simmetrik öýjükleri dürli reňkde reňklenendir, onda $A_1$ we $A_2$ kwadratlardaky, şeýle hem $A_2$ we $A_3$ kwadratlardaky sanlaryň jemi nola deňdir. Şoňa görä-de, $A_1$ ýa-da $A_4$ kwadratlaryň birinde, şeýle hem $A_2$ ýa-da $A_3$ kwadratlaryň birinde sanlaryň jemi položiteldir. Eger bu $A_1$ we $A_3$ ýa-da $A_2$ we $A_4$ kwadratlar bolsa, onda jedweliň sütünleriniň birinde +1 san –1 sandan uludyr, ýagny gara öýjükler ak öýjüklerden köpdür. Eger $A_1$ we $A_2$ ýa-da $A_3$ we $A_4$ bolsa, onda jedweliň setirleriniň birinde gara öýjükler ak öýjüklerden köpdür. Şunlukda, meseläniň iki şertini hem birwagtda kanagatlandyrýan reňkleme mümkin däldir.

**254.** $\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=$

$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_1)=0$, onda

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+$$

$+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}$. Şonuň üçin $\frac{a_i^2+a_j^2}{a_i+a_j}\geq\frac{1}{2}(a_i+a_j)$

deňsizligi ulanyp alarys:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)+\ldots+\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\frac{1}{2}.$$

$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n}$ bolanda deňlik ýerine ýetýär.

**255.** [0; 1] bellenen nokatlarda bölýän kesimleri ýaçeýka diýip atlandyralyň. Eger $\frac{9}{23}$, $\frac{17}{23}$ we $\frac{19}{23}$ nokatlar bellenilse, onda bir böküşde çekirtgeler bir ýaçeýka düşüp bilmezler.

$\frac{11}{23}$ $\frac{15}{23}$

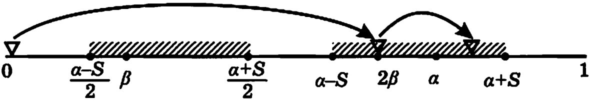
0 ________________________________________ 1

$\frac{9}{23}$ $\frac{17}{23}$ $\frac{18}{23}$ $\frac{19}{23}$

Islendik möçberde bolanda we bellenen nokatlaryň islendik ýerleşişinde çekirtgeleriň iki böküşde bir ýaçeýka düşýändigini subut edeliň. Has anygragy, iki böküşde çekirtgeleriň her biri iň uly uzynlykly ýaçeýka düşýändigini görkezeliň. Simmetrikligi esasynda *O* nokatda ýerleşen çekirtge üçin bu tassyklamany subut etmek ýeterlikdir. Goý, iň uzyn ýaçeýkanyň *a* çep ujy, *S* onuň uzynlygy bolsun (eger *S* uzynlykly ýaçeýkalar birnäçe bolsa, onda olaryň islendik birine garalyň).

Eger garalýan ýaçeýkanyň çep ujy sag ujuna garanda $O$ nokada golaý ýerleşen bolsa, ýagny $\alpha<S$ bolsa, onda çekirtge $\alpha$ nokatdan böküp, bir böküşde $[\alpha;\ \alpha+S]$ ýaçeýka düşer (eger $\alpha=0$, ýagny çekirtge eýýam garalýan ýaçeýkada ýerleşen bolsa, onda bir böküş hem talap edilmeýär). Tersine bolan ýagdaýda, haçan $t\geq S$ bolsa, onda $S$ uzynlykly $\left[\frac{\alpha-S}{2};\ \frac{\alpha+S}{2}\right]$ kesime garalyň.


Bu kesim iň bolmanda bir $\beta$ bellenen nokady saklaýar, çünki tersine, bu kesimi saklaýan ýaçeýkanyň uzynlygy $S$-den uly bolar. $\beta$ nokatdan böküp çekirtge $2\beta\in[\alpha-S;\ \alpha+S]$ nokada düşýär. Eger bu nokat $[\alpha;\ \alpha+S]$ ýaçeýkada ýatmaýan bolsa, onda bu gezek $\alpha$ nokatdan geçip ikinji böküşde çekirtge $[\alpha;\ \alpha+1]$ ýaçeýka geçer.




**256. Jogaby: 11.**

Her ädimden soňra daşlaryň sany deň bolan üýşmekleri topara birleşdireliň. Goý, haýsy hem bolsa bir pursatda, boş üýşmekli topary hem hasap edenimizde $n$ topar emele gelsin. Eger indiki ädimde $k$ dürli topara degişli käbir üýşmeklerden deň sany daşlar zyňylsa, onda bu üýşmekler öňküsi ýaly $k$ dürli toparlary aňladýar: çünki dürli üýşmekler dürlüligine galar. Galan üýşmekler $n-k$ dürli toparlary emele getirer. Şoňa görä-de, dürli toparlaryň umumy sany $max\{k,\ n-k\}$ kiçi bolmaz.

Diýmek, her ädimde $n$ dürli toparlaryň sany iki esseden köp bolmadyk azalýandyr, umuman 995, 498, 249, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1 yzygiderlikden çalt bolmadyk kemelýändir, ýagny 11 ädim etmek zerurdyr. Eger galan üýşmeklerden $n$ daş zyňylandan soňra, 0, 1, ..., $n$–1 sany daşly ähli üýşmekler goýulsa, onda ädimleriň şu mukdary hem üpjün edýär, bu ýerde $n$ san ýokarda görkezilen bahalary yzygiderli geçýär.

**257.** Islendik, $x$, $y>0$ üçin $f(x)\cdot f(y)\geq(f(\sqrt{xy}))^2$ deňsizlik dogrudyr. Hakykatdan-da, eger $\sqrt{xy}=z$ bilen belgilesek, onda

$$f(x)\cdot f(y)-(f(x))^2=a^2(x^2y^2-z^4)+b^2(xy-z^2)+$$
$$+c^2(1-1)+ab(x^2y+xy^2-2z^3)+ac(x^2+y^2-2z^2)+bc(x+y-2z)=$$
$$=ab(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2})^2+ac(x-y)^2+bc(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0.$$

Subut edilen deňsizligi her gezek ulanyp, alarys:

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)\geq(f(\sqrt{x_1x_2}))^2\cdot\ldots\geq$$
$$\geq(f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}))^4\cdot\ldots\geq(f(\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}))^n=(f(1))^n=1.$$

**258.** Tegelegi burçy $2\pi/1002$ bolan 1002 sany deň sektorlara bölýäris. Şunlukda, bu sektorlaryň iň bolmanda birinde üçden az bolmadyk nokat ýerleşer (iki sektoryň araçäginde ýerleşen nokatlary bu sektorlaryň haýsy hem bolsa birine degişli hasap ederis). Hakykatdan-da eger sektorlaryň her birinde ikiden köp bolmadyk nokat bar diýsek, onda nokatlaryň umumy sany $2\cdot1002=2004$-den köp bolup bilmez.

2005 nokadyň üçden az bolmadyk nokatly sektoryny alýarys we depesi bu nokatlarda bolan üçburçluga seredýäris. Bu üçburçluk sektorda ýatyr. Şonuň üçin onuň meýdany 1/1002-ä deň bolan sektoryň meýdanyndan uly bolup bilmez. Diýmek, üçburçlugyň meýdany $\frac{1}{1002}<0{,}001$ uly bolup bilmez. Subut edildi.

**259.** 1) $x=y=0$ goýalyň, onda $f(0)=2f(0)$. Bu ýerden $f(0)=0$ alarys.

2) $x=-y$ goýalyň, onda $f(0)=2f(x^2)-2x^2$. Bu ýerden $f(x^2)=x^2$ alarys. 3) $t=x^2$ goýalyň, onda $f(t)=t$, $t\geq0$.

Indi $t$ ululygy $x$ arkaly ýazyp, $f(x)=x$, $x\geq0$ alarys. $f(x)=x$ funksiýa (1) deňligi kanagatlandyrýar. Hakykatdanda, $f((x+y)^2)=(x+y)^2$, çünki $f(x^2)+f(y^2)+2xy=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$.

Diýmek, $f((x+y)^2)=f(x)^2+f(y)^2+2xy$.

Jogaby: $f(x)=x$.

**260.** Eger:

1) $x=0$, $y=0$ bolsa, onda $f(1)=f(1)+f(0)$, bu ýerden $f(0)=0$ bolar;

2) $x=2$, $y=1$ bolsa, onda $f(4)=f(4)+f(1)$ bu ýerden $f(1)=0$ bolar;

3) $x=0$, $y=x$ bolsa, onda $f(2^x)=f(x)+f(1)=f(x)$, $x \in R$;

4) $y=0$, $x \in R$ bolsa, onda $f(x+1)=f(2^x)+f(0)=f(2^x)$, $x \in R$. 3) we 4)-den alarys: $f(x+1)=f(x)$, $x \in R$ (3)

5) $x=0$, $y \to y+1$; $f(2^{y+1})=f(1)+f(y+1)$, bu ýerde (3) deňlik esasynda $f(2^{y+1})=f(y)$ (4) gelip çykýar.

6) $x=2^y$, $y \in R$; $f(2^y+2^y)=f(2^{2^y})+f(y)$,

$$f(2^{y+1})=f(2^{2^y})+f(y) \qquad (5)$$

(4) we (5) deňliklerden $f(2^{2^y})=0$ gelip çykýar.

$a>1$ sanlar üçin $a=2^{2^y}$ goýsak, onda $f(a)$ bolýar. $x=a$ bolanda (3) deňlik ýerine ýetýär.

Jogaby: $f(x)=0$, $x \in R$.

**Bellik.** (3) deňlik görkezilenden soňra, çözüwi şeýle dowam etmek hem bolar:

$f(x)=f(x+1)=f(2^{x+1})=f(2^x+2^x)=f(2^{2^x})+f(x)=f(2^x)+f(x)=$
$=f(x)+f(x)$, ýagny $x \in R$ üçin $f(x)=2f(x)$ deňlik dogry, bu ýerden bolsa $f(x)=0$ alarys.

**261.** 1) $x=0$ goýalyň, onda $f(f(y))=y^2+f(0)$. $f(0)=a$ belleme girizip, alarys:

$$f(f(y))=y^2+a. \qquad (7)$$

2) (7) deňlikde $y=0$ goýalyň. Onda alarys:

$$f(a)=a. \qquad (8)$$

Indi (7) deňlikde $y=a$ goýalyň. Onda $a^2+a=a$ deňleme alarys, onuň çözüwi $a=0$, ýagny $f(0)=0$ bolýar. Diýmek,

$$f(f(y))=y^2. \qquad (9)$$

3) (6) deňlikde $x=-f(y)$ goýup,

$$f(-f(y))=-y^2 \qquad (10)$$

deňligi alarys.

(9) we (10) deňliklerden

$$f(-f(y))=-f(f(y)),\ y \in R \qquad (11)$$

deňlik alynýar.

(9) deňlikde $y=-f(y)$, (10) deňlikde bolsa $y=f(y)$ goýup, aşakdaky deňlikleri alarys:

$$f(f(-f(y)))=f^2(y), \quad (12)$$

$$f(-f(-f(y)))=-f^2(y). \quad (13)$$

(11) deňlik esasynda (12) we (13) deňlikleri çep bölekleri özara deňdir, onda onuň sag bölegi hem deňdir:

$$f^2(y)=-f^2(y),$$

bu ýerden $f(y)=0$, $x \in R$ alynýar. Emma, beýle funksiýa (6) deňligi kanagatlandyrmaýar.

Jogaby: şeýle funksiýa ýok.

**262.** Goý, $x=1$ bolsun. Ony 2) şertde goýup $f(1)=f^2(1)$ deňligi alarys. Bu ýerden $f(1)=0$ we $f(1)=1$. Çünki $0 \notin Q^+$, onda $f(1)=1$.

1) şert esasynda alarys: $f(n)=f((n-1)+1)=f(n-1)+1$,

$f(x+n)=f((x+n-1)+1)=f(x+n-1)+1$.

Bu deňlikleri

$f(n)=n$, $n \in N$,

$f(x+n)=f(n)+n$, $x \in Q^+$, $n \in N$. (14)

görnüşe getirmek bolýar.

Goý, $r=\frac{m}{n}$ rasional san, $r \in Q^+$ bolsun. Ornuna goýma ulanalyň: $x=n+\frac{m}{n}$, $n \in N$, $m \in N$. $x \in Q^+$, onda 2) şert esasynda alarys: $f\left(\left(n+\frac{m}{n}\right)^2\right)=f^2\left(n+\frac{m}{n}\right)$.

(14) deňlikler esasynda alarys:

$n^2+2m+f(r^2)=(n+f(r))^2=n^2+2nf(r)+f^2(r)$.

2) şert esasynda $f(r^2)=f^2(r)$, onda ýokarky deňlikden alarys: $f(r)=\frac{m}{n}=r$, $r \in Q^+$.

$f(x)=x$, $x \in Q^+$. Funksiýa garalýan meseläniň şertlerini kanagatlandyrýar.

Jogaby: $f(x)=x$, $x \in Q^+$.

**263.** Goý, $A=\{f(n):n \geq 1\}$ we $B=\{g(n):n \geq 1\}$ bolsun, $an=f(n)$, $bn=g(n)$ monoton artýar, onsoňam $A \cap B=\varphi$, $A \cup B=N$.

$g(n)=f(f(n))+1>1$, onda $g(1)>1$, we $f(1)=1$.

Onda $g(1)=f(f(1))+1=f(1)+1=1+1=2$.

Şunlukda, $3=f(2)$, $4=f(3)$, $5=(f(2))+1=g(2)$.

a) $f(n+1)-f(n)=\begin{cases}1, \text{eger } n\in B \text{ bolsa,}\\ 2, \text{eger } n\in A \text{ bolsa,}\end{cases}$

($n=f(k)$, onda $f(n)+1=g(k)$);

b) $g(n)=f(n)+n$. Onda bu deňlik esasynda (16) deňligi şeýle ýazmak bolar: $f(f(n))=f(n)+n-1$.

Bu deňligi ulanyp yzygiderlikde taparys.

$f(4)=f(f(3))=f(3)+3-1=6$,

$f(6)=f(f(4))=f(4)+4-1=9$,

$f(9)=16$, $f(14)=22$, $f(22)=35$, $f(35)=56$, $f(56)=90$.

Soňra a) şerti ulanyp alarys:

$f(57)=90+2=92$, $56\in A$, $f(92)=f(57)+57-1=148$,

$f(148)=f(92)+92-1=239$, $f(239)=239+147=386$,

$f(240)=f(239)+2=386+2=388$, $239\in A$.

Jogaby: $f(240)=388$.

**264.** Matematiki induksiýa usulyny ulanalyň.

a) $n=0$-ly (1)-de goýup, alarys: $f(f(0))=0$, onda $f(1)=0$.

$f(f(n))=f(f(n+2)+2)$, $n\in Z$.

1) we 2)-den

$$f(n)=f(n+2)+2 \qquad (1)$$

alynýar.

b) induksiýa boýunça $n\in Z$ üçin $f(n)=1-n$ deňlik alynýar. Ol $f(0)=1$; $f(1)=0$ esasynda (1) deňlikden alynýar. $f(n)=1-n$ ulanyp, alarys: $f(n+2)=1-(n+2)$, $f(n-2)=1-(n-2)$. Indi (1) formulany ulanyp, alarys:

$f(n+2)=f(n)-2=1-n-2=1-(n+2)$,

$f(n-2)=f(n)+2=1-n+2=1-(n-2)$.

$f(n)=1-n$ deňlik islendik bitin $n$ üçin dogrudyr. Onda $f(1995)=1-1995=-1994$; $f(-1994)=1-(-1994)=1995$.

**265.** Figuradaky kletkalaryň iň kiçi sany 7-ä deňdir. Gözlenilýän figura 4·4 küşt tagtasynyň wertikal çep ikinjisiniň we gorizontal ýokarky ikinjisiniň birleşmesi bolýar. Birinji göçüm olaryň umumy kletkalaryna edilýär, ikinji göçümde, birinji oýunça nol ýok bolan dört kletkaly hatara atanak goýýar, onsoňam, goýlan iki atanak bu hataryň iki orta kletkasynda durar ýaly bolmalydyr we üçünji göçümde utjakdygy düşnüklidir. Alty kletkaly figura bolan ýagdaýynda, birinji oýunçy eýýam üçünji göçümde üç belgini yzygider hökman goýmalydyr, diýmek, ol ikinji göçümde şeýle ýagdaýy emele getirmelidir: haçanda iki atanak hatarda duranda bir gönide olar bilen bir hatarda iki tarapynda-da figuranyň boş kletkalary bar. Ýöne şonda figuranyň 4 (ýa-da köp) yzygider kletkalary bar. Birinji göçümde bu hataryň ýakyn orta kletkasyna 0 goýup, ikinji oýunçy ikinji göçümde goranyp biler.

**266.** Iki köpagzanyň hem uly koeffisiýentiniň položitel bolan ýagdaýynda garamak ýeterlikdir. Bu ýagdaýda, argumentiň ýeterlikçe uly bahasynda iki köpagzada monoton artýandyr. Goý, şeýle ýeterlikçe uly $x_1$ bahada $P(x_1)=n_1$, $Q(x_1)=m_1$ bolsun, bu ýerede $n_1$ we $m_1$ bitin sanlardyr. Onda, $x_2>x_1$ bolanda $P(x_2)=n_1+1$. Şeýle hem $Q(x_2)$ köpagza bitindir we $m_1$-de uly bolýar. Ýöne, ol $m_1+1$-den uly bolup bilmez, çünki onda $x_1<x^1<x_2$ şerti kanagatlandyrýar şeýle $x^1$ bar bolup, $Q(x^1)=m_1+1$, $n_1<P(x^1)=n_1+1$, ýagny $P(x^1)$ bitin däldir. Diýmek, $P(x_2)=n_1+1$, $Q(x_2)=m_1+1$. Şuňa meňzeşlikde $x_3>x_2$ üçin tapylýar $P(x_3)=n_1+2$, $Q(x_3)=m_1+2$ we ş.m. Onda $P(x)-Q(x)-n_1+m_1$ köpagzanyň $x_1$, $x_2$, ... nokatlarda köki bar, ýagny ol toždestwa nola deňdir we $P(x)=Q(x)-n_1-m_1$. Subut edildi. (Ýokardaky tassyklama, haçanda $P(X)$ we $Q(X)$ konstanta bolmanda ýerine ýetirildi. Köpagzalaryň biri konstanta bolan ýagdaýy ýönekeýdir).

**267.** $AB$, $AC$, $BC$ taraplaryň ortasyny degişlilikde, $R$, $Q$, $P$ belgiläliň. $|PA_1|=x$, $|QB_1|=y$, $|RC_1|=z$, $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$, $\hat{C}=\chi$, $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$. Goý, $R$ nokat $B$ we $C_1$ arasynda ýatan bolsun, onda $P$ nokat $C$ we $A_1$ nokatlaryň arasynda, $Q$ nokat $B_1$ we $A$ nokatlaryň arasynda ýatyr. Alarys: $|QR|+|BC_1|=|C_1B_1|+|QB_1|$,

$$P_{AB_1C_1}=\frac{a+b+c}{2};\ |QR|=\frac{a}{2},\ |RC_1|=z,\ |QB_1|=y,$$

$$|B_1C_1| = \sqrt{(y\sin\chi + z\sin\beta)^2 + \left(\frac{a}{2} + y\cos\chi - z\cos\beta\right)^2}.$$

Alarys:

$$(y\sin\chi + z\sin\beta)^2 + \left(\frac{a}{2} + y\cos\chi - z\cos\beta\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + z - y\right)^2,$$

bu ýerden $az(1+\cos\beta)-ay(1+\cos\chi)-2yz(1-\cos(\beta+\chi))=$
$=az(1+\cos\beta)-ay(1+\cos\chi)-2yz(1+\cos\alpha)=0$.

Şuňa meňzeşlikde alarys:

$bx(1+\cos\chi)-bz(1+\cos\alpha)-2xz(1+\cos\beta)=0$

we $cy(1+\cos\alpha)-cx(1+\cos\beta)-2xy(1+\cos\chi)=0$.

Bu ýerde, eger $x$, $y$, $z\neq0$ bolsa, diýmek položitel, onda $\frac{z}{y} > \frac{1+\cos\chi}{1+\cos\beta}$; $\frac{x}{z} > \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\chi}$; $\frac{y}{x} > \frac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha}$ we bu deňsizlikleri köpeldip, 1>1 alarys. Diýmek, $x$, $y$, $z$ iň bolmanda biri 0, onda beýleki ikisi hem $O$ deňdir we $A_1$, $B_1$, $C_1$ nokatlar $ABC$ üçburçlugyň taraplarynyň ortalarydyr.

**268.** Ýygnananlaryň haýsy hem bolsa birine garalyň. Goý, kesgitlilik üçin, onuň tanyşlary oňa nätanyşlardan az däl bolsun, diýmek, tanyşlary 9-dan az däl. Bu adamy 1 sifr bilen belgiläliň. Onuň tanyşlarynyň birine garalyň, ony 2 sifr bilen belgiläliň. Eger onuň 1 adam bilen 4 umumy tanşy bar bolsa, onda ýa-ha bu dörtlük jübüt-jübüt nätanyş, ýa-da bu dörtlükden jübüt tanyşlar 1 we 2 adamlar bilen dört jübüt tanyşlary emele getirýär. Eger 1 adamyň 2 adamdan başda we onuň bilen tanyş däl 6 tanşy bar bolsa, onda bu 6 adamlaryň içinde ýa-ha 3 jübüt tanyşlary tapmak gerekdir we oňa 1 adamy goşup dörtlügi alarys, ýa-da 3 jübüt nätanyşlary tapmak ýeterlikdir, onda 2 adamy goşmak gerekdir. Bu 6 adamdan birini alalyň we ony 3 sifr bilen belgiläliň. Goý, kesgitlilik üçin, onuň galan 5 adamlaryň arasynda köp tanyşlary bolsun, onda olar 3-den az däldir. Eger olaryň arasynda jübüt tanyş bar bolsa, onda olar 3 adam bilen jübüt tanyşlaryň üçlügini emele getirýärler, tersine bolan ýagdaýynda, bu 3 adam jübütden tanyş däldir. 2 adamyň 1 adamyň (2 adamdan başga, olar 8-den az däl) tanyşlarynyň arasynda dogry 3 tanyş (we 5 nätanyş) adamy bolan ýagdaýyna seretmek gerek. Ýöne, ol 1 adamyň islendik tanşy üçin dogry bolmalydyr, çünki 2 nomeri biz erkin belledik. Ýöne, bu mümkin däldir, çünki onda 1 adamyň 9 tanyşlarynyň arasynda jübüt tanyşlaryň möçberi $\frac{9\cdot 3}{2}$ bitin bolmazdy.

**269.** Başga yzygiderlik guralyň: $b_0=a_{25}$, $b_1=a_{24}$, ..., $b_{25}=a_0$. $n\leq 26$ bolanda $a_n>a_{n-1}>0$, onda $n\leq 26$ bolanda $a_{n-1}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ deňsizligiň dogrudygyny berlen formuladan aňsat görkezmek bolýar. Şol formuladan $a_{n-1}=\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-a_n^2})}$ aňlatmak bolar, onsoňam «±» deregine eger $n\leq 25$ bolsa «–» goýmaly. Eger $\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-a_4^2})}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, onda $\sqrt{1-a_4^2}<\frac{1}{2}$ bolýar. Şunlukda, $a_n>\frac{\sqrt{3}}{2}$, bu nädogrudyr. Şeýlelikde, bu yzygiderlik üçin rekurrent formula aldyk: $b_n=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-b_{n-1}^2})}$, $n\in N$. Eger $b_{n-1}=\sin\alpha$ bolsa, onda $b_n=\sin\frac{\alpha}{2}$ bolar. Şeýlelikde, eger $b_0=\sin\alpha$ bolsa, onda $b_{25}=\sin\frac{\alpha}{2}$ bolýar. $b_0<\frac{\sqrt{3}}{2}$, onda $\alpha$ şeýle aňlatmak bolar:

$$0<2<\frac{\pi}{3} \text{ we onda } 0<b_{25}=a_0<\frac{\pi}{3\cdot 2^{25}}<\frac{2\pi}{2^{27}}<\frac{7}{10^8}.$$

**270.** Şeýle $n$-iň deregine, mysal üçin, $n=2^{10000}+10000$ almak bolar. Hakykatdan-da, $5^{2^n}-1\vdots 2^k$ bolýandygyny induksiýa boýunça subut edeliň. Goý, $5^{2^{k-1}}-1\vdots 2^{k-1}$ ýerine ýetirýän bolsun. Onda

$$5^{2^{k-1}}-1=(5^{2^{k-1}}-1)(5^{2^{k-1}}+1)=2^k\cdot\frac{5^{2^{k-1}}-1}{2^{k-1}}\cdot\frac{5^{2^{k-1}}+1}{2}\vdots 2^k.$$

Onda $5^{2^{10000}}-1\vdots 2^{10000}$, $5(2^{10000}+10000)-5^{10000}$ bolsa 10000 nol bilen gutarýandygy aýdyňdyr, ýöne

$$5^{10000}=\frac{10^{10000}}{2^{10000}}=\frac{10^{10000}}{(2^{10})^{1000}}<\frac{10^{10000}}{(10^3)^{1000}}=10^{7000}.$$

Diýmek, $5\cdot(2^{10000}+1000)$ sanda belgiler 9999-dan 7000-e çenli soňunda nollaryň bolmagy hak manydyr we bu nollar 3000>1968-den az däldir.

**271.** Goý, $A$, $B$, $C$, $D$ berlen tetraedranyň depeleri, $O$ alnan nokat we ol tetraedranyň içinde ýatýan bolsun. $O$ nokatdan tetraedranyň üstüni $O_1$ we $O_2$ nokatlarda kesýän göni çyzyk geçireliň. Goý, $\left|\frac{O_1O}{O_2O}\right| = \frac{m}{n}$ bolsun. Onda

$\vec{AO} = \frac{n}{m+n}\vec{AO_1} + \frac{m}{m+n}\vec{AO_2}$ bolar, bu ýerden

$|AO| \le \frac{n}{m+n}|AO_1| + \frac{m}{m+n}|AO_2|$ deňsizligi alarys. Şuňa

meňzeşlikde alarys: $|BO| < \frac{n}{m+n}|BO_1| + \frac{m}{m+n}|BO_2|$ we

şeýle dowam edilýär. Indi, bu deňsizlikleri goşup alarys:

$$|OA|+|OB|+|OC|+|OD| \le \frac{n}{m+n}(|O_1A|+|O_1B|+|O_1C|+|O_1D|)+$$

$$+\frac{m}{m+n}(|O_2A|+|O_2B|+|O_2C|+|O_2D|).$$

Bu ýerden $O_1$ ýa-da $O_2$ nokatdan depä çenli uzynlyklaryň jeminiň iň bolmanda biri $O$ nokatdan şeýle jemlerden kiçi däldir.

Şuňa meňzeşlikde, granyň islendik nokady üçin gapyrgada nokat bar bolup, depä çenli uzaklyklaryň jeminden kiçi däldir we gapyrgadaky islendik nokat üçin depede nokat bar bolup, depä çenli uzaklyklaryň jeminden kiçi däldir we ol şol depeden çykýan gapyrgalaryň uzynlyklarynyň jemine deňdir. Bu ýerden, meseläniň tassyklamasy gelip çykýandyr.

**272.** 1,5 radiusly tegelegi ýapmak üçin 1 radiusly tegelegiň dördüsiniň ýeterlik däldigini subut edeliň. 1 radiusly tegelekleriň dördüsi bilen 1,5 radiusly tegelegi ýapyp bolýar diýip güman edeliň. 1,5 radiusly tegelegiň merkezinden we 1 radiusly tegelekleriň merkezlerinden şöhle geçireliň. Goňşy şöhle bilen emele gelen burçlaryň arasynda $180^0$ geçýän burçlaryň bolmaly däldigi düşnüklidir (içinde geçirilen şöhleler ýok bolan burçlar göz öňünde tutulýar), tersine, şeýle burçlaryň içinde 1,5 radiusly tegelegiň nokady tapylar; 1 radiusly tegelekleriň hiç biri bilen ýapylmaz. Goý, 1,5 radiusly tegelegiň merkezi $O$ nokat bolar ýaly şeýle

$\angle O_1OO_2$ burç bolsun, $O_1$, $O_2$ nokatlar 1 radiusly tegelekleriň merkezi, $\angle O_1OO_2$ burçuň içinde 1 radiusly tegelegiň merkezi ýok we $O_1\hat{O}O_2>90^0$ bolsun (şeýle burç tapdyrýandyr). $\angle O_1OO_2$ burçdan $[OM)$ bissektrisa geçireliň, bu ýerde $M$ nokat 1,5 radiusly tegelegiň töweregine degişlidir. Onda

$$|O_1M| \geq |OM| \sin O_1\hat{O}M \geq |OM| \sin 45^0 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1, \ |O_2M| \geq |OM| \sin O_1\hat{O}M \geq |OM| \sin 45^0 =$$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$. Şunlukda, $M$ nokat 1 radiusly tegelekleriň hiç biri bilen ýapylanok, çünki 1 radiusly tegelegiň merkezinden $M$ nokada çenli uzaklyk $|O_1M|$ we $|O_2M|$ aralykdan kiçi däldir. Bu ýerden bolsa, 1 radiusly tegelekleriň dördüsi bilen 1,5 radiusly tegelegi ýapyp bolmaýandygy gelip çykýar.

Bäş sany 1 radiusly tegelekler bilen 1,5 radiusly tegelegi ýapyp bolýandygyny görkezeliň. 1,5 radiusly tegelegi şöhläniň kömegi bilen 5 sany $[OO_1)$, $[OO_2)$, $[OO_3)$, $[OO_4)$, $[OO_5)$ sektorlara böleliň. $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, $O_5$ nokatlary $|OO_1|=|OO_2|=|OO_3|=|OO_4|=|OO_5|=1$ şert ýerine ýeter ýaly edip alalyň. 1,5 radiusly tegelegiň töwereginde bolsa $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ nokatlary aşakdaky şertler ýerine ýeter ýaly edip alalyň:

$$O_1\hat{O}M=M_1\hat{O}O_2=O_2\hat{O}M_2=M_2\hat{O}O_3=O_3\hat{O}M_3=M_3\hat{O}O_4=$$
$$=O_4\hat{O}M_4=M_4\hat{O}O_5=O_5\hat{O}M_5=M_5\hat{O}O_1=36^0.$$

Onda $|M_1O|<2|OO_1|\cos O_1\hat{O}M_1$. Şunlukda, $O_1OM_1<O_1M_1O$, diýmek, $|O_1M_1|<|O_1O|$. Bu ýerden bolsa, $O_1$ merkezli, 1 radiusly tegelek $\Delta OM_1M_5$ ýapýanlygy gelip çykýar, şeýlelikde bolsa, $OM_1M_5$ sektory hem ýapýar. Şuňa meňzeşlikde, 1,5 radiusly tegelegiň bölünen her bir sektoryny degişli 1 radiusly tegelek bilen ýapyp bolýandygy subut edilýär.

**273.** Goý, $t$ käbir bitin san, $f(t)$ bitin koeffisiýentli köpagza we $f(t)=M$ bolsun, bu ýerde $M$ san $-1$, 0 ýa-da 1-e deň bolmadyk sandyr. Islendik bitin $K$ san üçin $f(t+km)-f(t)$ tapawut sana $M$ bölünýär, çünki $(t+km)^q-t^q$ tapawut $t+km-t-km$ sana bölünýär. $m$ derejeli köpagza $m$ dürli $x$-dan köp bolmadyk islendik $A$ bahany kabul edýär, onda şeýle bir bitin $Z$ tapylyp, islendik $1\le i\le n$ üçin $f_1(Z)$

$-1$, 0 we 1-e deň däldir. Goý, $p=f_1(z)\cdot f_2(z)\ldots f_n(z)$ bolsun. Islendik, $1\le i\le n$ üçin $f_1(z+p^n)$ köpagza $\pm f_i(z)$ deň bolmaz ýaly şeýle bir bitin $n$ sany saýlap alalyň. Onda $f_1(z+p^n)$ köpagza subut edilişi boýunça $f_i(z)$ bölüner, çünki $f_i(z)$ köpagza $\pm1$ ýa-da 0-a deň däldir, onda $a=z+p^n$ bolanda $f_1(a)$, $f_2(a)$, ..., $f_n(a)$ düzme sanlar bolar.

**274.** Ilki bilen aşakdaky deňsizligi subut edeliň:

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_n}.$$

Islendik, $i$ üçin $0\le t\le n-1$, $x_{i+1}-x_1\ge1$, onda $\sqrt{x_{i+1}-x_i}\le x_{i+1}-x_i$, şunlukda,

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}\le$$

$$\le\frac{x_1-x_0}{x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_2}+\ldots+\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_1}}_{x_1-x_0\text{ goşuly}}+\underbrace{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_2}}_{x_2-x_1\text{ goşuly}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n}+\ldots+\frac{1}{x_n}}_{x_n-x_{n-1}\text{ gosuly}}<$$

$$<1+\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_1}}_{x_1-1\text{ goşuly}}+\underbrace{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_2}}_{x_2-x_1\text{ goşuly}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n}+\ldots+\frac{1}{x_n}}_{x_n-x_{n-1}\text{ goşuly}}<$$

$$<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1+2}+\ldots+\frac{1}{x_1}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{x_{n-1}+1}+\frac{1}{x_{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_n}.$$

Indi meseläniň tassyklamasyny induksiýa boýunça subut edeliň.

$n=1$ bolsun. Onda $\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}<\frac{\sqrt{x_1}}{x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}<1$. Goý,

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_{n-1}-x_{n-2}}}{x_{n-1}}<$$

$< 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}$ bolsun. Eger $x_n<n^2$ bolsa, onda subut edilen deňsizlik boýunça alarys:

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_{n-1}}<$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_n}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Eger $x_n>n^2$ bolsa, onda $\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<\frac{1}{\sqrt{x_n}}<\frac{1}{n}$. Ýöne

$$\frac{1}{(n-1)^2+1}+\frac{1}{(n-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{2n-1}{n^2}\ge\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

Diýmek,

$$\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<\frac{1}{(n-1)^2+1}+\frac{1}{(n-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

bu ýerden

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_{n-1}-x_{n-2}}}{x_{n-1}}+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<$$

$$<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n-1)^2+1}+\frac{1}{(n-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

**275.** Deňsizligiň iki bölegini $a>0$-a köpeldeliň we öwürmeler geçirip, berlen deňsizlige deňgüýçli bolan

$\frac{1}{3}a^3+a(b^2+c^2)-a^2(b+c)-abc>0$ deňsizligi alarys. $abc=1$ we şunlukda, $b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-\frac{2}{a}$. $b^2+c^2$-yň bu bahasyny ýokarky deňsizlikde goýup, alarys:

$a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0$. Bu deňsizlik $b+c$ görä kwadrat deňsizlikdir. Onuň diskriminantyny bölüp alalyň:

$D=a^4-4a(\frac{1}{3}a^3-3)=a^4-\frac{4}{3}a^4+12a=a(12-\frac{1}{3}a^3)<0$, çünki $a^3>36$. $a>0$, onda $b+c$ islendik bahasynda

$$a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0.$$

Şunlukda, $\frac{2}{3}a^2<a^2+b^2+c^2-ab+bc+ac$.

**276.** Aldawçy öz ýeriniň meýdanyny şeýle görnüşde giňeldip biler. Goý, $ABCD$ onuň kwadrat ýeri bolsun.

1. $AB$ we $BC$ taraplarda $E$ we $F$ nokatlary degişlilikde, $|EB|=|BF|<\frac{|AB|}{2}$ şert ýerine ýeter ýaly edip alalyň. $EF$ göni çyzyk geçireliň we bu göni çyzyga görä $EBF$ döwük çyzygy $EB_1F$ döwük çyzyga öwreliň.

2. $B_1C$ göni çyzyk geçireliň. Bu göni çyzyga görä $B_1FC$ döwük çyzygy $B_1F_1C$ döwük çyzyga şekillendireliň.

3. $EC$ göni çyzyk geçireliň. $EB_1F_1C$ döwük çyzygy $EB_2F_2C$ döwük çyzyk ýaly, ýa-da göni çyzyga görä şekillendireliň. Onda:

$S_{AEB_2F_2CD} = S_{AEB_1F_1CD} + 2S_{ECF_1B_1}$ $S_{ECF_1B_1} = S_{\Delta B_1F_1C} + S_{\Delta ECB_1}$

$S_{\Delta B_1F_1C} = S_{\Delta B_1FC}$ we $2S_{\Delta ECB_1} = S_{\Delta EBFB_1}$, onda

$|B_1F|=|BE|<\frac{1}{2}|BC|<|FC|$, onda $F\hat{B}_1C>\frac{\pi}{4}$.

Diýmek, $F_2\hat{B}_2E=E\hat{B}_1F_1=E\hat{B}_1F+2F\hat{B}_1C>\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{4}=\pi$.

$EF_2$ göni çyzyga görä $EB_2F_2$ üçburçlugy şekillendirip, meýdany $S = S_{AEB_2F_2CD} + 2S_{\Delta EB_2F_2} = S_{ABCD} + 2S_{\Delta EB_2F_2} > S_{ABCD}$ bolan figurany alarys.

**277.** Haçan $P$ nokat $\angle ABC$ içinde bolan ýagdaýynda garalyň. Bu ýagdaýda ol $\angle ACM$ içinde ýatar, bu ýerde $[CM)$–$\angle ACB$ burçuň bissektrisasy. Oňa göz ýetirmek üçin, $\Delta ACP$ golaýynda $S$ töwerek çyzmaly, onsoň $S$ töweregi $(CM)$-e görä $S_1$ töwerege şekillendirmeli we şert boýunça $A\hat{P}C>B\hat{P}C$, $P$ nokat $S_1$ tegelegiň hökman daşynda ýatmalydyr. Bu ýerden, $P$ nokadyň $BCM$ burçuň içinde ýa-da araçäginde ýatyp bilmeýändigini ýeňil görmek bolýar. Goý, $P_1$ nokat $CM$ göni çyzyga görä $P$ nokada simmetrik we onuň obrazy bolsun. Kosinuslar teoremasyna görä alarys:

$|AP|^2=|AC|^2+|PC|^2-2|AC||PC|\cos A\hat{C}P$,

$|BP|^2=|BC|^2+|PC|^2-2|BC||PC|\cos B\hat{C}P$

$|AC|=|BC|$ we $B\hat{C}P=B\hat{C}P_1+P\hat{C}P_1=A\hat{C}P+P\hat{C}P_1$, onda

$|BP|_2-|AP|_2=2|BC||PC|(\cos A\hat{C}P-\cos(A\hat{C}P+P\hat{C}P_1))$.

$0^0<x<180^0$ bolanda $\cos x$ funksiýa kemelýär,

$0^0<A\hat{C}P<A\hat{C}P+P\hat{C}P_1<180^0$.

Eger $P$ nokat $AC$ hordaly segmentde ýatyp, $B$ we $P$ nokatlar $AC$ göni çyzyga görä dürli tarapda ýatýan bolsa, onda kosinuslar teoremasy boýunça alarys:

$|AP|^2=|PC|^2+|AC|^2-2|PC||AC|\cos A\hat{C}P$,

$|BP|^2=|PC|^2+|BC|^2-2|PC||BC|\cos B\hat{C}P$

$|AC|=|BC|$ we $B\hat{C}P=A\hat{C}P+A\hat{C}B$ göz öňünde tutup we $0^0<A\hat{C}P<A\hat{C}P+A\hat{C}B<180^0$ esasynda alarys:

$|BP|^2-|AP|^2=2|PC||BC|(\cos A\hat{C}P-\cos(A\hat{C}P+A\hat{C}B))>0$.

$BC$ segmentde $BC$ göni çyzyga görä $A$ nokatdan başga tarapda $P$ nokadyň ýatmagy mümkin däldir, çünki bu ýagdaýda, $A\hat{P}C<B\hat{P}C$ bolar. $|BP|^2-|AP|^2>0$ bolýandygyndan $|BP|>|AP|$ gelip çykýar.

**278.** Goý, bu deňlemäniň iň kiçi položitel köki $x_1$ bolsun.

$$x_1^4+a_1x_1^{n-1}-a_2x_1^{n-2}-\ldots-a_n=x_1^{n-1}\left(x_1+a_1-\frac{a_2}{x_1}-\ldots-\frac{a_n}{x_1^{n-1}}\right)=0$$

Goý, $x_2>x_1$ bolsun. Onda

$$x_2^n+a_1x_2^{n-1}-a_2x_2^{n-2}-\ldots-a_n=x_2^{n-1}\left(x_2+a_1-\frac{a_2}{x_2}-\ldots-\frac{a_n}{x_2^{n-1}}\right)>0.$$

$x_1$ bolan ýaý 0-a deňdir, $x_2$ bolan ýaýda $x_1$ ýaýa garanyňda modul boýunça položitel agzalar köp, otrisatel agzalar bolsa azdyr.

**279.** Goý, bu beýle däl bolsun. Onda, hususanda, $k=n$ üçin şeýle bir $n_1$ tapylyp, $\frac{a_{n_1+1}+\ldots+a_n}{n-n_1}>\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}(n_1<n)$ deňsizlik ýerine ýeter. $k=n_1$ kiçi, eger $n_1\neq 0$ bolsa, onda şeýle $n_2<n_1$ tapylyp, $\frac{a_{n+1}+\ldots+a_n}{n_2-n_1}>\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ deňsizlik ýerine ýeter we ony haçan haýsy hem bolsa bir 0-a deň $n_i$ tapylýança dowam etdirilýär. Ýöne, onda biz $n$ sanlarymyzy $i$ topara bölýäris. Olaryň her birinde orta arifmetik san ähli $n$ sanlaryň orta arifmetik bahasyndan uludyr. Beýle zat, elbetde, mümkin däl. Alnan gapma-garşylyk meseläniň tassyklamasyny subut edýär.

**280.** Goý, $D$ nokatda $BB_1$ göni çyzyk $C_1C_2$ göni çyzygy kesýän, $F$ nokatda $DA$ göni çyzyk $BC$ göni çyzygy kesýän bolsun. Aşakdaky üçburçluklaryň meňzeşdigini göreris:

$\Delta AB_1B \sim \Delta AC_1C_2$, $\Delta B_2B_1A \sim \Delta AC_1C$.

Bu ýerden alarys: $|BA||AC_2|=|B_1A||AC_1|=|B_2A||AC|$. $DA$ göni çyzykda $|DA||AF^1|=|B_1A||AC|=|C_2A||AB|$ şert ýerine ýeter ýaly şeýle bir $F^1$ nokady alalyň. Onda $\Delta DC_2A \sim \Delta ABF^1$ we $\Delta DB_2A \sim \Delta AF^1C$ üçburçluklaryň meňzeşliginden $B\hat{F}A = C\hat{F}A = \frac{\pi}{2}$-ni alarys we diýmek, $F^1=F$ we $AF$ beýiklik. Haçanda $l$ göni çyzyk $ABC$ üçburçlugy kesýän ýagdaýy şuňa meňzeş subut edilýär.

**281.** $N_k$ we $N_e$, $e>k$ seredeliň. $B_{ke}$ bilen $b_k+b_{k+1}+b_{e-1}$ jemi belgiläliň.

$b_e=b_k+...+b_e-B_{ke}$, $b_e+b_{e+1}=b_k+...+b_{e+1}-B_{ke}$, ..., $b_e+...+$
$+b_n+b_1+...+b_{k-1}=b_k+...+b_n+b_1+...+b_{k1}-B_{ke}$, $b_e+...+$
$+b_n+b_1+...+b_k=b_k+1-B_{ke}$, ..., $b_e+...+b_n+b_1+...+b_{e-1}=$
$=b_k+...+b_{e-1}+1-B_{ke}$.

Şunlukda, $N_k$ kesgitlenýän sanlaryň toparyndaky sanlar $N_e$ kesgitlenýän $B_{ke}$ ýa-da $B_{ke}-1$-däki sanlardan köpdür.

Eger $B_{ke}\geq 1$ bolsa, onda $N_k \geq N_e$ onsoňam $b_k+...+b_n+b_1+...+b_{k-1}=1>0$, $N_e$ kesgitlenýän topardaky oňa degişli agza, $b_e+...+b_n+b_1+...+b_{k-1}=1-B_{ke}\leq 0$, onda $N_k>N_e$. Eger $B_{ke}\leq 0$ bolsa, onda toparlardaky biri-birine degişli sanlary deňeşdirip, $N_k \leq N_e$-ni alarys. Topardaky $N_e$-ni kesgitleýän $b_e+...+b_n+b_1+...+b_{e-1}=1\geq 0$ sana topardaky $N_k$-ny kesgitleýän $b_k+...+b_{e-1}=B_{ke}\leq 0$ san degişli bolýar. Diýmek, ýa-ha $N_k>N_e$, ýa-da $N_k<N_e$. Subut edildi.

**282.** $x=6a^3+1$, $y=-6a^3+1$, $z=-6a^2$ üç sanlaryň berlen deňlemäniň ähli bitin $a$ üçin çözüwi bolýandygyny ýeňil barlamak bolýar.

**283.** $(f_i)$ yzygiderlige garalyň,

bu ýerde $f_i = \frac{i^2}{(1{,}01)^i}$.

$$\frac{f_i+1}{f_i}=\frac{(i+1)^2(1,01)^i}{(1,01)^{i+1}\cdot i^2}=\frac{(i+1)^2}{i^2}\cdot\frac{1}{1,01}$$

Onda hemme $i\leq 200$ üçin $\frac{(i+1)^2}{i^2}\cdot\frac{1}{1,01}>1$, ýagny

$f_{i+1}>f_i$, hemme $i\leq 201$ üçin $\frac{(i+1)^2}{i^2}\cdot\frac{1}{1,01}<1$, ýagny $f_{i+1}>f_i$.

Diýmek, iň uly baha $f_{201}$-e eýe bolýar, ýagny $k=201$.

**284.** Alnan san $10^{199}$ sandan kiçidir. Bu san hem $16\cdot 10^{198}=(4\cdot 10^{99})^2$ sandan kiçidir. Doly kwadraty 199-belgili sanyň ýazylmagyndan alynýan ähli sanlaryň iň kiçisi bolan iň uly san alalyň (çünki $\underbrace{99\ldots9}_{99}\,\underbrace{0\ldots0}_{100}$-dan $\underbrace{99\ldots9}_{199}$-a çenli $10^{100}$ sany almak mümkindir). Ol $4\cdot 10^{99}$ sandan kiçidir, şoňa görä-de, onuň kwadratlarynyň arasyndaky tapawut we indiki sanyň kwadraty $2(4\cdot 10^{99})+1=8\cdot 10^{99}+1$ sandan kiçidir. Indiki sanyň kwadratyny ýazmanymyz bilen alnan sanlaryň iň kiçisinden kiçi däldir we iň ulusyndan uly däldir (başgaça bolanda, iki goňşy kwadratyň arasyndaky tapawut iň ulynyň arasyndaky tapawutdan uly we ýazylanlaryň iň kiçisi bolardy hem-de $10^{100}-1$-e deň bolardy. Ýöne olaryň tapawudy $8\cdot 10^{99}+1<100^{100}-1$-den kiçidir). Şoňa görä-de, bu takyk kwadrat-ýazmak bilen alnan sanlaryň biridir. Bu san hem gözlenilýän sandyr.

**285.** Tersine, güman edeliň. Onda meýdanyň *ABD, AMD, ACD* üçburçlyklaryň perimetrine bolan gatnaşygy hökman deň bolmalydyr( çünki olaryň her biri degişli üçburçluklaryň içinden çyzylan töwerekleriň radiusynyň ýarysy bolýar). *B, M* we *C* nokatlardan *AD* göni çyzyga $BH_b$, $MH_m$, $CH_c$ perpendikulýarlar geçireliň. $BH_bH_cC$ trapesiýadyr (bir göni çyzyga iki perpendikulýar ýaly $BH_b$ bilen $CH_c$ paralleldirler), onda $|MN_m|=\frac{|MC|\cdot|BH_b|+|BM|\cdot|CH_c|}{|BC|}$. Şunlukda, *ABD, AMD, ACD* üçburçluklaryň *AD* umumy esaslary bardyr, onda

$$S_{\Delta AMD}=\frac{|MC|}{|BC|}S_{\Delta ABD}+\frac{|BM|}{|BC|}S_{\Delta ACD}$$

$$\frac{S_{\Delta AMD}}{S_{\Delta AMD}}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABD}}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{r}{2}, \text{ onda}$$

$$P_{\Delta AMD}=\frac{|MC|}{|BC|}P_{\Delta ABD}+\frac{|BM|}{|BC|}P_{\Delta ACD}$$

($P_{\Delta xyz}$ bilen $xyz$ üçburçlugyň perimetri belgilenendir). Başga tarapdan,

$$\overrightarrow{AM}=\frac{|MC|}{|BC|}\overrightarrow{AB}+\frac{|BM|}{|BC|}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{DM}=\frac{|BM|}{|BC|}\overrightarrow{DC}+\frac{|MC|}{|BC|}\overrightarrow{DB}.$$

Diýmek, $\overrightarrow{AM}$ we $\overrightarrow{AB}$ wektorlar kollinear däldir:

1) $|AM|<\frac{|MC|}{|BC|}|AB|+\frac{|BM|}{|BC|}|AC|$;

2) $|DM|\le\frac{|BM|}{|BC|}|DC|+\frac{|MC|}{|BC|}|DB|$.

Ondan başga-da, alarys:

3) $|AD|=\frac{|BC|}{|BC|}|AD|=\frac{|BM|}{|BC|}|AD|+\frac{|MC|}{|BC|}|AD|$.

(1), (2) we (3)-i goşup, alarys:

$$|AM|+|DM|+|AD|<\frac{|MC|}{|BC|}(|AB|+|BD|+|AD|)+$$

$$+\frac{|BM|}{|BC|}(|AC|+|CD|+|AD|), \text{ ýagny}$$

$P_{\Delta AMD}<\frac{|MC|}{|BC|}P_{\Delta ABD}+\frac{|BM|}{|BC|}P_{\Delta ACD}$ gapma – garşylyk alyndy.

**286.** Yzygiderlikde düzme sanlar tükenikli diýip güman edeliň. Olaryň iň ulusyny alalyň. Yzygiderligiň hemme uly agzalary ýönekeý bolar, onsoňam täk (çünki olar 2-den uly). Olaryň hiç biri-de iň uly düzme sandan uly iki sanyň jemi bolup bilmez (goý ol $a$ deň bolsun), çünki onda ol iki täk sanyň jemi görnüşinde jübüt bolardy. Şoňa görä-de, yzygiderlikde yzygiderli nomerli iki sanyň arasyndaky tapawut $a$ sandan uly bolmaz. Ýöne, natural hatarda ýönekeý sanlary saklamaýan islendik uly uzynlykly aralyk bardyr ($n$ uzynlykly aralyk $(n+1)'+2$-den $(n+1)'+n+1$-e çenli). Yzygiderlik tükeniksizdir, onda sanlaryň arasynda haçanda bolsa bir wagt nobatdaky ýönekeý sandan soň ýönekeý san tapylmaz. Yzygiderligiň indiki agzasy düzme bolar. Ol yzygiderligiň iň uly düzme sanyndan uludyr. Düzme sanlar yzygiderlikde tükenikli diýip biz gapma-garşylyga geldik. Şeýlelikde, olar tükeniksiz köpdür.

**287.** Bu sanlary $0\le a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$ görnüşde belgiläliň. Onda $(a_1-a_2)+(a_1-a_3)+(a_1-a_4)+(a_1-a_5)+(a_2-a_3)+(a_2-a_4)+$

$$+(a_2-a_5)+(a_3-a_4)+(a_3-a_5)+(a_4-a_5)=(a_2-a_1)+(a_3-a_1)+$$

$$+(a_4-a_1)+(a_5-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_2)+(a_5-a_2)+(a_4-a_3)+$$

$$+(a_5-a_3)+(a_5-a_4)=4a_5+2a_4-2a_2-4a_1\Rightarrow a_5=a_1+\frac{1}{2}a_2-$$

$$-\frac{1}{2}a_4+\frac{1}{4}\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+$$

$$+(a_1+\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_4+\frac{1}{4})=2a_1+\frac{3}{2}a_2+a_3+\frac{1}{2}a_4+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{4}$$

(çünki sanlar otrisatel däldir).

$$\begin{cases} a_1=a_2=a_3=a_4=0, \\ a_5=\frac{1}{4} \end{cases}$$

bolanda $\frac{1}{4}$ baha eýe bolýar.

Jogaby: $\frac{1}{4}$.

**288.** Nokatlaryň berlen köplüginiň güberçek daşyna garalyň. Bu köpburçlukdyr. Onuň haýsy hem bolsa bir $[AB]$ tarapyna göni çyzyk geçireliň. Onda bu göni çyzykda köplügiň dogry 2 nokady bolar (bu nokatlar $A$ we $B$; şert boýunça köplügiň hiç bir üç nokady bir göni çyzykda ýatmaýar). Köplügiň galan hemme $(2k+1)$ nokatlary $(AB)$ göni çyzygyň bir tarapynda ýatarlar. Bu $(2k+1)$ nokatlaryň her bir $T$ nokadyna degişlilikde, $\Phi_T=A\hat{T}B$ burçy goýalyň. Ähli şeýle burçlar dürlüdir, çünki $\Phi_m=\Phi_n$ gabat gelmegi $M, N, A, B$ nokatlaryň bir töwerekde ýatýandygyny aňladýar, bu şert boýunça mümkin däldir. Şoňa görä-de, bu $(2k+1)$ nokatlary olara degişli $\Phi$ burçlaryň artýan tertibinde nomerlemek bolýar: $\Phi_{T_1}<\Phi_{T_2}<...<\Phi_{T_{2k+1}}$.

$A$, $B$ we $T_{k+1}$ nokatlaryň üstünden geçýän töwerege garalyň. $T_1$, ..., $T_k$ nokatlar bu töweregiň daşynda ýatýar (çünki $1\leq i<k+1$ bolanda $\Phi_{T_i}<\Phi_{T_{k+1}}$), $T_{k+2}$, ..., $T_{2k+1}$ nokatlar bolsa onuň içinde ýerleşýär (şoňa meňzeş). Diýmek, bu töwerek meseläniň şertlerini kanagatlandyrýar.

**289.** Köp agzamyzy $P(x)$ bilen belgiläliň. Hemme natural $k$ we bitin $x$ we $y$ üçin $x^k-y^k \vdots x-y$, onda hemme bitin $x$ we $y$ sanlar üçin $P(x)-P(y) \vdots (x-y)$.

$P(x)=1$, $P(x)=2$ we $P(x)=3$ deňlemäniň bitin köklerini degişlilikde, $x_1$, $x_2$, we $x_3$ bilen belgiläliň. Onda

$$\begin{cases} 1 = (3-2) \vdots (x_3 - x_2), \\ 1 = (2-1) \vdots (x_2 - x_1), \end{cases}$$

bu ýerden $|x_3-x_2|=|x_2-x_1|=1$. $x_3\neq x_1$, onda $x_1$, $x_2$ we $x_3$ üç yzygider bitin sanlardyr we $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$. Goý, $f(x)=5$ deňlemäniň bitin köki $f$ bolsun. Onda

$4=(5-1) \vdots (f-x_1)$, ýagny $(f-x_1)\notin\{1, 2, 4\}$, (1)

$3=(5-2) \vdots (f-x_2)$, ýagny $(f-x_2)\notin\{1, 3\}$, (2)

$2=(5-3) \vdots (f-x_3)$, ýagny $(f-x_3)\notin\{1, 2\}$, (3)

$x_1$, $x_2$ we $x_3$ fiksirlenen bolanda $f$ san bu şertleri birbahaly kesgitleýär (muňa hakyky okda (1), (2), (3) şertleri kanagatlandyrýan sanlaryň köplügini şekillendirip, ýeňil göz ýetirmek bolýar). Diýmek, $P(x)=5$ deňlemäniň birden köp bolmadyk bitin köki bardyr.

**290.** 7-den az komanda bolmagy mümkin däl. Hakykatdan-da, komanda iň bolmanda üç, (eger biri beýlekisini utsa, onda ikinjini utýan we birinjiden utulýan üçünji komanda bardyr) şoňa görä-de, bir komanda boýunça hemmesini utýan we hemmesinden utulýan bolmagy mümkin. Utany we utulany bar bolan $A$ komanda bardyr. Onda ol komanda üçden az bolmadyk duşuşykda utan we ýeňilendir. (Hakykatdanda, eger ol $B$ komandany utan bolsa, onda $C$ komanda bar bolup, ony hem utýar. $C$ komanda $B$ komandany utýar. $C$ komandany utýan $D$ komanda bardyr we ol $A$ komandadan utulýar. $D \neq B$, çünki $D$ komanda $C$ komandany utýar, $C$ utulýar, şoňa görä-de, bu komanda $B$, $C$ we $D$ komandalary utýar. Şuňa meňzeşlikde, üçden az bolmadyk duşuşykda onuň utulandygy subut edilýär). Onda bu komanda altydan az bolmadyk komanda bilen duşuşýar we hemme komanda 7-den az bolmaýar.

7 komanda üçin mysal: Olary $A_1, A_2, \ldots, A_7$ bilen belgiläliň. Goý, $A_1$ komanda $A_4$, $A_6$ we $A_7$-ni; $A_2$ komanda $A_1$, $A_5$, $A_7$-ni; $A_3$ komanda bolsa, $A_1$, $A_2$, $A_6$-ny; $A_4$ komanda $A_2$, $A_3$, $A_7$-ni; $A_5$ komanda $A_3$, $A_5$, $A_6$-ny utsun.

Jogaby: 7.

**291.** Dörtburçlugyň kwadratyň taraplaryna parallel diagonalynyň bardygyny subut etmek ýeterlikdir. Bu ýerden bolsa meseläniň tassyklamasy gelip çykýar. Içinden çyzylan $ABCD$ dörtburçlugyň meýdanyny tapalyň. Ol $\frac{1}{4}$ meýdany bolan kiçi kwadratdan we $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ meýdany bolan iki gapma-garşylykly üçburçluklardan düzülendir. Netijede, $ABCD$ dörtburçlugyň meýdany $\frac{1}{2}$-e deň bolýar. Onda ABCD dörtburçlugyň diagonallarynyň biri kwadratyň tarapyna parallel bolýar. Goý, $BD$ parallel däl bolsun. Kwadratyň tarapyna parallel $BD'$ kesim geçireliň ($D'$ nokat $D$ nokadyň ýatýan kwadratyň tarapynda ýatýan däldir). $ABCD'$ meýdanynyň $\frac{1}{2}$-e deň bolmagy üçin $ADC$ we $AD'C$ üçburçluklaryň meýdanlary deň bolmalydyr. Onda $AC$ diagonal kwadratyň tarapyna parallel bolar.

**292.** Subut edenimizde aşakdaky 2 belli matematiki faktlary ulanjakdyrys:

1. Güberçek köpburçlugyň perimetri özüni saklaýan güberçek köpburçlugyň perimetrinden uly däldir.

2. Tarapy 1-e deň bolan kwadratjyklaryndan ybarat setkanyň düwünlerinden depeleri bolan köpburçlugyň meýdany köpburçlugyň içinde ýatýan düwünleriniň sanynyň we 1 kemeldilen köpburçlugyň araçäginde ýatýan düwünleriniň sanynyň ýarysynyň jemine deňdir. (Pik formulasy).

Kwadratyň içine düşen düwünleriniň köplüginiň güberçek daşyna garalyň. Onuň predmeti $4a$ deň bolan kwadratyň perimetrinden uly däldir. Şoňa görä-de, bu güberçek daşyň araçäginde $4a$ düwünden artyk düwüniň ýatmagy mümkin däldr, çünki, tersine bolan ýagdaýynda, araçäkde käbir 2 düwüni araçäk boýunça geçýän uzynlygy 1-den kiçi ýol bilen birleşdirmek bolýar. Şunlukda, bu düwünleriň arasyndaky uzaklyk 1-den kiçi bolýar. Bu mümkin däldir, çünki olar birlik kwadrat setkanyň düwünleridir. (Eger biz merkezi käbir düwünde bolan 1 radiusly töwerek geçirsek, onda töweregiň merkezinde başga onuň içine hiç bir düwün düşmez.) $a^2$ (kwadratyň meýdany)≥(güberçek daşyň meýdany)=(güberçek daşyň içindäki düwünleriň möçberi)+ $+\frac{1}{2}$(onuň araçägindäki düwünleriň möçberi)−1=(güberçek daşdaky düwünleriň umumy sany) − $\frac{1}{2}$ (onuň araçägindäki düwünleriň möçberi)−1≥(kwadratdaky düwünleriň umumy möçberi)−$\frac{1}{2}\cdot 4a-1$=(kwadratdaky düwünleriň umumy sany)− $2a-1$.

Diýmek, kwadratdaky düwünleriň umumy sany $a^2+2a+1=(a+1)^2$ geçmeýär.

**293.** 3 nokatlara garalyň: 2 asteroida we planetanyň merkezi. Olaryň üstünden $S$ tekizlik geçireliň. Soňy $S$ tekizlikdäki $[AB]$ diametr perpendikulýar bolan şara gatnaşýan tekizlik geçireliň. Bu tekizlikler biri-biri bilen paralleldirler. Bu ýarymgiňişlikler degişlilikde we $BA$ nokatdan görüş zonasy bolýar. $A$-dan we $B$-den doly görünmeýän $S$ tekizlikde iň bolmanda 2 asteroide ýatyr, onda $A$ we $B$ nokatlardan görünýän asteroidlaryň umumy mukdary 37–2=35 geçmeýär. Onda ýa $A$, ýa-da $B$ gözlenýän nokat bolýar, çünki tersine bolan ýagdaýynda (haçanda $A$-dan we $B$-den 18-den az bolmadyk asteroid görünende), bu mukdar 18+18=36>35-den az bolmaz.

**294.** Toparda adamlaryň sany tükeniklidir, onda bu topardaky adamlaryň islendiginden az bolmadyk tanşy bar bolan $A$ adam tapdyrar. Eger ol hiç biri bilen tanyş däl bolsa, onda hiç biri onuň bilen tanyş däldir. Eger onuň $k>0$ tanyşlary bar bolsa, olaryň islendik ikisiniň dürli sany tanyşlary bardyr. Olaryň her biriniň tanyşlarynyň sany 1 az däl we $k$-dan ($A$ saýlama boýunça) köp däldir, onda bu tanyşlaryň köplüginiň içinde 1-den $k$-a çenli hemme sanlar hökman duşuşmalydyrlar (tersine, Dirihle prinsipi boýunça $A$-nyň haýsy hem bolsa iki tanşynyň deň sany tanyşlary bolmalydyr). Şeýlelikde, $A$-nyň tanyşlarynyň arasynda dogry bir tanşy bar bolan adam tapylýar.

**295.** Islendik sütüni nol edip bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Hakykatdan-da, bu sütüniň ähli sanlaryndan 1-i aýyrmak beýleki sütünlere täsir etmeýär, bir setiriň sanlaryny ikeltmeklik nol sütüne täsir etmeýär we beýleki sütünlerdäki natural sanlar goýulýandyr. Goý, natural sanlardan duryan käbir sütün bar bolsun. Onuň hemme sanlaryndan birlik emele gelýänçä 1-i aýralyň. Şunlukda, sütündäki sanlaryň jemi kemeler. Eger sütündäki sanlaryň hemmesi 1-e deň bolmasa, onda biziň sütünimiz bilen kesişmesinde 1 duryan sütüni ikeldeliň, soňra sütüniň hemme sanlaryndan 1-i aýralyň. Bu operasiýa sütüniň 1-den uly hemme sanlaryndan 1-i aýyrmaklyga deňgüýçlüdir. Ony birnäçe gezek dowam edip, diňe birliklerden duryan sütün alarys. Bu sütüniň sanlaryndan 1-i aýryp, diňe noldan duryan sütün alarys. Şunuň ýaly edip hemme sütünlerde nol alarys. Şeýlelikde, diňe noldan ybarat bolan tablisa alnar.

**296.** Gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny şeýle girizeliň. Koordinatalar başlangyjyny 1 we 2 tarapyň kesişme nokadyna geçireliň, ok we ölçeg birligini 2 we 3 tarapynyň kesişme nokady (1; 0) koordinatasy bolar ýaly edip, saýlap alalyň. Goý, $A(\frac{1}{3}+x,\ \frac{1}{3}+y)$ – gözlenýän nokat bolsun. $P$ nokadyň absissasyny $X(P)$, ordinatasy bolsa $Y(P)$ bilen belgiläliň.

$$\begin{cases} X(A_{1234}) = \frac{1}{3} + 4x \\ Y(A_{1234}) = \frac{1}{3} + 4y \end{cases}, \text{ onda}$$

$$X\Big(\underbrace{A_{12341234\ldots1234} = \frac{1}{3} + (-4)^k \cdot x}_{k \text{ gezek}}\Big),$$

$$Y\Big(\underbrace{A_{12341234\ldots1234} = \frac{1}{3} + (-4)^k \cdot y}_{k \text{ gezek}}\Big).$$

$x \neq 0$ ýa-da $y \neq 0$ bolanda

$\max\left\{\left|\frac{1}{3} + (-4)^k \cdot x\right|, \left|\frac{1}{3} + (-4)^k \cdot y\right|\right\} > 1$ bolar ýaly $k$ sany saýlap almak bolýar, ýagny $\underbrace{A_{12341234\ldots1234}}_{k \text{ gezek}}$ nokat şerti kanagatlandyrýar we meseläniň jogaby bolýar.

**297.** Sanlarymyzy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ bilen belgiläliň. Eger hemmesi deň bolsa, onda $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{100}=2$ we $\sum_{i=1}^{50} a_i = 100$ bolýar. Goý, olaryň arasynda 2 dürli san bar bolsun. Goý, $a_1 \neq a_2$ bolsun. Aşakdaky sanlara garalyň:

$F_1=a_1,$

$F_2=a_2,$

$F_3=a_1+a_2,$

$F_4=a_1+a_2+a_3,$

―――――――――――

$f_{101}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}.$

Dirihle prinsipine görä, $f_1, f_2, ..., f_{101}$ sanlaryň arasyndan 100-i böleniňde deň galyndy berýän iki san tapdyrar. Bu sanlaryň $f_1$ we $f_2$ bilen gabat gelmeýändigini ýeňil görmek bolýar, çünki $0<|f_2-f_1|<100$. Goý, bu $f_i$ we $f_j$, $f_i<f_j$ bolsun.

Onda $f_j-f_i \vdots 100$. $0<-f_i+f_j<200$, onda $f_j-f_i=100$, Ýöne $f_j-f_i$ san biziň käbir sanlarymyzyň jemidir. Diýmek, gözlenilýän san mydama bar.

**298. Birinji usul.** Meseläniň şertinden

$(b^2-c^2)+(a^2-p^2)=(a^2+b^2)-(c^2+p^2)=1-1=0$ gelip çykýar, bu ýerden $b^2-c^2=-(a^2-p^2)$-y alarys. Onda

$$0\leq(ab+cp)^2=a^2b^2-c^2p^2+2abcp=$$
$$=a^2b^2+c^2p^2+2abcp-(ab+bp)^2=$$
$$=a^2b^2+c^2p^2+2abcp-a^2b^2-c^2p^2-2abcp=$$
$$=a^2b^2+c^2p^2-a^2b^2-c^2p^2=(a^2-p^2)(b^2-c^2)=-(a^2-p^2)2\leq0,$$

bu ýerden $(ab+cp)^2=0$ we $ab+cp=0$;

**Ikinji usul:** $a^2+b^2=1$ we $c^2+p^2=1$, onda şeýle $\alpha$ we $\beta$ nokatlar tapylyp, aşakdaky deňlikler ýerine ýetýändir:

$$\sin\alpha=a,\ \cos\alpha=b,\ \sin\beta=c,\ \cos\pi=p,$$
$$0=ac+bp=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta) \text{ we}$$
$$ab+cp=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=$$
$$=\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$$

Jogaby: $ab+cp=0$.

**299.** Gurluşy: merkezi $A$ nokat bolan $BCDE$ dogry tetraedr guralyň. Her bir $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$ we $ACDE$ 4 üçgranly burçlardan $A$ depeli we emele getirijisi degişlilikde, $AB$, $AC$ we $AD$; $AB$, $AC$ we $AE$; $AB$, $AD$ we $AE$; $AC$, $AD$ we $AE$ bolan konus çyzalyň. Bu konuslaryň her biriniň içinde konusda saklanýan we $A$ depeden çykýan islendik şöhläni kesýän şar çyzmak bolar, ýagny konusyň içinden çykýan hemme şöhleleri ýapýan şar (diýmek, üçgranly burçuň içini). Şeýle sanlar tükeniksiz köpdür (hemmesi dürli radiusly). Depesi $A$ nokatda bolan her bir tükenikli konus üçin onuň daşynda bolan şar bardyr. Şoňa görä-de, şar bilen umumy nokady bolmadyk, $A$ nokatdan geçmeýän, $A$ nokatdan çykýan islendik şöhle ol şarlaryň birini kesýän 4 sany şar almak bolýar (çünki islendik şöhle 4 üçgranly burçlaryň birinde saklanýar).

Jogaby: Bar.

300. Şert boýunça, $|x_k|=|x_{k-1}+1|$, ýagny

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1}+1, \\ x_k = -x_{k-1}-1 \end{cases}$$

$\sum_{i=0}^{k} x_i = \frac{(x_k+1)^2-(k+1)}{2}$ deňligi induksiýa boýunça subut edeliň.

$0 = x_0 = \frac{(x_0+1)^2(0+1)}{2}$. Goý, $\sum_{i=0}^{k} x_i = \frac{(x_k+1)^2-(k+1)}{2}$ bolsun.

$x_{k+1}=x_k+1$; $\sum_{i=0}^{k} x_i = \frac{(x_k+1)^2-(k+1)}{2}$.

I. $x_{k+1}=x_k+1$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i = x_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} x_i = x_k + 1 + \frac{(x_k+1)^2-(k+1)}{2} =$$

$$\frac{x^2k+4x_k+2-k}{2} = \frac{(x_k+2)^2-(k+2)}{2} = \frac{(x_{k+1}+1)^2-(k-2)}{2}.$$

II. $x_{k+1}=-x_k-1$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i = x_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} x_i = -x_k - 1 + \frac{(x_k+1)^2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{x_k^2-k-2}{2} = \frac{(x_{k+1}+1)^2-(k+2)}{2}.$$

Diýmek, $\sum_{i=0}^{1975} x_i = \frac{(x_{1975}+1)^2-1976}{2}$.

1976 sana golaý kwadrat $1936=44^2$-yna deň, onda $\left|\sum_{i=0}^{1976} x_i\right| \geq 20$.

Eger

$x_0=x_2=x_4=...=x_{1932}=0$,

$x_1=x_3=x_5=...=x_{1931}=-1$,

$x_{1933}=1,\ x_{1934}=2,\ x_{1935}=3,\ \ldots,\ x_{1975}=43$ bolsa, deňlik alynýar.

Jogaby: 20.

**301.** Onuň üçin, $S_{\Delta BC_1A_1}=S_{\Delta B_1A_1C_1}$ deňligiň ýerine ýetýändigini subut etmek ýeterlikdir. Goý,

$$p=\frac{|B_1D||A_1D||C_1D|}{|BD||AD||CD|}\ \text{bolsun.}$$

$$S_{\Delta A_1DC_1}=\frac{|DC_1||DA_1|}{|AD||CD|}S_{\Delta ADC}\ \text{we}\ S_{\Delta ADC}=\frac{|B_1D|}{|BD|}(S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ADC}),$$

onda $S_{\Delta A_1DC_1}=p(S_{ABC}-S_{ADC})$. Şuňa meňzeşlikde,

$$S_{\Delta A_1DB_1}=p(S_{ABC}-S_{ADB}),\ S_{\Delta B_1DC_1}=p(S_{ABC}-S_{BDC}).$$

Bu deňlikleri goşup, alarys: $S_{\Delta B_1A_1C_1}=2pS_{\Delta ABC}$ ýa-da

$\frac{B_1D}{BD}=\frac{1}{2}$-i göz öňünde tutup, $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{|A_1D||C_1D|}{|AD||CD|}S_{\Delta ABC}$-ni alarys.

$|A_1D||BC|\sin B\hat{A}_1A=|BC_1||CD|\sin A\hat{C}_1D=2S_{\Delta BDC}$ we

$|C_1D||AB|\sin A\hat{C}_1D=|A_1B||AD|\sin B\hat{A}_1A=2S_{\Delta ABD}$.

Bu ýerden $|A_1D||BC||C_1D||AB|=|B_1C||CD||A_1B||AD|$, ýagny

$$\frac{|A_1C|}{AD}\cdot\frac{|C_1D|}{CD}=\frac{|BC_1|}{BC}\cdot\frac{|BA_1|}{BA}\ \text{we}$$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{|BC_1|}{|BC|}\cdot\frac{|BA_1|}{|BA|}S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BA_1C_1}.$$

**302.** Barlanylýan deňsizligiň iki bölegi hem otrisatel däldir, onda sag we çep böleginiň kwadratlarynyň tapawudynyň otrisatel däldigini subut etmeklik ýeterlikdir. Alarys ($x_k=0$ ýa-da 1, bu ýerden $x_k^2$):

$$((1+\sqrt{2})\sqrt{\sum_{k=0}^{p}\frac{x_k}{2^k}})^2-(\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{(\sqrt{2})^i})^2=(3+2\sqrt{2})\sum_{k=0}^{p}\frac{x_k}{2^k}-(\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{(\sqrt{2})^i})^2+$$

$$+2\sum_{0\le i\le j\le p}\frac{x_ix_j}{(\sqrt{2})^i(\sqrt{2})^j})=(3+2\sqrt{2})\sum_{k=0}^{p}\frac{x_k}{2^k}-\sum_{k=0}^{p}\frac{x_k}{2^k}-2\sum_{0\le i\le j\le p}\frac{x_ix_j}{2^{\frac{1}{2}(i+j)}}=$$

$$2\Big((1+\sqrt{2})\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}-2\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{x_ix_j}{2^{\frac{1}{2}(i+j)}}\Big)=2\sum_{i=0}^{p}\Big(\frac{(1+\sqrt{2})x_i}{2^i}-\sum_{j=i+1}\frac{x_ix_j}{2^{\frac{1}{2}(i+j)}}\Big)=$$

$$2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\Big(1+\sqrt{2}-\sum_{\alpha=1}^{p-i}\frac{x_{i+2}}{(\sqrt{2})^\alpha}\Big)\geq 2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\Big(1+\sqrt{2}-\sum_{\alpha=1}^{p-i}\frac{1}{(\sqrt{2})^\alpha}\Big)\cdot$$

$$\cdot 2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\Big(1+\sqrt{2}-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big)=2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\Big(1+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-2}\Big)=2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\cdot$$

$$\cdot(1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1))=2\sum_{i=0}^{p}\frac{x_i}{2^i}\cdot 0=0.$$

**303.** $A\hat{C}E=B\hat{C}D-D\hat{C}E=\frac{1}{2}B\hat{C}D$, şunlukda, $A\hat{C}E=B\hat{C}A-D\hat{C}E$, çünki bäşburçluk deňtaraply, onda $ABC$ we $CDE$ üçburçluklar deňýanly we $A\hat{C}B=C\hat{A}D$, $E\hat{C}D=C\hat{E}D$. $ED$ we $AB$ göni çyzyklaryň arasyndaky we $AE$ göni çyzygyň burçlarynyň jemi

$B\hat{A}E+A\hat{E}D=C\hat{E}D+A\hat{E}C+E\hat{A}C+C\hat{A}B=$

$=180^0-A\hat{C}E+D\hat{C}E+B\hat{C}A=180°$-a deňdir. Şoňa görä-de, $AB$ we $ED$ göni çyzyklar parallel, $|AB|=|ED|$. Şunlukda, $ABDE$ parallelogram we $|AE|=|BD|$, $BCD$ bäşburçluk deňtaraply, $B\hat{C}D=60°$, $A\hat{C}E=\frac{1}{2}B\hat{C}D=30°$.

**304.** $3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2xyz(x+y+z)=$
$=(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xy^2z-2x^2yz-2xyz^2)+$
$+(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz^2-2x^2yz-2xy^2z)+$
$+(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz-2xy^2z-2xyz^2)=$
$=(xy+yz-xz)^2+(xz+yz-xy)^2+(xz+xy-yz)^2$,
$xy+yz-zx=(x+z)y-xz\leq x+z-x\check{z}=(x-1)(1-z)+1\leq 1$,
$xy+yz-zx\geq -zx\geq -1$.

Bu ýerden $(xy+yz-zx)^2\leq 1$.

Şoňa meňzeşlikde, $(xz+yz-xy)\leq 1$, $(xz+xy-yz)^2\leq 1$.

$3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$

$2xyz(x+y+z)=(xy+yz-xz)^2+(xz+yz-xy)^2+$
$+(xz+xy-yz)^2\leq 1+1+1=3$.

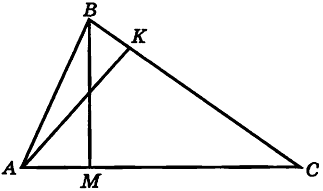
**305.** Kök aşagyndaky aňlatmany aşakdaky ýaly özgerdýäris:

$$1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}=27-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}-26=$$

$$=3^3-3\cdot3^2\cdot\sqrt[3]{26}+3\cdot3\cdot\sqrt[3]{26^2}-\sqrt[3]{26^3}=(3-\sqrt[3]{26})^3.$$

Diýmek, bu san $\sqrt[3]{(3-\sqrt[3]{26})^3}+\sqrt[3]{26}=3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26}=3$-e deňdir.

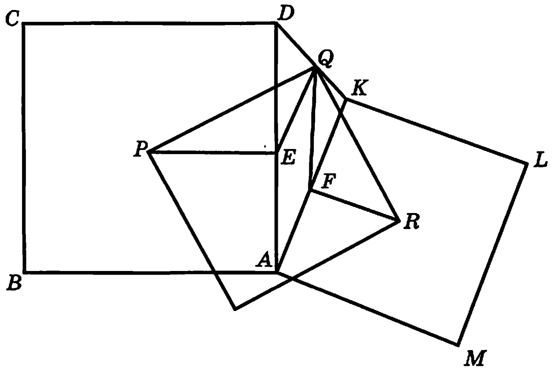
**306.** Berlen $ABC$ üçburçlugyň ýitiburçly bolan ýagdaýyna seredeliň. Onuň $AK$ we $BM$ beýikliklerini geçireliň. Şeýlelik bilen, $AK$ $AKC$ gönüburçly üçburçlugyň katetidir. Onda $AK<AC$ deňsizlik dogrudyr. Edil şuňa meňzeş $BM<BC$. Bu deňsizlikleri goşup, $AK+BM<AC+BC$ deňsizligi alarys.




$ABC$ üçburçlugyň gönüburçly we kütekburçly bolan ýagdaýlary hem şuňa meňseş seredilýär.

**307.** Meseläniň şertine görä $N$ täk san. Goý, $N$ käbir täk sanyň kwadraty bolsun. Bu sany $10a+b$ (bu ýerde $a$ we $b$ natural sanlar we $b\leq9$, şeýle hem $b$ täk san) görnüşde aňladalyň. Onda $N=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$. $N$ sanyň soňky iki sifriniň $20ab+b^2$ jem bilen kesgitlenýändigini görmek kyn däldir. Bu jemde birinji goşulyjy nol bilen tamamlanýar we onuň iň soňkudan öňki sifri jübüt. Ikinji goşulyjy $b^2$ birbelgili täk sanyň kwadraty we aşakdaky sanlaryň biri bilen gabat gelýär: $1^2=1$; $3^2=9$; $5^2=25$; $7^2=49$; $9^2=81$ sanlaryň biri bilen gabat gelýär. Şoňa görä-de, $20ab$ we $b^2$ goşulanda soňky sifri täk, onuň öň ýanyndaky sifri bolsa jübüt bolan san alynýar. Şoňa görä-de, $N=(10a+b)^2$ sanyň ähli sifrleri täk bolup bilmez.

**308.** Goý, $P$ nokat $ABCD$ kwadratyň merkezi, $R$ nokat




bolsa $AKLM$ kwadratyň merkezi, $Q$ nokat bolsa $KD$ kesimiň ortasy bolsun. $P$, $Q$, $R$ nokatlaryň käbir kwadratyň depeleridigini, ýagny $PQR$ üçburçlugyň $PR$ gipotenuzaly deňýanly gönüburçly üçburçlukdygyny subut edeliň.

$AD$ we $AK$ taraplara $PE$ we $RF$ beýiklikleri indereliň. $E$ we $F$ nokatlar $AD$ we $AK$ taraplaryň ortalarydyr. $AEQF$ dörtburçlugyň parallelogramdygyna, ýagny $AE=FQ$ we $EQ=AF$ bolýanlygyna göz ýetirmek ol diýen kyn däldir. Iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça $PEQ$ we $QFR$ üçburçluklar deňdirler. Hakykatdan-da,

$PE=EA=QF$ we $RF=FA=EQ$;

şeýle hem $\angle PEQ=\angle PED+\angle DEQ=\angle PED+\angle QFK=$
$=90^0+\angle QFK=\angle RFK+\angle QFK=\angle RFQ$.

Üçburçluklaryň deňliginden $PQ=QR$ gelip çykýar.

Eger $RFQ$ üçburçlugy $F$ depe $E$ depe bilen gabat geler ýaly parallel göçürsek we $E$ nokadyň daşynda sagat diliniň garşysyna 90° öwürsek, onda $QEP$ üçburçlugy alarys. Diýmek, $RQ$ kesim parallel göçürilenden soňra we 90°-a öwrülenden soňra $PQ$ kesim bilen gabat gelýär. Bu bolsa $QR$ we $QP$ şöhleleriň arasyndaky burçuň 90°-a deňligini görkezýär. Şeýlelik bilen $PQ=QR$, $\angle PQR=90°$. Edil şuňa meňzeş $PS=SR$,

$\angle PSR=90°$ bolýanlygy subut edilýär.

Biz *ABCD* we *AKLM* kwadratlaryň özara ýerleşişiniň bir ýagdaýyna seretdik. Olaryň özara ýerleşişiniň beýleki ýagdaýlary hem şuňa meňzeş seredilýär.

**309.** Goý, $x$, $y$, $z$ meseläniň şertini kanagatlandyrýan sanyň sifrleri bolsunlar. Onda olaryň iň bolmanda biri 9-a deň bolmaly. Eger olaryň iň bolmanda biri 9-a deň bolmasa, onda olaryň jemi 24-den uly bolup bilmez. Şunlukda, diňe bir sifr 9-a deň bolsa, onda beýleki iki sifriň her haýsy 8-e deň bolmaly. Eger sifrleriň ikisi 9-a deň bolsa, onda üçünji sifr 7-ä deň bolmaly. Şeýlelikde, sifrleriniň jemi 25-e deň üçbelgili sanlar: 988, 898, 889, 997, 979, 799.

Bu sanlardan diňe 979-yň 11-e bölünýändigini barlap tapmak kyn däldir.

**310.** Komandalaryň birine seredeliň. Ol komandalaryň 8-i bilen oýnapdyr we 9-y bilen bolsa oýnamandyr. Eger bu soňky 9 komandanyň arasynda özara duşuşmadyk iki komandanyň bardygy belli bolsa, onda mesele çözülýär. Goý, bu 9 komandanyň arasynda özara duşuşmadyk iki komanda ýok diýip tersinden güman edeliň. Onda bu 9 komanda öz aralarynda jemi 36 gezek oýnamaly bolardylar. Emma olar her bir turda özara 4 oýun oýnap bilerdiler we 8 turda jemi 32 oýun geçirip bilerdiler. Diýmek, bu 9 komandanyň ählisi özara duşuşyp bilmeli däl. Bu bolsa özara duşuşmadyk 3 komandanyň bardygyny görkezýär.

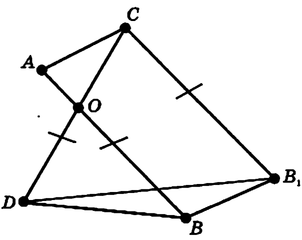
**311.** Bilmez.

$a+b+c=0$ deňlikden $ax+by+cz=ax-(a+c)y+cz=$ $=a(x-y)+c(z-y)\geq 0$ deňsizligi alarys.

Sebäbi $a\leq 0$, $x-y\leq 0$ we $c\leq 0$, $z-y\leq 0$.

**312.** Bilmez. Eger $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2$ bolsa, onda $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$ san düzme sandyr, sebäbi $2k-m\neq 1$. Tersine bolan halatynda $5n+3=2m+1$ we $(m-1)^2=m^2-(2m+1)+2=(3n+1)-(5n+3)+2=-2n<0$ (bu bolsa mümkin däldir).

**313.** $CB_1 \| AB$ we $CB_1=AB$ bolar ýaly edip, $CB_1$ kesimi gurýarys.




Onda $ABB_1C$ dörtburçluk parallelogramdyr, ýagny $AC=BB_1$. $BB_1D$ üçburçlukdan $BB_1+BD \geq B_1D$ deňsizligi, diýmek, $AC+BD \geq B_1D$ deňsizligi alarys. $\angle AOC=60°$ bolany üçin $\angle DCB_1=60°$ (atanak burçlar). $CD=CB_1=1$ we $\angle DCB_1=60°$ bolany üçin $CB_1D$ üçburçluk deňtaraplydyr, ýagny $B_1D=1$. Şeýlelik bilen $AC+BD \geq 1$.

**314.** Bolmaz. Goý, $f(x)=Ax^2+Bx+C$ we onuň diskriminanty $B^2-4AC$ bolsun. Birinji operasiýa ýerine ýetirilenden soň $f(x)$ aşakdaky üçagza özgerer: $(A+B+C)x^2+(B+2A)x+A$.

Bu üçagzanyň diskriminantyny tapalyň:

$(B+2A)^2-4(A+B+C)\cdot A=B^2+4AB+4A^2-4A^2-4BA-4CA=B^2-4AC$.

Ikinji operasiýa ýerine ýetirenden soň aşakdaky üçagzany alarys:

$Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$.

Onuň diskriminantyny tapalyň:

$(B-2C)^2-4C(A-B+C)=B^2-4BC+4C^2-4CA+4CB-4C^2=B^2-4AC$.

Görnüşi ýaly, rugsat berlen operasiýalar geçirilende diskriminant öňküligine saklanýar. Emma $x^2+4x+3$ üçagzanyň diskriminanty $16-4\cdot3=4$-e deň, $x^2+10x+9$ üçagzanyň diskriminanty bolsa $100-4\cdot9=64$-e deň. Diýmek, birinji kwadrat üçagzadan ikinji kwadrat üçagzany almak mümkin däl.

**315.** $x$, $y$ we $z$ sanlaryň 3-e bölünende birmeňzeş galyndylary berýänligini subut edeliň. Şonda $x+y+z=(x-y)(y-z)(z-x)$ san 27-ä bölüner. Eger $x$, $y$ we $z$ sanlaryň üçüsem 3-e bölünende üç dürli galyndylary berýän bolsadylar, onda $(x-y)(y-z)(z-x)$ san 3-e bölünmän, $x+y+z$ san bolsa 3-e bölünerdi. Şeýlelik bilen $x$, $y$ we $z$ sanlaryň iň bolmanda ikisi 3-e bölünende deň galyndylary berýär, $x+y+z$ san bolsa bu ýagdaýda 3-e bölünýär. Şoňa görä-de, üçünji san hem şol bir galyndyny berýär.

**316.** 2004 we 2005 sanlary degişlilikde, $a$ we $b$ bilen belgiläliň. Onda berlen sanlary aşakdaky ýaly ýazyp bileris: $a \cdot 10001 \cdot b \cdot 100010001$ we $b \cdot 10001 \cdot a \cdot 100010001$. Diýmek, bu sanlar deň.

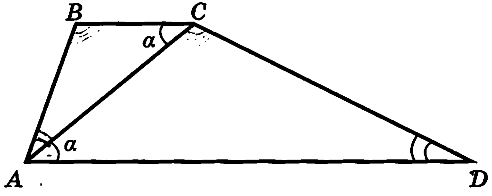
**317.** Berlen droblaryň umumy maýdalawjylary hökmünde olaryň ählisiniň maýdalawjylarynyň köpeltmek hasylyny alyp, jemde sanawjysynyda **1003** sany täk sanyň jemi, ýagny täk san bolan droby alarys. Drob gysgaldylandan soň hem onuň sanawjysynyň täk san boljaklygy düşnüklidir.

**318.** Eger 2002 san talap edilýän görnüşde ýerleşdirilen bolsa, onda olary bir-biriniň ýanynda duran 11 sandan ybarat 182 topara bölüp bolardy. Bu toparlaryň her birinde 7-ä galyndysyz bölünýän iň bolmanda iki san bolardy. Şoňa görä-de, ýerleşdirilen sanlaryň iň bolmanda 364-si 7-ä galyndysyz bölünerdi. Emma 1-den 2002-ä çenli sanlaryň arasynda diňe 286 san 7-ä galyndysyz bölünýär. Şoňa görä-de, sanlary şeýle ýerleşdirmek mümkin däl.

**319.** $AD$ we $BC$ esasly $ABCD$ trapesiýanyň $AC$ diagonaly ony $ABC$ we $ACD$ özara meňzeş iki üçburçluga bölýän bolsun. $\angle BAC=\angle CDA$, $\angle ABC=\angle ACD$ we $\angle CAD=\angle ACB$ (atanak ýatýan burçlar) bolýanlygyna göz ýetirmek kyn däldir. Goý, $CD=2AB$ bolsun. Onda

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AB}=2$$

gatnaşygy ýazyp bileris. Bu gatnaşykdan bolsa $AD=2AC$ we $AC=2BC$ deňlikleri alarys. Soňky iki deňlikden $AD=4BC$ alarys. Trapesiýanyň esaslarynyň gatnaşygy 4-e deň.

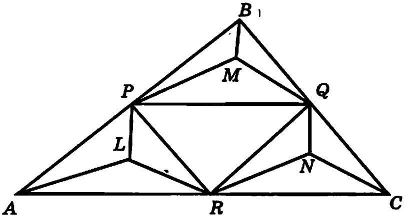


**320.** Eger $n$ jübüt bolsa, onda $4^n$ san 6 sifr bilen tamamlanýar, $4^n-1$ san bolsa 5 sifr bilen tamamlanýar we 5-e bölünýär. Emma n islendik natural san bolanda-da $5^n-1$ san 5-e bölünmeýär.

Eger $n$ täk bolsa, onda $4^n-1$ san 3-e bölünýär, emma $5^n-1$ san bolsa 3-e bölünmeýär. Şoňa görä-de, $5^n-1$ görnüşli san $4^n-1$ görnüşli sana bölünmez.

**321.** Eger ilkibaşda üçburçlugyň her bir tarapy $n$ şardan durýan bolsa, onda onuň her bir tarapyny 1 şar ulaltmak üçin ýene-de $n+1$ şar gerek bolar. Munuň üçin artyk 51 şardan başga-da ýene-de 12 şar gerek bolar. Onda $n+1=51+12$; $n=62$ we gutuda $1+2+...62+51=(1+62)+(2+61)+...+(31+32)+51=63\cdot 31+51=2004$ şar bar eken.

**322.**




Goý, $ABC$ berlen ýitiburçly üçburçluk we $P$, $Q$, $R$ nokatlar bolsa degişlilikde, $AB$, $BC$, $AC$ taraplaryň ortalary bolsunlar. $APR$, $PBQ$, $PQC$ üçburçluklar berlen $ABC$ üçburçluga meňzeş bolany üçin olar hem ýitiburçly üçburçluklar. Şonuň üçin olaryň beýiklikleriniň kesişme nokatlary bolan $L$, $M$, $N$ nokatlar bu üçburçluklaryň içinde ýatyr.

$LPMQNR$ altyburçlugyň $s$ meýdany

$S=S_{PQR}+S_{PMQ}+S_{QNR}+S_{RLP}=\frac{1}{4}S+S_{PMQ}+S_{QNR}+S_{RLP}$ deňdir.

Bu ýerde $S$ meýdan $ABC$ üçburçlugyň meýdanydyr.

$\Delta APR=\Delta PBQ=\Delta RQC$ bolany üçin $\Delta PMQ=\Delta ALR$ we $\Delta QNR=\Delta PLA$. Şoňa görä-de, $S_{PMQ}+S_{QNR}+S_{RLP}=S_{APR}=\frac{1}{4}S$. Diýmek, $S=\frac{1}{4}S$.

**323.** Goý, $xy$ berlen ikibelgili san bolsun. Onda meseläniň şertine görä $(x+y)+(x+y)^2=10x+y$ ýa-da $9x=(x+y)^2$. Bu ýerden $x$ sifriň sanyň kwadraty bolmalydygy gelip çykýar. Diýmek, ol ýa 1-e, ýa 4-e, ýa-da 9-a deň bolmaly. Eger $x=1$ bolsa, onda $9\cdot1=(1+y)^2$; $y=2$ bolar. Eger $x=4$ bolsa, onda $9\cdot4=(4+y)^2$; $y=2$ bolar. Eger $x=9$ bolsa, onda $9\cdot9=(9+y)^2$; $y=0$ bolar.

Jogaby: 12, 42, 90.

**324.** Goý, ol üçbelgili san $xyz$ bolsun, onda meseläniň şertine görä $xy+yx+xz+zx+yz+zy=2xyz$ bolar. Bu deňligi ýönekeýleşdirip alarys: $11(x+y+z)=100x+10y+z$ ýa-da $89x=10z+y$. Bu deňligiň çep bölegi ikibelgili san bolany üçin $x=1$ bolmaly. Onda $y=9$ we $z=8$ bolar. Gözlenilýän san 198-e deňdir.

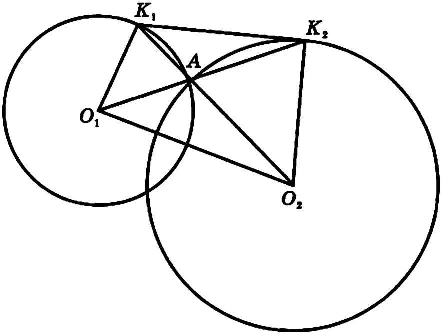
**325.** Meseläniň şertinde berlen deňligi $a(x^2+2xy+y^2)+b(x+y)+c=(ax^2+bx+c)+(ay^2+by+c)+xy$ ýa-da $2axy=c+xy$ görnüşde ýazýarys. Bu deňlikde ilki $x=0$ diýip $c=0$, soňra bolsa $x=y=1$ diýip $a=\frac{1}{2}$-i alýarys.

Diýmek, meseläniň çözülişi bolup, $f(x)=\frac{x^2}{2}+bx$ $(b\in R)$ görnüşli islendik funksiýa hyzmat edýär.

**326.** Meseläniň şertinden $(n+1)^2$ sanyň 5 sifr bilen, takyk sanyň kwadraty bolany üçin 25 bilen gutarýanlygy gelip çykýar. Diýmek, $n^2+2n$ san 24 bilen tamamlanýar we onuň iň soňky sifriniň öň ýanyndaky sifr 2-ä deňdir.

**327.** $O_1AK_1$ we $O_2AK_2$ üçburçluklar deňýanly we olaryň esaslaryndaky burçlar deň bolany üçin olar meňzeşdirler. Onda $\angle K_1O_1A=\angle K_2O_2A$. Diýmek, $O_1O_2K_2K_1$ dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolar. Şoňa görä-de, bu töweregiň içinden çyzylan burçlar bolany üçin $\angle O_1O_2A=\angle K_1K_2A$.

**328.** Arifmetiki amallaryň ähli mümkin bolan yzygiderligine (kombinasiýalaryna) seredeliň. + + we + − yzygiderlik aşakdaky deňlikleri berer: $83+A+97=8784$ we $83+A-97=8784$. Olardan $A=8604$ we $A=8798$-i alarys.




Birinji amal aýyrmak bolup bilmez. Sebäbi $A$-nyň položitel bahasynda $83-A*97$ aňlatma * haýsy amal bolandada $83+97$ uly däldir.

+· we ·+ amallaryň yzygiderligi hem hiç bir çözüwi bermeýär. Sebäbi $8784-83=8701$ we $8784-97=8687$ degişlilikde, 97-ä we 83-e bölünmeýär. $83\cdot A-97=8784$ deňlikden $A=107$ bolýanlygyny tapýarys.

Amallaryň beýleki yzygiderliklerine seredip täze çözüwleri diňe +: berýänligine göz ýetirýäris. Diýmek, berlen deňlik aşakdaky dört deňligiň haýsy hem bolsa biri bolup biler:

$83+8604+97=8784$, $\quad 83+8798-97=8784$,

$83\cdot 107-97=8784$, $\quad 83+843\,997:97=8784$.

**329.** $2^{62}+1=2^{62}+2\cdot 2^{31}+1-2^{32}=(2^{31}+1)^2-(2^{16})^2=$
$=(2^{31}+2^{16}+1)x(2^{31}-2^{16}+1)$.

Diýmek, $2^{62}+1$ san $2^{31}+2^{16}+1$ sana galyndysyz bölünýär.

**330.** Aşakdaky ýaly özgertmeleri geçirýäris:

$$a^2+ab+b^2-3a-3b+3=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+ab-a-b+1=$$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)=((a-1)+\frac{1}{2}(b+1))^2+\frac{3}{4}(b-1)^2.$$

Bu ýerden bu deňsizligiň $a$-nyň we $b$-niň $a=b=1$ bahalaryndan başga islendik bahalarynda ýerine ýetjekdigi görülýär.

**331.** $2xy\le x^2+y^2$ bolany üçin
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 3(a^2+b^2+c^2)$.
Diýmek, $(7-d)^2\le 3(13-d^2)$, $2d^2-7d+5\le 0$, ýagny
$1\le d\le\frac{5}{2}$. $d=\frac{5}{2}$ deňlik $a=b=c=\frac{3}{2}$ bolanda ýerine ýetýär.

**332.** Gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny iki usul bilen kesgitläp aşakdaky deňligi ýazyp bileris: $ch=ab$, bu ýerden $h=\frac{ab}{c}$. $h$-yň bu bahasyny $c+h>a+b$ deňsizlikde ornuna goýup alarys: $c+\frac{ab}{c}>a+b$. Bu deňsizligiň iki bölegini hem $c(c>0)$ köpeldip, deňgüýçli deňsizligi alarys:
$c^2-c(a+b)+ab>0$, ýa-da $(c-a)(c-b)>0$.
Soňky deňsizlik dogrudyr. Sebäbi gipotenuza katetleriň her birinden uludyr.

**333.** Jogaby: $c<0$.
$f(x)=ax^2+bx+c$ funksiýa seredeliň. Şerte görä bu funksiýa nola deň däldir. Şoňa görä-de, onuň grafigi bolan parabola ýa tutuşlygyna $Ox$ okundan ýokarda, ýa-da tutuşlygyna $Ox$ okundan aşakda ýerleşendir.
$f(1)=a+b+c$ bolýar. Şerte görä bu san noldan kiçi. Diýmek, parabola $Ox$ okundan aşakda ýerleşendir. Şoňa görä-de, $x$-yň ähli bahalarynda $f(x)<0$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Onda hususan-da $f(0)=c<0$.
**Bellik.** Bu meseläni çözenimizde biz $f$ funksiýanyň üznüksizligini ulandyk: eger funksiýa käbir aralykda üznüksiz we ol aralykda nola öwrülmeýän bolsa, onda onuň bu aralykda hemme bahalary şol bir alamata eýedir.

**334.** Gönüburçlugyň simmetriýa oklaryny geçireliň. Ol gönüburçlugy 4 çärýege bölýär. Eger alnan nokat $A$ we $C$ nokatlary saklaýan iki çärýegiň ýa-da bu çärýekleriň araçäginde ýerleşse, onda subut etmek talap edilýän tassyklama dogrudyr.
Goý, nokat beýleki iki çärýegiň biriniň içinde ýerleşen bolsun. Nokadyň üstünden taraplara parallel edilip geçirilen göni çyzyklara, gönüburçlugyň simmetriýa merkezine görä

simmetrik bolan göni çyzyklary guralyň. Bu dört göni çyzyk (taraplara parallel 2 göni çyzyk we olara simmetrik 2 göni çyzyk) gönüburçlugy 9 bölege bölýär: dört bölegiň meýdany $S_1$, iki bölegiň meýdany $S_2$, iki bölegiň meýdany $S_3$ we bir bölegiň meýdany $S_0$.

| | | |
|---|---|---|
| $S_1$ | $S_3$ | $S_1$ |
| $S_2$ | $S_0$ | $S_2$ |
| $S_1$ | $S_3$ | $S_1$ |

Biz $S_1+S_2$ ýa-da $S_1+S_3$ meýdanlaryň jeminiň $\frac{S}{4}$ meýdandan (bu ýerde $S$ berlen gönüburçlugyň meýdany) uly däldigini subut etmeli.

$4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$ bolany üçin

$2S_1+S_2+S_3<\frac{S}{2}$ ýa-da $(S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{S}{2}$.

Diýmek, $S_1+S_2$, $S_1+S_3$ sanlaryň biri $\frac{S}{4}$-den kiçi bolmaly (eger olaryň ikisi hem $\frac{S}{4}$ kiçi bolmasa, onda olaryň jemi $\frac{S}{2}$ kiçi bolmazdy).

**335.** Jogaby: a) 7; b) 16.

a) goý, gurnagda $n$ okuwçy bolup, olaryň $m$ sanysy gyzlar bolsun. Bize şeýle bir iň kiçi $n$ sany tapmaly, şonda $\frac{2}{5}<\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$ deňsizligi kanagatlandyrýan $m$ san tapylmaly.

$n$-iň 2-den 7-ä çenli bahalaryny barlap görüp, maýdalawjysy 7-ä deň bolan $\frac{3}{7}$ drobuň bu deňsizligi kanagatlandyrýanlygyny tapýarys. Şeýlelik bilen, 7-niň mümkin bolan iň kiçi bahasydyr.

**Bellik.** $\frac{3}{7}$ drobuň $\frac{2}{5}$ we $\frac{1}{2}$ droblardan aşakdaky ýaly alynýar: bu drobuň sanawjysy soňky iki drobuň sanawjylarynyň jemine, maýdalawjysy bolsa soňky iki drobuň maýdalawjylarynyň jemine deňdir.

Islendik $\frac{a}{b}$ we $\frac{c}{d}$ droblar $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$ üçin $\frac{a+c}{b+d}$ drob

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

deňsizligi kanagatlandyrýar. $\frac{a+c}{b+d}$ droba $\frac{a}{b}$ we $\frac{c}{d}$ droblaryň medianasy diýilýär.

b) bu meselede ähli bahalary barlap görmek köp wagt we zähmet talap edýär. Şoňa görä-de, bu meseläni çözmekde aşakdaky ýaly hereket edeliň. Biz n-iň iň kiçi natural bahasynda

$$\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100} = \frac{11}{25} \qquad (1)$$

deňsizligi çözmeli.

Deňsizlikdäki ähli droblaryň maýdalawjylary bilen sanawjylarynyň ornuny çalşyralyň we olaryň bitin böleklerini aýryp ýazalyň:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11},$$

$$\frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11}. \qquad (2)$$

Şuňa meňzeş operasiýany ýene-de bir gezek amala aşyralyň:

$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3}. \qquad (3)$$

Şeýle operasiýany ýene bir sapar geçireliň:

$$14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Şu ýerde ilkinji sapar deňsizligiň araçäkleriniň arasynda bitin sanlaryň gabat gelýänligini belläp geçeliň. Olaryň iň kiçisi 2-ä deň.

$$\begin{cases} n-2m=2, \\ 7m-3n=1 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy natural sanlarda $n$=16 we $m$=7 çözüwlere eýedir.

Ulgamyň şu çözüwleriniň meseläniň hem çözüwi bolýandygyny subut edeliň. (2)–(4) deňsizliklerden

$n-2m>0$, $7m-3n\geq1$ we $n-2m\geq2$ gelip çykýar.

Şoňa görä-de, $n=7(n-2m)+2(7m-3n)\geq7\cdot2+2\cdot1=16$.

**Bellik.** Bu meseläni derňäp, $\frac{43}{100}$ we $\frac{11}{25}$ droblary zynjyrly droba dagadanlygymyzy görmek bolýar:

$$\frac{43}{100}=\frac{1}{2+\frac{14}{43}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+13}}},$$

$$\frac{11}{25}=\frac{1}{2+\frac{3}{11}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Soňra bu dagytmanyň tapawutlanýan ýeriniň umumy bölegini alýarys. $\frac{1}{2}$ we 13 arasynda iň kiçi bitin sany ýagny 1-i goýýarys we netijede jogaby alýarys:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+1}}}=\frac{7}{16}.$$

Bu algoritm islendik berlen $0<\alpha<m/n<\beta$ interwalda iň kiçi $n$ maýdalawjyly $m/n$ droby çalt tapmaga mümkinçilik berýär.

336. J o g a b y: 12 minutda.

Eger Hudaýberdi gorkak bilen döw sanalan zatlary iň az wagtda iýip gutarjak bolsalar, onda olaryň ikisi hem bir wagtda iýmäge başlap, bir wagtda-da iýmegi gutarmalydygy düşnüklidir. Tersine bolan halatynda, olaryň biri beýlekisine zatlary iýmäge kömekleşip sarp ediljek wagty gysgaldyp bilerler.

$x$, $y$, $z$ bilen Hudaýberdi gorkagyň iýen palawynyň, balynyň we çöreginiň böleklerini belgiläliň. Onda döwüň iýen palawynyň, balynyň we çöreginiň bölekleri degişlilikde, $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ bolar. Olaryň bu zatlary iýmek üçin sarp eden wagtlary

$t=10x+13y+14z=6(1-x)+6(1-y)+7(1-z)$ bolar.

Şeýlelikde, biz aşakdaky meselä gelýäris: eger $x$, $y$, $z$ sanlar $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ we $10x+13y+14z=6(1-x)+6(1-y)+$ $+7(1-z)$ şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda $t=10x+13y+14z$ ululygyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

Iň soňky gatnaşykdan $z$-i $x$-yň we $y$-iň üsti bilen aňladyp bolar:

$$z=\frac{1}{21}(19-16x-19y).$$

Bu aňlatmany $t$ üçin formulada ornuna goýup alarys:

$$t=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{38}{3}.$$

Bu formuladan, $x$ näçe uly we $y$ näçe kiçi bolsa, onda $t$-niň hem şonça kiçi boljakdygy görünýär. $x$-iň mümkin bolan iň uly, $y$-iň bolsa mümkin bolan iň kiçi bahasyny alýarys: $x=1$, $y=0$. Şonda $t=12$ minut, $z=\frac{1}{7}$ ýol bererlik çäklerde ýerleşýär.

Diýmek, $t$-niň iň kiçi bahasy Hudaýberdi gorkak ähli palawy we $\frac{1}{7}$ çöregi iýende, döw bolsa ähli baly we $\frac{6}{7}$ çöregi iýende alynýar.

**337.** Jogaby: 5 sany 3 tonnalyk ýük maşyny gerek.

Ilkibaşda 4 sany üçtonnalyk ýük maşynynyň ýetmezliginiň mümkindigini görkezeliň. Her biriniň massasy $\frac{10}{13}$ tonna bolan 13 sany birmeňzeş ýaşigi alalyň. Onda bir üçtonnalyk maşyna üçden köp ýaşigi, dört sany üçtonnalyga bolsa 12-den köp ýaşigi ýükläp bolmaz.

Indi 5 sany üçtonnalyk maşynyň bu ýüki äkitmek üçin ýeterlikdigini subut edeliň. Hakykatdan-da her bir üçtonnalyga ikitonnadan az bolmadyk ýüki ýükläp bileris (eger ýük iki tonnadan az bolsa, onda biz ýene-de bir ýaşigi ýükläp bileris).

Onda 5 sany üçtonnalyk maşyna 10 tonnadan az bolmadyk ýüki ýükläp bileris.

**338.** Jogaby: Biler.

Mysal getireliň:

2; 2; 2; 2; –9; 2; 2; 2; 2; –9; 2; 2.

Bu ýerde adamyň her aýdaky girdejisi bilen çykdajysynyň tapawudy yzygiderli ýazylypdyr. Görnüşi ýaly, yzygiderli alnan islendik bäş sanyň jemi otrisatel (–1-e deň), tutuş bir ýyl boýunça bolsa, ähli sanlaryň jemi položitel (2-ä deň).

**Bellik.** Bu meseläniň umumylaşdyrmasyna seredeliň: $n$ sany san setir boýunça ýazylypdyr we islendik $k$ sany yzygiderli alnan sanlaryň jemi otrisatel; şu ýagdaýda ähli $n$ sanlaryň jemi položitel bolup bilermi?

Bu meseläniň jogaby şeýle: eger $n$ $k$ kratny bolsa, onda $n$ sanlaryň jemi položitel bolup bilmez; eger $n$ $k$ bölünmese, onda $n$ sanlaryň jemi položitel bolup biler. Biziň meselämizde $n$=12, $k$=5.

**339.** Jogaby: Bolar.

Hakykatdan-da:

$$403=13+31+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{359\ \text{sany}}=13\cdot31\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{359\ \text{sany}}.$$

**Bellik.** Has umumy sorag goýalyň: haýsy natural sanlary şol bir natural sanlaryň jemi we hut şol natural sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp bolmaýar?

Bu soragyň jogaby şeýle: ýönekeý sanlary şeýle görnüşde ýazyp bolmaýar.

**340.** a) jogaby: biler.

Meselem, iki sany, ýagny 2-ni we –1-i alsak, (2+(–1)=1), olaryň kublarynyň jemi 1-den uly bolar: $2^3+(-1)^3=7>1$.

b) meselem, sekiz sany, ýagny iki sany 0,8 we alty sany 0,1-i alsak, (2·0,8+6·(–0,1)=1), olaryň kublarynyň jemi 1-den uly bolar: $2\cdot(0{,}8)^3+6\cdot(-0{,}1)^3=1{,}018>1$.

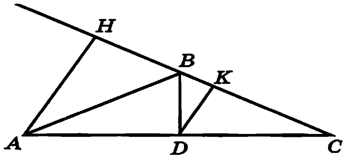
**341.** Jogaby: biler.

Mysal getireliň. Goý, birinji üçburçluk tarapy 0,5 *sm* bolan deňtaraply üçburçluk, ikinjisi bolsa esasy 200 *m* we beýikligi $10^{-7}$ *m* bolan deňýanly üçburçluk bolsun. Ikinji üçburçlugyň gapdal taraplary esasyň ýarysyndan, ýagny 100 $m$ uly, emma meýdany $10^{-5}$ $m^2$. Birinji üçburçlugyň meýdany bolsa $\frac{\sqrt{3}}{16}$ $sm^2$-a deň. Diýmek, birinji üçburçlugyň meýdany ikinji üçburçlugyň meýdanyndan uly.

**342.** a) jogaby: biler.

Mysal getireliň. Esasy 800 $sm$ we esasa inderilen beýikligi 0,3 $sm$ bolan deňýanly üçburçluga seredeliň. Onuň meýdany $\frac{800 \cdot 0,3}{2}$ deň we şeýlelik bilen 100 $sm^2$ uly. Bu üçburçlugyň şerti kanagatlandyrýanlygyny görkezeliň.

Hakykatdan-da, onuň $BC$ gapdal tarapa inderilen $AH$ beýikligi esasyň ortasy bolan $D$ nokatdan $BC$ gapdal tarapa inderilen $DK$ perpendikulýaryň ikeldilen uzynlygyna deňdir. $DK$ perpendikulýar bolsa öz gezeginde $BD$ ýapgyt çyzykdan kiçidir. Bu ýerden bolsa $AH$ beýikligiň 0,6 $sm$ kiçiligi, diýmek, $ABC$ üçburçlugyň ähli beýikleriniň 1 $sm$ kiçiligi gelip çykýar.

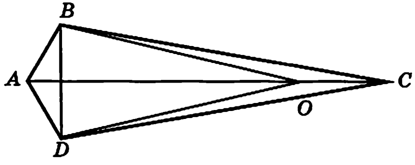



b) jogaby: bilmez.

Üçburçlugyň beýiklikleri 2 $sm$ uly, onda onuň taraplary hem 2 $sm$ uludyr, onuň meýdany bolsa $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ ($sm^2$) uludyr.

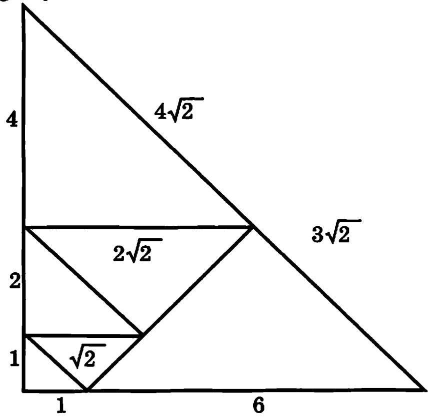
**343.** Jogaby: dogry däl.

Tassyklamany ýalana çykarýan mysal getireliň.



Biz $ABCD$ dörtburçlugyň $A$, $B$, $D$ üç depesini suratda görkezilişi ýaly bir-birine golaý edip alýarys; dördünji $C$ depäni we dörtburçlugyň içindäki $O$ nokady bir-birine golaý, emma $A$, $B$, $D$ nokatlardan daş edip alýarys.

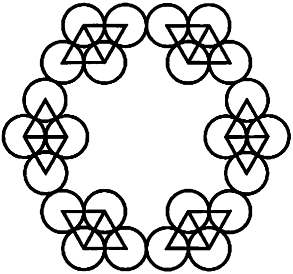
**344.** Jogaby: bolar.




Suratda kateti 7 *sm* bolan deňýanly gönüburçly üçburçlugy 6 sany özara deň bolmadyk, ýöne özara meňzeş bolan deňýanly gönüburçly üçburçluklara bölüp bolýanlygy görkezilendir.

**345.** Jogaby: a) bolar; b) bolmaz.

a) suratda 24 teňňäni talap edilýän görnüşde nähili ýerleşdirip bolýanlygy görkezilendir. Munuň nähili amala aşyrylandygyny görkezeliň.



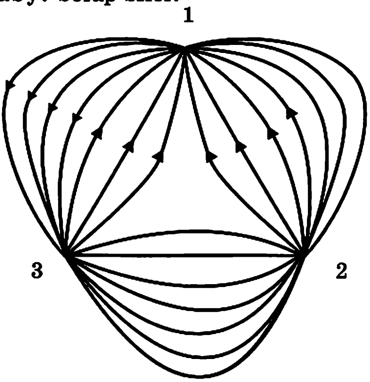
Goý, teňňäniň radiusy $R$-e deň bolsun. Dört teňňäniň merkezlerini merkezleriniň tarapy $2R$ bolan rombuň depelerinde ýerleşdireliň. Şeýle romblardan, olaryň çetki teňňeleri galtaşar ýaly edip ýerleşdirip, özümiz üçin zerur bolan nagyşlary alyp bileris. Alnan nagyşdaky romblaryň depelerinde teňňeleriň merkezlerini ýerleşdirip, 24 teňňäni talap edilişi ýaly goýup bileris.

b) 25 teňňe tekizlikde talap edilişi ýaly ýerleşdirilen bolsun diýip güman etsek gapma-garşylyga geleris.

Her bir teňňäniň gyrasynda onuň beýleki üç teňňä galtaşýan üç ýerini belläliň. Bu bellenilen ýerleriň umumy sanyny iki usul bilen sanalyň. Bir tarapdan bellenilen ýerleriň sany jübüt bolmaly. Sebäbi bu ýerler galtaşma nokatlarynda jübütlere bölünýärler. Beýleki bir tarapdan bellenilen ýerleriň sany täk bolmaly. Sebäbi ol ýerleriň sany 25 teňňäni 3-e (her bir teňňäniň galtaşma ýerleriniň sany) köpeltmek hasylyna deň bolmaly.

Alnan gapma-garşylyk biziň tassyklamamyzy subut edýär.

**346.** Jogaby: bolup biler.




Suratda küştçüleriň bu ýaryşynyň ähli döwleriniň (meseläniň şertlerini kanagatlandyrýan) netijeleri shematiki görkezilendir. Bu ýaryşda küştçüleriň her bir jübüti özara 7 döw oýnapdyr. Şunlukda:

- birinji küştçi ikinjini iki döw utupdyr;
- ikinji küştçi birinjini iki döw utupdyr;
- birinji küştçi üçünjini üç döw utupdyr;
- üçünji küştçi birinjini dört döw utupdyr;
- ýaryşyň galan döwleri deňme-deň tamamlanypdyr.

Bu ýaryşda birinji küştçi 6,5 oçko, ikinji küştçi 7 oçko, üçünji küştçi bolsa 7,5 oçko toplapdyr. Şunlukda birinji küştçi hemmelerden köp, ýagny jemi 5 döw utupdyr, ikinji küştçi hemmelerden az, ýagny 2 döw utulypdyr, iň köp oçkony bolsa üçünji küştçi toplapdyr.

**347.** a) jogaby: gurnagyň 4 ýa-da 6 ýygnanyşygy bolupdyr.

Meseläniň şertinden gurnagyň agzalarynyň kafe ýa iki, ýa-da üç bolup baryp biljekdigi gelip çykýar.

Eger olar her gezek iki-ikiden kafe baran bolsalar, onda gurnagyň ýygnanyşygy 6 gezek bolupdyr. Eger biz gurnagyň agzalaryny 1-den 4-e çenli sifrler bilen belgilesek, onda olar kafe aşakdaky ýaly baryp bilerdiler: (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

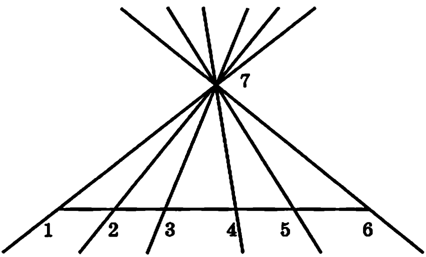
Eger kafe bir sapar üç bolup barylýan bolsa, onda ondan başga diňe üç gezek kafe girip bolar: birinji gezek kafe girenleriň her biri kafe girmedik dördünji bilen kafe girip bilerler.

b) Jogaby: Kafe girmegiň iki görnüşli tertibi bolup biler:

(1 2 3 4 5 6), (1 7), (2 7), (3 7), (4 7), (5 7), (6 7) ýa-da

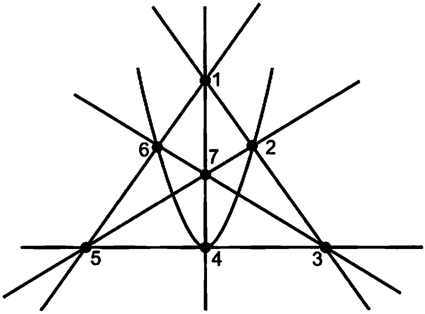
(1 2 3), (1 4 7), (1 5 6), (2 5 7), (2 4 6), (3 6 7), (3 4 5).

Bu ýagdaýlary grafiki usul bilen hem şekillendirip bolar. Birinji suratda kafe girmegiň birinji görnüşli tertibi görkezilendir. Gorizontal göni çyzyk kafe birinji gezek giri-



lişine degişlidir. 7 nokady beýleki nokatlar bilen birikdirýän göni çyzyklar soňky kafe girmeleri şekillendirýär.

Ikinji suratda kafe girmegiň ikinji görnüşli tertibi görkezilendir.




Bu suratdaky her bir çyzyk kafe bir gezek girmäni görkezýär. Bu çyzygyň üstünden geçýän nokatlarynyň tertip belgileri bolsa, şol gezek kafe giren okuwçylaryň düzümini görkezýär.

**348.** Jogaby: 127 gaz.

Goý, gazlaryň sürüsi bilen elmydama ýene-de bir gaz bilelikde uçan bolsun. Ol gazyň reňki beýlekilerden tapawutlylykda çal bolsun. Eger käbir adajyga $m$ sany ak gaz we çal gaz uçup gelen bolsa, onda olaryň ýarysy, ýagny $\frac{1}{m}+\frac{1}{2}=\frac{m+1}{2}$ gaz bu ada gonar.

Şoňa görä-de, her bir adadan soň uçýan gazlaryň sany gös-göni iki esse azalýar. 7 adadan soňra uçýan gazlaryň sany 128 esse azalýar we diňe çal gaz uçýar. Diýmek, ilkibaşda 128 gaz bar eken, olaryň 127-si ak reňkli gazlar.

**Bellik.** Meseläniň çözülişinde çal gaz ýöne ýerden ýüze çykmady. $x_k$ bilen uçup barýan ak gazlaryň sanyny belgiläliň. Bu öňde ýene $k$ adanyň bardygyny aňladar. Onda meseläniň şertini şeýle ýazyp bolar: $x_k-x_{k-1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{2}$. Bu ýerden $(x_k)$ yzygiderlik üçin $x_k=2x_{k-1}+1$ (*) rekurrent gatnaşygy alarys.

Çal gazy goşmak bilen biz hakykatda üýtgeýän ululygy täze üýtgeýän ululyk bilen çalyşdyk: $y_n=x_n+1$ we täze $(y_n)$ yzygiderligi aldyk. (*) gatnaşykda $x_k=y_k-1$ we $x_{k-1}=y_{k-1}-1$ ornuna goýup $(y_n)$ yzygiderligiň has ýönekeý, ýagny $y_k=2y_{k-1}$ gatnaşygy kanagatlandyrýanlygyny görýäris. $(y_k)$ maýdalawjysy 2 bolan geometrik progressiýadyr. Diýmek, onuň umumy agzasy $y_n=2^n y_0$ görnüşe eýedir. $(x_n)$ yzygiderlige dolanyp onuň umumy agzasynyň formulasyny, ýagny $x_n=2^n-1$ tapýarys.

**349.** Jogaby: $a_{2004}=\frac{2}{3}$.

Bu yzygiderligiň ilkinji agzalaryny ýazalyň:

$2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 2,\ 3,\ \ldots$

Görnüşi ýaly, $a_7$ we $a_8$ iki goňşy agza edil $a_1$ we $a_2$ ýaly. Her bir agzanyň özünden öňki iki agza boýunça hasaplanýanlygy üçin yzygiderlik 6 period bilen gaýtalanar. 2004 san 6-a bölünýänligi üçin bolsa, $a_{2004}=a_6=\frac{2}{3}$.

**350.** Jogaby: ilkibaşda her gapda näçe suw bar bolsa, şonça (ýagny $A$ litr) suw bar bolar.

Muňa göz ýetirmek üçin her iki gapdan-gaba suw guýmadan soň gapdaky suwuň öňküligine galjakdygyna göz ýetireliň. Haçanda gaba beýleki gapdan onuň $\frac{1}{k}$ bölegi guýlanda onda

$$A\left(1+\frac{1}{k}\right)=A\frac{k+1}{k}$$

litr suw bolar. Soňra ondan $\frac{1}{k+1}$ bölegi aýrylanda onda

$$A\frac{k+1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}=A$$

litr suw galar.

**351.** Eger ilkibaşda birinji gapda $\frac{2}{3}$ litr, ikinji gapda $\frac{1}{3}$ litr suw bar bolsa, onda birinji suw guýmadan soň gaplardaky suwuň göwrümleri öz orunlaryny çalşyrardy we ilkibaşdaky ýagdaý (ikinji gapda $\frac{2}{3}$ litr, birinji gapda $\frac{1}{3}$ litr suw) alnardy.

Hasaplama geçirenimizde şu ýagdaýy göz öňünde tutalyň. Goý, jübüt gezek suw guýmadan soň birinji gapda $(\frac{2}{3}+p)$ litr suw (bu ýerde $-\frac{2}{3}\leq p\leq\frac{1}{3}$) suw bolar. Onda ikinji gapda $(\frac{1}{3}-p)$ litr suw bolar. Ondan soňky suw guýmada bu gaplarda degişlilikde, $\left(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}\right)$ litr we $\left(\frac{2}{3}-\frac{p}{2}\right)$ litr suw, ondan soňra $\left(\frac{2}{3}+\frac{p}{4}\right)$ litr we $\left(\frac{1}{3}-\frac{p}{4}\right)$ litr suw bolar.

Şeýlelikde, her iki suw guýmadan soň $p$ guýulýan suw 4 esse azalýar. Diýmek, 100 gezek ( suw guýmanyň 50 jübüti) guýmadan soň goşmaça her gaba guýulýan $p$ suw $4^{50}$ esse azalýar we gaplarda degişlilikde, $\frac{2}{3}+p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ litr we $\frac{1}{3}-p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ litr suw bolar. Goşmaça guýulýan suwuň $-\frac{2}{3}\leq p\leq\frac{1}{3}$ deňsizligi kanagatlandyrýanlygy üçin $p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ goşmaça $\frac{1}{10000}$ kiçidir. Diýmek, gaplarda soralýan takyklykdan hem ýokary takyklyk bilen $\frac{2}{3}$ litr we $\frac{1}{3}$ litr suw bolar.

**352.** Eger $b^2-4ac=23$ bolsa, onda $b^2-25=4ac-2$ ýa-da $(b-5)(b+5)=2(2ac-1)$. Emma $b-5$ we $b+5$ bir jübütli san, şoňa görä-de, olaryň köpeltmek hasyly, eger ol jübüt bolsa, onda 4-e bölüner. Sag bölegi bolsa 4-e bölünmeýän jübüt sandyr.

**353.** Bitin sanyň kwadratyny 3-e bölenińde 0 ýa-da 1 galyndy bolýar, şonuň üçin kwadratyň sifriniň jemi hem 3-e bölünende 0 ýa-da 1 galyndy alynýar. $1970=3\cdot656+2$ san şunlukda dogry kwadratyň sifriniň jemi bolup bilenok.

**354.** Mümkin däl. Hakykatdan-da, eger her biri 7 partiýa oýnan bolsa, onda $15\cdot7$ san partiýalaryň sanynyň ikeldilenine deň bolardy (çünki partiýalaryň her birini iki gezek hasaplaýarys), ýagny $15\cdot7$ san jübüt sana deň bolardy, bu bolsa nädogry.

**355.** Eger $A$ we $B$ tanyş bolsa, onda $(A, B)$ jübüde «tanyş» diýeliň. Onda, eger $e$ tanyşlaryň sany we $x_1$, $x_2$, ..., $x_{953}$ birinji, ikinji we ş.m. tanyşlaryň sany bolsa, onda $x_1+x_2+x_3+...+x_{953}=2e$, çünki jeme her «tanyş» iki gezek girýär. $x_1+x_2+...+x_{953}$ jem jübüt bitin san, diýmek, bu jemde täk goşulyjylaryň mukdary jübütdir. Hemme goşulyjylar (953) täk mukdarda, onda goşulyjylaryň arasynda jübüt sanlar bar. Ýagny ýygnananlaryň arasynda $x_i$ tanyşlarynyň sany jübüt bolan iň bolmanda biri bardyr.

**356.** $a_i=\pm1$ $(i=1, 2, ..., n)$, onda
$a_{ik}=\pm1$ $(i, k=1, 2, ..., n)$. $(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot(a_3a_4)...(a_na_1)$ köpeltmek hasylyna garalyň.
$(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)...(a_na_1)=\pm1$, onda
$(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)...(a_na_1)=(a_1a_2...a_n)^2\geq0$,
diýmek, $(a_1a_2)...(a_na_1)=1$.
Şoňa görä-de, $n$ köpeldijileriň arasynda otrisatel köpeldijileriň $m$ sany jübüt san bolýar. Şunlukda, $m=2k$. Emma $a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1=0$, diýmek, položitel goşulyjylaryň sany otrisatel goşulyjylaryň sanyna deňdir, bu ýerden $n=2m=4k$, ýagny $n$ san 4-e bölünýär.

**357.** Tersine güman etmek bilen subut edeliň. Goý, $(x, y)$ natural çözüw bolsun, onda $ab-ax=by$, ýa-da $a(b-x)=by$, şunlukda, $by$ $a$ sana bölünýär, ýöne $a$ we $b$ özara ýönekeý, diýmek, $a$ sana $y$ bölünýär ýagny $y=ka$. Şuňa meňzeşlikde, $b$ sana $x$ bölünýändigini görkezmek bolýar, ýagny $x=mb$. Berlen deňlemede goýup, alarys $amb+bka=ab$, bu ýerden $m+k=1$. $m$ we $k$ natural sanlar bolanda bu mümkin däldir.

**358.** Berlen deňlemäni şeýle ýazalyň: $6x^2-24=50-5y^2$, ýagny $6(x^2-4)=5(10-y^2)$, bu ýerden $x^2-4=5u$, $10-y^2=6\vartheta$-ni alarys we şunlukda, $u=\vartheta$ bolýar. $x^2=4+5u$, ýagny $4+5u\geq0$, bu ýerden $u\geq-4/5$; şuňa meňzeşlikde, $10-y^2=6u$, ýagny $10-6u\geq0$, bu ýerden $u\leq5/3$. $u$ bitin san $-4/5\leq u\leq5/3$ deňsizligi kanagatlandyrýar, diýmek, $u=0$ ýa-da $u=1$. $u=\vartheta=0$ bolanda $10=y^2$-y alarys, bu ýerde $y$ bitin san. Bu mümkin däl. Goý, $u=v=1$ bolsun, onda $x^2=9$, $y^2=4$.

Jogaby: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$

**359.** $b=a-1$, onda $a-b=1$. Şonuň üçin, köpeltmek hasylyna $a-b$-ni köpeldeliň we aşakdaky öwürmeleri geçireliň:

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)...(a^{32}+b^{32})=$$
$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)...(a^{32}+b^{32})=$$
$$=(a^{32}-b^{32})(a^{32}+b^{32})=(a^{64}-b^{64}).$$

**360.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, onda $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$, ýa-da

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1.$$

Ýöne $\frac{c}{z}=-\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=-\frac{ay+bx}{xy}$, bu ýerden $\frac{z}{c}=-\frac{xy}{ay+bx}$ we

$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=\frac{xy}{ab}-\frac{xy}{ay+bx}\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$, diýmek,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**361.** Goý, $x_0$ umumy kök, $x_1$, $x_2$ deňlemäniň dürli kökleri we $x_1 \neq x_2$ bolsun, onda $x_0^2+ax_0+bc=0$, $x_0^2+bx_0+ca=0$, bu ýerden $x_0(a-b)+c(b-a)=0$ ýa-da $(a-b)(x_0-c)=0$. Ýöne, $a \neq b$, diýmek, $x_0=c$. Ondan başga-da, $x_0x_1=bc$, $x_0x_2=ca$, ýa-da $cx_1=bc$, $cx_2=ca$, şunlukda, $x_1+x_2=a+b$. Ýöne şert boýunça $x_0$, $x_1$ we $x_0$, $x_2$ kwadrat deňlemäniň kökleridir, şoňa görä-de, $x_0+x_1=-a$, $x_0+x_2=-b$, bu ýerden $2x_0+x_1+x_2=-a-b$. $x_0=c$, $x_1+x_2=a+b$ göz öňüne tutup, alarys $2c+a+b=-a-b$ ýa-da $c=-a-b$. Şunlukda, $x_1+x_2=-c$, $x_1 \cdot x_2=ab$, diýmek, $x_1$, $x_2$ sanlar $x^2+cx+ab=0$ deňlemäniň kökleridir.

**362.** Jogaby 24.

**363.** 10 okuwçylaryň her biriniň 4 (islendik otaga düşmekleri üçin) mümkinçiligi bar. Şeýlelikde, hemmesi $4^{10}$ dürli usul.

**364.** Çeküw daşlary olaryň agramlarynyň artýan tertibi boýunça goýalyň we birden üç üýşmege nobat boýunça çepden saga, sagdan çepe ýerleşdireliň ýagny,

| I üýşmek | II üýşmek | III üýşmek |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 6 | 5 | 4 |
| 7 | 8 | 9 we ş.m. |

Islendik jübüt sany şeýle operasiýadan soňra (hususanda bi 2233 184 operasiýadan soňra) üýşmekdäki agram deň bolar.

**365.** Birinji 9 çeküw daşlary, mysal üçin, aşakdaky ýaly ýerleşdirmeli:

I üýşmek 1+9+5,
II üýşmek 6+7+2,
III üýşmek 3+4+8,

galan 546 çeküw daşlary 13-nji mysaldaky ýaly ýerleşdirmeli.

**366.** Küşdüň bir öýny bolanda iki garşydaşyň oçkolarynyň jemi bire deň bolýar, onda her pursatda hemme gatnaşyjylaryň oçkolarynyň umumy jemi oýnalan partiýalaryň sanyna deň bolar. Şert boýunça, küştçüleriň her biri özüniň oçkolarynyň ýarysyny iň soňky orny eýelän küştçüler bilen duşuşanda aldy, diýmek, olaryň galanlaryn-dan hem ol ýarysyny alypdyr. Eger ýaryşa $x$ oýunçy gatnaşýan bolsa,onda olaryň partiýalarynyň hemmesi $x(x-1)/2$ bolar. Şunlukda, şonça hem oçko gazanýarlar. Iň soňky üç orny alan üç oýunçy öz aralarynda 3 partiýa oýnadylar. Bu bolsa olara ýaryşda gazanan ähli oçkolarynyň möçberiniň ýarysy bolan 3 oçkony berýär. Şeýlelikde, olaryň jemi 6 oçkolary bolýar. Güýçli $x-3$ oýunçy öz aralarynda $(x-3)(x-4)/2$ partiýa oýnadylar. Näçe partiýa bolsa, şonça hem oçko topladylar. Bu şert boýunça olaryň ähli toplan oçkolarynyň ýarysyny düzýändir. Olaryň toplan oçkolarynyň hemmesi $(x-3)(x-4)$ deňdir. Şunlukda, $(x-3)(x-4)+6=x(x-1)/2$, ýa-da $x^2-13x+36=0$, bu ýerden $x_1=9$, $x_2=4$. Ikinji kök meseläniň şertini kanagatlandyrmaýar (güýçli küştçi pes iň soňky üç oýunçydan oçko alyp bilýär, bu bolsa şert boýunça toplan oçkolarynyň diňe ýarysyny emele getirýär). Şeýlelik bilen, ýaryşa 9 adam gatnaşypdyr.

**367.** Goý, küştçüleriň her biriniň toplan oçkolarynyň mukdary $x_1$, $x_2$, ..., $x_8$ bolsun. Şert boýunça $x_1>x_2>...>x_8$. Güýçli oýunçy 7 partiýa oýnady, diýmek, $x_1\le 7$. $x_2<x_1$, onda $x_2\le 6{,}5$. Soňky dört küştçüler öz aralarynda 6 partiýa oýnadylar we 6 oçko topladylar, diýmek, olaryň oçkolarynyň umumy mukdary 6-dan kiçi däldir, ýagny, $x_5+x_6+x_7+x_8\ge 6$, ýöne şert boýunça $x_2=x_5+x_6+x_7+x_8$, diýmek, $x_2=6{,}5$ ýa-da $x_2=6$. Eger $x_2=6{,}5$ bolsa, onda ikinji küştçi 6 partiýa utýar, birini deňedýär. Şeýlelikde, birinji küştçi ikinjini utmaýar, şoňa görä-de $x_1\le 6{,}5$, ýagny $x_1\le x_2$. Bu şerte garşy gelýär. Şunlukda, $x_2\ne 6{,}5$, diýmek, $x_2=6$. Şeýlelikde, $x_5+x_6+x_7+x_8=6$, ýagny, dört soňky küştçüler özüniň hemme oçkolaryny biri-birleri bilen duşuşyp alypdyrlar, birinji oýunçydan utulypdyrlar, hususanda ýedinji oýunçy üçünji oýunçydan utulypdyr.

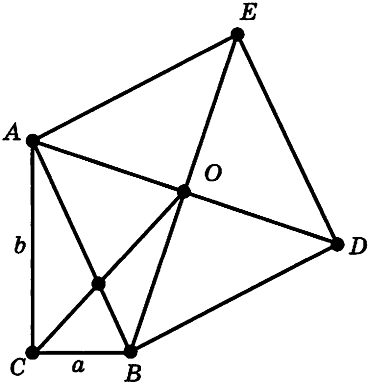
**368.** Taraplary $a$, $b$, $c$ we $AD=m_a$ medianasy bolan $\Delta ABC$ garalyň. $\Delta ACD$ üçburçlukda $m_a>b-\frac{a}{2}$-ny alarys. $\Delta ABD$ üçburçlukdan bolsa $m_a>b+c-\frac{a}{2}$-ny alarys. Alnan deňsizlikleri goşup, $2m_a>b+c-a$ ýa-da $m_a>\frac{b+c-a}{2}$ deňsizligi alarys.
$AD$ medianany ikeldip, $AK=2m_a$, $AB=c$, $BK=b$ bolan $\Delta AKB$ üçburçluk alarys. Şoňa gorä-de, $2m_a<b+c$ ýa-da $m_a<\frac{b+c}{2}$. Şunlukda, $\frac{b+c-a}{2}<m_a<\frac{b+c}{2}$. Şuňa meňzeşlikde alarys:
$\frac{c+a-b}{2}<b_b<\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}<m_c<\frac{a+b}{2}$, bu ýerden
$\frac{a+b+c}{2}<m_a+m_b+m_c<a+b+c$, soralýan subut edildi.

**369.** Tegelegi 6-a deň sektorlara böleliň (depeleri tegelegiň merkezinde bolan). Onda sektorlaryň her birine birden köp bolmadyk nokat düşýär (bir sektoryň islendik iki nokadynyň arasyndaky uzaklyk 1-den uly däldir). Eger sektorlaryň her birine bir nokat düşse, onda şeýle iki nokat tapylyp radius – wektorlarynyň arasyndaky burç $60^0$ – dan uly bolmaz, şunlukda, olaryň arasyndaky uzaklyk 1-den uly bolmaz. Şunlukda, bäşden köp bolmadyk nokat alyp bolýar.

**370.** Meseläni iki usul bilen çözýäris.

1) meseläni Ptolomeý teoremasyny (içinden çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemi olaryň diagonallarynyň köpeltmek hasylyna deňdir) ulanyp çözýäris.

$ACBO$ dörtburçluga seredeliň. Bu dörtburçlukda $\angle C+\angle O=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ bolany üçin onuň daşyndan töwerek çyzyp bolar. Diýmek, bu dörtburçluk üçin Ptolomeý teoremasyny ulanmak mümkin.




$$CO\cdot AB=AC\cdot OB+AO\cdot CB.$$

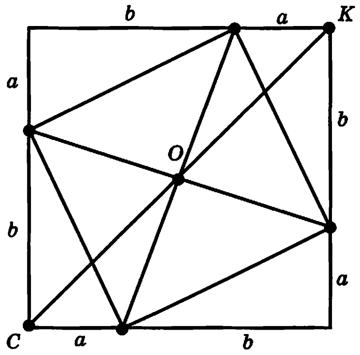
Bu deňlikden $CO$-ny kesgitleýäris. Şunlukda $AO=OB$ bolýanlygyny we $AO=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$; $AB=\sqrt{a^2+b^2}$; $AC=b$; $CB=a$ deňlikleri göz öňünde tutýarys.

$$CO=\frac{AC\cdot OB+AO\cdot CB}{AB}=\frac{AO\cdot(AC+CB)}{AB}=$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

2) meseläni Ptolomeýiň teoremasyny ulanman çözýäris.

Onuň üçin a) çyzgyny tarapy $a+b$ bolan kwadrata çenli doldurýarys:




Çyzgydan görnüşi ýaly, gözlenilýän aralyk tarapy $a+b$ bolan kwadratyň diagonalynyň ýarysyna deňdir.

$CK=\sqrt{(a+b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}(a+b)$. Onda

$CO=\frac{CK}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

**371.** 6-a we 11-e bölünýändigine garamak ýeterlikdir.

**372.** 9 alty burçlugyň burçlarynyň jemi $9{\cdot}4\pi=36\pi$-e deňdir. Bu bolsa $37\pi$ deň bolan 39-burçlugyň içki burçlarynyň jeminden kiçidir.

**373.** Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň depesinden inderilen mediananyň gipotenuzanyň ýarysyna deňdiginden döwük çyzygyň her bir zwenosynyň $ABC$ üçburçlugyň taraplarynyň biriniň ýarysyna deňdigi gelip çykýar.

**374.** Berlen deňleme üçin Wiýet teoremasyny peýdalanyp, gözlenýän deňlemäniň kökleriniň jemini we köpeltmek hasylyny hasaplamaly.

Jogaby: $5x^2-12x-16=0$.

**375.** $AD$ tarapy esas edip, $ADM'$ deňtaraply üçburçluk guralyň. $AB=AM'=DM'=CD$, onda garalýan $ABM'$ we $DM'C$ deňýanly üçburçluklardan $\angle ABM'=\angle DCM'=75°$ gelip çykýar, ýagny $\angle M'CB=15°$ we $M$ nokat $M'$ bilen gabat gelýär.

376. $P=5$. $P$-niň beýleki ähli ýönekeý bahalarynda $P^4-6$ sanyň 5-e bölünýär, ýöne ýönekeý san bolanok.

377. $ka+2=a^2$, $kc+2=c^2$, onda $a+c=k$ we $kx+2=x^2$ deňlemäniň çözüwi bar bolan iň kiçi $k\geq0$ sany tapmak galýar.

Jogaby: $k=0$.

378. Goý, $x^{19}=y$ bolsun. Onda $y+y^4=2y^3$ we $x^{19}-0$; 1; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ bahalary kabul edýär.

379. $\frac{1}{2}=\sin30°<3\sin10°$, onda $\sin10^0>\frac{1}{6}$.

380. $2^3<3^2$, diýmek, $(2^3)^{22}<(3^2)^{22}$, ýagny $2^{66}<3^{44}$, onda $2^{65}<3^{47}$ we $2^{65}\cdot3^{65}<3^{47}\cdot3^{65}=9^{56}$.

381. $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, $A_3OA_4$, $A_4OA_5$, $A_5OA_6$, $A_6OA_1$ burçlaryň iň bolmanda biri $60^0$-a deň ýa-da uly bolar. Goý, şeýle burç $A_1OA_2$ bolsun. Üçburçlukda uly burçuň garşysynda uly tarap ýatýar, onda $A_1A_2\geq OA_2$. Bu ýerden meseläniň tassyklanmasy gelip çykýar.

382. $x_1+x_2+x_3$ jübüt sandyr, onda ýönekeý sanlaryň biri 2-ä deňdir.

Jogaby: 1978.

383. Hawa. Mysal üçin, aralarynda diametral gapma-garşylary ýok bolan käbir töweregiň 1977 nokady we merkezi.

384. Eger $a$ üç ýa-da ondan köp belgili san bolsa, onda $a=10^na_n+10^{n-1}\cdot a_{n-1}+...+100a_2+10a_1+4\geq10a_n+10a_{n-1}+...+10a_2+$ $+10a_1+4+90a_n>a_n^2+a_{n-1}^2+...+a_2^2+a_1^2+4^2$, ýagny üç we ondan köp belgili sanlaryň arasynda şeýle san ýok. Eger $a$ iki ýa-da bir belgili san bolsa, onda $a=10x+4<x^2+4^2$ (bu ýerde $x$ san 0-dan 9-a çenli bitin san), bu ýerde $a$ sanyň 4, 14 ýa-da 94-e deňdigini alarys.

385. Doly kwadraty 3-e bölüniňde 0 ýa-da 1 galyndy berýär. Eger $p$ san 3-e bölünmese, onda $2p^4-p^2+11$ sany 3-e

böleniňde 2 galyndy galýar we doly kwadrat bolmaýar. Eger $p$ san 3-e bölünse, onda $p=3$; $2p^4-p^2+16=169=13^2$.

**386.** Eger şeýle ýerleşdirmek mümkin bolsa, onda $5+5+2=12$ dürli jem bardyr. Ýöne şeýle jemleriň barysy 11 sanydyr. Bular bitindir, olaryň iň kiçisi $(-1)\cdot5=-5$, iň ulusy $(+1)\cdot5=5$-e deňdir. Şoňa görä-de, $+1$, $-1$ we 0 sanlary şeýle ýerleşdirip bolanok.

**387.** Goý, $ABCD$ kwadratyň içinde $MNQP$ dörtburçluk çyzylan bolsun. Goý, $M$ nokat $AB$ tarapda, $N$ nokat $BC$ tarapda ýatýan bolsun.

$\angle NQC=\angle QPD=\angle PMA=\angle MNB$, onda $NCQ$, $QPD$, $PAM$ we $BMN$ üçburçluklar meňzeşdir. Diýmek,

$$\frac{MA}{MP}=\frac{BN}{MN}=k_1,\ \frac{BM}{MN}=\frac{NC}{NQ}=k_2.$$

$$AB=AM+BM=k_1MP+k_2MN,\quad BC=BN+NC=k_1MN+k_2NQ$$

we $AB=BC$, $MP=NQ$, onda $k_1MP+k_2MN=k_1MN+k_2MP$, ýagny $k_1(MP-MN)=k_1(MP-MN)$. $MP\neq MN$, onda $k_1=k_2$.

Diýmek, $BN=BM$, onda $\angle BMN=45°=\angle BAC$. Şunlukda, $MN$ we $AC$ göni çyzyklar paralleldirler. $MN$ göni çyzygy $CD$ göni çyzyk bilen $C'$ nokatda kesişýänçä dowam etdireliň.

$\angle NC'C=\angle NQC=45°$, onda $NC'Q$ deňýanly üçburçluk, bu ýerde $NC'=NQ$ we $MC'=MN+NQ$. $MC'$ we $AC$ göni çyzyklar paralleldirler, onda $AMC'C$ parallelogramdyr. Diýmek, $MC'=AC$, ýagny $MN+NQ=AC$.

**388.** $4d\cdot4da\geq40\cdot400=16000$ bäş belgili san, onda $a<4$; $a=2$ we $a=3$ gabat gelmeýär, çünki

$\overline{2bcd}<4000=20\cdot200<\overline{2d}\cdot\overline{2da}$;

$\overline{3bcd}<9000=30\cdot300<\overline{3d}\cdot\overline{3da}$. Diýmek, $a=1$

$\overline{abcd}=\overline{1bcd}<2000$; onda

$(10a+d)(101a+10d)=(10+d)(101+10d)<2000$, ýagny

$1010+201d+d^2<2000$. Bu ýerde $d<5$ alynýar. $d\neq1$, çünki $d\neq a$. $d=0$ bolanda $\overline{abcd}=10\cdot101=1010$, bu mümkin däl, çünki $a\neq c$. $d=2$, $d=3$ we $d=4$ bolanda degişlilikde alarys: $\overline{abcd}=1452$, $\overline{abcd}=1703$ we $\overline{abcd}=1974$. 1452, 1703 we 1974 gözlenýän sanlardyr.

**389.** Eger berlen san 5 bilen gutarýan we doly kwadrat bolsa, onda ol 25 bilen gutarar we şunlukda, $\underbrace{55...525}_{998\ sifr}$ deň bolar, ýöne bu san 3-e bölünende 2 galyndy galýar we şeýlelikde, doly kwadrat bolmagy mümkin däldir. Eger sanyň soňky sifri 5-den tapawutly bolsa we san doly kwadrat bolsa, onda onuň soňky sifrleri 1, 2, 3, 6, 9, 0 sifrleriň biridir. Ýöne, $\underbrace{55...51}_{999\ sifr}$ we $\underbrace{55...59}_{999\ sifr}$ sanlar 4-e bölünende 3 galyndy galýar we şunlukda, doly kwadrat bolmaýar. $\underbrace{55...53}_{999\ sifr}$ we $\underbrace{55...56}_{999\ sifr}$ sanlar 3-e bölünýär we 9-a bölünmeýär, ýagny bular hem doly kwadrat bolmaýarlar. 55...50 san jübüt we 4-e bölünmeýär. Şunlukda, berlen san doly kwadrat bolmaýar.

**390.** Radiusy 3-e deň tegelekde diametr geçireliň we bu tegelekde ýerleşdirilen ähli tegelekleri oňa proýektirläliň. Tegelekleriň her biriniň proýeksiýasy onuň diametrine deň bolan kesim bolar. Şoňa görä-de, onuň ähli proýeksiýalarynyň uzynlygynyň jemi ähli tegelekleriň diametrleriniň jemine deň bolar, ýagny olaryň radiuslarynyň jeminiň ikeldileni 2·25=50 bolar. Ähli kesimler tegelegiň diametrinde ýerleşýändir (çünki ähli tegelekler tegelegiň içinde ýatýar). Diametriň uzynlygy 6-a deňdir. Diametrde ähli proýeksiýalaryň başyny we soňuny belgiläliň. Iki goňşy belgilenen nokadyň arasyndaky kesime düşýän proýeksiýalaryň möçberi bu kesimiň ähli ýerinde üýtgemeýär. Eger şeýle kesimleriň her biri 8-den az bolmadyk proýeksiýa bilen ýapylsa, onda ähli proýeksiýalaryň uzynlyklarynyň jemi diametriň uzynlyklarynyň sekiz essesinden geçýän däldir, ýagny 6·8=48 ýöne, ähli proýeksiýalaryň uzynlyklarynyň jemi 50-ä deňdir, şoňa görä-de, 9-dan az bolmadyk proýeksiýa bilen örtülen kesim bardyr. Bu kesimiň içki nokadyndan diametre perpendikulýar galdyralyň. Bu göni çyzyk proýeksiýalary berlen kesimi ýapýan hemme tegelekleri keser (onsoňam içki nokatlarda, çünki perpendikulýar kesimiň içki nokadyndan galdyrylandyr), ýagny 9-dan az bolmadyk tegelekleri keser.

**391.** $(1+x^2+x^4+...+x^{100})(1+x^{102})-102x^{101}=$
$=x^{202}+x^{200}+x^{198}+...+x^{102}+x^{100}+x^{98}+...+$
$+x^4+x^2+1-102x^{101}=(x^{202}+1-2x^{101})+...+$
$+(x^{102}+x^{100}-2x^{101})=(x^{101}-1)^2+(x^{100}-x)^2+(x^{99}-x^2)^2+...+$
$+(x^{51}-x^{50})^2>0.$

**392.** $AD$ kesime parallel we $AB$ tarapy deň bölýan $FN$ göni çyzyk geçireliň. Goý, $FN$ göni çyzyk $AC$ dugany $R_0$ nokatda kesýän bolsun. $R_0$ nokadyň üstünden $AB$ tarapa parallel we $AD$ hem-de $BC$ kesimleri degişlilikde, $Q_0$ we $P_0$ nokatlarda kesýän $Q_0P_0$ göni çyzyk geçireliň. $AB$ tarapa parallel käbir başga $Q_1P_1$ göni çyzyga garalyň. Goý, ol $Q_0P_0$ we $AB$ göni çyzyklaryň arasynda ýatýan bolsun we $AD$, $FN$, $BC$ göni çyzyklary we $AC$ dugany $Q_1$, $R'_1$, $P_1$ we $R_1$ nokatlarda kesýän bolsun.

$S_{AQ_1R_1}+S_{CR_1P_1}=S_{AQ_0R_1R_0}+S_{R_0R_1P_1P_0}>$
$>S_{AQ_0R_0}+S_{CR_0P_0}+S_{P_0R_0R'_1P_1}-S_{R_0R'_1Q_1Q_0}=S_{AQ_0R_0}+S_{CR_0P_0}$

$Q_1R_1$ göni çyzygyň $Q_0P_0$ we $CD$ göni çyzyklaryň arasynda ýatýan ýagdaýyna şuňa meňzeş garalýar. Şeýlelikde, $Q_0P_0$ göni çyzyk gözlenýändir.

**393.** Deň esaslary we deň beýiklikleri bolan üçburçluklaryň meýdanlary deňdir, onda mediana üçburçlugyň meýdanyny deň bölege bölýär.

Şunlukda, $S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOE}=\frac{1}{2}S;$

$S_{\Delta AOB}+S_{\Delta KOB}=\frac{1}{2}S;\ S_{CKOE}+S_{\Delta KOB}=\frac{1}{2}S;$

$S_{CKOE}+S_{\Delta AOE}=\frac{1}{2}S;\ S_{CKOE}+S_{\Delta KOC}=S_{\Delta COE}=S_{\Delta SOE}+S_{\Delta KOB}.$

Şunlukda, $2S_{CKOE}=2(S_{\Delta KOC}+S_{\Delta COE})=S-(S_{\Delta KOB}-S_{\Delta AOE})=$
$=S-(S_{\Delta KOC}+S_{\Delta COE})=S-S_{CKOE}.$

Şunlukda, $S_{CKOE}=\frac{1}{3}S.$

**394.** Goý, $a$ berlen bitin san bolsun. $a$ sanyň bölüjilerini $P$ we $\frac{a}{p}$ jübüt görnüşe böleliň, bu ýerde $P$ san $a$-nyň bölüjisi we $P<\sqrt{a}$. Şunlukda, eger $a$ dogry kwadrat bolmasa, onda hemme bölüjileri jübütlere bölüner, çünki $a$ sany $\sqrt{a}$ sandan kiçi sana bölenimizde, biz $\sqrt{a}$ sandan uly san alarys we tersine. Hemme bölüjiler alnan jübütden iki esse uly bolar, ýagny jübüt san bolar. Eger $a$ san dogry kwadrat bolsa, onda $\sqrt{a}$ san $a$ sanyň bölüjisi bolar, ýöne oňa ýokarda beýan edilen jübütler tapdyrmaz we şunlukda, bu ýagdaýda bölüjileriň sany täk bolar.

**395.** Şeýle 16 san bar: 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47. Goý, şeýle san tapdyrýan bolsun. Onda olaryň iň bolmanda 16-sy birlik däldir we bu 16 sanyň her biriniň iň bolmanda bir ýönekeý bölüjisi bardyr. Iki sanyň hiç bir ýönekeý bölüjileri gabat gelmeýär, onda iň bolmanda 50-den kiçi 16 sany ýönekeý sanlar bardyr. Ýöne olaryň hemmesi 15 sanydyr. Gapma-garşylyk aldyk. Diýmek, şeýle sanlaryň iň uly mukdary 16 sandyr.

**396.** $G$ nokatdan $FM$ kesime deň we parallel $GR$ kesim geçireliň $R$ we $M$ nokatlary birikdireliň. $FGRM$ dörtburçluk parallelogramdyr ($FM \| GR$ we $FM=GR$) şoňa görä $MR$ we $FG$ kesimler deň we paralleldir. Ýöne $ACFG$ dörtburçluk hem parallelogramdyr, onda $FG$ kesim $AC$ kesim deň we parallel, şoňa görä $MR$ kesim we $AC$ kesim deň we paralleldir, ýagny $ACMR$ parallelogram we $AR$ kesim $CM$ kesim deň we parallel. $BCMN$ parallelogram, onda $CM$ kesim we $BN$ kesim parallel we deň, şoňa görä-de, $AR$ we $BN$ kesimler deň we paralleldir we $ARNB$ parallelogram we $AB$ kesim we $RN$ kesim deň we paralleldir. $RL$ kesim geçireliň. $ABKL$ parallelogramdyr, onda $AB$ we $KL$ kesimler deň we paralleldir, $RL$ we $KL$ kesimlerde deň we paralleldir. $RNKL$ parallelogram, $RL$ we $KN$ kesimler deň we parallel. $GL$, $GR$ we $RL$ kesimler $GLR$ üçburçluk emele getirýär. Şonuň üçin, olara deň $GL$, $KN$ we $MF$ ($KN=RL$, $MF=GR$) kesimlerden üçburçluk düzüp bolýar.

**397.** $x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=$ $=(x^2-2xy+y^2+y^2)(x^2+2xy+2y^2)=((x-y)^2+y^2)((x-y)^2+y^2)$.

Köpeltmek hasylynyň ýönekeý bolmagy üçin köpeldijileriň biriniň 1-e deň bolmagy zerurdyr. Eger $(x-y)^2+y^2=1$ bolsa, onda ýa-ha $x=y=1$ ýa-da $x=y=-1$ ýa-da $x=-1$, $y=0$ ýa-da $x=1$, $y=0$ bolmalydyr. Birinji iki ýagdaýda $x^4+4y^4=5$; üçünji we dördünji ýagdaýda 1-lik alnar. Ýöne 1-ýönekeý san däldir. Eger $(x+y)^2+y^2=1$ bolsa, onda ýa-da $x=-y=1$, ýa-da $x=-y=-1$, ýa-da $x=-1$, $y=0$, ýa-da $x=-y=1$, ýa-da $x=-y=-1$ ýa-da $x=-1$, $y=0$, ýa-da $x=-y=1$ ýa-da $x=-y=-1$, ýa-da $x=-1$, $y=0$, ýa-da $x=1$, $y=0$. Üçünji we dördünji ýagdaýda $x^4+4y^4=1$. Aşakdaky jübüt sanlaryň şerti kanagatlandyrýandygyny gutarnykly alarys: $x=1$, $y=1$; $x=-1$, $y=-1$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=1$.

**398.** $k$-burçlugyň burçlarynyň jemi $180^0\cdot(k-2)$ deňdir. Onuň hemme burçlary kütekdir, onda ol $90^0\cdot k$ uludyr, ýagny $9k<180\cdot(k-2)$, bu ýerde $k<2k-4$, $k>4$-i alarys $k$-burçlugyň depelerini $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$ bilen belgiläliň we $A_1A_3+A_2A_4+A_3A_5+...+$ $+A_{k-1}A_k+A_kA_2$. Diagonallarynyň uzynlyklarynyň jeminiň $A_1A_2+A_2A_3+...+A_{k-1}A_k$ taraplarynyň uzynlyklarynyň jeminden uludygyny subut etmeli. Hakykatdan-da, $A_1A_2A_3$ üçburçlukda $A_1A_2A_3$ burç kütek, onda $A_1A_3$ uly tarapdyr, $A_1A_3>A_1A_2$, $A_1A_3>A_2A_3$, bu ýerde $2A_1A_3>A_1A_2+A_2A_3$.

Şuňa meňzeşlikde $2A_2A_4>A_2A_3+A_3A_4$, $2A_3A_5>A_3A_4+A_4A_5$, ..., $2A_{k-1}A_1>A_{k-1}A_k+A_kA_1$, $2A_kA_2>A_kA_1+A_1A_2$-ni alarys. Bu ýerden (deňsizlikleriň sag we çep böleklerini goşup)

$2(A_1A_3+A_2A_4+A_3A_5+...+A_{k-1}A_k+A_kA_2)>$

$>2A_1A_2+2A_2A_3+...+2A_{k-1}A_1+2A_kA_1$-i alarys. Iki bölegini-de 2-ä bölüp, hemme diagonallaryň uzynlyklarynyň jeminiň $k$ burçlugyň taraplarynyň uzynlyklarynyň jeminden uludygyny alarys.

**399.** 19-njy orny alana garanyňda 1-den 18-e çenli orny eýelänler köp oçko toplapdyrlar ýagny iň bolmanda 10 oçko toplapdyrlar. Ýaryşda jemi $\frac{20\cdot 19}{2}=190$ duşuşyk geçirilipdir. 20 adamynyň her biri galan 19 adam bilen oýnaýar ýagny olar 20·19 jübüt oýun oýnaýarlar, ýöne her oýun iki gezek hasap edilýär. Şoňa görä-de, $\frac{20 \cdot 19}{2}$ oýun bolar we 190 oçko paýlanýar. 1-den 18-e çenli orny eýelänler 18·10=180-den az bolmadyk oçko toplaýarlar, 19-njy 9,5 oçko toplaýar, şoňa görä-de, soňky 190–180–9,5=0,5 köp bolmadyk oçko toplaýar. Eger 0,5 oçkodan toplan bolsa, onda 1-den 18-e çenli orny eýelänler 10 oçkodan toplapdyrlar;

19-njy orny eýelän 9,5 oçko toplaýar, soňky bolsa 0,5 oçko toplaýar. (Bu warianty amala aşyryp bolýandyr, mysal üçin, şeýle: hemme duşuşyklar deňme-deň bolýar, diňe olardan başgalary 1-nji bilen 19-njy oýnanda birinji utýar we birinjiden başga hemmesi 20-njini utýar). Eger ol 0 oçko toplan bolsa, 1-den 18-e çenli aralykda orun alanlaryň biri 10,5 oçko toplan bolmaly (ol hem ýeňiji bolýar) we netije: 1-nji 10,5 oçko toplaýar, 19-njy 9,5 oçko we 20-nji 0 oçko toplaýar. Bu wariant mysal üçin şeýle amala aşyrylýar: 1-nji 19-njyny utýar we hemmesi (1-den 19-a çenli) 20-nji utýar şulardan başga ähli̇si deňme-deň oýnaýar.

**400.** 3-e bölünmeýän ikinji derejeli sany 3-e bölenińde 1 galyndy galýar. Hakykatdan-da

$$\begin{cases}(3x+1)^2 = 3(3x^2+2x)+1 \\ (3x+2)^2 = 3(3x^2+4x+1)+1.\end{cases}$$

Şoňa görä-de, $2^{3456788}=(2^{1728394})^2$ sany 3-e bölenińde galyndy berýär, çünki $2^{1728394}$ san 3-e bölünmeýär.

$2^{3456789}=(2^{3456788})\cdot 2$ san 3-e bölünende 1·2=2 galyndy galýar. $2^{3456789}+1$ san 3-e bölünende 2+1=3 galyndy galýar. Bu san 3-e bölünýär we 3-den uly, onda ol düzmedir.

**401.** Goý, *ABCD* dörtburçlukda *AC*=6, *BD*=2 bolsun. Dörtburçlugyň meýdany *ABD* we *CBD* üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir, ýagny $\frac{1}{2}BD\cdot h_A+\frac{1}{2}BD\cdot h_B=$ $=\frac{1}{2}BD(h_A+h_B)=h_A+h_B$, bu ýerde $h_A$ *A* – nokatdan *BD* göni çyzyga geçirilen beýiklik, $h_B$ *B* nokatdan *BD* göni çyzyga geçirilen beýiklik. *ABCD* dörtburçlugyň meýdany 3 sm²-a deňdir, onda

$h_A+h_B=3$. $C$ nokatdan $BD$ göni çyzyga parallel göni çyzyk we $A$ nokatdan oňa perpendikulýar geçireliň. Bu perpendikulýaryň $BD$ kesim bilen kesişýänçä kesimi bu $h_A$ beýiklikdir. $BD$ kesim bilen geçirilen göni çyzygyň arasyndaky kesim $h$-a deňdir (çünki olar parallel we olaryň arasyndaky uzaklyk $h_B$ deň). Şoňa görä bu perpendikulýaryň uzynlygy $h_A+h_B=3$-e deň bolýar. Bu perpendikulýaryň esasyny $E$ bilen belgiläliň. $AEC$ üçburçluga garalyň $AE \perp EC$. Şunlukda, $\angle AEC=90°$, $AC=6$ gipotenuza, $AE=3$ katet. Gipotenuzanyň ýarysyna deň bolan katet 30° burçuň garşysynda ýatýar, onda $\angle ACE=30°$. Diagonallaryň arasyndaky burç bu $AC$ we $BD$ kesimleriň arasyndaky burçdur. Ol $AC$ göni çyzyk bilen $BD$ göni çyzyga parallel $CE$ göni çyzygyň arasyndaky burça deňdir, ýagny $ACE$ burça deňdir. Şoňa görä-de, diagonallaryň arasyndaky burç 30°-a deňdir.

**402.** Eger kesilen 2 öýjük bir reňkde bolsa, onda tagtany talap edilişi ýaly ýapyp bolanok. Hakykatdan-da, figura tagtada islendik ýagdaýda ýerleşende-de, bir ak we bir gara öýjügi ýapýar, şonuň üçin ähli figuralar gara we ak öýjükleri deň ýapar, tagtada kesilenler bilen bir reňkli öýjükler beýleki öýjüklere garanyňda 2 öýjük az bolar.

Eger 2 kesilen öýjükler dürli reňkde bolsalar, onda tagtany talap edilişi ýaly elmydama ýapyp bolýar. Tagtada hemme öýjüklerden geçýän ýapyk ýol çyzalyň. Bu ýolda gara we ak öýjükler gezekleşýärler. Dürli reňkde 2 kesilen öýjükler ýoly 2 bölege bölýär, olaryň her biri bir reňkli öýjükden başlanýar, başga reňkli öýjüklerde bolsa gutarýar. Şoňa görä öýjükleriň sany jübütdir. Diýmek, ony figuralar bilen ýapyp bolýar (olary bölegiň ugry boýunça birinji öýjükden soňky öýjüge çenli goýulýar). Şoňa görä-de, hemme galan öýjükleri talap edilişi ýaly ýapyp bolýar.

**403.** $A$ sany $\left[\frac{A}{2}\right]+1$, $\left[\frac{A}{2}\right]+2$, ..., $A-1$ sana bölenlerinde $\left[\frac{A}{2}\right]-1$, $\left[\frac{A}{2}\right]-2$, ..., 2, 1 galyndylar alyndy. ($[x]$ bilen $x$-dan geçmeýän iň uly bitin san belgilenýär). Diýmek, ähli galyndylaryň jemi $1+2+3+\ldots+\left(\left[\frac{A}{2}\right]-1\right)=\frac{\left(\left[\frac{A}{2}\right]-1\right)\left[\frac{A}{2}\right]}{2}$,

ýagny $A\geq\frac{\left(\left[\frac{A}{2}\right]-1\right)\left[\frac{A}{2}\right]}{2}$ kiçi däldir. $A\leq2\left[\frac{A}{2}\right]+1$, onda

$2\left[\frac{A}{2}\right]+1\geq\frac{\left[\frac{A}{2}\right]-1}{2}\left[\frac{A}{2}\right]$. $A\geq2$ bolanda $\left[\frac{A}{2}\right]\geq1$ we $A\neq1$, onda

$2+\frac{1}{\left[\frac{A}{2}\right]}\geq\frac{\left[\frac{A}{2}\right]}{2}$, bu ýerde $\left[\frac{A}{2}\right]\leq7$ we $A\leq15$. 1-den 15-e çenli sanlary alyp, meseläniň şertini diňe $A=8$ kanagatlandyrýandygyny göreris.

**404.** Tersine güman edeliň. Onda tölänlerinden soňra ýolagçylaryň her birinde iň bolmanda bir teňňe galar (tersine, ol ýa-ha hiç zat tölemändir, ýa-da 10-dan az bolmadyk teňňe bilen hasaplaşypdyr). Onda ýolagçylarda 40-dan az bolmadyk teňňe galypdyr. Diýmek, kassa 9-dan köp bolmadyk teňňe tölenipdir. Teňňeleriň her biriniň güýji 20 teňňeden geçýän däldir, onda kassa tölenen 180 teňňeden artyk däldir. Onda 40 ýolagçynyň ýol haky 5·40=200 teňňe bolýar. Gapma-garşylyk aldyk.

**405.** Goý, $ABCD$ berlen dörtburçluk, $AB$ tarapyň ortasy $A_1$, $BC$ tarapyň ortasy $B_1$, $CD$ tarapyň ortasy $C_1$, $DA$ tarapyň ortasy $D_1$ bolsun. Goý, $ADB'C'$ dörtburçluk $ABCD$ dörtburçlugyň obrazy bolsun ($D_1$ merkezli merkezleýin simmetriýa boýunça); $B'_1$ nokat $B'C'$ tarapyň ortasy bolsun. Onda şol merkezleýin simmetriýada $B_1$-iň obrazy $B'_1$ bolar. Diýmek, $B_1D_1$ we $B'_1$ nokatlar bir göni çyzykda ýatýarlar we $B'_1B_1=2B_1D_1$. $BC$ we $C'B'$, $BC'$ we $CB'$ göni çyzyklar merkezleýin simmetrikdir, onda olar paralleldirler. Şunlukda, $BCB'C'$ parallelogramdyr. Onda $B_1B'_1=CB'$. Aralyklaryň häsiýeti boýunça alarys: $CB'\leq CD+B'D=AB+CD$, onsoňam deňlik diňe $C$, $D$ we $B'$ nokatlar bir göni çyzykda ýatýan ýagdaýynda ýerine ýetýär, ýagny haçanda $AB$ we $CD$ göni çyzyklar parallel bolanda deňlik alynýar. Şuňa meňzeşlikde $2A_1C_1 \leq AD+BC$ deňsizligi almak bolar. Onda

$$\begin{cases} A_1C_1 \leq \dfrac{AD+BC}{2} \\ B_1D_1 \leq \dfrac{AB+CD}{2} \end{cases}$$

Bu deňsizlikleri goşup, alarys:

$$A_1C_1+B_1D_2 \leq \frac{AD+BC+AB+CD}{2}$$

Şert boýunça deňlik alynýar, onda $AB$ we $CD$, $BC$ we $AD$ göni çyzyklar paralleldir, ýagny $ABCD$ parallelogram.

**406.** $2^{10}+5^{12}=2^{10}+2\cdot 2^5\cdot 5^6+5^{12}-2^6\cdot 5^6=$
$=(2^5+5^6)^2-(2^3\cdot 5^3)^2=(2^5+5^6-2^3\cdot 5^3)(2^5+5^6+2^3\cdot 5^3).$

Köpeldijileriň her biri 1-den uly, onda $2^{10}+5^{12}$ düzme san.

**407.** Şert boýunça:

$0=2(a^8+b^8+c^8)-(a^4+b^4+c^4)^2=$
$=a^8+b^8+c^8-2a^4b^4-2a^4c^4-2b^4c^4=$
$=a^8+b^8+c^8-2a^4b^4-2a^4c^4+2b^4c^4-4b^4c^4=$
$=(-a^4+b^4+c^4)^2-(2b^2c^2)^2=$
$=(b^4+c^4-2b^2c^2-a^4)(b^4+c^4+2b^2c^2-a^4)=$
$=(b^2+c^2)^2-(a^2)^2((b^2-c^2)^2-(a^2)^2)=$
$=(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2+c^2)(b^2+a^2-c^2)(b^2-c^2-a^2).$

$b^2+a^2+c^2>0$, onda $(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)(b^2-c^2-a^2)=0$, ýagny üçburçlugyň bir tarapynyň kwadraty onuň beýleki iki taraplarynyň kwadratlarynyň jemine deňdir. Diýmek, üçburçluk gönüburçludyr.

**408.** $AD$ diagonal geçireliň we onuň ortasynda $O$ nokady belläliň $ON$ we $LO$ kesimler geçireliň. $BCDA$ dörtburçlukda $KM$ we $LO$ kesimler gapma-garşylykly taraplaryň ortasyny birleşdirýär. $BCD$ üçburçlukda $BC$ tarapyň ortasy $L$ nokatdyr, $M$ nokat bolsa $CD$ tarapyň ortasydyr, onda $LM$ orta çyzykdyr, $LM$ kesim $BD$ kesime paralleldir we $LM=\frac{1}{2}BD$.

*BAD* üçburçlukda *K* nokat *AB* tarapyň, *O* nokat *AD* tarapyň ortasy, onda *KO*-orta çyzyk, *KO* kesim *BD* kesime parallel we $KO=BD\frac{1}{2}KO$ we *LM* kesimler *BD* kesime paralleldirler, onda *KO* we *LM* paralleldirler we $KO=KM=\frac{1}{2}BD$, şoňa görä *LMOK* parallelogram we onuň *LO* we *KM* diagonallary kesişme nokatda deň bölünýärler, ýagny olaryň kesişme nokady. *KM* kesimiň ortasy bolsa *P* nokatdyr. *LO* kesim *P* nokatdan geçýär we bu nokatda deň bölünýär. *LNO* üçburçlukda *LO* kesimiň ortasy *P* nokat, *LN* kesimiň ortasy *Q* nokat, onda *PQ*-orta çyzykdyr, *PQ* kesim *ON* kesime paralleldir we $PQ=\frac{1}{2}ON$. *ADE* üçburçlukda *AD* tarapyň ortasy *O* nokat, *DE* tarapyň ortasy *N* nokatdyr, onda *ON* kesim onuň orta çyzygydyr, *ON* kesim *AE* kesime paralleldir, $ON=\frac{1}{2}AE$. *ON* kesim *AE* kesime parallel we *PQ* kesim *ON* kesime parallel, onda *PQ* kesim *AE* kesime paralleldir we $PQ=\frac{1}{2}ON=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AE)=\frac{1}{4}AE$. Subut edildi.

**409.** 2111111 sany 1222222 we 3333333 sanlar bilen deňeşdirip, onuň nomeriniň birinji sifr bilen gabat gelýändigini göreris. 3111111 sany 1222222 san bilen, 1222222, 1333333 sany 3111111 we 2222222 san bilen, 3222222 sany 1111111 we 2111111 san bilen, 2333333 sany 1111111 we 3222222 san bilen deňeşdirip, *abbbbbb* görnüşdäki islendik sanyň nomeriniň onuň birinji sifri (*a*) bilen gabat gelýändigini alarys (bu ýerde *a* we *b* 1, 2 we 3 sifrleriň biri). Eger san *a* we *b* sifrlerden durýan bolsa, onda onuň nomeriniň birinji sifr bilen gabat gelýändigini subut edeliň. Goý, sanyň birinji sifri *a* bolsun. Onda galan hemme sifrler *a* we *b*. Onda *bcccccc* we *ccccccc* (bu ýerde *C* sifr *a* we *b* sifrden tapawutlydyr) sany alalyň. Biziň sanymyz hiç bir razrýadda onuň bilen gabat gelenok, onda onuň nomeri birinji sifri bilen gabat gelýär (çünki bu iki sanlaryň nomerleri birinji sifrleri bilen gabat gelýär). Indi ýazgysynda 1, 2 we 3 sifrler duş gelýän *y* sanyň nomeriniň birinji sifr bilen gabat gelýändigini subut edeliň. Goý, san $a$ sifr bilen başlanýan bolsun. Onda ony 2 sifrden durýan aşakdaky iki san bilen deňeşdireliň (olaryň nomerleri birinji sifr bilen gabat gelýär): biri $b$ bilen, beýlekisi $C$ bilen başlanýar (ikisi hem $b$ we $C$ sifrden durýar), indiki sifrleriň her biri – ähli üç sifrleriň biri bolan bu ýerde durýan sanyň sifri bilen gabat gelmeýän ikileriň biri ($b$ we $C$).

Ähli üç sifrlerden durýan san razrýadda bu iki sanlaryň hiç biri bilen gabat gelmeýär, onda ol $b$ ýa-da $C$ nomer alyp bilmez, ýagny onuň nomeri birinji sifr bilen gabat gelýär. Şunlukda, her bir sanyň nomeri onuň birinji sifr bilen gabat gelýär.

**410.** $p^{p+1}+2>2$, onda $p$ täkdir (tersine, $p^{p+1}$ jübüt, $p^{p+1}+2$ jübüt we 2-den uly ýagny ýönekeý däl bolýar). Şoňa görä-de, $p+1$ jübüt. Eger $p$ san 3-e bölünmeýän bolsa, onda $p^{p+1}$san 3-e bölünende 1 galyndy galýar (çünki jübüt derejeli 3-e bölünmeýän sany 3-e böleniňde 1 galyndy galýar) we $p^{p+1}+2$ san 3-e bölünýär. $p^{p+1}+2>3$ we $p^{p+1}+2$ san 3-e bölünýär, şunlukda, $p^{p+1}+2$ san ýönekeý däl. Eger $p$ san 3-e bölünse, onda $p$ ýönekeý san we $p$ san diňe 3-e deň bolup bilýär. $3^{3+1}+2=83$ ýönekeý san. Diýmek, şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk san $p=3$.

**411.**

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}-\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}-$$
$$-\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+$$
$$+\frac{a+b+c}{a+b}-1-1-1=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-$$
$$-3=7\cdot 0,7-3=1,9.$$

**412.** Eger $[a]=b$ bolsa, onda $b$ bitin san we $b\le a\le b+1$. Diýmek, $\frac{15x-7}{5}$ bitin we $\frac{15x-7}{5}\le\frac{5+6x}{8}<\frac{15x-7}{5}+1$. Bu deňsizligi çözüp alarys: $\frac{41}{90}<x\le\frac{9}{10}$. $\frac{15x-7}{5}$ bitin san, onda $\frac{15x-7}{5}=\frac{5\left(3x-\frac{7}{5}\right)}{5}=3x-\frac{7}{5}$. Bu bitin sana deňdir.

Goý, $K$ bitin we $3x-\frac{7}{5}=K$ bolsun, onda $x=\frac{K}{3}+\frac{7}{15}$.

$\frac{11}{100}$ $x \le \frac{9}{10}$, onda $\frac{41}{90} < \frac{K}{3}+\frac{7}{15} \le \frac{9}{10}$. Bu deňsizligi çözüp alarys: $-\frac{1}{30}<K\le 1{,}3$. $k$ bitin sandyr, onda $k$ san 0-a ýa-da 1-e deň. Eger $k$=0 bolsa, onda $x=\frac{7}{15}$ we

$$\left[\frac{5+\frac{7-6}{15}}{8}\right]=\left[\frac{39}{40}\right]=0=\frac{\frac{15\cdot 7}{15}-7}{5}.$$

Eger $k$=1 bolsa, onda $x=\frac{4}{5}$ we

$$\left[\frac{5+\frac{4-6}{5}}{8}\right]=\left[\frac{49}{40}\right]=0=\frac{\frac{15\cdot 4}{5}-7}{5}.$$

**413.** Bu ulgam aşakdaky ulgama deňgüýçlüdir:

$$\begin{cases} y(xy+x^2y+1)+x^2+xy+x-3=0 \\ x^2y+xy+1=0 \end{cases}$$

bu

$$\begin{cases} x^2y-x^2-x+4=0 \\ x^2y+xy+1=0 \end{cases}$$

ulgama deňgüýçlüdir. Bu ýerden

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{x^2+x} \\ y=\dfrac{x^2+x-4}{x^2} \end{cases}$$

alarys: $-\frac{1}{x^2+x}=\frac{x^2+x-4}{x^2}$ deňlemäni çözüp, alarys:

$x^3+x^2-2x-4=0$.

Ýöne $x^3+x^2-2x-4=(x+2)(x^2-2)=(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

$$\begin{cases} (x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0; \\ y=\dfrac{x^2+x-4}{x^2}. \end{cases}$$

Ulgam aşakdaky ulgamlara deňgüýçlüdir:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2;\\ y=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{2};\\ y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{2};\\ y=-\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\end{cases}\end{array}\right.$$

**414.** Goý $ABCD$ berlen parallelogram, $Q$ nokat $DA$ tarapyň ortasy, $M$ nokat $AB$ tarapyň ortasy, $N$ nokat $BC$ tarapyň ortasy, $P$ nokat $CD$ tarapyň ortasy bolsun. Goý, $NQ$ kesim $AB$ kesime parallel däl bolsun. $P$ nokatdan $AD$ kesime parallel $PM_1$ göni çyzyk geçireliň. Goý, $M_1$ nokat $PM_1$ we $AB$ göni çyzyklaryň kesişmesi bolsun.

$S_{NPQM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ we $S_{NPQM_1}=\frac{1}{2}(S_{BCPM_1}+S_{ADPM_1})=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, onda $S_{NPQM}=S_{NPQM_1}$. Şunlukda, $S_{QM_1N}=S_{NQM}$. Bu üçburçluklaryň umumy $QN$ esaslary bardyr, onda olaryň beýiklikleri deňdir. Ýöne onda $M$ we $M_1$ nokatlar gabat gelýär (tersine $MN_1$ kesim $NQ$ göni çyzyga paralleldir). Şunlukda, $PM$ we $AD$ göni çyzyklar paralleldir.

**415.** Komandalaryň her biri 34-den az bolmadyk oýun oýnaýar, onda komandalaryň her biri üçin onuň häzir oýnamadyk birden köp bolmadyk komandasy bardyr. Oz aralarynda oýnamadyk ähli jübüt komandalara garalyň. Jübüt komandalaryň her birinden bir komandany I toparda we beýlekisini II toparda ýerleşdireliň. I we II toparlarda $k$ komanda bolar, bu ýerde $k$ käbir bitin san, $0\leq k\leq 18$. Eger $k\leq 12$ bolsa, onda I we II toparlary 12 komanda çenli dolduralyň, III topary bolsa $12-k$ komanda çenli dolduralyň we gözlenilýän bölünmäni alarys. Eger $12\leq k\leq 18$ bolsa, onda birinji topardan islendik $k-12$ komanda we ikinji topardan hem $k-12$ komanda alalyň. Olar alnanlaryň hiç biri bilen jübüt emele getirmeli däldir (bu mümkindir, çünki $2(k-12)<k$). Alnan komandalary III toparda ýerleşdireliň we gözlenilýän bölünmäni alarys.

**416.** Goý, $O$ nokat kwadratyň merkezi bolsun. Goý, $K$ nokady $O$ merkezden sagat strelkasynyň tersine 90° öwrülendäki obrazyny $K'$ bilen bellenen bolsun. Şeýle öwürmede $B$ nokat $A$ nokada, $C$ nokat $B$ nokada, $D$ nokat $C$ nokada, $A$ nokat $D$ nokada geçer. $BK, CK, DK$ we $AK$ göni çyzyklar degişlilikde, $AK', BK', CK'$ we $DK'$ göni çyzyklara şekillendirilýärler. Öwürme burç 90°-a deňdir, onda $AK'$ göni çyzyk $BK$ göni çyzyga perpendikulýar, $BK'$ göni çyzyk $CK$ göni çyzyga perpendikulýardyr we ş.m. Diýmek, hemme perpendikulýarlar $K'$ nokadyň üstünden geçýärler.

**417.** Ýaşigiň düýbüni 1·1 öýjüklere böleliň we ony gara we ak reňkde reňkläliň. Bir öýjükden geçip wertikallary alalyň we olaryň birleşmelerini ak reňkde, galanlaryny gara reňkde reňkläliň. 2·2 kerpiç islendik ýagdaýda ýerleşendede, ony öýjükleriň täk sany ýapýar ýagny (1 gara we 3 ak reňkde) ýagny ak we gara reňkde bolan öýjükleriniň her biriniň sany täk bolýar. 1·4 kerpiji bolsa her reňkde bolan öýjükleriň jübüt sany ýapýar (2 gara we 2 ak ýa-da 0 gara we 4 ak). Şoňa görä-de, reňklemedäki gara öýjükleriň jübüt sany we ýapmakdaky 2·2 kerpiçler birdirler. 2·2 öýjükleriniň birini 1·4 kerpiç bilen çalşyrylanda 2·2 kerpiçleriň jübüt sany üýtgeýär we reňklemedäki gara öýjükleriň jübütligi bilen gabat gelmän başlaýar we şonuň üçin ýaşigiň düýbüni ýapmak başartmaýar.

**418.** $(x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2)^2=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2)^2+$
$+(2x_1x_k)^2+(2x_2x_k)^2+\dots+(2x_{k-1}x_k)^2$
($x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2-x_k^2$ aňlatma 0-a deň bolmaz ýaly edip, $x_k$ saýlanyp alynýar. Mysal üçin, $x_k$ san hemme $x_i$-iň moduly boýunça iň kiçisi).

**419.** Şäherleriň sany boýunça induksiýa bilen meseläniň tassyklamasyny subut edeliň. 2 şäher üçin tassyklama dogry (birinji şäherden ikinji şähere ýa-da ikinji şäherden birinji şähere gitmek bolar).

Goý, $n$ şäher üçin meseläniň tassyklamasy dogry bolsun. Onuň $(n+1)$ şäher üçin hem dogrudygyny subut edeliň. Erkin $(n+1)$-nji şäheri alalyň we ondan başga hemme şäherlere garalyň. Şerte görä olar ýol bilen birikdirilendir, onda induksiýanyň güman etmegi boýunça şeýle şäher bar bolup, ondan çykyp hemme şäherleri (olaryň her birinde dogry 1 gezek bolup) aýlanmak bolýar. Bu şähere 1 nomer bereliň. 1-den talap edilýän marşrut boýunça düşülýän şäheri 2-nji nomer, 2-den barylýan şäheri 3-nji nomer bilen belgiläliň we ş.m. marşrutyň gutarýan şäherini $n$-nji nomer bilen belgiläliň. Eger $(n+1)$-nji şäheri galan ähli şäherler bilen birikdirýän ähli ýollar oňa getirýän bolsa, onda $n$ şäherden $(n+1)$-nji şähere gitmek bolar we gözlenilýän marşruty alarys. Tersine, $(n+1)$ şäherden çykyp, ony iň kiçi nomerli şäher bilen birikdirýän (goý $k$-njy) ýoly alalyň. Eger $k=1$ bolsa, onda $(n+1)$ şäherden 1-nji gitmeli we dowam etmeli. Şunlukda, şäherleriň gerekli marşrutyny alarys (we $(n+1)$-nji şäher gözlenilýän bolar). Tersine, 1-den $(k-1)$-nji şähere çenli gidip, onsoň $(k-1)$-njiden $(n+1)$-nji şähere bararys (çünki $(n+1)$-den gidýär iň kiçi nomerli şäher $k$ deňdir, onda $(k-1)$ şäherden ýol $(k+1)$-e getirer, soňra $(n+1)$-den $k$-njy nomere we $k$-dan $n$-nji nomerli şähere getirer. 1-nji şäherden başlanýan bu ýagdaýda gözlenilýän marşrut bolýar.

**420.** Kiçi töweregiň merkezini $O_1$ bilen, uly töweregiň merkezini bolsa $O_2$ bilen belgiläliň. Merkezi $A$ nokatda we $k = \frac{O_2A}{O_1A}$ koeffisiýentli gomotetiýa garalyň (uly we kiçi töwerekleriň radiuslarynyň gatnaşygy). Bu gomotetiýada $A$ özüne geçýär, $O_1$ bolsa, $O_2$-ä geçýär, $O_1$ merkezli töwerek (kiçi) uly töwerege ($O_2$ merkezli) geçýär, şonuň üçin $B$ nokat uly töwerekde ýatýan $E$ nokada geçýär we ol $AB$ göni çyzykda ýatýar we $O_1B$ kesime parallel $O_2E$ radiusyň ahyry bolýar (çünki $O_1B$ kesim $O_2E$ kesime geçýär, geometrik göni çyzyklar paralleldirler). Şunlukda, $O_1B$ kesim galtaşma nokatda radius hökmünde $CD$ göni çyzyga perpendikulýardyr. Horda perpendikulýar radius ony dartýan dugany deň bölýär, onda $E$ nokat $CD$ duganyň ortasydyr. $\angle CAE=\angle EAD$, deň dugalara daýanýan içinden çyzylan burç hökmünde. Şonuň üçin, $AE$ göni çyzyk $CAD$ burçuň bissektrisasy bolýar. Ýöne, $AB$ göni çyzykda $E$ nokat ýatýar, şonuň üçin, $AE=AB$ we $AB$ göni çyzyk $CAD$ burçuň bissektrisasy. Subut edildi.

**421.** Topardan islendik bir adam alalyň we oňa 1 nomer dakalyň. Onuň dostuna 2 nomer dakalyň 2-niň duşmanyna 3 nomer, 3-üň dostuna 4 nomer we ş.m. dakalyň. Kimiň goňşy nomeri bar bolsa şolar dostlar ýa-da duşmanlar bolýar, onsoňam 1-nji 2-nji bilen, 3-nji 4-nji bilen we ş.m. dostlar. Diňe dosty bolan birinji nomerden başga nomer dakylan ähli adamlaryň dosty we duşmany bardyr. Onda adamlaryň sany tükenikli bolany üçin haçanda bolsa bir wagt birinji nomere geleris, ýagny birinji $k$-nyň duşmany bolar we oňa $k$+1 nomeri dakmak bolar.

$k$-jübüt (eger $k$ täk bolsa, onda $k$-njy we ($k$+1)-nji, ýagny 1-nji dostlar bolardy, ýöne 1-nji eýýam dosty bardyr). Duralyň. Eger biz hemme adamlara nomer dakmadyk bolsak, onda bu operasiýany gaýtalalyň (galanlaryň islendik birini alalyň we 1 nomer dakalyň, onuň dostuna 2 nomer we ş.m. dakalyň) we ony hemmesine nomer dakylýança dowam edeliň. Indi jübüt nomerli ähli adamlary bir kompaniýa täk nomerlileri bolsa beýleki kompaniýa ýerleşdireliň. Dostuň ýa-da duşmanyň dürli jübüt nomeri bar, onda bir kompaniýada iki dost we iki duşman ýok, ýagny kompaniýanyň bölünmesi meseläniň şertini kanagatlandyrýar.

**422.** Goý, $KMN$ üçburçlukda $KR$ mediana, $KN=a$, $KM=b$ bolsun. Üçburçluklaryň meýdanlary deňdir. $S_{KMR}=S_{KNR}$ we $S_{AMR}=S_{ANR}$ ($MR=RN$ esaslary deň we beýiklikleri umumy), onda $S_{KAM}=S_{KMR}-S_{AMR}=S_{KNR}-S_{ANR}=S_{KAN}$. $KN$-e çenli gözlenýän uzynlygy $x$, $KM$-e çenli bolsa $y$ bilen belgiläliň. Onda $\frac{1}{2}ax=\frac{1}{2}by$. Alarys:

$$\begin{cases} ax = by; \\ x + y = p, \end{cases} \text{ bu ýerden}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{bp}{a+b}; \\ y = \dfrac{ap}{a+b}. \end{cases}$$

Diýmek, $a$ uzynlykly tarapa çenli uzaklyk $\dfrac{by}{a+b}$ deňdir, $b$ uzynlykly tarapa çenli uzaklyk bolsa $\dfrac{ap}{a+b}$ deňdir.

**423.** Tekizligi dogry üçburçluklara böleliň we olary küşt tertibinde reňkläliň (umumy tarapy bolan iki üçburçlugy dürli reňk bilen). Goý berlen üçburçluk bölünen üçburçluklaryň biri bilen gabat gelýän bolsun (ak reňk bilen reňkleneni). Eger üçburçluk bölünen üçburçluklaryň biri bilen gabat gelse, onda onuň bir tarapyna görä oňa simmetrik tarapy boýunça goňşy üçburçluk bilen gabat gelýär we şoňa görä başga reňkli.

Diýmek, şekillendirmäniň her birinde reňk üýtgeýär. Şonuň üçin, eger berlen üçburçluk ak reňkli bolsa, onda 1, 3 we umuman islendik täk sany şekillendirmeden soň gara reňkli üçburçluk alnar, ýagny berlen üçburçluk bilen gabat gelmeýän. Şunlukda, soňky üçburçluk berlen üçburçluk bilen gabat geldi, şonda jübüt sany şekillendirme edilipdir.

**424.** a) goý, $a$ berlen san bolsun. $a$ sanyň sifrleriniň jemi 4-e deň, onda şeýle $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ bitin sanlar tapylyp, $a=10^{m_1}+10^{m_2}+10^{m_3}+10^{m_4}$ deňlik ýerine ýeter. Onda $a^2=a\cdot10^{m_1}+a\cdot10^{m_2}+a\cdot10^{m_3}+a\cdot10^{m_4}$. Sag bölekdäki duran goşulyjylaryň her biriniň sifrleriniň jemi 4-e deňdir. Birnäçe sanlaryň jeminiň sifrleriniň jemi bu sanlaryň sifrleriniň jeminiň jeminden geçýän däldir, onda $a^2$ sanyň sifrleriniň jemi 16-dan geçýän däldir. $a$ sany 9-a böleniňde 4 galyndy berýär, onda $a^2$ san 9-a bölünende 7 galyndy galýar. Şunlukda, $a^2$ sanyň sifrleriniň jemi 7-ä ýa-da 16-a deňdir. Birinji mümkinçilik $a=4\cdot10^9$ bolanda ýerine ýetýär, ikinji mümkinçilik bolsa $a=22\cdot10^8$ bolanda eýe bolýar.

b) goý, $a$ berlen san bolsun. $a$ sanyň sifrleriniň jemi 3-e deň, onda şeýle $m_1$, $m_2$, $m_3$ bitin sanlar tapylyp, $a=10^{m_1}+10^{m_2}+10^{m_3}$ deňlik ýerine ýeter. Onda $a^2=a\cdot10^{m_1}+a\cdot10^{m_2}+a\cdot10^{m_3}$. Deňligiň sag bölegindäki her goşulyjynyň sifrleriniň jemi 3-e deňdir we birnäçe sanlaryň jeminiň sifleriniň jemi bu sanlaryň sifrleriniň jeminiň jeminden geçýän däldir, onda $a^2$ sanyň sifrleriniň jemi 9-dan geçýän däldir. Şuňa meňzeşlikde, $a^3=10^{m_1}\cdot a^2+10^{m_2}\cdot a^2+10^{m_3}\cdot a^2$ deňlige garap, $a^3$ sanyň sifrleriniň jeminiň 27-den geçmeýändigini alarys. $A$ san 3-e bölünýändir, onda $a^3$ san 9-a bölüner. Diýmek, $a^3$ sanyň sifrleriniň jemi 9-a, 18-e ýa-da 27-ä deň bolup biler. Birinji mümkinçilige $a=3\cdot10^8$ bolanda, ikinjisi $a=12\cdot10^7$ bolanda, üçünjisi bolsa $a=111\cdot10^6$ bolanda eýe bolýar.

**425.** Tekizlikde koordinatalar ulgamyny girizeliň: kwadratyň berilmedik depesinde (0; 0) nokat ýerleşsin, okuň ugry kwadratyň taraplary boýunça ýerleşsin we kwadratyň taraplary birlige deň. Onda üç berlen nokatlaryň koordinatalary (0; 1), (1; 0) we (1; 1) bolar. Eger nokadyň $(x;\ y)$ koordinatasy, beýlekisiniň $(a;\ b)$ koordinatasy bar bolsa, onda nokat ikinjä görä birinjä simmetrikdir we $(x+2(a-x);\ y+2(b-y))$ koordinatasy bardyr. Şoňa görä-de, eger birinji iki nokat gözenegiň düwünlerinde duran bolsa (ýagny bitin koordinatalary bar bolsa), onda soňky nokat hem gözenegiň düwüninde durardy. Ilkibaşda üç berlen nokat düwünlerde dur, onda olardan alnan ähli nokatlar düwünlerde durýar. Simmetriýa bolanda simmetrik nokatlarda koordinatalaryň jübütligi üýtgemeýär ($x$ sana $2(a-x)$ jübüt san goşulýar, $y$ bolsa $2(b-y)$ jübüt san goşulýar). Şonuň üçin, üç berlen nokatdan aşakdakyny almak bolar: (1; 1) nokatdan iki koordinatasy hem täk, (1; 0) we (0; 1) nokatdan diňe bir koordinatasy täk nokat almak bolýar, ýagny olardan iki koordinatasy jübüt nokady alyp bolanok. Kwadratyň (0; 0) dördünji depesiniň iki koordinatasy jübüt, onda ony alyp bolanok.

**426.** Goý, $2^{1971}$ san $a$ sifr bilen, $5^{1971}$ san bolsa $b$ sifr bilen ýazylan bolsun. Bu $10^{a-1}<2^{1971}<10^{a}$ we $10^{b-1}<5^{1971}<10^{b}$ aňladýar.

Bu ýerden $10^{a+b-2}<2^{1971}\cdot 5^{1971}=10^{1971}<10^{a+b}$, ýagny $a+b=1972$. 1972 sifr ýazylypdyr.

**427.** Goý, $\overline{abc}$ üçbelgili san bolsun. Meseläniň şertini şeýle görnüşde ýazmak bolar: $\overline{abc}^2=A\cdot 1000+\overline{abc}$, bu ýerde $A$ san soňky üç sifrsiz $\overline{abc}$ sanyň kwadraty. Onda $\overline{abc}^2-\overline{abc}=$ $=\overline{abc}(\overline{abc}-1)=1000A$, şunlukda, $\overline{abc}(\overline{abc}-1)$ san 1000-e bölünýär. $\overline{abc}$ we $(\overline{abc}-1)$ san özara ýönekeý we olaryň her biri 1000-den kiçi. $1000=5^3\cdot 2^3$, onda $\overline{abc}$ san $5^3$ bölünýär, $\overline{abc}-1$ san bolsa $2^3$-yna bölünýär, ýa-da $\overline{abc}$ san $2^3$-yna bölünýär, $\overline{abc}-1$ san $5^3$-yna bölünýär. Mümkin bolan ýagdaýlary barlap, gözlenilýän 376 we 625 sanlary taparys.

**428.** Goý, $a=x_1^2-5y_1^2$, $b=x_2^2-5y_2^2$ bolsun.
Onda $a\cdot b=(x_1^2-5y_1^2)(x_2^2-5y_2^2)=x_1^2x_2^2+25y_1^2y_2^2-5y_1^2x_2^2-5x_1^2y_2^2=$
$=(x_1x_2)^2+(5y_1y_2)^2+10x_1x_2y_1y_2-5(y_1x_2)^2-5(x_1y_2)^2-$
$-10x_1x_2y_1y_2=(x_1x_2+5y_1y_2)^2-5(y_1x_2+x_1y_2)^2$.

Ýa-da

$$\begin{cases} x_1x_2+5y_1y_2=x \\ y_1x_2+x_1y_2=y \end{cases}$$

bilen çalşyryp, alarys: $ab=x^2-5y^2$.

**429.** $a_i$ we $a_{i+1}$ sifrler $a_{i+2}$ sifri birbahaly kesgitleýär. $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_3a_4}$, $\overline{a_5a_6}$, $\overline{a_7a_8}$ we ş.m. sanlara garalyň (birinji sifriň 0-a deň bolmagy mümkin). Iki sifrden durýan san tükenikli san, onda garalýan sanlaryň arasyndan iki birmeňzeş san tapylar. Goý, $\overline{a_1a_2}$ bu $\overline{a_1a_2}$ bolsun, bu ýerde $i=j$, $a_i=a_j$ we $a_{i+1}=a_{j+1}$, onda $a_{i+2}=a_{j+2}$, $a_{i+3}=a_{j+3}$ we ş.m. ol $a_{j-1}=a_{j+(j-i)-1}$ çenli, $a_i$-den başlap drob periodikdir. $a_{j-1}+a_i$ sany 10-a böleniňde meňzeşlikde, $a_{j+1}-a_j$ sany 10-na böleniňde $a_{j-1}$ galyndy galýar. $a_{j+1}=a_{i+1}$ we $a_j=a_i$, onda $a_{j-1}=a_{i-1}$, şuňa meňzeşlikde, $a_{i-2}=a_{j-2}$, $a_{i-3}=a_{j-3}$ we ş.m. ol $a_2=a_p$, $a_1=a_2=a_{p-1}$ çenli bolýar. Ondan drobuň $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{p-3}$ periodly arassa periodikligi gelip çykýar.

**430.** Şert boýunça $pqr$ san 5-e bölünýär, onda olaryň biri 5-e deňdir. Goý, mysal üçin, $r=5$. Onda $pq=5+p+q$. Goý, kesıılıllik üçin $p \geq q$ bolsun. Onda eger $q>5$ bolsa, onda $5+p+q<3p$, pq 5p we deňlik mümkin däl. Şoňa görä, $q<5$, ýagny $q=2$ ýa-da $q=3$. $q=3$ bolanda alarys: $p+8=3p$ we $p$ ýönekeý däl. $q$ 2p 7 bolanda. Deňleme $r$, $p$ we $q$ görä simmetrikdir, onda olaryň biri hökman 2-ä deň, beýlekisi 5, üçünjisi 7 bolmaly.

**431.** Goý, $a_1, \ldots, a_{10}$ berlen sanlar bolsun.

$(a_1+\ldots+a_{10})^2=a_1^2+\ldots+a_{10}^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_9a_{10}=$

$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{10}^2)^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_9a_{10})$.

Ýöne $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{10}^2=(a_1+\ldots+a_{10})^2-2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_9a_{10})$

$a_1+\ldots+a_{10}=0$, $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_9a_{10}=0$ şert boýunçadyr. Şonuň üçin $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{10}^2=0^2-2\cdot 0=0$. Hakyky sanyň kwadraty otrisatel däldir, onda deňlik diňe $a_1=a_2=\ldots=a_{10}=0$ bolanda mümkindir, bu ýerden olaryň kublarynyň jeminiň nola deňdigini alarys.

**432.** $(x-y)^2$ we $(x+y)^2>0$ alarys.

$x^2+y^2>2xy>-x^2-y^2$.

Şonuň üçin $-a^2-m^2 \leq 2am \leq a^2+m^2$,

$$-b^2-n^2 \leq 2bn \leq b^2+n^2,$$

$$-c^2-p^2 \leq 2cp \leq c^2+p^2.$$

Bu ýerden alarys:

$-a^2-b^2-c^2-n^2-m^2-p^2 \leq 2am+2bn+2cp(a^2+b^2+c^2+n^2+m^2+p^2)$

ýa-da $-1 \leq am+bn+cp \leq 1$.

**433.** $1-1968(1-1968x^2)^2-x$ dördünji derejeli deňlemäniň iki köki $1-1968x^2=x$ ýa-da $1968x^2+x-1=0$ kwadrat deňlemäniň kökleri bilen gabat gelýär. Beýleki iki kökleri $1968(1-1968x^2)^2+x-1$ köpagzany $1968x^2+x-1$ köpagza bölmek bilen tapylýar.

$$1968(1-1968x^2)^2+x-1=0,$$

$$1969(1-1968x^2)^2-x-1=1968^3x^4-2\cdot 1968^2\cdot x^2+x+1967=$$

$$=(1968x^2+x-1)(1968^2x^2-1968x-1967)=0$$

Bu deňlemäniň kökleri $1968x^2+x-1=0$ we

$1968^2x^2-1968x-1967=0$ kwadrat deňlemeleriň kökleri bolýar.

**434.** $x_k+x_{k+1}+x_{k+2}=0$ we $x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}+=0$ deňlemelerden islendik $k$ üçin $x_k=x_{k+3}$ gelip çykýar. Onda $x_1=x_4=x_7=...=x_{97}=$ $=x_{100}=x_3=x_6=...=x_{99}=x_2=x_5=...=x_{98}$ ýagny ähli $x_i$-ler özara deň. $x_1+x_2+x_3=0$ deňleme $x_1+x_1+x_1=0$ deňlemä deňgüýçli. Ondan ähli $x_i$-iň 0-a deňdigini alarys.

**435.** Alnan san $10^{199}$ sandan kiçidir. Bu san hem $16\cdot10^{198}=(4\cdot10^{99})^2$ sandan kiçidir. Doly kwadraty 199-belgili sanyň ýazylmagyndan alynýan ähli sanlaryň iň kiçisi bolan iň uly san alalyň (çünki $\underbrace{99...9}_{99}\,\underbrace{0...0}_{100}$-den $\underbrace{99...9}_{199}$-a çenli $10^{100}$ sany almak mümkindir). Ol $4\cdot10^{99}$ sandan kiçidir, şoňa görä-de, onuň kwadratlarynyň arasyndaky tapawut we indiki sanyň kwadraty $2(4\cdot10^{99})+1=8\cdot10^{99}+1$ sandan kiçidir. Indiki sanyň kwadratynyň ýazmak bilen alnan sanlaryň iň kiçisinden kiçi däldir we iň ulusyndan uly däldir (başgaça aýdylanda, iki goňşy kwadratyň arasyndaky tapawut iň ulynyň arasyndaky tapawutdan uly we ýazylanlaryň iň kiçisi bolardy hem-de $10^{100}-1$-e deň bolardy. Ýöne olaryň tapawudy $8\cdot10^{99}+1<100^{100}-1$-den kiçidir). Şoňa görä-de, bu takyk kwadraty-ýazmak bilen alnan sanlaryň biridir. Bu san hem gözlenilýän sandyr.

**436.** Ýygnananlaryň haýsy hem bolsa birine garalyň. Goý, kesgitlilik üçin, onuň tanyşlary oňa nätanyşlardan az däl bolsun, diýmek, tanyşlary 9-dan az däl. Bu adamy 1 sifr bilen belgiläliň. Onuň tanyşlarynyň birine garalyň, ony 2 sifr bilen belgiläliň. Eger onuň 1 adam bilen 4 umumy tanşy bar bolsa, onda ýa-ha bu dörtlük jübüt-jübüt nätanyş, ýa-da bu dörtlükden jübüt tanyşlar 1 we 2 adamlar bilen dört jübüt tanyşlary emele getirýär. Eger 1 adamyň 2 adamdan başda we onuň bilen tanyş däl 6 tanşy bar bolsa, onda bu 6 adamlaryň içinde ýa-ha 3 jübüt tanyşlary tapmak ýeterlikdir we oňa 1 adamy goşup dörtlügi alarys, ýa-da 3 jübüt nätanyşlary tapmak ýeterlikdir, onda 2 adamy goşmak gerekdir. Bu 6 adamdan birini alalyň we ony 3 sifr bilen belgiläliň. Goý, kesgitlilik üçin, onuň galan 5 adamlarynyň arasynda köp tanyşlary bolsun, onda olar 3-den az däldir. Eger olaryň arasynda jübüt tanyş bar bolsa, onda olar 1 adam bilen jübüt tanyşlaryň üçlügini emele getirýärler, tersine bolan ýagdaýynda, bu 3 adam jübütden tanyş däldir. 3 adamyň 1 adamyň (2 adamdan başga, olar 8-den az däl) tanyşlarynyň arasynda dogry 3 tanyş (we 5 nätanyş) adamy bolan ýagdaýyna garamak galýar. Ýöne, ol 1 adamyň islendik tansy üçin dogry bolmalydyr, çünki 2 nomeri biz erkin belledik. Ýöne, bu mümkin däldir, çünki onda 1 adamyň 9 tanyşlarynyň arasynda jübüt tanyşlaryň möçberi $\frac{9\cdot3}{2}$ bilen bolmazdy.

**437.** Goý, $x_1$ we $x_2$ sanlar $x^2+px+q$ üçagzanyň bitin kökleri bolsun. Onda $P=-(x_1+x_2)$, $q=x_1\cdot x_2$. Bu ýerden 30 $p+q=(x_1-1)(x_2-1)-1$, ýagny $(x_1-1)(x_2-1)=31$. 31 san ýönekeý sandyr, ol iki bitin sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde şeýle ýazylyp bilner: $31=1\cdot31=(-1)\cdot(-31)$. Birinji ýagdaýda, üçagzanyň kökleri bolup 2 we 32 sanlar hyzmat edýär ($x^2$ $34x+64$ üçagza), ikinji ýagdaýda 0 we $-30$ sanlar ($x^2$ $30x$ üçagza).

Jogaby. $x^2-34x+64$ we $x^2+30x$.

**438.** Tersine güman edeliň. Goý, şeýle bir $x$ we $y$ iki san tapylyp, $x+y=201$ hem-de $xy$ köpeltmek hasyly 201-e bölünýän bolsun. $201=3\cdot67$, onda sanlaryň biri, kesgitlilik üçin, goý $x$ san 3-e bölünýär, onda $y=201-x$ sanda 3-e bölüner. Şuňa meňzeşlikde, $x$ we $y$ hem 67-ä bölünýär, ýagny sanlaryň her biri $3\cdot67$-den kiçi däldir. Ýagny olaryň jemi 201-den uly. Gapma-garşylyk alyndy.

**439.** Şeýle $n$-iň deregine, mysal üçin, $n=2^{10000}+10000$ almak bolar. Hakykatdan-da, $5^{2^k}-1\,\vdots\,2^k$ bolýandygyny induksiýa boýunça subut edeliň. Goý, $5^{2^{k-1}}-1\,\vdots\,2^{k-1}$ ýerine ýetirýän bolsun. Onda

$$5^{2^k}-1=(5^{2^{k-1}}-1)(5^{2^{k-1}}+1)=2^k\cdot\frac{5^{2^{k-1}}-1}{2^{k-1}}\cdot\frac{5^{2^{k-1}}+1}{2}\,\vdots\,2^k.$$

Onda $5^{2^{10000}}-1 \vdots 2^{10000}$, $5(2^{10000}+10000)-5^{10000}$ bolsa 10000 nol bilen gutarýandygy aýdyňdyr, ýöne

$$5^{10000}=\frac{10^{10000}}{2^{10000}}=\frac{10^{10000}}{(2^{10})^{1000}}<\frac{10^{10000}}{(10^{3})^{1000}}=10^{7000}.$$

Diýmek, $5\cdot(2^{10000}+1000)$ sanda belgiler 9999-dan 7000-e çenli soňunda nollaryň bolmagy hak manydyr we bu nollar $3000>1968$ az däldir.

**440.** Deňsizligiň iki bölegini $a>0$-a köpeldeliň we öwürmeler geçirip, berlen deňsizlige deňgüýçli bolan

$\frac{1}{3}a^3+a(b^2+c^2)-a^2(b+c)-abc>0$ deňsizligi alarys.

$abc=1$ we şunlukda, $b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-\frac{2}{a}$.

$b^2+c^2$-yň bu bahasyny ýokarky deňsizlikde goýup, alarys:

$a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0.$

Bu deňsizlik $b+c$ görä kwadrat deňsizlikdir. Onuň diskriminantyny bölüp alalyň:

$D=a^4-4a(\frac{1}{3}a^3-3)=a^4-\frac{4}{3}a^4+12a=a(12-\frac{1}{3}a^3)<0,$

çünki $a^3>36$. $a>0$, onda $b+c$ islendik bahasynda

$a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0.$

Şunlukda, $\frac{2}{3}a^2<a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac.$

**441.** $a=n^2+1$-i alalyň. Onda

$(n^2+1)(n+1)-(n^2+n+1)=n^3.$

**442.** 13, 13 we 22 ýaş. Şerte görä $\overline{aa}+2\overline{bc}=\overline{d(2d)}$.

Bu ýerden $a$ sifriň jübütligi, ýagny 2-ä deňligi gelip çykýar ($a\geq 4$ bolsa, $d\geq 6$ bolar we bu ýagdaýda $2d$ eýýam sifr bolmaz). Diýmek, $d$ 3-e ýa-da 4-e deň. Eger $d=3$ bolsa onda her bir ekizleriň ýaşy $0,5\cdot(36-22)=7$ ýaş bolar. Onda olar bäsleşige gatnaşyp bilmezler. Ikinji ýagdaýda olaryň ýaşlary $0,5\cdot(48-22)=13$ ýaş bolar.

**443.** Ähli goşulyjylary deňsizligiň çep bölegine geçirýäris: $a^2b+b^2c+c^2a-b^2a-a^2c-c^2b=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)=$ $=(a-b)(ab-ac-bc+c^2)=(a-b)(b-c)(a-c)>0.$

Soňky deňsizlik dogrudyr, sebäbi her bir ýaý položiteldir.

**444.** Ýatdan bellenen san 7-ä, 11-e we 13-e bölünýär. Şeýle iň kiçi san 7·11·13=1001 deň. 1001-e deň bitin esse uly bolan islendik san hem ýatdan bellenen san bolup biler.

**445.** Eger gözlenilýän sanyň üstüne 1-i goşsak, onda alnan san 4-e, 5-e we 6-a galyndysyz bölüner. Şeýle iň kiçi san 4·5·3=60-a deň. Şeýle iň uly üçbelgili san bolsa 60·16=960-a deň. Biziň gözleýän sanymyz bolsa bu sandan 1 san kiçi, ýagny ol 959-a deň.

**446.** 70=2·5·7; 56=2·2·2·7. IKUK(70; 56)=2·2·2·5·7=280. Diýmek, her bir 280 *sm* soň kakasynyň we oglunyň ädimleri gabat gelýär. Olaryň aýak yzlarynyň 10 gezek gabat gelendigini göz öňünde tutsak, agaçlaryň arasyndaky uzaklyk:
280·9=2520 (*sm*)=28 (*m*)-e deňdir.

**447.** Syýahatçylaryň pyýada ýörän ýoluny $x$ bilen belgiläliň, onda olaryň gaýykly geçen ýoly $x$+160, awtobusda geçen ýoly 5w, umumy geçen ýoly bolsa $x+x+160+5x=475$ deň bolar. Bu deňlemäni çözüp $x$=45-i alarys. Diýmek, syýahatçylar pyýada 45 *km*, gaýykly 45+160=205 *km*, awtobusda bolsa 5·45=225 *km* ýol geçipdirler.

**448.** Birinji san ikinjiden 10 esse uly. Eger ikinji sany $x$ bilen belgilesek onda birinji san 10$x$, olaryň jemi bolsa $x+10x=495$-e deň bolar. Bu deňlemäni çözüp $x$=45-i alarys. Diýmek, birinji san 450, ikinji san bolsa 45-e deň.

**449.** Goý, $x$ – oglunyň 1998-nji ýyldaky ýaşy bolsun. Onda 1998-nji ýyldaky ejesiniň ýaşy 4,5 $x$ bolar. Bu ýerden 4,5$x$–$x$=28; 3,5$x$=28; $x$=8 bolar. 2004–1998=6. Onda 2004-nji ýylda oglunyň ýaşy 8+6=14, ejesiniň ýaşy 14+28=42 bolar.

**450.** Birinji sebetdäki almalaryň 0,3·3=0,9 bölegi ikinji sebetdäki almalaryň 0,36 bölegine deň. Eger birinji sebetde 1 bölek alma bar diýsek, onda ikinji sebetde 0,9:0,36=2,5 bölek alma bar. 140:(1+2,5)=40 birinji sebetdäki almalar, 140–40=100 ikinji sebetdäki almalar.

**451.** Her bir gabyň agramy 50 *g*-a deň. B gapda 200 *g* suw, *A* gapda bolsa 150 *g* suw bar.

**452.** 1) awtobus çykýança ýük maşyny $6\frac{3}{4} - 6 = \frac{3}{4}$ (*sag*) ýöredi.

2) $\frac{3}{4}$ sagatda awtobus ýük maşynyndan $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ (*km*) köp ýol geçýär.

3) eger olaryň tizlikleri deň bolan bolsa onda, olar 114–6=108 (*km*) ýol geçerdiler.

4) ýük maşyny $7\frac{1}{2} - 6 = 1\frac{1}{2}$ (*sag*) ýöräpdir.

5) awtobus $7\frac{1}{2} - 6\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ (*sag*) ýöräpdir.

6) $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$ (*sag*) wagtda ýük maşynyň ýeke özi 108 km ýol geçip biler.

7) $108:2\frac{1}{4}=48$ (*km/sag*) ýük maşynynyň tizligi.

8) 48+8=56 (*km/sag*) awtobusyň tizligi.

**453.** 1) 143:20=7,15 (m).

7,15 *m*=715 *sm* – olaryň yzlarynyň bir gezek gabat gelen iň kiçi aralygy.

2) 715=5·11·13.

Gyzyň ädiminiň uzynlygy 5·11=55 *sm*, oglanyň ädiminiň uzynlygy bolsa diňe 13 *sm* ýa-da (11·13)=143 *sm* ýa-da (5·13)=65 *sm*-e deň bolup biler (tersine bolan ýagdaýynda olaryň yzlary 7,15 *m* aralykda birden köp gezek gabat gelerdi). Oglanyň hakyky ädiminiň uzynlygynyň diňe 65 *sm*-e deň boljakdygy düşnüklidir.

**454.** 1) eger 22 minut diňe gyzgyn suw akýan krant açylan bolsa onda, wanna 6,75·22=148,5 (*l*) suw guýlardy.

2) 166–148,5=17,5 (*l*) – suw guýulman galardy.

3) bir minutyň dowamynda sowuk suw akýan krantdan gyzgyn suw akýan kranta garanyňda 8,5–6,75=1,75 (*l*) köp suw akýar.

4) 17,5:1,75=10 (min) – sowuk suw akýan kranty açypdyrlar.

5) 22–10=12 (min) – gyzgyn suw akýan kranty açypdyrlar.

**455.** 1) her haltada 140:2=70 (*kg*) un bolar.

2) 1 diýip birinji haltadaky ilkibaşdaky unuň mukdaryny alalyň.

Birinji haltada unuň $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ bölegi galar, olam 70 *kg*-a deň.

3) birinji haltada ilkibaşda $70:\frac{7}{8}=80$ (*kg*) un bar eken.

4) ikinji haltada ilkibaşda 140–80=60 (*kg*) un bar eken.

**456.** 1) hapalanan turbadan geçýän suwuň möçberi ilkibaşdaky geçýän suwuň möçberiniň 100%–60%=40%=0,4 bölegine deň bolar.

2) 1:0,4=2,5 (esse). Diýmek, howzy suwdan doldurmak üçin sarp edilýän wagt 2,5 esse ýagny, 150% artypdyr.

**457.** 1) 5 *l* gaýmakda 5·0,35=1,75 (*l*) ýag bar.

2) 4 *l* gaýmakda 4·0,2=0,8 (*l*) ýag bar.

3) garyndyda 1,75+0,8=2,55 (*l*) ýag bar.

4) garyndynyň agramy 4+5+1=10 (*l*)-e deň.

5) garyndynyň ýaglylygy 2,55:10=0,255=25,5%-e deň.

**458.** Goý, birinji erginiň $x$ *kg*, ikinji erginiň $y$ *kg* massasy bar bolsun. Onda bu erginlerdäki misiň massalary degişlilikde, $0,6x$ *kg* we $0,8y$ *kg* bolar.Meseläniň şertinden $x$ we $y$ ululyklara görä $x+y=40$ we $0,6x+0,8y=0,75\cdot40$ deňlemeleri ýazyp alarys:

$$\begin{cases} x = 40 - y, \\ 0,6x + 0,8y = 30. \end{cases}$$

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp, $x=10$ we $y=30$-y alarys. Diýmek, birinji erginden 10 kg, ikinji erginden 30 kg almaly.

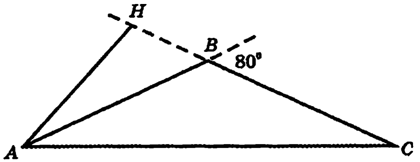
**459.** Bu sanlaryň kiçisini $x$ bilen belgiläp şeýle deňlemäni alarys: $x+10x+100x=3898,32$.

Bu deňlemäni çözüp, $x$=35,12-ni alarys. Diýmek, gözlenilýän sanlar: 35,12; 351,2; 3512.

**460.** $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$, bu ýerde $n$-natural san. Köpelijileriň biriniň 8 bolany üçin $8n$ 8-e galyndysyz bölünýär.

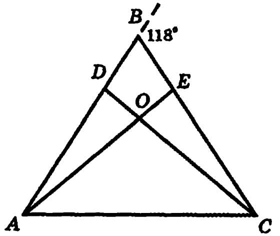
**461.** $(3a+1)(3b+1)=9ab+3a+3b+1=3(3ab+a+b)+1$;
$3(3ab+a+b)$ 3-e bölünýär, diýmek, $3(3ab+a+b)+1$ 3-e bölünende galyndy 1 alynýar.

**462.** Goý, $AC$ deňýanly üçburçlugyň esasy bolsun. Bu üçburçlugyň diňe $\angle ABC$ burçunyň daşky burçy 80°-a deň bolup biler.




Onda $\angle ABC=180°-80°=100°$,
$\angle BAC=\angle BCA=(180°-100°):2=40°$.
$\angle HAC=180°-\angle H-\angle C=180°-90°-40°=50°$

**463.** Goý, $AC$ deňýanly üçburçlugyň esasy bolsun. Bu üçburçlugyň diňe $\angle ABC$ burçunyň daşky burçy 118°-a deň bolup biler.
Onda $\angle ABC=62°$, $\angle BAC=\angle BCA=(180°-62°):2=59°$.
$\angle DCA=\angle EAC=180°-\angle E-\angle BCA=180°-90°-59°=31°$,
$\angle AOC=\angle 180°-\angle DCA-\angle EAC=\angle 180°-31°-31°=118°$,
$\angle AOD=180°-118°=62°$.



**464.** Bu nokatlaryň biriniň üsti bilen beýleki nokatlara göni çyzyklary geçirip, 6 sany göni çyzygy alarys. Galan 6 sany nokadyň biriniň üsti bilen beýleki nokatlara göni çyzyklary geçirip, 5 sany göni çyzygy alarys. Bu gurluşy dowam etdirip, biz 6, 5, 4, 3, 2, 1 göni çyzyklary gurarys. Şeýlelikde, biz jemi 6+5+4+3+2+1=21 sany göni çyzyk alarys.

**465.** Ilki bilen biz 103 sany nokadyň her ikisiniň üstünden göni çyzyk geçirenimizde jemi näçe sany göni çyzyk geçirip bolýandygyny tapalyň, soňra bu göni çyzyklaryň sanyndan köpburçlugyň taraplarynyň sanyny aýryp diagonallaryň sanyny taparys. Biz ýokardaky meseledäki pikir ýöretmeden peýdalanyp jemi

$$102+101+100+...+3+2+1=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{102+1}{2}102=5253$$

sany göni çyzyk gurarys. Indi bolsa bu göni çyzyklaryň sanyndan köpburçlugyň taraplarynyň sanyny aýryp diagonallaryň sanyny taparys: 5253–103=5150.

**466.** Goý, birinji garakçy oljany özüçe deň üç bölege bölsün, ikinji we üçünji bolsa uly hasap edýän böleklerini görkezsinler. Eger olar dürli bölekleri görkezýän bolsalar, onda olaryň hersi özüçe uly hasap edýän bölegini alýar, birinji garakçy bolsa galan bölegi alýar. Eger olar şol bir bölegi görkezýän bolsalar, onda olar bu bölegi meseläniň şertinde aýdylyşy ýaly edip bölüşýärler. Ondan soň bolsa ikinji we üçünji garakçy galan iki bölekden uly hasap edýän bölegini görkezmeli. Eger olar şol bir bölegi görkezýän bolsalar, onda olar bu bölegi hem bölüşýärler, birinji bolsa galan bölegi özüne alýar. Eger olar dürli bölekleri görkezýän bolsalar, onda olaryň hersi öz halan bölegini birinji garakçy bilen meseläniň şertinde aýdylyşy ýaly edip bölüşýär.

**467.** Akyldar ýollaryň birini görkezip şeýle sorag beripdir: «Eger taýpanyň wekilleriniň islendiginden: – Şu ýol oba eltýärmi? diýip sorasaň, ol dogruçyl jogap berermi?». Eger bu ýol dogrudanam oba eltýän bolsa, onda ýalançam, dogruçylam «hawa» diýip jogap berer, eger bu ýol oba eltmeýän bolsa onda ýerli ýaşaýjylaryň islendigi «ýok» diýip jogap berer.

**468.** *AG* ýazgyly gutudan bir şar çykarmak ýeterlik. Eger ol ak şar bolsa, onda bu gutuda ak şarlar bar, gara şarlar bolsa *AA* ýazgyly gutuda bolmaly. Eger çykarylan şar gara şar bolsa, onda *AG* ýazgyly gutuda gara şarlar bar, *GG* ýazgyly gutuda bolsa ak şarlar bar.

**469.** Haltalary 1-den 10-a çenli sanlar bilen nomerläliň. Birinji haltadan bir teňňäni alalyň, ikinji haltadan iki teňňäni, ..., onunjy haltadan bolsa on teňňäni alalyň we olaryň umumy agramyny kesgitläliň. Goý, olaryň agramy $P$ deň bolan bolsun. Eger teňňeleriň ählisi hakyky bolan bolsady, onda olaryň agramy 10+20+...+100=550 g-a deň bolardy. P-550 tapawut galp teňňeli haltanyň nomeri bilen gabat gelýär.

**470.** Goý, $A$ biziň 6 sany okuwçymyzyň biri bolsun. Eger $A$ biziň toparymyzyň 2-den köp bolmadyk okuwçylary bilen tanyş bolsa, onda biziň toparymyzda $A$ bilen tanyş bolmadyk 3 sany okuwçy bolar. Eger bu okuwçylar bir-biri bilen tanyş bolsalar, onda olar eýýam bir-biri bilen tanyş bolan 3 okuwçyny emele getirýärler. Eger olaryň islendik ikisi bir-biri bilen tanyş bolmasalar, onda olar $A$ bilen her biri beýleki ikisini tanamaýan 3 okuwçyny emele getirýärler.

Indi bolsa $A$-nyň ikiden az bolmadyk okuwçylar bilen tanyş bolan ýagdaýyna seredeliň. Bu ýagdaýda $A$ bilen tanyş bolan 3 okuwçy tapylar. Eger bu 3 okuwçylaryň islendik 2-si bir-biri bilen tanyş bolmasalar, onda olar bir-biri bilen tanyş bolmadyk 3 okuwçyny emele getirýärler. Eger bu okuwçylaryň 2-si bir-biri bilen tanyş bolsalar, onda olar $A$ bilen bir-biri tanyş 3 okuwçyny emele getirýärler.

**471.** Goý natural $x, y, z, n$ sanlar

$$x^n+y^n=z^n \tag{1}$$

deňlemäni kanagatlandyrýar diýeliň. Goý $x \leq y$ bolsun.

" *xn\yn>yn*bolýandygyna görä, *z>y* we *z>y*+1 bolar. Nýuton lilnoiuynyň formulasyndan peýdalanyp soňky deňsizligiň iki Iwtlogini hem *n*-nji derejä göterelliň.

*zn>(y+l)n=yn+C1ynl+ ... +l>yn+n-yn-1.*

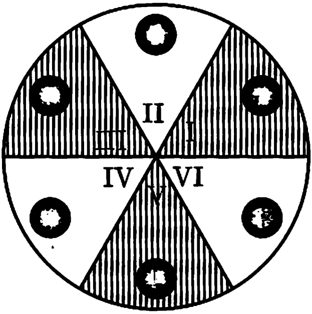
IUi deňsizligi (1) deňleme bilen deňeşdirip *xn>n-ynl* ilrn.sizligi alarys. *x<y* bolany üçin *xn>nxnl* ýa-da *x>n* iliMi.sizlige geleris. Bu ýerden bolsa min *(x, y)=x>n* deňsizlik K*'lip eykar.

472. Käbir *A* duralga seredeliň. Onuh üstünden näçe awtobus ýolnnyň geçip bilýändigini kesgit-lllliii. A-dan başga şäherde ýene-de H Mnny duralga bar. *A* duralganyň hnthnden geçýän awtobus ýolla-**rynyň** hersinde ýene-de 2 sany du-pnlfftt bar. Bu ýollaryň hiç bir ikisi-nin A-dan başga umumy dural-**Knnynyň** ýokdugy üçin *A* duralganyň üstünden 8:2=4-den köp bolmadyk awtobus ýollary geçip bilýär.

Duralgalaryň ählisini nomerläliň we *i*-nji duralganyň hHtünden geçýän awtobus ýollarynyň sanyny *a* bilen brlgiläliň. Her bir ýolda 3 sany duralga bar bolany üçin </, I *a2+...+ag=Sn,* bu ýerde n-ýollaryň umumy sany. Ýokarda imbut edilenine görä goşulyjylar 4-den uly däldirler.

Diýmek, 3n<4-9=36, n<12. Şäherde 12 sany awtobus ýoly bolup biler. Suratda meseläniň şertlerini kanagatlandyrýan wo 12 awtobus ýolundan ybarat bolan (8 gönüçyzykly we 'I egriçyzykly) shema şekillendirilendir.

473. Beýle edip bolmaýandygyny subut edeliň. I, IH wo V sektorlary ştrihläliň. /i-nji göçümden öňki ştrihlenen H(*ktorlardaky teňňeleriň sanyny *anx* bilen belgiläliň. a0=3 boljnkdygy düşnüklidir. Ä>l-iň nähilidigine garamazdan *akak*j-den 1 san tapawutlanar. Diýmek, *av a3* a5, ..., *a19*-Hiinlar jübüt, a0, a2, a4, ..., *a20*- sanlar bolsa täk sanlar.




Şoňa görä-de, 20 göçümden soň ştrihlenen sektorlardaky teňňeleriň sany täk bolar. Eger ähli teňňeler bir sektora ýygnalan bolsady, onda sektordaky teňňeleriň sany jübüt bolardy (0 ýa-da 6-a deň bolardy).

**474.** Synpdaky okuwçylaryň ählisini 13 topara böleliň. 1-nji topary diktanty ýalňyşsyz ýazan okuwçylardan, 2-nji topary bir ýalňyş göýberen okuwçylardan 3-nji topary iki ýalňyş göýberen okuwçylardan, we ş, m, iň soňky 13-nji topary bolsa 12 ýalňyş göýberen okuwçylardan düzeliň. Eger her toparda 2-den köp bolmadyk okuwçy bar bolsady, onda synpda 26-dan köp bolmadyk okuwçy bolardy. Emma synpda 30 okuwçy bolany üçin, toparlaryň arasynda iň bolmanda 3 okuwçydan ybarat bolan topar bardyr. Soralýan subut edildi.

**475.** Oglanlary olaryň tapan kömelekleriniň sany boýunça goýalyň, 1-nji orunda iň köp kömelek ýygnan oglany, 7-nji orun bolsa iň az kömelek ýygnan oglany göýalyň. Eger 4-nji 15-den az bolmadyk kömelek ýygnan bolsa, onda birinji üçüsi 16+17+18=51-den az bolmadyk kömelek ýygnarlar. Eger 4-nji 14-den köp bolmadyk kömelek ýygnan bolsa, onda 4-nji, 5-nji, 6-njy, 7-nji bilelikde 14+13+12+11=50-den köp bolmadyk kömelek ýygnarlar. Diýmek, birinji üçüsi 50-den az bolmadyk kömelek ýygnarlar.

**476.** Ähli 10 jemi goşup, 72-ni alarys. Gözlenilýän sanlaryň her biriniň bu jeme 4 gezek girýäni üçin, bu sanlaryň jemi 72:4=18-e deň. Sanlary artýan tertipde ýerleşdireliň. Iň kiçi iki sanyň jemi 0-a, iň uly iki sanyň jemi bolsa 15-e deň. Diýmek, ululygy boýunça üçünji san 18–0–15=3-e deň. Jemleriň arasynda ululygy boýunça ikinji jem birinji we üçünji sanlaryň jemine deň, ol jem bolsa 2-ä deň. Diýmek, iň birinji san 2–3=–1-e deň. Ikinji san bolsa 0–(–1)=1-e deň. Şuňa meňzeşlikde iň uly sanlaryň 5-e we 10-a deňdigini taparys.

Ikinji ýagdaýda berlen 10 sanyň jemi 158-e deň. Gözlenilýän sanlaryň jemi bolsa 158:4-e deň bolmaly. Emma gözlenilýän sanlaryň bitin sanlar bolany üçin bu mümkin däl. Diýmek, bu usul bilen berlen 10 sany alyp bolmaz.

**477.** Dürli synplaryň hersinden bir okuwçyny saýlap 5 okuwçy alalyň. Goý, olar dürli sanly galam satyn alan bolsunlar. Şonuň üçin olaryň satyn alan galamlarynyň umumy sany 1+2+3+4+5=15-den az däldir. Galan 25 okuwçy bolsa 40–15=25-den köp galam alan däldirler. Bu okuwçylaryň herşiniň 1 galam satyn alandygy düşnüklidir. Diýmek, 26 sany okuwçy diňe bir galam satyn alypdyr.

**478.** Käbir altybelgili sana seredeliň. Bu sanyň sifrlerini kemelýän tertipde $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$; $a_1\ge a_2\ge a_3\ge a_4\ge a_5\ge a$ bilen belgiläliň. $\overline{a_1a_3a_5a_2a_4a_6}$ sanyň meseläniň şertini kanagatlandyrýandygyny subut edeliň. Bu sanyň ilkinji üç sifriniň jemi bilen ahyrky üç sifriniň jeminiň tapawudyny aşakdaky ýaly ýazalyň: $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)$, bu ýerden bolsa bu tapawudyň otrisatel däldigi gelip çykýar. Ondan başga-da $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)\le(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+$ $+(a_4-a_5)+(a_5-a_6)=a_1-a_6\le 9$, subut edildi.

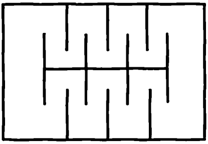
**479.** Goý, *a*, *b*, *c* sanlar tegelekde sagat peýkamynyň ugry boýunça gelýän bolsunlar. Bu sanlary iki gezek setire ýazalyň: ***abcabc***. Soňra bolsa 6 sany yzygiderli jemi ýazalyň:

$S_1=a,$
$S_2=a+b,$
$S_3=a+b+c,$
$S_4=a+b+c+a,$
$S_5=a+b+c+a+b,$
$S_6=a+b+c+a+b+c.$

Şerte görä, $a+b+c$ položitel. Şonuň üçin $S_1<S_4$, $S_2<S_5$, $S_3<S_6$ we $S_1$, $S_2$, $S_3$ sanlaryň içinde şeýle bir san bolup, ol biziň soňky ýazan ähli jemlerimizden kiçidir. Mese-

lem goý, ol san $S_2$ bolsun. Onda $0<S_3-S_2=c$, $0<S_4-S_2=c+a$, $0<S_5-S_2=c+a+b$ we $c$ san meseläniň şertini kanagatlandyrýar. Umuman, eger $S_k$ soňky jemleriň ählisinden kiçi bolsa, onda gözlenilýän san $a$, $b$, $c$, $a$ sanlaryň arasyndan $(k+1)$-njisidir.

**480.** Ýoluň ugrunda duran her bir maşynyň ýanynda ol maşynyň benzin guýmazdan geçip biljek metriniň sany bilen indiki maşyna çenli (sagat peýkamynyň ugry boýunça) uzaklygyň tapawudyny görkezýän sany ýazalyň. Bu sanlaryň ählisiniň jemi položiteldir. 48-nji mesele boýunça oňa indiki san goşulanda, olaryň jemine indiki san goşulanda we ş.m. položitel bolar ýaly käbir san tapyp bolýar. Ýanynda şeýle san duran maşyny saýlap alyp, sürüji öňde goýlan ýumşy ýerine ýetirip biler.



**481.** Mümkin. Meselem, kagyzy aşakdaky ýaly kesip bolar. Deşikden geçmeli adamyň göwresine laýyklykda şuňa meňzeş kesikleriň sanyny köpeldip ýa-da azaldyp bolar.

**482.** Öçürilen sany tapmak üçin berlen deňlemede $x=1$ bahany goýup görmek ýeterlikdir. Öçürilen san 2.

**483.** Diňe Aman birnäçe işi birden ýerine ýetirse, şeýdip ýaşap bolar. Eger birnäçe işi birden ýerine ýetirmese, ol beýle ýaşap bilmez. Sebäbi bu sanlaryň jemi 1-den uly.

**484.** Goý, şol sanlar: $x$, $y$, $z$ we $t$ bolsunlar.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+z=5, \\ x+t=8, \\ y+z=9. \end{cases} \text{we} \begin{cases} x+y=1, \\ x+z=5, \\ x+t=9, \\ y+z=8. \end{cases}$$

deňlemeler ulgamlarynyň birinjisini çözüp: $x=-1{,}5$, $y=2{,}5$, $z=6{,}5$, $t=9{,}5$ bahalary alarys; olaryň ikinjisini çözüp: $x=-1$, $y=2$, $z=6$, $t=10$ bahalary alarys. Iki ýagdaýda-da $y+t=12$, $z+t=16$ bolar. Getirilen deňlemeler ulgamlaryna meňzeş bunga deňlemeleriň ulgamlaryny düzüp bolýar. Emma olaryň çözüwleri meseläniň şertini kanagatlandyrmaýar.

Jogaby: Galan iki jem 12 we 16. Ilkibaşdaky sanlar: 1,5; 2,5; 6,5; 9,5 ýa-da –1; 2; 6; 10.

**485.** Yzly-yzyna gelýän islendik 7 günüň biri dynç günüdir. 365=52·7+1, 366=52·7+2 bolany üçin islendik ýylda 52 sany 7 gün bolup, ýene-de 1 ýa-da 2 gün galýar. Her 7 günde 1 dynç güni, galan 1 ýa-da 2 günde bolsa 1 dynç güni bolar ýa-da dynç güni bolmaz. Diýmek, 1 ýylda 53-den köp dynçgüni bolup bilmez.

**486.** Jemi 9 aýdym aýdylypdyr. Eger aýdan her bir aýdymy üçin gyzlaryň her birine 1 gül berseň, onda sylag berlen gülleriň sany 3-e galyndysyz bölünmeli. Şonda Aýna 8 gül, Bahar 5 gül alarlar. Gözel bilen Jereniň hersi Aýnanyňkydan az Baharyňkydan bolsa köp gül almaly. Diýmek, olaryň her haýsy diňe 7 gül alyp bilerler. Şonda berlen güller 8+5+7+7=27 sany bolar. Diýmek, 27:3=9 aýdym aýdylypdyr.

**487.** Bir belgi bilen diňe 2 harpy aňladyp bolar. Olaryň biri nokat, beýlekisi kese çyzyk bolar. Bu harplaryň her biriniň sagyndan ýa nokady, ýa-da kese çyzygy ýazyp bolar. Diýmek, iki belgi bilen 2·2=4 harpy aňladyp bolar. Bu 4 harpyň her biriniň sagyndan ýa nokady, ýa-da kese çyzygy ýazyp bolar. Diýmek, üç belgi bilen 4·2=8 harpy aňladyp bolar. Şuňa meňzeş dört belgi arkaly 8·2=16, bäş belgi arkaly 16·2=32 harpy aňladyp bolar.

Jemi 2+4+8+16+32=62 harpy aňladyp bolar.

**488.** Aman Nuryýew 11 uçar, Mergen Esenow 9 uçar, Anna Meredow bolsa 7 uçar ýasapdyr.

**489.** Welosipedli ýoluň üçden birini geçenden soň maşynly ýoluň üçden ikisini geçýänçä garaşypdyr. Diýmek, welosipedliniň tizligi maşynlynyň tizliginiň ýarysyndan uly. Maşynly şähere barmanka welosipedli oba barar.

**490**. Bir ýylyň dowamynda Böwenjik horlanypdyr. Eger Böwenjigiň ilkibaşdaky agramy $M$ kg bolsa, onda ýylyň ahyrynda onuň agramy:

$0{,}75\cdot1{,}2\cdot0{,}9\cdot1{,}2\ M=0{,}972\ M$ bolar.

**491**. Gözel ýalan sözläpdir. Birinji bolup Aýna gelipdir. Eger Aýna ýalan sözläpdir diýsek, onda ol ýa birinji ýa-da iň soňky ýeri alan bolmaly. Bu ýagdaýlarda ýa Gözel, ýa-da Jeren ýalan sözlän bolmaly. Bu bolsa meseläniň şertini, ýagny bir jogabyň ýalňyşlygy baradaky şerti kanagatlandyrmaýar.

**492**. Motorly gaýyga derýa boýunça ýüzmek üçin köp wagt gerek. Goý, motorly gaýygyň tizligi $u$, derýanyň tizligi $\vartheta$ bolsun. $u\le\vartheta$ bolsa, onda motorly gaýyk akymyň garşysyna ýüzüp bilmez. Diýmek, $u>\vartheta>0$ bolmaly. Motorly gaýygyň derýa boýunça ýüzen wagty $\frac{10}{u+\vartheta}+\frac{10}{u-\vartheta}$, köl boýunça ýüzen wagty $\frac{20}{u}$ bolar. $\frac{20u}{u^2-\vartheta^2}>\frac{20}{u}$ deňsizligi ýeňillik bilen subut edip bolýar.

## 1995-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 10-njy synp

**493**. Hemme sifrleriň arasynda «+» alamatlaryny goýalyň, ýagny «+» alamatlarynyň sany «maksimum» bolsun. Şunda alýan sanymyz

$1+2+...+9+1+0+1+1+...+9+0+9+1+...+9+9+1+0+0=901$ bolar. «+» alamatlaryň islendik başga ýagdaýyny «maksimum» ýagdaýda «+» alamatlaryň birnäçesi goýulmanmyş diýip alyp bolar.

Goý, $a_0a_1...a_N$ ýanaşyk sifrler bolsunlar. Olaryň arasyndaky «+» alamatlar goýulmadyk. Bu halda alynjak san $901-(a_0+a_1+...+a_N)+a_0\cdot10^N+a_1\cdot10^{N-1}+...+a_N=$
$=901+a_0(10^N-1)+a_1(10^{N-1}-1)+...+a_{N-1}(10-1)$ bolar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, «+» alamatlaryň ýerleşmelerinde alynýan san 901 sana 3-e bölünýän sanyň goşulmagy bilen alynýar. Diýmek, ol san 3-e bölünmeýär, onda ol san 1995-e hem bölünmeýär.

**494.** $A=\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}$ bolsa,

$\sin\frac{5\pi}{18}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{18}\right)=\cos\frac{4\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$ we

$\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\frac{2\pi}{18}=\cos\frac{\pi}{9}$ bolany üçin

$A=\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$. Bu deňligiň iki bölegini hem $\cos\frac{\pi}{18}$-e köpeldýäris: $A\cos\frac{\pi}{18}=\cos\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$. Onda $A\cos\frac{\pi}{18}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$; $A\cos\frac{\pi}{18}=\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$; $A\cos\frac{\pi}{18}=\frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{9}$ alarys. $\sin\frac{4\pi}{9}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{18}$ bolany üçin bu ýerden $A=\frac{1}{8}$-i alarys. Diýmek, $A$ rasional san.

**495.** $b_1\cdot b_2+b_2\cdot b_3+b_3\cdot b_4\le(b_1+b_3)(b_2+b_4)\le$

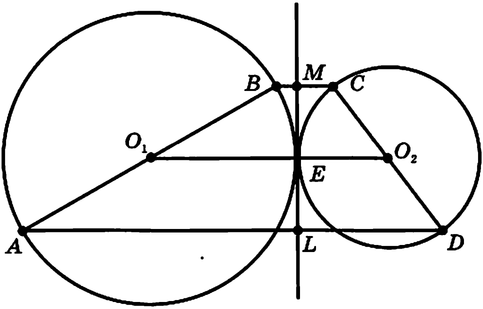
$\le\left(\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ iň uly baha $b_1=0$, $b_3=b_2+b_4=\frac{1}{2}$ bolanda alynýar.

**496.** Goý, $O_1A=O_1B=\frac{AB}{2}$ we $O_2C=O_2D=\frac{CD}{2}$ radiusly töwerekler $E$ nokatda galtaşýarlar, onda $E$ nokat $ABCD$ trapesiýanyň $O_1O_2$ orta çyzygynda ýatýar. $E$ nokatdan bu töwereklere umumy galtaşýany geçireliň. Goý, ol $AD$ we $BC$ esaslary, degişlilikde, $L$ we $M$ nokatlarda kessin. $O_1E$ göni çyzyk $ABML$ trapesiýanyň, $EO_2$ göni çyzyk bolsa $LMCD$ trapesiýanyň orta çyzygydyr.

Onda $O_1E=\frac{AL+BM}{2}$, $EO_2=\frac{LD+MC}{2}$.

Ýöne, $O_1E=O_1A=\frac{AB}{2}$. $EO_2=O_2C=\frac{CD}{2}$. Bu deňlikleri özara goşup alarys:

$$\frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}=\frac{(AL+LD)+(BM+MC)}{2}. \; AB+CD=AD+BC.$$




Şunlukda, $ABCD$ trapesiýanyň içinden töwerek çyzyp bolar.

**497.** Goý, $A$ birinji oýunçy, $B$-onuň garşydaşy bolsun. «10»-lugyň özünden kiçi bölüjileri 1, 2, 5 sanlardyr. $B$ oýunçy 1-i ýa-da 5-i saýlap, 10-nuň deregine tagtada 11 ýa-da 15 ýazýar, umuman, $B$ öz göçüminde elmydama tagtadaky sany täk sana öwürýär. Täk sanyň bölüjileri täk bolany üçin, $A$ her gezek tagtada jübüt sany ýazmaly bolar. Amatly ýol bilen gidende $A$ ahyry 19951994 ýazmaly bolar, $B$ bolsa 1-i goşup, 19951995 ýazar, şeýlelikde, $A$ ondan uly san ýazmaly bolar, $B$ utar.

## 9-njy synp

**498.** Goý, $x_1$ we $x_2$ berlen deňlemäniň natural kökleri bolsun. Wiýet teoremasy boýunça.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1\cdot x_2=b+1 \end{cases}$$

alarys. Bu ýerden, $a=-(x_1+x_2)$, b$=x_1\cdot x_2-1$ tapyp,

$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1\cdot x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1=$ $=x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ alarys, ýagny $a^2+b^2$ – düzme sandyr.

**499.** Gutulardaky şarlary aşakdaky ýaly görkezeliň:

| 1-nji guty | 2-nji guty | 3-nji guty | 4-nji guty |
|---|---|---|---|
| ○○○ | ○○○○○ | ○ | ○ |

Şeýlelikde, çyzyklaryň dürli orunlarynda gutuda şarlaryň sany hem dürli bolarlar. 10 şaryň we 3 çyzygyň dürli çalşyrmalaryň sany 13!-a deňdir. 10 şar we 3 çyzyk meňzeş bolanlary üçin 10 şary 4 gutuda $\frac{13!}{3!10!}=C_{13}^3=286$ usul bilen ýerleşdirip bolar.

**500.** Şert boýunça $AB+BC+AC=DE+EF+DF$. Daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny $R$ diýip, sinuslar teoremasy boýunça bu üçburçluklaryň taraplaryny $R$-iň üsti bilen aňladyp.

$2R\sin C+2R\sin A+2R\sin B=2R\sin F+2R\sin D+2R\sin E$-ni alarys, bu ýerden $\sin A+\sin B+\sin C=\sin D+\sin E+\sin F$ deňligi alarys.

## 8-nji synp

**501.** 77 otluçöp gaplarynyň göwrümi gutyň göwrümine deň. Şoňa görä olary gutuda ýerleşdirip bolaýjak ýaly, ýöne otluçöp gaplarynyň hemme granlarynyň meýdany 3-e kratny, gutyň bolsa iki granynyň meýdany 7·11=77-ä deň, ýagny 3-e kratny däl, şoňa görä tygşytly ýerleşdirseňem, boş ýerler galjak, diýmek, ýerleşdirip bolmaz.

**502.** 5-e bölenişde 4 galyndy, 6-a bölenişde 3 galyndy we 7-ä bölenişde 1 galyndy galjak 100-den kiçi sany tapmaly. Gözlenilýän san $7\cdot4\cdot3+N=84+N$ görnüşdedir. $N=1, 8, 15$ bolmagy mümkin. $N=1$ kanagatlandyrmaýar, sebäbi 85 san 5-e bölünýär, $N=8$ san kanagatlandyrmaýar, çünki 5-e bölenişde 2 galyndy berýär. $N=15$ hemme şerti kanagatlandyrýar. Diýmek, gözlenýän san 84+15=99.

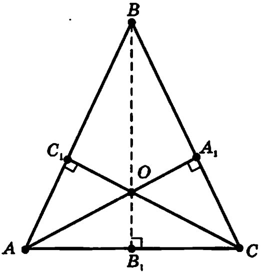
**503.** $127^{23}<128^{23}=(2^7)^{23}=2^{161}$, $513^{18}>512^{18}=(2^9)^{18}=2^{162}$, diýmek, $513^{18}>127^{23}$.

**504.** $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$ bolany üçin

$$\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2}+\frac{2\cdot2+1}{2^2\cdot3^2}+\ldots+\frac{2\cdot1994+1}{1994^2\cdot1995^2}=$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{1994^2}-\frac{1}{1995^2}=$$

$$=1-\frac{1}{1995^2}=\frac{1995^2-1}{1995^2}=\frac{1994\cdot1996}{1995^2}$$ alarys.




**505.** $AOC$ üçburçlugyň $OB_1$ beýikligini geçireliň, ol deňýanly üçburçlugyň häsiýeti boýunça medianadyr, ýagny $AB_1=B_1C \cdot BB_1$ kesim hem $ABC$ üçburçlugyň beýikligi hem medianasydyr. Onda $ABC$ üçburçluk deňýanlydyr, ýagny $BA=BC$.

## 1996-njy ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 10-njy synp

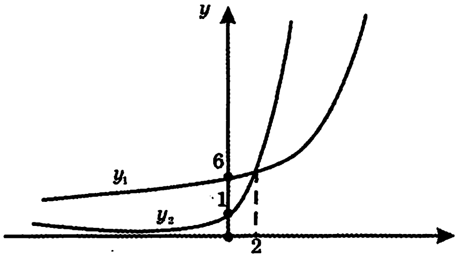
**506.** $59049^{59049,1}=(3^{10})^{3^{10}+\frac{1}{10}} = 3\cdot(3^{10})^{3^{10}}$,

$59050^{59049}=(3^{10}+1)^{3^{10}} = \left(1+\dfrac{1}{3^{10}}\right)^{3^{10}}\cdot(3^{10})^{3^{10}}$.

Islendik $n \in N$ üçin $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<l<3$ deňsizlikden

$\left(1+\dfrac{1}{3^{10}}\right)^{3^{10}}<3$; ýa-da $59050^{59049}<59049^{59049,1}$ gelip çykýar.

**507.** $y_1=1+2\cdot2^x+3\cdot3^x$, $y_2=6^x$ funksiýalaryň grafiklerini guralyň. $y_1$, $y_2$ funksiýalar san okunda artýarlar. $y_2$ funksiýa $x=2$ bolanda $y_1$ funksiýa bilen kesişýär we $x>2$ bolanda $y_1$ funksiýadan çalt ýokaryk ymtylýar. $x<2$ bolanda $y_1$ funksiýanyň grafigi ýokarda ýerleşýär.

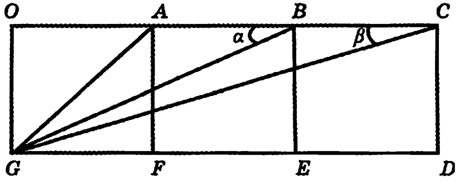



**508. 1-nji çözülişi:**

$AO=x$, $OB=2x$, $OC=3x$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{AO}{OB}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{tg}\beta=\frac{AO}{OB}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1\Rightarrow\alpha+\beta=45°$$




**2-nji çözülişi:**

Eger kwadratyň tarapyny 1 hökmünde kabul etsek, onda *GAB* üçburçlugyň taraplary $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{5}$, *GAC* üçburçlugyň taraplary bolsa $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{10}$ bolar. Bu üçburçluklar meňzeşdirler (olaryň meňzeşlik koeffisiýenti $\sqrt{2}$-ä deň). Olaryň meňzeşliginden $\angle BGA=\beta$ gelip çykýar.

Onda $\alpha+\beta=\angle ABG+\angle AGB=\angle OAG=45°$.

**509.** $(4+\sqrt{17})^p=4^p+C_p^1 4^{p-1}\sqrt{17}+C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+...+$
$+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}+(\sqrt{17})^p$ we
$(-4+\sqrt{17})^p=-4^p+C_p^1 4^{p-1}\sqrt{17}-C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+...-$
$-C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}+(\sqrt{17})^p$ deňlikleri aýryp alarys:

$(4+\sqrt{17})^p=2\cdot4^p+2C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+2C_p^4 4^{p-4}(\sqrt{17})^4+...+$
$+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}-(-4+\sqrt{17})^p$. Bu ýerde iň soňky goşulyjydan galan goşulyjy bitin san, sebäbi her goşulyja $\sqrt{17}$-niň diňe jübüt derejeleri gatnaşýar.

$(4+\sqrt{17})^p=2\cdot4^p+2C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+2C_p^4 4^{p-4}(\sqrt{17})^4+...+$
$+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}-(-4+\sqrt{17})^p=2\cdot4^p+2C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+$
$+2C_p^4 4^{p-4}(\sqrt{17})^4+...+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}$ bolar $0<(-4+\sqrt{17})^p<1$.
$[(4+\sqrt{17})^p]-4^{p+\frac{1}{2}}=2\cdot4^p+2C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+2C_p^4 4^{p-4}(\sqrt{17})^4+...+$
$+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}-2\cdot4^p=2C_p^2 4^{p-2}(\sqrt{17})^2+2C_p^4 4^{p-4}(\sqrt{17})^4+...+$
$+C_p^{p-1}4(\sqrt{17})^{p-1}$, bu goşulyjylaryň her birinde $p$-e kratny bolan $C_p^2$, $C_p^4$, $C_p^6$, ..., $C_p^{p-1}$ sanlar bar. Şonuň üçin ol jem $p$-e kratny.

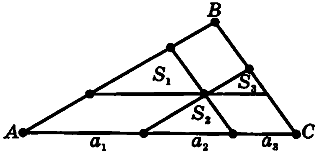
**510.** $\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\cos A=\frac{1-\cos2B}{2}+\frac{1-\cos2C}{2}-$
$-2\sin B\sin C\cos A=1-\frac{\cos2B+\cos2C}{2}-2\sin B\sin C\cos A=$
$=1-\cos(B+C)\cos(B-C)-2\sin B\sin C\cos A=$
$=1-\cos(180°-A)\{\cos B\cos C+\sin B\sin C\}-2\sin B\sin C\cos A=$
$=1+\cos A\{\cos B\cos C+\sin B\sin C\}-2\sin B\sin C\cos A=$
$=1+\cos A\{\cos B\cos C-\sin B\sin C\}=$
$=1+\cos A\cos(B+C)=1+\cos A\cos(180°-A)=1-\cos^2A=\sin^2A.$

**511.** Meňzeş üçburçluklaryň meýdanlarynyň olaryň degişli taraplarynyň kwadratlary ýaly gatnaşýandygyndan peýdalanyp alarys.

$$\frac{S_1}{S}=\frac{a_1^2}{(a_1+a_2+a_3)^2},\ \frac{S_2}{S}=\frac{a_2^2}{(a_1+a_2+a_3)^2},\ \frac{S_3}{S}=\frac{a_3^2}{(a_1+a_2+a_3)^2}.$$

Bu ýerden alarys.

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=1\Longrightarrow S_{ABC}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$



**512.** $1024^{1024,1}=1024^{1024+\frac{1}{10}}=1024^{1024}(2^{10})^{\frac{1}{10}}=2\cdot1024^{1024}$,
$1025^{1024}=(1024+1)^{1024}=1024^{1024}+1024\cdot1024^{1023}+$
$+C^{2}_{1024}1024^{1022}+\ldots+C^{1023}_{1024}1024+1>1024^{1024}+1024^{1024}=$
$=2\cdot1024^{1024}\Rightarrow1025^{1024}>1024^{1024,1}$

**513.** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma=$
$=2\cos(90^\circ-\frac{\gamma}{2})\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma=$
$=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+(1-2\sin^2\frac{\gamma}{2})=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-$
$-2(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2})=$
$=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2})^2\le$
$\le1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\le1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$.

**514.** $\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{a^2+a+1}=$
$=\sqrt{(\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{a^2+a+1})^2}=\sqrt{2a^2+2+2\cdot\sqrt{a^4+a^2+1}}=$
$=\sqrt{2a^2+2+2\cdot\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\ge\sqrt{2a^2+2+2\left(a^2+\frac{1}{2}\right)}=$
$=\sqrt{4a^2+3}$
$\sqrt{a^2+a+1}\ge\sqrt{a^2-a+1}\Longrightarrow\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{4a^2+3}\ge$
$\ge\sqrt{a^2-a+1}$,
$\sqrt{4a^2+3}=\sqrt{4a^2+3-a^2-a-1+a^2+a+1}\ge$
$\ge\sqrt{a^2+a+1}\Longrightarrow\sqrt{4a^2+3}+\sqrt{a^2-a+1}\ge\sqrt{a^2+a+1}$.

Görşümiz ýaly berlen sanlar üçburçluk deňsizligini kanagatlandyrýar. Diýmek, taraplary berlen sanlara deň bolan üçburçluk bar.

$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-a+1}\sqrt{a^2+a+1}\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{a^4+a^2+1}\sin\alpha$,

Kosinuslar teoremasyny peýdalanyp alarys.
$4a^2+3=a^2+a+1+a^2-a+1-2\sqrt{a^2-a+1}\sqrt{a^2+a+1}\cos\alpha$

$2a^2+1=-2\sqrt{a^4-a^2+1}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{2a^2+1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\dfrac{4a^4+4a^4+1}{4(a^4+a^2+1)}=$

$=\dfrac{3}{4(a^4+a^2+1)} \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{3}{2\sqrt{a^4+a^2+1}},\ 0<\alpha<\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4+a^2+1}\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Diýmek, ol üçburçlugyň meýdany $a$ sana bagly däldir.

**515.** $(2+\sqrt{5})^p=2^p+C_p^1 2^{p-1}\sqrt{5}+C_p^2 2^{p-1}(\sqrt{5})^2+\ldots+$
$+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}+(\sqrt{5})^p$ we $(-2+\sqrt{5})^p=-2^p+C_p^1 2^{p-1}\sqrt{5}-$
$-C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+\ldots-C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}+(\sqrt{5})^p$ deňlikleri aýryp alarys:

$(2+\sqrt{5})^p=2\cdot 2^p+2C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+2C_p^4 2^{p-4}(\sqrt{5})^4+\ldots+$
$+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}-(-2+\sqrt{5})^p$. Bu ýerde iň soňky goşulyjydan galan goşulyjy bitin san, sebäbi her goşulyja $\sqrt{5}$-iň diňe jübüt derejeleri gatnaşýar.

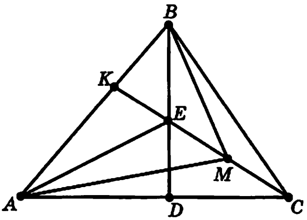
$[(2+\sqrt{5})^p]=2\cdot 2^p+2C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+2C_p^4 2^{p-4}(\sqrt{5})^4+\ldots+$
$+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}-(-2+\sqrt{5})^p=$
$=2\cdot 2^p+2C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+2C_p^4 2^{p-4}(\sqrt{5})^4+\ldots+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}$ bolar
$0<(-2+\sqrt{5})^p<1$.

$[(2+\sqrt{5})^p]-2^{p+1}=2\cdot 2^p+2C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+2C_p^4 2^{p-4}(\sqrt{5})^4+\ldots+$
$+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}-2\cdot 2^p=2C_p^2 2^{p-2}(\sqrt{5})^2+2C_p^4 2^{p-4}(\sqrt{5})^4+\ldots+$
$+C_p^{p-1}2(\sqrt{5})^{p-1}$, bu goşulyjylaryň her birinde $p$-e kratny bolan $C_p^2$, $C_p^4$, $C_p^6$, ..., $C_p^{p-1}$ sanlar bar. Şonuň üçin ol jem $p$-e kratny.

**516.** $x=0 \Rightarrow c$ – bitin san,
$x=1 \Rightarrow a+b+c=k \Rightarrow a+b=k-c$ – bitin san,
$x=-1 \Rightarrow a-b+c=l \Rightarrow a-b=l-c$ – bitin san, $a+b$, $a-b$ bitin sanlar. Onda $a+b+a-b=2a$ – bitin san.

**517.** Şerte görä $\angle ACB=80°$ we $AC=BC$. Onda $\angle CAB=50°$ we $\angle CBA=50°$. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jeminiň

180°-a deňliginden we çatyk burçlaryň häsiýetinden peýdalanyp, alarys.




$\angle MAK=40°$, $\angle KMA=40°$, $\angle BKC=80°$, $\angle KCB=80°$, ýagny $AKM$ we $BKC$ üçburçluklar deňýanly. Onda $AC=CB=KB$, $AK=KM \Rightarrow KC=MB$. Deňýanly üçburçluklaryň häsiýetinden peýdalanyp alarys:

$$\frac{AM}{2}=AK\cos40°=AM=2AK\cos40°,$$

$$\frac{CK}{2}=KB\cos80° \Rightarrow CK=2KB\cos80°,$$

$$AM=2AK\cos40°=2(KB-CK)\cos40°=$$
$$=2(KB-2KB\cos80°)\cos40°=2KB(\cos40°-2\cos40°\cos80°)=$$
$$=2KB(\cos40°-(\cos(80°+40°)+\cos(80°-40°)))=$$
$$=2KB(-\cos120°)=KB,\ AM=KB=AC.$$

Ýagny $AMC$ üçburçluk deňýanlydyr. Onda

$$\angle AMC=\frac{180°-\angle CAM}{2}=\frac{180°-40°}{2}=70° \text{ bolar.}$$

## 8-nji synp

**518.** $27^{91}-3^{93}=3^{3\cdot91}-3^{93}=3^{273}-3^{93}=3^{93}(3^{180}-1)=$ $=3^{93}((3^4)^{45}-1)=3^{93}(81^{45}-1)$ deňlikden görşümiz ýaly soňky ýaýyň içindäki aňlatma 10-a bölünýär. Şonuň üçin berlen tapawut 10-a bölünýär.

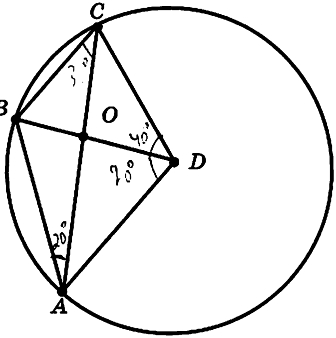
**519.** $2xy+x+y=83 \Leftrightarrow 4xy+2x+xy=166 \Leftrightarrow 2x(2y+1)+2y+1=$ $=166+1 \Leftrightarrow (2x+1)(2y+1)=167.$

167 ýönekeý sanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\begin{cases}2x+1=-1\\2y+1=-167\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-1;\\y=-84;\end{cases}\quad \begin{cases}2x+1=-167\\2y+1=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-84;\\y=-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+1=1\\2y+1=167\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=0;\\y=83;\end{cases}\quad \begin{cases}2x+1=167\\2y+1=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=83;\\y=0.\end{cases}$$

**520.** $\angle BAC=20°$, $\angle BDC=40°$ burçlar $BC$ tarapa daýanýar, $\angle BCA=35°$, $\angle BDA=70°$ burçlar bolsa $AB$ tarapa daýanýar hem-de $\angle BDC=2\angle BAC$ we $\angle BDA=2\angle BCA$ deňlikler ýerine ýetýär. Onda $ABCD$ dörtburçlugyň $D$ depesi $ABC$ üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezinde ýerleşýär. $ABD$ üçburçluk deňýanlydyr.




$$\angle DBA=\frac{180° - \angle ADB}{2} = \frac{180° - 70°}{2}=55°.$$

$\angle AOB=180°-\angle BAC-\angle DBA=180°-20°-55°=105°$,

$\angle COB=180°-\angle AOB=180°-105°=75°$.

**521.** Eger san 6-a, 7-ä, 8-e hem-de 9-a bölünýän bolsa, onda ol san $7\cdot8\cdot9=504$-e hem bölünýändir.

$19960000=504\cdot39603+88\Rightarrow19959912=504\cdot39603$,

$19970000=504\cdot39623+8\Rightarrow19969992=504\cdot39623$. Meseläni çözmek üçin 19959912–19969992 tapawutda näçe 504-üň bardygyny bilmek ýeterlikdir.

$19969992-19959912=504\cdot(39623-39603)=504\cdot20$.

Diýmek, öňi 1996 bilen başlanýan we 6-a, 7-ä, 8-e hem-de 9-a bölünýän 20 sany sekizbelgili san bar.

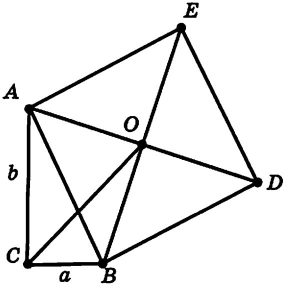
**522.** Haýsy haltada galp teňňeleriň bardygyny anyklamak üçin iki gezek çekmegiň ýeterlikdigini görkezeliň. Goý, haltalaryň sany $n$ bolsun. Haltalary bellibir tertipde belgiläliň (nomerläliň). Birinji gezek $k$-njy haltadan bir teňňäni çekip, onuň agramyny $a$ bilen belgiläliň. Soňra birinjiden 1 teňňe, 2-njiden 2 teňňe, we ş.m. $n$-njiden $n$ teňňe alyp terezide çekeliň we çekilen teňňeleriň agramyny $p$ bilen belgiläliň. Eger haltalaryň hemmesinde hakyky teňňeler bolan bolsa, onda $p=a+2a+3a+...+(k-1)a+ka+(k+1)a+...+na=$ $a(1+2+3+...+n)=a\frac{n(n-1)}{2}$ $p=a\frac{n(n-1)}{2}$ bolardy. Bu ýerden görnüşi ýaly haýsy haltada galp teňňe bardygyny anyklamak üçin $p-a\frac{n(n-1)}{2}$ tapawudy hasaplamak ýeterlikdir. Eger ol tapawut 0-dan kiçi bolsa onda, $k$-njy haltadaky teňňeler galp bolar (şerte görä). Eger tapawut 0-dan uly bolsa, onda ol galp teňňeli haltaň belgisine (nomerine) deň bolar.

**523. 1-nji çözülişi:**

$AB=BD=DE=AE=\sqrt{a^2+b^2}$;

$AD=BE=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$;

$AO=BO=0{,}5AD=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.




$\angle OAB=45°$ we $\cos\angle CAB=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$\angle CAB=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ bolýanlygyny göz öňünde tutýarys hem-de kosinuslar teoremasyny ulanyp, $AOC$ üçburçlugyň $OC$ tarapyny kesgitleýäris:

$OC^2=AC^2+OA^2-2AC\cdot OA\cdot\cos\angle OAC=$

$=b^2+\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-2b\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\cos(45°+\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})=$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-2b\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-b(b-a)=\frac{a^2+b^2+2a}{2}=\frac{(a+b)^2}{2};$$

$$OC^2=\frac{(a+b)^2}{2};\ OC=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}};\ CO=\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

**2-nji çözülişi:**

Meseläni Ptolomeý teoremasyny (içinden çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemi olaryň diagonallarynyň köpeltmek hasylyna deňdir) ulanyp çözýäris.

*ACBO* dörtburçluga seredeliň. Bu dörtburçlukda $\angle C+\angle O=$ $=90^0+90^0=180^0$ bolany üçin onuň daşyndan töwerek çyzyp bolar. Diýmek, bu dörtburçluk üçin Ptolomeý teoremasyny ulanmak mümkin.

$CO\cdot AB=AC\cdot OB+AO\cdot CB.$

Bu deňlikden *CO*-ny kesgitleýäris. Şunlukda, $AO=OB$ bolýanlygyny we $AO=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; $AB=\sqrt{a^2+b^2}$; $AC=b$; $CB=a$ deňlikleri göz öňünde tutýarys.

$$CO=\frac{AC\cdot OB+AO\cdot CB}{AB}=\frac{AO\cdot(AC+CB)}{AB}=$$

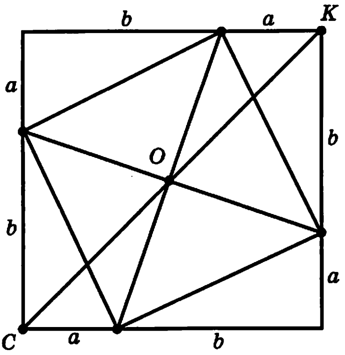
$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

**3-nji çözülişi:**

Meseläni Ptolomeýiň teoremasyny ulanman çözýäris.

Onuň üçin 1-nji çözülişdäki çyzgyny tarapy $a+b$ bolan kwadrata çenli doldurýarys:

Çyzgydan görnüşi ýaly, gözlenilýän aralyk tarapy $a+b$ bolan kwadratyň diagonalynyň ýarysyna deňdir.




$CK=\sqrt{(a+b)^3+(a+b)^2}=\sqrt{2}(a+b)$. Onda

$CO=\dfrac{CK}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

## 1997-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 10-njy synp

**524.** $x^3-3x-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ ýazalyň, bu ýerden $x\geq 2$ üçin $\ln(x^3-3x-1)=\ln(x-x_1)+\ln(x-x_2)+\ln(x-x_3)$.
Önümini tapalyň:

$$\frac{3x^3-3}{x^3-3x+1}=\frac{1}{(x-x_1)}+\frac{1}{(x-x_2)}+\frac{1}{(x-x_3)}$$

$x=2$ bolanda

$$\frac{1}{(x-x_1)}+\frac{1}{(x-x_2)}+\frac{1}{(x-x_3)}=9\text{-y alarys.}$$

**525.** $k$-ny fiksirläliň we islendik $n$ üçin

$|a_{n+1}+a_k-a_n-a_{n+k+1}|\leq\dfrac{1}{n+k+1}$ we

$|a_n+a_{k+1}-a_n-a_{n+k+1}|\leq\dfrac{1}{n+k+1}$ ýazalyň. Bu ýerden

$|a_{n+1}+a_k-a_n-a_{n+k+1}|\leq\frac{1}{n+k+1}<\frac{2}{n}$.

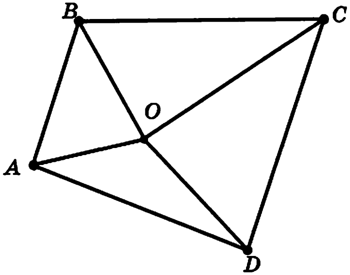
Ýagny $|(a_{k+1}-a_n)-(a_{k+1}-a_k)|<\frac{2}{k}$ alarys. Islendik $n$ bolany üçin $\lim|a_{n-1}-a_n|=a_{k+1}-a_k$. Edil şeýle $l$-i fiksirläp

$\lim|a_{n+1}-a_n|=a_{l+1}-a_l$-i alarys,

onda islendik $k$ we $l$ üçin $a_{k+1}-a_k=a_{l+1}-a_l$ deňlik dogrudyr. Diýmek, $\{a_n\}$ arifmetik progressiýadyr.

**526.** $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB\leq\frac{1}{2}OA\cdot OB\leq\frac{OA^2+OB^2}{4}$.

Şeýle deňsizlikleri beýleki üçburçluklar üçin hem ýazyp we olary goşup alarys:




$$S\leq\frac{OA^2+OB^2}{4}+\frac{OB^2+OC^2}{4}+\frac{OC^2+OD^2}{4}+\frac{OD^2+OA^2}{4},$$

$$S\leq\frac{OA^2+OB^2+OC^2+OD^2}{2}=\frac{2S}{2}=S.$$

Şeýlelikde, hemme deňsizlikler deňliklere öwrülýär.

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB$, diýmek, $\sin\angle AOB=1$, $\angle AOB=90°$.

Şeýlelikde, $\angle BOC=\angle COD=\angle AOD=90°$. $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary perpendikulýar. Ondan başga-da,

$\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{4}(OA^2+OB^2)$, $(OA-OB)^2=0$, $OA=OB$.

Şeýlelikde, $OB=OC=OD$. Diýmek, $ABCD$ – kwadrat, $O$ onuň merkezi.

**527.** $(-1;\ +\infty)$ aralykda $f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ funksiýa artýar, çünki $f^1(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}\geq 0$.

Hususanda, hemme $x>0$ üçin $f(x)>f(0)$.

Onda $\ln(11x)>\frac{2x}{2+x}$ deňsizlik alynýar. Eger $x=\frac{1}{100}$ alnak, onda $\ln 1{,}01>\frac{2}{201}=0{,}00995...$ .

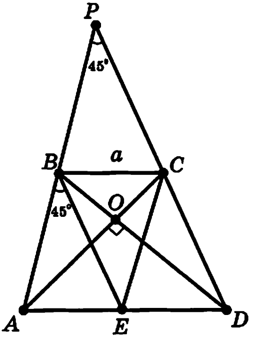
**528.** $(f(0)+f(30))+(f(1)+f(29))+...+(f(14)+f(16))+f(15)=$
$=(\mathrm{arctg}3^{-15}+\mathrm{arctg}3^{15})+...+(\mathrm{arctg}3^{-1}+\mathrm{arctg}3)+\mathrm{arctg}1$.

Burçlar birinji çärýege degişlidir. Goý, $\mathrm{arctg}3^{-n}=\alpha$, $\mathrm{arctg}3^{n}=\beta$ bolsun, onda $\mathrm{tg}\alpha=3^{-n}$, $\mathrm{tg}\beta=3^{n}$, $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$, $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}\beta$, bu ýerden $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ gelip çykýar.

Şeýlelikde, gözlenilýän jem $\frac{\pi}{2}\cdot 15+\frac{\pi}{4}=\frac{31}{4}\pi$ bolar.

**529.** Goý, $AB=x$, $CD=y$. $BE\|CD$ geçireliň. Onda $AE=AD-ED=b-a$ we $(b-a)h=2S_{\Delta AED}=x\cdot y\sin 45°$,
$(b-a)^2=x^2+y^2-2xy\cos 45°=x^2+y^2-2xy\sin 45°$. Pifagor teoremasy boýunça $a^2+b^2=(BO^2+OC^2)+(AO^2+OD^2)=$
$=(BO^2+AO^2)+(OC^2+OD^2)=x^2+y^2$.

Şeýlelikde, $(b-a)^2=a^2+b^2-2(b-a)h$, ýagny $h=\frac{ab}{b-a}$.



## 9-njy synp

**530.** $\varphi(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ ýazalyň, onda

$$[\ln\varphi(x)]'=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...+\frac{1}{x-x_n}.$$

**531.** $u_1=\frac{1}{10}$, $u_2=u_1\cdot\frac{\ln 2}{10}$, ..., $u_n=u_{n-1}\cdot\frac{\ln 10}{10}$ diýeliň. Eger $n<10^{10}$ bolsa, onda $\frac{\ln n}{10}>1$. Şonuň üçin, $u_1>u_2>u_3>...>u_{10^{10}-1}=$ $=u_{10^{10}}<u_{10^{10}+1}<...$ we iň kiçi baha $n=10^{10}-1$ we $n=10^{10}$ bolanda alynýar.

**532.** $a$, $b$ we $c$ kesimlerden üçburçluk düzmek bolýandygy üçin, $a\geq b\geq c$ diýsek, $b+c>a$ bolmalydyr. Bu ýerden $a+b\geq b+c$, $a+c\geq b+c$ we $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{a+c}$ alarys. Indi bize $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$ deňsizligi subut etmek galýar.

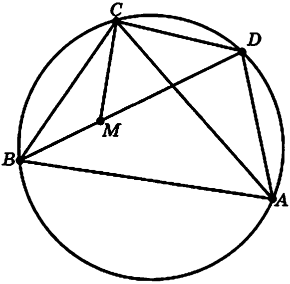
$$\frac{1}{a+b}>\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c},\quad \frac{1}{a+b}>\frac{a-b}{(b+c)(a+c)},$$

$ab+ac+bc+c^2>a^2-b^2$, $b^2+c^2+bc+ab+ac>a^2$, bu deňsizlik bolsa dogry, çünki $b^2+c^2+bc+ab+ac>b^2+c^2+bc+cb+bc>$ $>b^2+c^2+2bc=(b+c)^2>a^2$.

**533.** $U_n=x^n+\frac{1}{x^n}$ diýeliň. Subut etmek üçin matematiki induksiýa usulyny ulanalyň. $U_1=x+\frac{1}{x}$ şert boýunça bitin san. Goý, $k\leq n-1$ üçin $U_k$ – bitin sanlardyr. $U_{n-1}\cdot U_1=U_n+U_{n-2}$ toždestwodan $U_n=U_1\cdot U_{n-1}-U_{n-2}$ bitin sandygyny alarys.

**534.** $f(\alpha,\beta,\chi)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\chi$ belgileme girizeliň. Onda $4[f(\alpha,\beta,\chi)-\frac{3}{4}]=4\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\chi}{2}-\frac{3}{4}\right)=$ $=2(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+4\cos^2(\alpha+\beta)+1=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$ $+4\cos^2(\alpha+\beta)+1=(2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))^2+1-\cos^2(\alpha-\beta)\geq 0$, bu ýerden $f(\alpha,\beta,\chi)\geq\frac{3}{4}$. Görnüşi ýaly, deňlik $\cos(\alpha-\beta)=1$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$ bolanda, ýagny $\alpha=\beta=\gamma=60°$ bolanda alynýar.

**535.** Bu tassyklama Ptolomeý teoremasy diýilýär.




*BD* diagonalda *M* nokady $\angle MCD=\angle BCA$ bolar ýaly alalyň. $\angle BAC=\angle BDC$, sebäbi, olar şol bir duga daýanýarlar. Onda *ABC* üçburçluk *DCM* üçburçluga meňzeşdir. Şonuň üçin

$$\frac{CD}{MD}=\frac{CA}{AB} \text{ ýa-da}$$

$AB\cdot CD=MD\cdot CA$ (1).

$\angle MCD=\angle BCA$ deňlikden, $\angle MCA$-ny aýryp $\angle BCM=\angle ACD$-ni alarys. Ondan başga-da, şol bir duga daýanýandyklary üçin $\angle CBD=\angle CAD$, onda *BCM* we *ACD* üçburçluklar meňzeşdirler. Olaryň meňzeşliginden $\frac{BC}{BM}=\frac{AC}{AD}$, ýa-da $BC\cdot AD=AC\cdot BM$ (2) deňlikleri alarys.

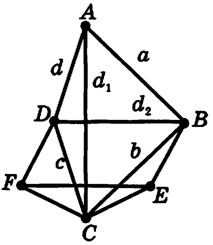
(1) we (2) deňlikleri goşup $AB\cdot CD+BC\cdot AD=MD\cdot CA+AC\cdot BM$ ýa-da $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$ (3) deňligi alarys.

Ýeri gelende islendik güberçek dörtburçluklar üçin Bretşneýder teoremasyny (dörtburçluklar üçin kosinuslar teoremasyny) getirmegi makul bildik.

**Teorema.** *a, b, c, d* – *ABCD* dörtburçlugyň taraplary, $d_1$ we $d_2$ onuň diagonallary bolsa, onda diagonallar we taraplar üçin $(d_1d_2)^2=(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cdot\cos(A+C)$ deňlik dogrudyr.

Subudy.

*CD* tarapyň daş ýanynda *ABC* üçburçluga meňzeş bolan *CFD* üçburçlugy gurýarys.




Şunlukda, ol üçburçlugy $\angle CAB=\angle DCE$ we $\angle ACB=\angle EDC$ bolar ýaly edip gurýarys. *CB* tarapyň daş ýanynda *CDA* üçburçluga meňzeş bolan *CEB* üçburçlugy gurýarys.

Şunlukda, ol üçburçlugy $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle DCA=\angle CBE$ bolar ýaly edip gurýarys. *ABC* we *CFD* üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{FC}{CD}=\frac{AB}{AC}$ ýa-da $FC=\frac{AB\cdot CD}{AC}=\frac{a\cdot c}{d_1}$ deňligi alarys. Ýene-de şu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{FD}{CD}=\frac{CB}{AC}$ ýa-da $FD=\frac{CB\cdot CD}{AC}=\frac{b\cdot c}{d_1}$ (1) deňligi alarys.

*CDA* we *CEB* üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{CE}{CB}=\frac{AD}{AC}$ ýa-da $CE=\frac{AD\cdot CB}{AC}=\frac{d\cdot b}{d_1}$ deňligi alarys. Ýene-de şu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{BE}{BC}=\frac{CD}{AC}$ ýa-da $BE=\frac{CD\cdot BC}{AC}=\frac{b\cdot c}{d_1}$ (2) deňligi alarys. Diýmek, (1) we (2) deňlikleri deňeşdirip, $FD=BE$ bolýanlygyna göz ýetireris.

Indi *FDB* we *DBE* burçlaryň jeminiň 180°-a deňligini görkezeliň.

$\angle FDB+\angle DBE=\angle FDC+\angle CDB+\angle DBC+\angle CBE;$

$\angle FDC=\angle BCA$ we $\angle CBE=\angle DCA$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$\angle FDC+\angle CDB+\angle DBC+\angle CBE=\angle BCA+\angle CDB+\angle DBC+$ $+\angle DCA=\angle CDB+\angle DBC+\angle DCB=180°$ (üçburçlugyň burçlarynyň jemi 180°-a deň). Diýmek, *FD* we *BE* göni çyzyklary üçünji *BD* göni cyzyk kesip geçende alynýan *FDB* we *DBE* birtaraplaýyn burçlaryň jemi 180°-a deň bolany üçin *FD* we *BE* göni çyzyklar özara paralleldirler. Belli bolşy ýaly, eger dörtburçlugyň garşylykly iki tarapy deň we parallel bolsa, onda ol dörtburçluk parallelogramdyr. Diýmek, *FDBE* dörtburçluk parallelogram. Onda $DB=FE=d_2$.

$\angle FCE=\angle FCD+\angle DCB+\angle BCE=\angle CAB+\angle DCB+\angle DAC=$ $=\angle DAB+\angle DCB.$

*FEC* üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanýarys:

$FE^2=FC^2+CE^2-2FC\cdot CE\cdot\cos\cdot FCE=$

$=FC^2+CE^2-2FC\cdot CE\cdot\cos(\angle DAB+\angle DCB)$

$$d_2^2=\left(\frac{a\cdot c}{d_1}\right)^2+\left(\frac{d\cdot b}{d_1}\right)^2-2\cdot\frac{a\cdot c\cdot d\cdot b}{d_1^2}\cos(\angle DAB+\angle DCB);$$

$(d_1\cdot d_2)^2=(a\cdot c)^2+(d\cdot b)^2-2abcd\cdot\cos(\angle DAB+\angle DCB)$. S.E.Ş.

$\angle DAB+\angle DCB=180°$ bolanda *ABCD* dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolýar. cos180°=–1 bolýanlygyny göz önünde tutsak, Bretşneýderiň teoremasy Ptolomeýiň teoremasyny berer:

$(d_1 \cdot d_2)^2=(a \cdot c)^2+(d \cdot b)^2-2abcd \cdot (-1);$

$(d_1 \cdot d_2)^2=(a \cdot c)^2+(d \cdot b)^2+2abcd;$

$(d_1 \cdot d_2)^2=(a \cdot c+b \cdot d)^2;\quad d_1 \cdot d_2=a \cdot c+b \cdot d.$

## 8-nji synp

**536.** Islendik $n \in N$ üçin $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=$
$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$

**537.** $1-2x+2x^4=2x^2-2x+\frac{1}{2}+2x^4-2x^2+\frac{1}{2}=$
$=2(x^2-x+\frac{1}{4})+2(x^4-x^2+\frac{1}{4})=2(x-\frac{1}{2})^2+2(x^2-\frac{1}{2})^2>0.$

**538.** $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\angle A+\frac{1}{2}CB \cdot CD \cdot \sin\angle C$, ýöne $\angle A+\angle C=180°$, $\sin\angle A=\sin\angle C$, onda

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB \cdot AD+CB \cdot CD)\sin\angle A$. Şeýlelikde,

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BA \cdot BC+DC \cdot DA)\sin\angle B$. Bularyň deňdiginden

$\frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DC \cdot DA} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A}$ alarys. Sinuslar teoremasyndan $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} = \frac{AC}{BD}$ alyp, talap edilýän gatnaşygy alarys.

**539.** $a^6+1=(a^2)^3+1^3=(a^2+1)(a^4-a^2+1)=\frac{a^2+1}{a}(a^5+a^3+a)=$
$=\frac{a^2+1}{a} \cdot 2=2(a+\frac{1}{a})$; bu ýerden $a>0$ gelip çykýar. Onda

$a+\frac{1}{a}>2$ ($a \neq 1$ şertden gelýär) we $a^6+1>4$, $a^6>3$. Ýeri gelende

$a^6<4$ bolýandygyny hem aýtmak gerek. Hakykatdan-da, $a^5+a=a^3+2$, bu deňligiň iki böleginde $a^3$-a bölüp, alarys:

$a^2+\frac{1}{a^2}=1+\frac{2}{a^3}$, bu ýerden, $1+\frac{2}{a^3}>2$, $\frac{2}{n^3}>1$, $a^3<2$ we $a^6<4$ alarys.

**540.** $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5 \le (x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$.

$x_1+x_3+x_5=a$, $x_2+x_4=b$ diýsek, şert boýunça $a+b=1$-i alarys. Onda $a\cdot b=a(1-a)=a-a^2=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-a)^2 \le \frac{1}{4}$. Şeýlelikde, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5 \le \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4}$ baha $x_1+x_3+x_5=x_2+x_4=\frac{1}{2}$ bolanda alynýar.

**541.** Goý, gönüburçly üçburçlugyň katetleri $a$ we $a+d$ bolsun, onda gipotenuza $a+2d$ bolmaly. Pifogoryň teoremasy boýunça $(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2$, $3d^2+2ad-a^2=0$, $a=3d$.

Onda üçburçlugyň taraplary $3d$, $4d$ we $5d$ bolar. Içinden çyzylan töweregiň radiusyny $r$, üçburçlugyň meýdanyny $S$, ýarymperimetri $P$ diýsek, $S=pr$ bolýandygyny bilýäris. Onda

$S=\frac{1}{2}\cdot 3d\cdot 4d=6d^2$; $P=\frac{3d+4d+5d}{2}=6d$. Bu ýerden

$r=\frac{S}{P}=\frac{6d^2}{6d}=d$

## 1999-njy ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 9 (10)-njy synp

**542.** Goý, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ – berlen sanlar, $p=a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ bolsun. Şert boýunça $p-a_k=2s+1$ – täk san. Goý, $a_i$, $i=1$, ..., $n$ bitin sanlar bolsun, onda $a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}a_ka_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n-a_k=2s+1$, $a_k(a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n-1)=2s+1$ bolar. Bu ýerden islendik $k$-da $a_k$ – täk alarys, onda ikinji köpeldiji jübüt bolýar. Bu bolsa deňlikde gapma-garşylyga getirýär. Şeýlelikde, islendik $a_k$-nyň rasional däldigi görkezilýär. Onda hemme $a_k$ irrasional sanlardyr.

**543.** Üç arça saýlananda üç arça galýar, diýmek, kölüň düýbüne $\frac{1}{2}C_6^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=10$ gezek çümmeli bolýar.

**544.** *aa,aba, abba, abcba* – ikibelgili, üçbelgili, dörtbelgili we bäşbelgili simmetrik sanlaryň görnüşi.

1) $\begin{array}{r} aa \\ \underline{+1995} \\ 20\,ed \end{array}.$

Şert boýunça $d$=2, $e$=0 bolmaly, onda $a$=7 alynýar, ýöne $e$=0 bolmaýar.

2) $\begin{array}{r} aba \\ \underline{+1995} \\ 2\,ffd \end{array}.$

Şert boýunça $d$=2 bolmaly, onda $a$=7 bolar.

Görşümiz ýaly $f$=7 bolmaly, onda $b$=7.

$\begin{array}{r} 7b7 \\ \underline{+1995} \\ 27\,f2 \end{array}.$

Şeýlelikde, 777 şerti kanagatlandyrýar.

3) $\begin{array}{r} abba \\ \underline{+1995} \\ dcecd \end{array}.$

Bir ýagdaýda $a$+5=$a$+1+1 bolmaly, beýle bolup bilmeýär.

Beýleki ýagdaýda $a$+5=10+$d$, $d$=$a$+1+1 bolmaly, onda bolmaly, beýle bolup bilmeýär.

Üçünji ýagdaýa seredeliň.

$\begin{array}{r} abba \\ \underline{+1995} \\ deecd \end{array}.$

Bu ýagdaýda $d$=1 bolmaly, onda $a$=6 we bäşbelgili san alynmaýar.

**545.** $s$-nji adamyň hozlarynyň sany başda $a_s$, birinji alyşmadan soň $b_s$, ikinji alyşmadan soň $d_s$, we ş.m. diýeliň, özem käbir $a_s(b_s, d_s, ...)$ deň bolmagy mümkin. Iň az hozlaryň sany $a_i(b_i, d_i, ...)$, iň kän hozlaryň sany $a_j(b_j, d_j, ...)$ diýeliň. Goý, $a_i$=2$m$+1 (ýa-da 2$m$), çepindäki hozlarynyň sany $a_{i-1}$=2$k$ diýsek, $k \geq m$+1 (ýa-da $k \geq m$) bolmaly. Birinji alyşmadan soň,

$a_i=m+k\geq 2m+1$ (ýa-da $k\geq 2m$) bolar. Şeýlelikde, $a_i$ kemelmeýär. Iň az hozlaryň ($b_i$) başga orunlarda alynmagy hem mümkin, ýöne ol hem başdaky $a_i$-den az bolmaz. Ýagny $a_i\leq b_i\leq d_i\leq\ldots$ .

Edil şeýlelikde, iň kän hozlaryň sany artmaýar: $a_j\geq b_j\geq d_j\geq\ldots$ .

Käbir alyşmalarda az hozlaryň sany artýar. Kän hozlaryň sany kemelýär. Şeýlelikde, olaryň sany deňleşmeli bolar.

**546.** $x>1$ natural san, onda $n\geq 4$ bolmaly.

Şert boýunça $1989<\frac{10^n}{x}<1990$, bu ýerden

$1989x<10^n<1990x$, $0<10^n-1989x<x$ (*)

$n=4$; $x=5$; $10000-1989\cdot 5=55$,

$n=5$; $x=50$; $100000-1989\cdot 50=550$,

$n=6$; $x=502$; $1000000-1989\cdot 502=1522$,

$n=7$; $x=5027$; $10000000-1989\cdot 5027=1297$.

(*) deňsizlik kanagatlandyrylýar, diýmek, jogaby $n=7$ bolýar.

**547.** Deňsizligi $a^{1974}+(a^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>a^{1973}$ görnüşde ýazsak, deňsizligiň $a\leq 0$ we $a\geq 1$ dogrudygy görünýär.

Eger $a^{1974}+a^4+1>a^{1973}+a^2$ görnüsde ýazyp, deňsizligiň $0<a<1$ dogrudygyny alarys, çünki $a^4>a^{1973}$ we $1>a^2$ bellidir.

**548.** Eger $a$ we $b$ sanlar dürli alamatly bolsa, deňsizlik has güýçlenýär. Şonuň uçin, $a>0$, $b>0$ diýmek bolar.

**Birinji usul.**

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq a^2+b^2+(a^2+b^2)\leq 2(a^2+b^2)$

$(a+b)^4=((a+b)^2)^2\leq(2(a^2+b^2))^2=4(a^2+b^2)^2\leq 4\cdot 2(a^4+b^4)=8(a^4+b^4)$.

**Ikinji usul.** Goý, $a_i(i=1, \ldots, n)$ položitel sanlar, $a\neq 0$ islendik hakyky san bolsun.

$C_a=\left(\frac{a_1^a+a_2^a+\ldots+a_n^a}{n}\right)^{\frac{1}{a}}$ ululygy derejeli orta diýilýär.

$C_0=\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ – orta geometrik diýilýär.

**Bellik.** $C_1=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ – orta arifmetik.

$C_2=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$ – orta kwadratik.

$C_{-1}=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ – orta garmonik diýilýär.

**Teorema:** Islendik $\alpha\leq\beta$ üçin $C_\alpha<C_\beta$.

Şu teoremany peýdalanalyň: $C_1<C_4$, ýagny

$\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}$, bu ýerden, deňsizligiň iki bölegini hem

4-nji derejä göterip, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4\leq\dfrac{a^4+b^4}{2}$, $(a+b)^4\leq8(a^4+b^4)$

alarys. Deňlik $a=b$ bolanda alynýar.

## 2000-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 8(9)-njy synplar

**549.** 1999-njy ýyldan öň doglan Muhammediň ýaşy 1+9+9+9=28-den kiçi bolar. Goý, Muhammet $19xy$ ýylda doglan we ýaşy $n$ diýeliň. Onda şert boýunça

$\begin{cases}1999-19xy=n,\\1+9+x+y=n\end{cases}$ bolmaly, ýagny $\begin{cases}99-10x-y=n,\\10+x+y=n\end{cases}$

bu ulgamdan $11n=199+9y$ deňligi alarys. Onda

$n=18+\dfrac{1+9y}{11}$, $y=6$, $n=23$.

Jogaby: 23+1=24 ýaşynda.

**550.** Berlen deňlikden $x\neq1$ bolany üçin $x-1$-i köpeldip, $x^7=1$-i alarys. 222222 we 111111 sanlaryň 7-ä kratny bolany üçin $x^{111111}=1$, $x^{222222}=1$. Onda aňlatmanyň bahasy

2000+1999–1998=2001 bolar.

**551.** Goý, «2»-likleriň sany $m$, «3»-lükleriň sany $n$, «4»-lükleriň sany $10p$ we «5»-likleriň sany $2q$ bolsun. Şerte görä

$$\begin{cases}m+n+10p+2q=30,\\2m+3n+40p+10q=93.\end{cases}$$

Bu ulgamy natural sanlarda çözeliň, onda diňe $p=1$ bolmaly. Indi

$$\begin{cases} m + n + 2q = 20, \\ 2m + 3n + 10q = 53. \end{cases}$$

Ulgama geldik. Onda ikinji deňlemeden $n$-iň , soňra birinji deňlemeden $m$-iň täkligi gelýär. Eger $m=2m_1+1$, $n=2n_1+1$ diýsek,

$$\begin{cases} m_1 + n_1 + q = 9, \\ 2m_1 + 3n_1 + 5q = 24 \end{cases}$$

alarys. Meseläniň şertinden peýdalansak, $2n_1+1>10$ bolmaly, ýagny $n_1\geq5$ bolmaly. $n_1=5$ bolanda $\begin{cases} m_1 + q = 4, \\ 2m_1 + 5q = 9 \end{cases}$ ulgamyň bitin çözüwi ýok.

$n_1=6$ bolanda $\begin{cases} m_1 + q = 3, \\ 2m_1 + 5q = 6 \end{cases}$

ulgamyň $q=0$, $m_1=3$ çözüwi bar. Onda $m=7$, $n=13$, $p=1$, $q=0$ çözüwleri bolar.

**552.** $a_1<a_2<...<a_n<...$ .

$a_n+1=(a_{n-1}+1)+\frac{1}{a_{n-1}+1}$,

$(a_n+1)^2=(a_{n-1}+1)^2+\frac{1}{(a_{n-1}+1)^2}+2.$ (*)

Bu ýerden $(a_n+1)^2>(a_{n-1}+1)^2+2$-ni alarys.

$n=2, 3, ..., 100$ goýup we olary goşup, ýagny

$(a_2+1)^2>(a_1+1)^2+2,$

$(a_3+1)^2>(a_2+1)^2+2,$

---

$(a_{100}+1)^2>(a_{99}+1)^2+2$ deňsizlikleri goşup,

$(a_{100}+1)^2>(a_1+1)^2+2\cdot99=4+198=202,$

$a_{100}+1>\sqrt{202}>\sqrt{196}=14$, $a_{100}>13$-i alarys.

(*) deňsizlikde $n=2, 3, ..., 100$ goýalyň we özara goşalyň.

Onda $(a_2+1)^2=(a_1+1)^2+\frac{1}{(a_1+1)^2}+2,$

$(a_3+1)^2=(a_2+1)^2+\frac{1}{(a_2+1)^2}+2,$

---

$$(a_{100}+1)^2=(a_{99}+1)^2+\frac{1}{(a_{99}+1)^2}+2$$

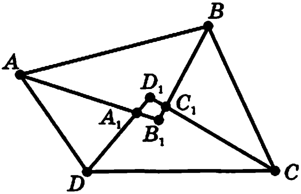
deňsizlikleri goşup, alarys:

$$(a_{100}+1)^2=(a_1+1)^2+\frac{1}{(a_1+1)^2}+\frac{1}{(a_2+1)^2}+...+\frac{1}{(a_{99}+1)^2}+2\cdot99<$$

$$<4+\frac{1}{4}\cdot99+198=226\frac{3}{4}<256,\ a_{100}+1<16,\ a_{100}<15.$$

Şeýlelikde, $13<a_{100}<15$ bolar.

**553.** Dörtburçlugyň $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ we $DD_1$ bissektrisalaryny geçireliň $\angle AA_1D$-den we $\angle BCC_1$-den




$$\angle A_1=180°-\frac{\angle A+\angle D}{2};$$

$$\angle C_1=180°-\frac{\angle B+\angle C}{2}$$ alarys,

onda $\angle A_1+\angle C_1=360°-\frac{\angle A+\angle B+\angle C+\angle D}{2}=360°-180°=180°$; ýagny $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçlugyň garşylykly burçlarynyň jemi deň, onda ol dörtburçluk içinden çyzylan dörtburçlukdyr.

## 9(10)-njy synplar

**554.** Şerte görä $10a+b=(a+2)(b+2)$ deňligi kanagatlandyrýan $a\neq0$ we $b$ sifrleri tapmaly.

Onda $10a+b=ab+2a+2b+4$, $ab+b-8a+4=0$,

$(a+1)(b-8)=-12$, $(a+1)(8-b)=12$ alarys.

a) $\begin{cases}a+1=2,\\8-b=6;\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\b=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}a+1=3,\\8-b=4;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\b=4;\end{cases}$ ç) $\begin{cases}a+1=4,\\8-b=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a=3,\\b=5;\end{cases}$ d) $\begin{cases}a+1=6,\\8-b=2;\end{cases}$ $\begin{cases}a=5,\\b=6.\end{cases}$

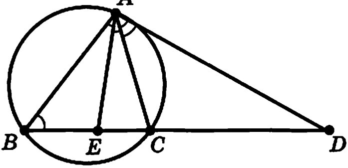
Diýmek, 12, 24, 35, 56 gözlenilýän sanlar.

**555.** $f(x)=x^4+x^2+\frac{x}{6}=(x^4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x})+(x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x})\geq$

$$\geq5\cdot\sqrt[5]{x^4\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}+3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=8.$$

Iň kiçi baha 8-e deň ol $x=1$ bolanda alynýar. Biz bu ýerde $n$ položitel ululyklaryň orta arifmetigi olaryň orta geometriginden kiçi däldigini ulandyk, ýagny $a_1+a_2+...+a_n\geq$ $\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdot ... \cdot a_n}$ deňsizligi ulandyk.

**556.** Şert boýunça $BE=a$, $EC=b$, $AD$ – galtaşan. $\angle ABC=\angle CAD$, $\angle ADC$ – umumy bolany üçin $\Delta ABD\sim\Delta CAD$, onda $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.




$AE$ – bissektrisa, onda

$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}=\frac{a}{b}$.

Şeýlelikde, $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}=\frac{a}{b}$, bu ýerden:

$BD=\frac{a}{b}AD$, $CD=\frac{a}{b}AD$, $BD-CD=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)AD$,

$BC=\frac{(a-b)(a+b)}{ab}AD$, $AD=\frac{ab}{a-b}$ alarys.

**557.** Eger $t_1$ we $t_2$ $f(t)=0$ deňlemäniň kökleri diýsek, $x_i$-leriň ikisi $g(x)=t_1$, beýleki ikisi bolsa $g(x)=t_2$ deňlemäniň kökleridir. Goý, $g(x)=ax^2+bx+c$ onda Wiýet teoremasy boýunça bu deňlemeleriň her biriniň kökleriniň jemi $-\frac{b}{a}$ deň. Berlen deňsizlikleri göz öňünde tutup, $x_1+x_4=x_2+x_3$-i alarys.

**558.** $a_n+1=a_{n-1}+1+\frac{1}{(a_{n-1}+1)^2}$

$(a_n+1)^3=(a_{n-1}+1)^3+3+\frac{3}{(a_{n-1}+1)^3}+\frac{1}{(a_{n-1}+1)^6}$.

$(a_2+1)^3=(a_1+1)^3+3+\frac{3}{(a_1+1)^3}+\frac{1}{(a_1+1)^6}$

$$(a_3+1)^3=(a_2+1)^3+3+\frac{3}{(a_2+1)^3}+\frac{1}{(a_2+1)^6}=$$

$$(a_1+1)^3+3\cdot 2+3\left(\frac{1}{(a_1+1)^6}+\frac{1}{(a_2+1)^3}\right)+\left(\frac{1}{(a_1+1)^6}+\frac{1}{(a_1+1)^6}\right)$$

---

$$(a_{2000}+1)^3=(a_{1999}+1)^3+3+\frac{3}{(a_{1999}+1)^3}+\frac{1}{(a_{1999}+1)^6}=$$

$$(a_1+1)^3+3\cdot 1999+3\left(\frac{1}{(a_1+1)^3}+\frac{1}{(a_2+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(a_{1999}+1)^3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{(a_1+1)^6}+\frac{1}{(a_1+1)^6}+\ldots+\frac{1}{(a_{1999}+1)^6}\right).$$ Bu ýerden

$$(a_{2000}+1)^3=(a_1+1)^3+3\cdot 1999+3\left(\frac{1}{(a_1+1)^3}+\frac{1}{(a_2+1)^3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(a_{1999}+1)^3}\right)+\left(\frac{1}{(a_1+1)^6}+\frac{1}{(a_1+1)^6}+\ldots+\frac{1}{(a_{1999}+1)^6}\right)$$ alarys.

Onda $(a_{2000}+1)^3>(a_1+1)^3+3\cdot 1999=6005$,

$a_{2000}+1>\sqrt[3]{6005}>18$, $a_{2000}>17$.

Başga tarapdan $a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots$

$$(a_{2000}+1)^3>(a_1+1)^3+3\cdot 1999+3\cdot\frac{1}{8}\cdot 1999+\frac{1}{64}\cdot 1999=$$

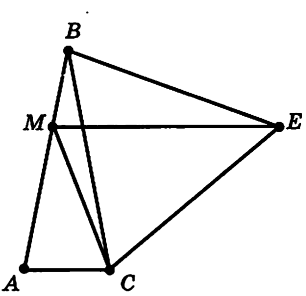
$$=8+5997+\frac{25\cdot 1999}{64}=6785\frac{55}{64},$$

$a_{2000}+1>\sqrt[3]{6785\frac{55}{64}}<\sqrt[3]{6859}=19$, $a_{2000}<18$.

Şeýlelikde, $17<a_{2000}<18$.

**559. 1-nji usul.**

*BC* tarapda üçburçlugyň daşyna dogry *BCE* üçburçlugy guralyň, onda $\angle EBM=20°+$ $+60°=80°$. Şert boýunça $\angle BAC=80°$, $BM=AC$. Şeýlelikde, $\Delta BEM=\Delta ABC$, bu ýerden $ME=EB$, $\angle BEM=20°$ bolýar. Indi *E* nokadyň *BCM* üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezidigi görünýär,

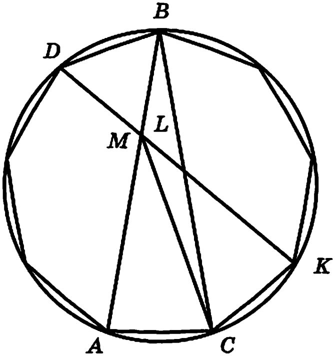


onda $\angle BCM$ – içinden çyzylan burç hem $\angle BCM=\frac{\angle BEM}{2}=10$.

$AMC$ burç $BMC$ üçburçlugyň daşky burçy, sonuň üçin $\angle AMC=\angle CBM+\angle BCM=20°+10°=30°$.

**2-nji usul.**

$ABC$ üçburçlugyň daşyndan töwerek çyzalyň. $\angle B=20°$ bolany üçin, $\smile AC=40°$, onda $AC$ içinden çyzylan dogry dokuzburçlugyň tarapy. Goý, $D$ we $K$ bu dokuzburçlugyň depeleri, deň dugalary dartýanlygy üçin $AB=DK$. $DK$ we $AB$ hordalaryň kesişme nokadyny $L$ diýip belgiläliň. $\angle ABD=\angle BDK=$ $=\frac{120°}{2}=60°$, bu ýerden $\angle ALD=60°$ gelýär, ýagny $\Delta BDL$ – deňtaraply, onda $BL=BD=AC$, şeýlelikde, $L$ nokat şertiň $M$ nokadydyr. Üç taraplary boýunça $\Delta ALC=\Delta CLK$, onda $\angle AMC=\frac{\angle ALK}{2}=\frac{\angle BLD}{2}=\frac{60°}{2}=30°$.




## 2001-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 8(9)-njy synplar

**560.** Islendik $n$ üçin $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$. $a_n^2 \ge 0$ onda $a_2 - a_{n+1} \ge 0$, $a_n \ge a_{n+1}$, ýagny $a_1 \ge a_2 \ge a_3 ... \ge a_n \ge ...$ .

Diýmek, $\{a_n\}$ yzygiderlik artmaýar aşakdan çäklidir. $a_n$ – položitel ýagny $a_n>$. Şonuň üçin, $\{a_n\}$ ýygnanýar.

**561.** $4a^2+3>a^2+a+1$, sebäbi bu ýerden $3a^2-a+2>0$ alarys. $\left(\sqrt{3a}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+1\frac{11}{12}>0$. Üçburçlugyň deňsizligini barlalyň: $\sqrt{4a^2+3}<\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{a^2+a+1}$,

$4a^2+3<a^2-a+1+a^2+a+1+2\sqrt{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}$,

$2a^2+1<2\sqrt{(a^2+1)^2-a^2}$, $(2a^2+1)^2<4(a^4+2a^2+1-a^2)$,

$4a^4+4a^2+1<4a^4+4a^2+4$.

Indi bu üçburçlugyň meýdanyny tapalyň. Kosinuslar teoremasy esasynda alarys:

$$(\sqrt{4a^2+3})^2=(\sqrt{a^2-a+1})^2+(\sqrt{a^2+a-1})^2-$$
$$-2\sqrt{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}\cdot\cos\alpha,\ 2\sqrt{a^4+a^2+1}\cos\alpha=$$
$$=-(2a^2+1),\ \cos\alpha=-\frac{2a^2+1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}.$$
$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-a+1}\cdot\sqrt{a^2+a+1}\cdot\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^4+a^2+1}\cdot\sqrt{1-\frac{(2a^2+1)^2}{4(a^4+a^2+1)}}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^4+a^2+1}\cdot\sqrt{\frac{4a^4+4a^2+4-4a^4-4a^2-1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**562.** $$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{((n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1})}{((n+1)\sqrt{n})^2-(n\sqrt{n+1})^2}=$$
$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\cdot n-n^2\cdot(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n\cdot(n+1-n)}=$$
$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
$$a_1+a_2+...+a_{2001}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2001}}-\frac{1}{\sqrt{2002}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2002}}.$$

3. Matematiki induksiýa usulyny ulanalyň. Eger $n=0$ bolsa, onda $a+b\geq 1$ bolýar. $n=1$ bolsa, onda $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$ bolar. Hakykatdan-da, $a+b\geq 1$, onda $(a+b)^2\geq 1$, $a^2+2ab+b^2\geq 1$. $a^2+b^2\geq 2ab$ bolany üçin, alarys $2(a^2+b^2)\geq(a^2+b^2)+2ab\geq 1$, bu ýerden $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$ deňsizligi alarys. Goý, $n=k$ bolanda $a^{2^k}+b^{2^k}\geq\frac{1}{2^{2^k-1}}$ deňsizlik dogry bolsun. Onda $n=k+1$ bolanda alarys:

$$(a^{2^k}+b^{2^k})^2\geq\frac{1}{2^{(2^k-1)^2}},\ a^{2^{k+1}}+2a^{2^k}\cdot b^{2^k}+b^{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{(2^k-1)^2}},$$

$$2(a^{2^k}+b^{2^k})\geq a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}+2a^{2^k}\cdot b^{2^k}\geq\frac{1}{2^{(2^k-1)^2}},$$

bu ýerden $a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{2^{k+1}-2}\cdot 2^1}=\frac{1}{2^{2^{k+1}-1}}$.

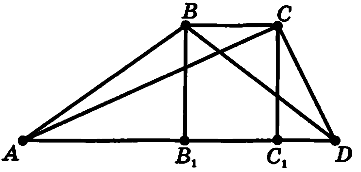
**564.** Goý, $ABCD$ trapesiýanyň diagonallary $AC=d_1$, $BD=d_2$ ($d_1\geq d_2$), trapesiýanyň esasyna olaryň proýeksiýasyny $AC_1=P_1$, $DB_1=P_2$, trapesiýanyň esaslary $a$ we $b$, beýikligi $h$ bolsun. $P_1+P_2=a+b$. $P_1\geq P_2$, onda $P_1\geq\frac{a+b}{2}$.

Meseläniň şertine görä, alarys: $\frac{a+b}{2}\cdot h=1$, ýagny $\frac{a+b}{2}=\frac{1}{h}$.

Şunlukda,

$$d_1^2=p_1^2+h\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2=\frac{1}{h^2}+h^2=\left(\frac{1}{h}-h\right)^2+2.$$

Bu ýerden, $d_1^2$-ynyň iň kiçi bahasy haçanda $\frac{1}{h}=h$ bolanda, ýagny $h=1$ bolanda kabul edýändigi aýdyňdyr. Iň kiçi $d_1=\sqrt{2}$ baha trapesiýa deňýanly bolanda eýe bolýar.



**565.** $a_i=\pm1$ ($i=1, 2, ..., n$), onda $a_{ik}=\pm1$ ($i, k=1, 2, ..., n$). $(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot(a_3a_4)...(a_na_1)$ köpeltmek hasylyna garalyň. $(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot(a_3a_4)...(a_na_1)=\pm1$ bolýandygy aýdyňdyr, ýöne $(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot(a_3a_4)...(a_na_1)=(a_1a_2...a_n)^2\geq0$, diýmek, $(a_1a_2)...(a_na_1)=1$, şoňa görä-de, $n$ köpeldijileriň arasyndaky otrisatel köpeldijileriň $m$ sany ($(a_1a_2)$ we ş.m.) jübüt sany bolýar. Diýmek, $m=2k$. Ýöne $a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1=0$, onda položitel goşulyjylaryň sany otrisatelleriniň sanyna deňdir, bu ýerden $n=2m=4k$, ýagny $n$ san 4-e bölünýär.

**566.** Goý, trapesiýanyň esaslary $a$, $b$, beýikligi $h$ bolsun. Üçburçluklaryň beýiklikleri $h_1$, $h_2$ bolsun. Onda $h=h_1+h_2$, $S_1=\frac{ah_1}{2}$, $S_2=\frac{bh_2}{2}$, trapesiýanyň meýdany

$S_{trap}=\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2}$ bolar. $\Delta AOD\sim\Delta BOC$, bu ýerden

$\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$ alarys. Onda $\frac{a+b}{b}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}$ we

$\frac{h_1+h_2}{h_2}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}$ bolýar. Şoňa görä-de,

$\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{bh_2}=\frac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}{S_2}$. Ýöne $bh_2=2S_2$, bu ýerden

$\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ gelip çykýar.

**567.** Matematiki induksiýa usuly bilen subut edeliň. $n=2$ bolanda $1+\frac{1}{2^2}>\frac{3\cdot2}{2\cdot2+1}$, $\frac{5}{4}>\frac{6}{5}$ dogry. Goý, $n=k$ bolanda

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}>\frac{3k}{2k+1}$ deňsizlik dogry bolsun.

$n=k+1$ bolanda deňsizligiň adalatlydygyny görkezeliň:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}=$$

$$=\frac{3k(k+1)^2+2k+1}{(k+1)^2(2k+1)}>\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1}.$$

Bu deňsizligi ýönekeýleşdirip, $k^2>0$ aýdyň deňsizligi alarys.

## 2002-nji ýyida Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 8-nji synp

**568.** Goý, $x_1$ we $x_2$ sanlar $x^2+px+q$ üçagzanyň bitin kökleri bolsun. Onda $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$. Bu ýerden $2002=p+q=$ $=(x_1-1)(x_2-1)-1$, ýagny $(x_1-1)(x_2-1)=2003$. 2003 ýönekeý sandyr, ony iki bitin sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak bolar: $2003=1\cdot2003=(-1)\cdot(-2003)$. Birinji ýagdaýda üçagzanyň kökleri 2 we 2004 sanlar bolar ($x^2-2006x+2008$), ikinji ýagdaýda 0 we $-2002$ sanlar bolar ($x^2+2002x$ üçagza).

**Jogaby:** Iki üçagza: $x^2-2006x+2008$ we $x^2-2002x$.

**569.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}=\frac{2}{5}$; $\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{19}{20}=\frac{1}{2}$;

$\frac{20}{21}\cdot\frac{21}{22}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{5}$; $\frac{100}{101}\cdot\frac{101}{102}\cdot\ldots\cdot\frac{199}{200}=\frac{1}{2}$ we

$\frac{200}{201}\cdot\frac{201}{202}\cdot\ldots\cdot\frac{999}{1000}=\frac{1}{5}$ bolýandygyny nazara alyp,

soňra bolsa $\frac{1}{2}$ we $\frac{3}{4}$ droblaryň yzyndaky ýyldyzjyklary «+»

bilen, $\frac{9}{10}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{99}{100}$ we $\frac{199}{200}$ yzyndakylary bolsa «–» bilen

çalşyryp, galan ýyldyzjyklary bolsa köpeltmek bilen çalşyryp, nola deň bolan aňlatmany alarys ýagny
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=0.$

**570.** $a^2+b^2+c^2=p$; $ab+bc+ac=q$, $a^3+b^3+c^3-3abc=m$ bilen belgiläp, aşakdaky aňlatmalaryň ýerine ýetirýändiklerini göz ýetirmek kyn däldir.

$p-q\geq0$, ýagny $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)\geq0$. Hakykatdan-da, $(a-b)^2\geq0$; $(a-c)^2\geq0$; $(b-c)^2\geq0$. Bu ýerden alarys:

$2(a^2+b^2+c^2)\geq(ab+bc+ac)$ we

$m^2=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)^2=(p+2q)(p-q)^2$. Onda

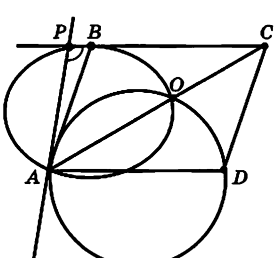
$p^3-m^2=p^3-(p+2q)\cdot(p-q)^2=q^2(3p-2q)=$

$=q^2(2p-2q+P)=2q^2[(p-q)+\frac{p}{2}]\geq0.$

**571.** Ýaryşa $k$ sany gatnaşyjylaryň öz aralarynda oýnan döwleriniň sany $\frac{k(k-1)}{2}$ deňdir. Hakykatdan-da, $k$ gatnaşyjynyň her biri galan her bir $k-1$ gatnaşyjy bilen oýnamalydyr, ýöne $k(k-1)$ köpeltmek hasylda her döw iki gezek hasaba alynýar, çünki oňa iki oýunçy gatnaşýandyr. Ussatlaryň sanyny $m$, grossmeýsterleriň sanyny $g$ bilen belgiläliň, şunlukda, $m+g=n$ bolsun. Iki garşydaşyň arasyndaky oýun nähili gutaranda-da, olaryň ikisiniň toplan oçkolarynyň mukdarynyň jemi netijede, 1 artýar. Diýmek, ussat bilen ussadyň arasynda bolan oýunda toplanan oçkolaryň jemi ussatlaryň arasynda oýnalan döwleriň sanyna deňdir, ýagny $\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(m^2-m)}{2}$. Ussatlaryň her biri öz toplan oçkolarynyň ýarysyny grossmeýsterler bilen oýnanda alandyr, onda grossmeýsterleriň garşysynda oýnanda ussatlaryň toplan umumy oçkolarynyň mukdary hem $\frac{(m^2-m)}{2}$ deň bolar. Grossmeýsterleriň ussatlaryň garşysyna oýnanda toplan umumy oçkolarynyň mukdary $\frac{(g^2-g)}{2}$ deň bolýandygy edil şuňa meňzeş subut edilýär.

Grossmeýsterleriň ussatlaryň garşysyna oýnan döwleriň sany $mg$-ma deňdir. Bu ýerden $\frac{(m^2-m)(2+(g^2-g))}{2}=m$ ýa-da $m^2-2mg+g^2>m+g=n$, ýagny $n=(m-g)^2$-y alarys.

**572.** $A$, $P$, $B$, $O$ nokatlar bir töwerekde ýatýarlar. Şonuň üçin $\angle BPA+\angle BOA=180°$. $AD \parallel BC$, $\angle BPA=\angle DAN$. Bu ýerden $\angle DAN=\angle BPA=180°-\angle BOA=\angle AOD$.




Şeýlelikde, $\angle DAN$ burç $AD$ horda we $AN$ göni çyzygyň arasyndaky duganyň ýarysy bilen ölçenilýär. Bu ýerden $PN$ göni çyzyk $AOD$ nokatlardan geçýän töwerege galtaşýandyr.

**573.** $x_0=2002$ nokatda üçagzanyň bahasyna garalyň. Onda $x_0^2+px_0+q=2002^2+2002p+q=2002^2+143(14p+\frac{1}{143}q)=$ $=2002^2+143\cdot2002=2002(2002+143)=2002\cdot2145$.

Diýmek, ähli üçagzalaryň grafikleri (2002; 2002·2145) nokadyň üstünden geçýärler.

**574.** $n!\cdot(n+2)=n!\cdot(n+1+1)=(n+1)!+n!$ toždestwodan gözlenilýän aňlatma gelip çykýar: $S=2!+1!-3!-2!+4!+3!-5!-4!+...+$ $+2000!+1999!-2001!-2000!+2001!=1$.

**575.** $\cos x=t$ belgilemäni girizip alarys:

$$\frac{1+2t+3t^2+...}{2+6t+12t^2+20t^3+...}=\frac{(t+t^2+t^3+...)'}{(t^2+t^3+t^4+t^5+...)''}=$$

$$=\frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)'}{\left(\frac{t^2}{1-t}\right)''}=\frac{\frac{1}{(1-t)^2}}{\left(\frac{2t(1-t)+t^2}{(1-t)^2}\right)'}=\frac{1}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{\left[\frac{t(2-t)}{(1-t)^2}\right]'}=$$

$$=\frac{1}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{2(1-t)^3+2(1-t)(2-t)t}{(1-t)^4}}=$$

$$=\frac{1-t}{2(1-2t+t^2+2t-t^2)}=\frac{1}{2}(1-t).$$

$t$-niň bahasyny ornuna goýup $\frac{1}{2}(1-\cos x)=\sin^2\frac{x}{2}$ alarys.

**576.** $P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$,

$$Q=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$$

belgileme girizeliň. Onda

$$P-Q=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}=$$

$=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$.

Onda $P=Q$ bolýar. Bu ýerden

$$2P=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^2-ca+c^2)}{c^2+ca+a^2}.$$

Ýöne islendik $a$, $b$ üçin

$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3}$ çünki $3a^2-3ab+3b^2\geq a^2+ab+b^2$,

$2(a-b)^2\geq 0$. Onda $2P\geq\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)$,

$2P\geq\frac{2}{3}(a+b+c)$, $P\geq\frac{a+b+c}{3}$.

## 2003-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi (adaty mekdepler)

### 1-nji gün
### 9-njy synp

**577.** $x=[x]+\alpha\Rightarrow[x]+\alpha+\frac{2003}{[x]+\alpha}=[x]+\frac{2003}{[x]}\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha-\frac{2003\alpha}{[x]([x]+\alpha)}=0.$ $[x]([x]+\alpha)-2003=0;$

a) $[x]>0\Rightarrow[x]=\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+8012}}{2};$

$44<\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+8012}}{2}<45$ bitin çözüwi ýok.

b) $[x]<0\Rightarrow[x]=\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+8012}}{2}$; $-46<[x]<-44$,

$\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+8012}}{2}<-45\Rightarrow\alpha>\frac{22}{45}$.

Jogaby: $[x]=-45$, $\frac{22}{45}\leq\alpha<1$.

**578.** Natural sanlary ýönekeý köpeldijilere dagytmagyň ýeke-täkligi esasynda şeýle $u$, $v$, $w$, $t$ natural sanlar tapylyp, $a=u\cdot v$; $b=w\cdot t$; $c=u\cdot w$, $d=v\cdot t$ deňlikler ýerine ýeter. Şoňa görä--de, $a^{2003}+b^{2003}+c^{2003}+d^{2003}=u^{2003}\cdot v^{2003}+w^{2003}\cdot t^{2003}+u^{2003}\cdot w^{2003}+$

$+v^{2003} \cdot t^{2003} = u^{2003}(v^{2003}+w^{2003})+t^{2003}(w^{2003}+v^{2003})=$
$=(u^{2003}+t^{2003})(v^{2003}+w^{2003})$. Bu san düzme sandyr.

**579.** Üç kwadrat ýaşyl reňkli bölek kesişmeýärler. Diýmek, $D$ şol bölekleriň meýdany bolsalar, onda $3D \le 1+3\cdot 10^{-3}$, $D \le 0,35$.

**580.** $k=1$ bolanda dogry. Goý, $2^k$ üçin dogry bolsun. $2^{k+1}$ üçin dogrudygyny subut edeliň.

$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{2^{k+1}}$;

birinji özgertme: $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_4$, ..., $x_{2^{k+1}} x_1$;

ikinji özgertme: $x_1 x_3$, $x_2 x_4$, $x_4 x_6$, ... .

Görnüşi ýaly, täk nomerler şol düzgün boýunça özgerdilýär. Jübüt nomerler hem şeýle düzgün boýunça özgerdilýär. Olaryň sany $2k$. Diýmek, birnäçe ädimden soň, jübüt nomerler 1-den duryan hatara, täk nomerler hem 1-den duryan hatara öwrülýärler.

## 8-nji synp

**581.** $xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, bu ýerden alarys: $(x^2+y^2+z^2) \ge k(xy+yz+zx)$ (1). Bu deňsizlik aşakdaky deňsizlige deňgüýçlüdir:

$$(x^2+y^2+z^2) \ge k\left[\frac{(x+y+z)^2}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right],$$

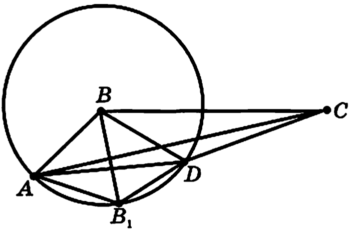
$$(x^2+y^2+z^2)(1+\frac{k}{2}) \ge k\frac{(x+y+z)^2}{2}.$$

(1) deňsizlikde $x=y=z$-i goýup $1 \ge k$ deňsizligi alarys. Eger $z=0$, $x=-y$ goýsak, onda $k \ge -2$-ni alarys. $-2 \le k \le 1$ bolanda $1+\frac{k}{2} \ge 0$ alynýar. Şunlukda, (1) deňsizlik $-2 \le k \le 0$ bolanda ýetýär. $0<k \le 1$ bolanda $(x^2+y^2+z^2)(k+\frac{k}{2}) \ge k\frac{(x+y+z)^2}{2}$ gowşak deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň bilen birlikde (1) deňsizlik hem ýerine ýetýär. Jogaby: $-2 \le k \le 1$.

**582.** $B$ we $B_1$ nokatlar $AC$ göni çyzyga görä simmetrikdir, şoňa görä $ABB_1$ deňtaraply üçburçlukdyr. $A$, $B_1$, $D$

nokatlaryň üstünden merkezi $B$ nokatda bolan töwerek geçireliň.

$\overset{\cup}{AB_1}=60°$. $ADB_1$ burç $AB_1$ duga daýanýar. Onda $\angle ADB_1=30°$ bu ýerden $\angle ADC=150°$ gelip çykýar.




## 2-nji gün
## 9-njy synp

**583.** $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ xy+yz+xz&=1,\\ xyz&=t \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} xy+zy+y^2&=2y,\\ xy+zy+xz&=1,\\ y&=\frac{t}{xz} \end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$\Rightarrow t=y^3-2y^2+y\Rightarrow t_{max}=\frac{1}{8}$, bu ýerde $0<y<2$.

**584.** $AC\cdot BD=AB\cdot DC+BC\cdot AD=180$, $S_{ABCD}=90\Rightarrow AC\perp BD$.
$AC=MA+MC$, $BD=BM+MD$.
$AC=5\cos\alpha+14\cos\beta$, $BD=5\sin\alpha+14\sin\beta$.
$AC\cdot BD=(5\cos\alpha+14\cos\beta)(5\sin\alpha+14\sin\beta)=180$.

$$\left.\begin{aligned} 5^2&=MA^2+MB^2,\\ 10^2&=MA^2+MD^2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow 5^2-10^2=(MB-MD)(MB+MD).$$

$$\left.\begin{aligned} 14^2&=MC^2+MD^2,\\ 10^2&=MA^2+MD^2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow 14^2-10^2=(MC-MA)(MC+MA).$$

$(5^2-10^2)(14^2-10^2)=(MC-MA)(MB-MD)(MB+MD)(MC+MA)$,
$(5^2-10^2)(14^2-10^2)=(MC-MA)(MB-MD)\cdot 180$,
$-40=(MC-MA)(MB-MD)$,

$$-\begin{cases}(5\cos\alpha+14\cos\beta)(5\sin\alpha+14\sin\beta)=180,\\(5\cos\alpha-14\cos\beta)(5\sin\alpha-14\sin\beta)=40\end{cases}$$

$180\sin(\alpha+\beta)=140$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}$.

**585.** $S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$, $a_k=S_k-S_{k-1}$;

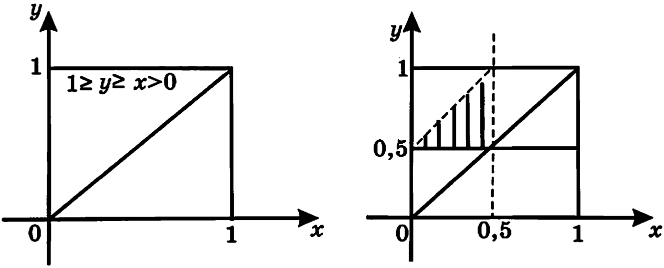
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1+\sum_{i=2}^{n} a_i b_i = a_1b_1+\sum_{i=2}^{n} b_i(S_i-S_{i-1})=$$

$$=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n} b_iS_i-\sum_{i=2}^{n} b_iS_{i-1}=\sum_{i=1}^{n} b_iS_i-\sum_{i=1}^{n} b_{i+1}S_i=\sum_{i=1}^{n} S_i(b_i-b_{i+1});$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |S_i|(b_i-b_{i+1}) \le |S_k|\left|\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i-1})\right| = |S_k|(b_i-b_{i-1}) \le |S_k|,$$

bu ýerde $|S_k|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|S_i|$.

**586.** $0\le x\le y\le 1$.




$AB=x$; $AC=y-x$; $CD=1-y$. Üçburçlugy gurup bolmagy üçin şertler:

$$\left.\begin{matrix} x+y-x>1-y,\ y-x+(1-y)>x \\ x+1-y>y-x \end{matrix}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 2y>1, \\ 2x<1, \\ 2y-2x<1 \end{cases}\Longrightarrow S=\frac{1}{8}.$$

**587.** Goý, $C_1$, $C_2$, ..., $C_u$ – töwerek boýunça ýazylan berlen sanlar.

$f_1=C_1C_2C_3$, $f_2=C_2C_3C_4$, ..., $f_u=C_{50}C_1C_2$-ni goýalyň. Her bir $C_i$ san +1 ýa-da −1-e deňdir, onda $C_i^2=1$. Şoňa görä-de, $C_1C_2...C_{50}=f_1f_2...f_{50}$. 50 soragy berip we $f_1$, $f_2$, ..., $f_u$ köpeltmek hasyllarynyň her birini bilip, biz berlen $C_1$, $C_2$...$C_{50}$ sanlaryň köpeltmek hasylyny hasaplap bileris. Az soragyň kömegi bilen $C_1$, $C_2$...$C_{50}$ köpeltmek hasylynyň alamatyny kesgitläp bolmaýandygyny görkezeliň. Goý, iň bolmanda bir $f_1=C_1C_2C_3$ köpeltmek hasyly näbelli bolsun.

+1, +1, +1, +1, +1, +1, ..., +1.

+1, –1, +1, –1, –1, +1, ..., –1.

Iki ýygyndyny deňeşdireliň. Birinji ýygyndyda hemme sanlar +1-e deň. Ikinji ýygyndyda $C_1$, $C_3$, $C_6$, $C_9$, ..., $C_{48}$ sanlar +1-e deň, $C_2$, $C_4$, $C_5$, $C_7$, $C_8$, ..., $C_{49}$, $C_{50}$ sanlar –1-e deň. Iki ýygyndyda-da $f_1=f_3=...=f_{50}=+1$, ýagny hemme berlen soraglaryň jogaplary bir, ýöne birinji ýygyndydaky hemme $C_1$, $C_2$...$C_{50}$ sanlaryň köpeltmek hasyly +1-e deň, ikinji ýygyndydaky bolsa –1-e deň. Diýmek, meseläniň çözüwini almak üçin iň az soraglaryň sany 50 bolmalydyr.

## 8-nji synp

**588.** 1001 san 11-e bölünýär. Şol sebäbe görä 1, 2, ..., 2003 sanlaryň jeminiň 11-e bölünendäki galyndysy, şol sanlaryň 1001 sansyz jeminiň 11-e bölünendäki galyndysyna deň. Ol galyndy 2-ä deň. Beýleki tarapdan islendik göçümden soň galan sanlaryň jeminiň galyndysy hem 2-ä deň.

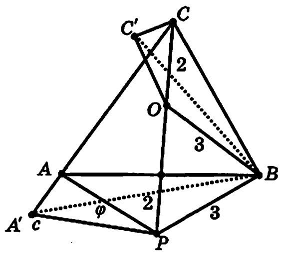
Jogaby: 2.

**589.** Eger $\alpha+\beta=a$ – const bolsa,

onda $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\alpha\sin(a-\alpha)$ funksiýa maksimuma $\alpha=\frac{a}{2}$, $\beta=\frac{a}{2}$ bolanda eýe bolýar. Şoňa görä-de,

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2}$ maksimuma $\alpha=\beta=\gamma=60°$ bolanda eýe bolýar, ýagny $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

**590.** 1) $B$ nokat fiksirlenen diýmäge hakymyz bar. Diýmek, hemme üçburçluklar $A$ nokady $P$ nokadyň töwereginde $r=2$ radiusly töwerek boýunça aýlanmagyndan alynýarlar.




2) $BC$ taraply $BOC$ ($BO=3$, $OC=2$) üçburçluk guralyň. $C$ nokady $O$ nokat, $A$ nokady $P$ nokat ($r=2$) töwerek boýunça $\varphi$ burça aýlalyň.

$\angle CBC'=\angle ABB'$; $BC'=BA'$.

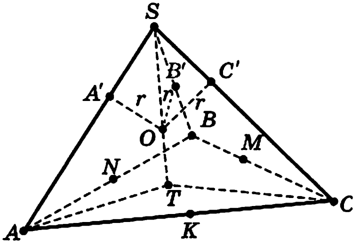
$\angle C'BA'=60° \Rightarrow A'C'B$ deňtaraply.

$\Delta POB$ deňtaraply ($\angle PBO=60°$; $BO=PB=3$), onda bu ýerden $PO=3$-i alarys. Diýmek, $PC \le PO+OC=5$.

$P$, $O$, $C$ nokatlar bir göni çyzykda $P$, $O$, $C$ tertipde ýatanlarynda $PC=5$ bolýar.

**591.** $A'$, $B'$, $C'$, $M$, $N$, $K$ – galtaşma nokatlary,

$$\left.\begin{array}{l} SA' = SB' = SC',\ BN = BM = BB', \\ AK = AN = AA',\ CM = CK = CC' \end{array}\right\} \quad (1)$$




$\Delta SA'O=\Delta SB'O=\Delta SC'O$ (tarapy boýunça). Onda bu ýerden alarys: $\angle A'SO=\angle B'SO=\angle C'SO$; $\Delta AST=\Delta BST=\Delta ACS$ (tarapy we burçy boýunça) $\Rightarrow SA=SB=SC\Rightarrow$ $\Rightarrow AA'=BB'=CC'$ (2).

(1) we (2) deňliklerden $AC=AB=BC$ gelip çykýar.

## Ýöriteleşdirilen mekdepler

### 1-nji gün
### 9-njy synp

**592.** $y=0$, onda $f(0)=0$ bolýar. $y=1$ bolsa $f(x+1)=f(x)+2f^2$ (1) deňligi alarys.

Goý, $x=0$ bolsun, onda $f(1)=f(0)+2f^2(1)$ bolar, bu ýerden $f(1)=\frac{1}{2}$-i alarys.

$f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=f(1)+2f^2(1)=1$, $f(3)=\frac{2}{3}$, $f(4)=2$,

$f(5)=\frac{5}{2}$, $f(6)=3$, $f(7)=\frac{2}{7}$ we ş.m. $f(2003)=\frac{2003}{2}$ bolar.

**593.** $2^b+2^c+2^d+2^e=2^{10}-2^a$, $2^b\cdot 2^c\cdot 2^d\cdot 2^e=2^{37-a}$;

$$\frac{2b+2c+2d+2e}{4}\ge\sqrt[4]{2b\cdot 2c\cdot 2d\cdot 2e}=2^{\frac{37-a}{4}}$$

$$2^{\frac{37-a}{4}}\le 2^8-2^{a-2}\Longrightarrow 2^8\ge 2^{\frac{37-a}{4}}+2^{a-2}\ge 2\cdot\sqrt{2^{\frac{37-a}{4}}\cdot 2^{a-2}};$$

$$2^7\ge 2^{\frac{37+3a-8}{8}}\Longrightarrow a\le 9$$

**Jogaby:** $a=9$; $b=c=d=e=7$.

**594.** $\angle DAN=\angle A\overset{\cup}{A}N\frac{1}{2}$,

$\angle ADC=\angle DAE+EAF$,

$\angle ADC=\angle AEC$; $\angle AEB=\angle EAF$.

$\angle DAE+\angle EAF=$

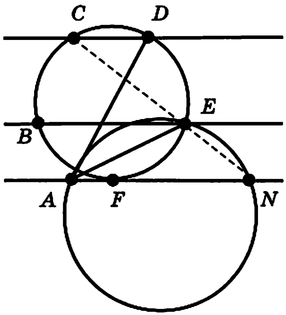
$=\angle AEC=\angle AEB+\angle BEC$.

$\angle DAN=\frac{\overset{\cup}{AE}}{2}+\frac{\overset{\cup}{EN}}{2}+\angle EAF$,

$\angle DAE+\angle EAF=\frac{\overset{\cup}{AE}}{2}+\angle EAF$,

$\angle DAE=\frac{\overset{\cup}{AE}}{2}=\angle ENF$.

$\angle ENF=\angle BEF$.




**595.**

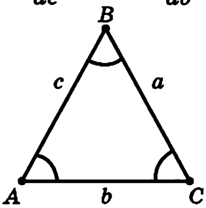
$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\sin A=\frac{2S}{bc}$, $\sin B=\frac{2S}{ac}$, $\sin C=\frac{2S}{ab}$,

ctg$A$+ctg$B$+ctg$C$=

$=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}+$

$+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\frac{5S}{4}=\frac{5}{4}$.



**596.** $a_1, a_2, \ldots$ . Goý, $a_0+n_0d=m^2$, $n_0$, $m\in N$, $a_0+nd=s^2$, $n$, $s\in N$ hasap edip, $n$-i tapalyň.

$nd=s^2-a_0=s^2-m^2+n_0d \Rightarrow n=n_0+\frac{s^2-m^2}{d}=$

$=n_0+\frac{(s-m)(s+m)}{d}$, $s-m=rd$, islendik $r$-i alalyň.

Onda $n=r(m+rd+m)+n_0$ bolar.

Hakykatdan-da,

$a_{r(n_0+2m+rd)}=a_0+r(m+n_0+rd+m)d=a_0+n_0d+2mrd+r^2d^2=$

$=m^2+2mrd+(rd)^2=(m+rd)^2$.

Bu ýerde $d$ – bitin san.

## 8-nji synp

**597.** $a^2+b^2\geq 2bc$; $c^2+d^2\geq 2cd$;

$(2bc+2cd)+(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)\geq 4\sqrt{abcd}+2+2=10.$

**598.** $A=20022002\cdot(200320030000+2003)$,

$B=20032003\cdot(200220020000+2002)$.

$A-B=2003\cdot 20022002-2002\cdot 20032003=$

$=2003(20020000+2002)-2002(20030000+2003)=$

$=2002\cdot 2002-2002\cdot 2002=0.$

## 2-nji gün
## 9-njy synp

**599.** $y=1$, onda $f(x)=\frac{x+1}{f(x)-1}$ $f(1)\neq 1$ bolýar. Goý $x=1$, $y=1$ bolsun, onda $f(1)=2$ bolýar. Şunlukda, $f(x)=x+1$.

**600.** $\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}=y$.

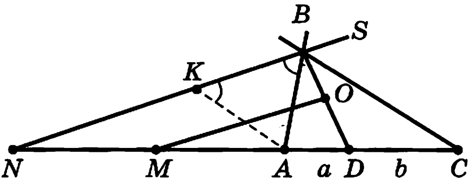
Goý, $x$, $y$ bitin sanlar we $x\neq 0$, $y\neq 0$ bolsun. Köp gezek kwadrata göterýäris:

$\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}=y, \ldots, \sqrt{x+\sqrt{x}}=m$, $\sqrt{x}=k\Rightarrow$

$\Rightarrow x=k^2$; $k<m$, $m=\sqrt{k^2+k}=\sqrt{k(k+1)}$; $k^2<m^2<k(k+1)<(k+1)^2$, $k<m<k+1$.

Diýmek, $m$ bitin däl, bu ýerden $x=0$; $y=0$ gelip çykýar.

**601.**




$KA \| BC$ geçireliň. $\angle AKB = \angle ABK$. $\angle ABK = \frac{\angle A + \angle C}{2}$.
$\angle AKB = \angle SBC = \frac{\angle A + \angle C}{2}$, bu ýerden $KA = AB$.

$\frac{NA}{NC} = \frac{KA}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$ (bissektrisanyň häsiýeti esasynda).

Onda $\frac{NA}{NA + a + b} = \frac{a}{b}$. Bu ýerden $NA = \frac{a(a+b)}{b-a}$.

$NB \| MO$ ($\angle NBD = \frac{\angle A + \angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90°$). $BO = OD$ bu

ýerden $NM = MD$; $NA - MA = a + MA \Rightarrow NA = a + 2MA$,

$MD = MA + a = \frac{NA - a}{2} + a = \frac{NA + a}{2} = \frac{ab}{b-a}$.

**602.** $a_1^2 \le a_1 - a_2 \Rightarrow a_1^2 < a_1 \Rightarrow a_1 < 1 \Rightarrow a_1 < \frac{1}{1}$; $a_1 - a_1^2 \ge a_2$;

$-\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ge a_2 \Rightarrow a_2 \le \frac{1}{4}$; $a_2 < \frac{1}{2}$.

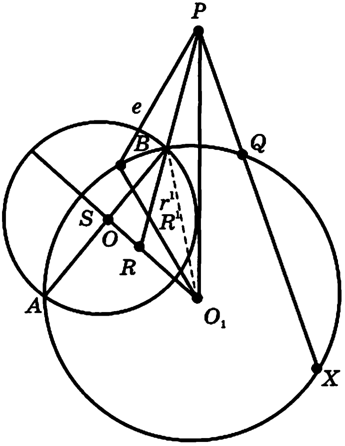
Tassyklama $n=1$, $n=2$ dogry. Goý, $n=k$ üçin dogry bolsun.
$a_k < \frac{1}{k}$; $a_k < \frac{1}{2}$, $n=1, 2, \ldots, k$.

$a_{k+1} = a_k - a_k^2$; $f(x) = x - x^2$, $0 \le x < \frac{1}{2}$ monoton ösýär.
Bu ýerden

$a_{k+1} = f(a_k) < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$; $\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k+1} \Rightarrow a_{k+1} < \frac{1}{k}$.

**603.** $PQ \cdot PX = e^2$, $e^2$ – tapmaly. $e^2 + R^2 = O_1P^2 = PS^2 + SO_1^2$.
$PS^2 = PO^2 - OS^2$, $r^2 - os^2 = R^2 - SO_1^2$. $e^2 + R^2 = PO^2$. $OS^2 + SO_1^2 =$
$= PO^2 + B^2 - r^2$, $e^2 = PO^2 + r^2$ – *const*.

Bu ýerden $X$-fiksirlenendigi gelip çykýar.




## 8-nji synp

**604.** $$\left.\begin{aligned} KU + 2 &= ds \\ KV + 3 &= d \end{aligned}\right| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3KU + 6 &= d3s \\ 2KV + 6 &= d2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (34 - 2V)K = d(3s - 2).$$

$(K, d)=1$ şeýle bolmasa, $k$ we $d$ sanlar 2 we 3 sanlaryň bölüjileri bolardy.

$3U-2V=dm$, ýagny hemme bölüjiler $3U-2V$ sanyň bölüjileri bolýar.

K$=3U-2V$ $(3U-2V\neq0)$ goýalyň. Onda

$$\left.\begin{aligned} (3U - 2V)U + 2 &= d_1 s_1 \\ (3U - 2V)V + 3 &= d_1 r_1 \end{aligned}\right\}.$$ $3U-2V$ sanyň $d_1$ bölüjisi bolýar.

Bu mümkin däldir. Şunlukda, $3U-2V=0$.

**605.** $(ab+ac+bc)(a+b+c)=a^2b+b^2a+a^2c+ac^2+b^2c+$
$+bc^2+3ab=(a^2b+ac^2+b^2c)+(b^2a+a^2c+bc^2)+3abc\geq$
$\geq 3\sqrt{a^2b\cdot ac^2\cdot b^2c}+3\sqrt{b^2a\cdot a^2c\cdot bc^2}+3abc\geq 9abc,$
$(ab+ac+bc)p\geq 9abc.$

$$2)\ 27s^2 = 27\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right) \le$$

$$\le 27\frac{P}{2}\cdot\left(\frac{\left(\frac{P}{2}-a\right)+\left(\frac{P}{2}-b\right)+\left(\frac{P}{2}-c\right)}{3}\right)^3 = \frac{27}{2}P\left(\frac{P}{6}\right)^3 = p^4\cdot\frac{1}{16};$$

$$27s^2 \le \frac{P^4}{16};\ P^2 \ge 12\sqrt{3S}.$$

## 2004-nji ýylda matematikadan Döwlet olimpiadasynda hödürlenen meseleleriň çözülişi (adaty mekdepler)

### 8-nji synp (2-nji gün)

**606.** $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \frac{8}{9} > \frac{7}{8}, \dots, \frac{98}{99} > \frac{97}{98}, \frac{100}{101} > \frac{99}{100}$ deňsizliklerden.

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{99}{100}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101} = \frac{1}{101}$-i alarys. Bu ýerden bolsa $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{99}{100} < \frac{100}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$-i alarys.

**607.** $x^{x^{x^x}}>0$, $y^{x^x}>0$, $-74<0$ bolany üçin $19-y^x>0$. Eger $y=1$ diýsek, onda $x^{x^{x^x}}=(19-1)\cdot1-74<0$ bolar, bu bolsa mümkin däldir. Diýmek, $y>1$. Onda $x\le4$ bolar, tersine bolanda $y^x>19$ bolar. $x=1$ bolanda $1=(19-y)\cdot y-74=19y-y^2-74$ ýagny $y^2-19y+75=0$-y alarys. Bu ýerden $y=\frac{19+\sqrt{61}}{2}$ alnar, bu bolsa mümkin däldir. Şeýlelikde, aşakdaky jübütleri alarys:

1) $x=y=2$. 2) $x=3$; $y=2$. 3)$x=4$; $y=2$. 4) $x=2$; $y=3$.

Bulary ornuna goýup, $x=2$; $y=3$ çözüwi taparys.

**608.** Hemme $i\ge0$ üçin $x_1^i+x_2^i$ we $x_1^{i+1}+x_2^{i+1}$ sanlaryň bitin we özara ýönekeýdigini induksiýa bilen subut edeliň. $i=0$. Onda $x_1^0+x_2^0=1+1+2$, $x_1+x_2=-a$ (Wiýet teoremasy boýunça). $i=k$ üçin $x_1^k+x_2^k$ we $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ bitin we özara ýönekeý bolsunlar.

$$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}=(x_1+x_2)(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-x_1x_2(x_1^k+x_2^k).$$

Wiýet teoremasy boýunça $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ bolar.

Onda $x_1^{k+2}+x_2^{k+2}=-a(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})+x_1^k+x_2^k$ alarys. Diýmek, $x_1^{k+2}+x_2^{k+2}$ bitin sandyr. Eger $x_1^{k+2}+x_2^{k+2}$ we $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ sanlar $d>1$ sana bölünýän bolsalar, onda ýokardaky deňlige görä $x_1^k+x_2^k$ san hem $d$ sana bölünýär. Bu bolsa mümkin däldir, sebäbi induksiýanyň şertine görä $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ we $x_1^k+x_2^k$ sanlar özara ýönekeýleşdirler. Şeýlelikde $x_1^{k+2}+x_2^{k+2}$ we $x_1^{k+1}+x_2^{k+2}$ sanlar hem özara ýönekeýleşdiriler. $i$=4 bolanda garalýan mesele alnar.

**609.** Goý, birinji we ikinji töwerekleriň merkezleri degişlilikde, $O_1$ we $O_2$ bolsun. Onda $\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\angle O_2AD=$ $=\frac{1}{2}<AO_2D=\angle ABD=\alpha$ bolar. Şuňa meňzeşlikde $\angle BAD=\angle ACD=\beta$-ny alarys. Bu ýerden $\angle BDA=\angle ADC=\gamma$.

$$|AB|=\frac{|AD|\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha},\quad |AC|=\frac{|AD|\cdot\sin\gamma}{\sin\beta},$$

$$|BD|=\frac{|AD|\cdot\sin\beta}{\sin\alpha},\quad |CD|=\frac{|AD|\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$$

($ABD$ we $ADC$ üçburçluklar üçin sinuslar teoremasy esasynda). Onda $\frac{|AB|^2}{|AC|^2}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{|BD|}{|CD|}$.

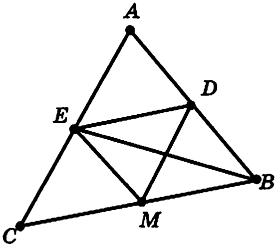
## 9-njy synp (1-nji gün)

**610.** Şerte görä $a+b=-c$ deňdir. Kuba göterip, $(a+b)^3=-c$, ýagny $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$-y alarys. Soňky deňlikde $a+b=-c$ ornuna goýup, $a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3$, ýagny subut etmeli $a^3+b^3+c^3=3abc$ deňligi alarys.

**611.** Goý, $2^{2003}$ san $a$ sanbelgi, $5^{2003}$ bolsa, $b$ sanbelgi bilen ýazylýan bolsunlar. Bu bolsa $10^{a-1}<2^{2003}<10^a$ we $10^{b-1}<5^{2003}<10^b$ aňladýar. Bu ýerden $10^{a+b-2}<2^{2003}.5^{2003}=$ $=10^{2003}10^{a+b}$, ýagny $a+b$=2004-i alarys.

**612.** $2^{3^{100}}+1=(2^{3^{99}})^3+1=(2^{3^{99}}+1)((2^{3^{99}})^2-2^{3^{99}}+1)=$
$=(2^{3^0}+1)((2^{3^0})^2-2^{3^0}+1)((2^{3^1})^2-2^{3^1}+1)\ldots((2^{3^{99}})^2-2^{3^{99}}+1).$

Ýaýlaryň her biri 3-e bölünýär, çünki $p$-niň ähli bahalarynda $2^{3^p}$ san 3-e bölünende 2 galyndy galýar. Ähli ýaýlar 101 sanydyr, şoňa görä-de olaryň köpeltmek hasyly $3^{101}$ sana bölünýär. $k<100\cdot 2^{3^k}+1$ sanyň $3^{101}$ sana bölünmeýändigini belläp geçeliň.




**613.** $S_{ADME}=S_{ADE}+S_{DME}=$ $=S_1+S_{DME}$. $DE$ göni çyzyk $BC$ göni çyzyga paralleldir, şonuň üçin, $B$ nokatdan ($DE$) çenli aralyk $M$ nokatdan ($DE$) çenli aralyga deňdir. Diýmek, $DME$ we $DBE$ üçburçluklaryň beýiklikleri deňdir. Bu üçburçluklaryň $DE$ esaslary hem deňdir. Onda $S_{\Delta DME}=S_{\Delta DBE}$. Şoňa görä-de, $S_{ADME}=S_1+S_{DBE}$. $DE\|BC$. Şunlukda, $ADE$ we $ABC$ üçburçluklar meňzeşdirler we

$$\left|\frac{AB}{AD}\right|=\frac{|AB|+|DB|}{|AD|}=\sqrt{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}}=\sqrt{\frac{S_1}{S}}.$$

Diýmek, $\left|\frac{DB}{AD}\right|=\sqrt{\frac{S_1}{S}}-1$. $S_{\Delta ADE}=|AD|\cdot|DE|\sin\angle ADE=S$,
$S_{\Delta DBE}=|DB|\cdot|DE|\cdot\sin\angle BDE=|DB|\cdot|DE|\cdot\sin(180^0-\angle ADE)=$
$=|DB|\cdot|DE|\cdot\sin\angle ADE$.

Şonuň üçin,
$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta ADE}}=\left|\frac{DB}{AD}\right|=\sqrt{\frac{S}{S_1}}-1$. Şeýlelikde, $S_{\Delta DBE}=\sqrt{S_1S}-S_1$.
Gutarnykly alarys: $S_{ADME}=S_1+\sqrt{S_1S}-S_1=\sqrt{S_1S}$.

## 9-njy synp (2-nji gün)

**614.** $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot99=(50-49)(50-48)(50-47)\cdot\ldots\cdot$
$\cdot(50-1)\cdot50\cdot(50+1)\cdot\ldots\cdot(50+49)=(50^2-49^2)(50^2-48^2)\cdot\ldots\cdot$
$\cdot(50^2-1)\cdot50<50^{99}$.

**615.** $x_1$, $x_2$, $x_3$ sanlaryň biri 2-ä deňdir.Goý, $x_1=2$ bolsun, onda $x_2+x_3=66$, $x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=1121$ bolar. Bu ýerden $132+x_2x_3=1121$, ýagny $x_2x_3=989$-y alarys. $x_1x_2x_3=1978$. Şeýlelikde, $x_1x_2x_3=2004$-i taparys.

## Ýöriteleşdirilen mekdepler

### 8-nji synp (1-nji gün)

**616.** Bar. Mysal üçin, $5\cdot 2^{2000}$ ýa-da $2\cdot 5^{2000}$. Birinji sanyň bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin, 5-e kratny onuň ähli bölüjilerini ýäzalýň: 5, $5\cdot 2$, $5\cdot 2^2$, $5\cdot 2^3$, ..., $5\cdot 2^{2000}$. Olaryň köpeltmek hasyly $5^{2001}$-e bölünýär, emma $5^{2002}$ sana bölünmeýär. Şeýlelikde, $5\cdot 2^{2000}$ sanyň ähli bölüjileriniň köpeltmek hasyly $10^{2001}$ sana kratny bolar we $5\cdot 10^{2001}$ sana kratny bolmaz. Şonuň üçin, ol dogry 2001 nol bilen gutarýar.

**617.** Berlen deňlikleri köpeldip alarys:

$$\frac{1}{2}\sin 6x=ab\sin 2x\cos 4x, \text{ ýagny } \frac{1}{2}(3\sin 2x-4\sin^3 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x(3-4\sin^2 2x)=\frac{1}{2}\sin 2x(1+2\cos 4x)=ab\sin 2x\cos 4x.$$

Indi, eger $\sin 2x=0$ bolsa, onda $\cos 4x=1$ bolar. Bu ýerden $\sin 3x=b$ rasional sandygy gelip çykýar. Eger $\sin 2x\neq 0$ bolsa, onda $\frac{1}{2}+\cos 4x=ab\cos 4x$, $(ab-1)\cos 4x=\frac{1}{2}$.

Berlen deňlik diňe $ab-1\neq 0$ bolanda mümkindir. Onda $\cos 4x=\frac{1}{2(ab-1)}$. Bu ýerden $\sin 3x=\frac{b}{2(ab-1)}$ rasional sandygy gelip çykýar.

### 8-nji synp (2-nji gün)

**618.** Goý, sanyň birinji sanbelgisi $a$, onuň soňky dört sanbelgisinden emele gelen san $b$ bolsun. Şert boýunça, $100000a+b\vdots 41$. Şunlukda, $100000a+b\vdots 41$. Ýöne, $99999a:41$, çünki $99999:41$. Diýmek, $10b+a\vdots 41$. Ýöne $10b+a$ san ilkibaşda birinji sanbelgini soňuna geçirmekden alnan sandyr. Täze sanyň birinji sanbelgisini soňuna geçirip ýene-de 41 sana kratny bolan sany alarys we ş.m. Tegelek ýerleşdirmekden alnan islendik sany şeýle amallaryň birnäçesini geçirmek netijesinde alyp bolýar, onda şeýle ähli sanlar 41 sana bölünýändir.

**619.** Şert boýunça $f(n)=n^2+an+b=m^2$, $f(n+1)=(n+1)^2+a(n+1)+b=(m+1)^2$, bu ýerden $f(n+1)-f(n)=$ $=2n+1+a=2m+1$, ýagny $2n+a=2m$-i alarys. Şunlukda, islendik $k$ sany bitin san üçin $f(n+k)=(n+k)^2+a(n+k)+b=$ $=(n^2+an+b)+2nk+k^2+ak=m^2+k(2n+a)+k^2=m^2+k\cdot 2m+k^2=$ $=(m+k)^2$ deňlik ýerine ýetýär. Tassyklama subut edildi.

**620.** $k$ sany 4-e böleniňde 3 galyndy galýandygyny ýeňil barlamak bolar. Şunlukda, ol dogry kwadrat bolmaýar. Goý, $P_1<P_2<P_3<...<P_n<\sqrt{k}$ bolsun. Onda $k$ bölüjileriň jemi $\sum_{i=1}^{n}\left(p_i+\frac{k}{p_i}\right)$ deň bolýar. $k$ sany 3-e böleniňde 2 galyndy galýar we ony 8-e böleniňde 7 galyndy galýar. $k=p_i\cdot\frac{k}{p_i}$. 3-e we 8-e böleniňde alynýan $p_i$ we $\frac{k}{p_i}$ galyndy sanlara garap, taparys: $p_i+\frac{k}{p_i}\vdots 3$, $p_i+\frac{k}{p_i}\vdots 8$. Diýmek, ähli $i$, $1\le i\le n$ üçin $p_i+\frac{k}{p_i}\vdots 24$. Ýöne onda $\sum\left(p_i+\frac{k}{p_i}\right)\vdots 24$. Şuny subut etmek soralýar.

## 9-njy synp (1-nji gün)
## Çözülişi

**621.** Birinji 83 teňňe alanda. Eger ikinji oýunçy $x$ teňňe alsa, onda birinji oýunçy $101-x$ teňňe almalydyr. $2003=101\cdot 19+83+1$, onda birinjiniň şeýle 19 göçüminden soňra stolda 1 teňňe galýar we ikinji oýunçy göçüm edip bilenok, ýagny ol utulýar.

**622.** $\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right|=\left|\frac{2\cos^2 x-1+3}{\cos x}\right|=$
$= 2\left|\cos x+\frac{1}{\cos x}\right|\ge 2\cdot 2=4.$

## 9-njy synp (2-nji gün)

**623.** Goý, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ sanlaryň iň ulusy $x_1$ bolsun. Onda $x_1 \geq 0$ (çünki $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)\geq 0$).

$x_1+x_2=x_3^2 \geq 0$, onda $|x_1| \geq |x_2|$ we $x_1^2 \geq x_2^2$.

Ýöne, $x_1^2=x_4+x_5 \leq x_1+x_5=x_2^2$, bu ýerden $x_1^2 \geq x_2^2$, $x_1=x_4$. $x_4+x_5=x_1^2 \geq 0$ (bu ýerden $x_4^2 \geq x_5^2$) we $x_5^2=x_2+x_3 \leq x_4+x_3=x_5^2$-i alarys $x_4=x_2$. Şuňa meňzeşlikde $x_2=x_5$ we $x_5=x_3$ bolýandygyny görkezmek bolýar. Onda $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ we bütin ulgam.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \\ x_1 + x_1 = x_1^2 \end{cases}$$

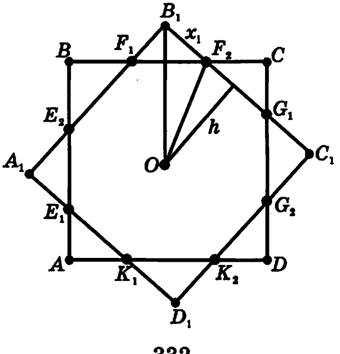
ulgama deňgüýçlüdir, ýagny ähli $x_i$ nola deň ýa-da $x_i$ 2-ä deňdir.

**624.** $\frac{a_i+a_j}{2} \geq \sqrt{a_i+a_j}$, onda

$$\frac{(\sqrt{a_i a_j})^2}{a_i+a_j} \leq \frac{(a_i+a_j)^2}{4(a_i+a_j)} = \frac{a_i+a_j}{2}.$$

Bu ýerden $\sum\limits_{\substack{i,\,j=1 \\ i>j}}^{n} \frac{a_i a_j}{a_i+a_j} \leq \sum\limits_{\substack{i,\,j=1 \\ i>j}}^{n} \frac{a_i+a_j}{4} = \frac{4-1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{4}.$

**625.** $P=AE_1A_1E_2BF_1B_1F_2CG_1C_1G_2DK_1D_1K_2A$ köpburçlugyň 16 depesi bar. Depesi $O$ nokatda bolan we esasy bir zweno bolan 16 üçburçluk bardyr.



Mysal üçin, $B_1F_1=x_i$, beýikligi $\frac{a}{2}$.

$$S_{\Delta OB_iF_i}=\frac{1}{2}x_i\cdot\frac{a}{2}\cdot S(\phi)=\sum_{i=1}^{16}\frac{1}{2}x_i\cdot\frac{9}{2}=\frac{a}{4}\sum_{i=1}^{16}x_i=$$

$$=\frac{a}{4}\cdot P(\phi).\ \frac{S(\phi)}{P(\phi)}=\frac{a}{4}.$$

## 2005-nji ýylda Döwlet olimpiadasynda matematika dersi boýunça berlen meseleleriň çözülişi

### 8-nji synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler (1-nji gün)

**626.** $6n$ jemi düzýän $x\leq y\leq z$ we $x+y+z=6n$ şerti kanagatlandyrýan $(x, y, z)$ möçberini tapalyň. $k=1, 2, ..., n$ her bir bahasynda $x=2k-1$ degişlilikde, $x=2k$ bolan ähli üçlükleri ýazalyň!

$(2k-1;\ 2k-1;\ 6n-4k+2)$ $\quad$ $(2k;\ 2k;\ 6n-4k)$

$(2k-1;\ 2k;\ 6n-4k+1)$ $\quad$ $(2k;\ 2k+1;\ 6n-4k-1)$

we degişlilikde,

$(2k-1;\ 3n-k;\ 3n-k+1)$ $\quad$ $(2k;\ 3n-k;\ 3n-k)$

Şoňa görä-de, ähli ýazylan mukdary

$S_k(3n-k)-(2k-2)+(3n-2)-(2k-1)=6n-6k+3$ deňdir.

Meseläniň şertini kanagatlandyrýan ähli üçlükleriň mukdary $\sum_{k=1}^{k}S_k=\sum_{k-1}^{k}(6n-6k+3)=\frac{(6n-3)+3}{2}\cdot n=3n^2$-a deň bolýar.

**627.** Tablisa seredeliň.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| – | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | – | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | – | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | – | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | – | 0 | 1 | 0 | 1 |

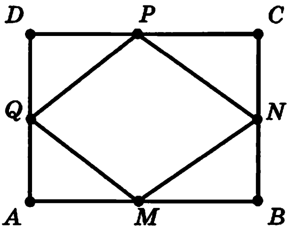
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | – | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | – | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | – | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | – |

**628.** $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$,

$P(Q(x))=(Q(x)-x_1)(Q(x)-x_2)(Q(x)-x_3)$, $Q(x)-x\neq 0$ $(i=1, 2, 3)$ hakyky kökleri ýokdur.

Şoňa görä-de, $x^2+x+2005-x_i=Q(x)-x_i$. $x=2005$ bolanda $D_i=1-4(2005-x_i)<0$; $2005-x_i>\frac{1}{4}$.

$P(2005)=(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)>\frac{1}{64}$.




**629.** Goý, $ABCD$ birlik inedördül, $MNPQ$ bolsa onuň içinde çyzylan dörtburçluk bolsun, bu ýerde $M$ nokat – $AB$ tarapdan, $N$ nokat – $BC$ tarapdan, $P$ nokat – $CD$ tarapdan, $Q$ nokat – $AB$ tarapdan alnandyr. $MNPQ$ dörtburçlugyň her bir tarapy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sandan kiçi diýip güman edeliň.

Onda

$|AM|+|AQ|\leq\sqrt{2(|AM|^2+|AQ|^2)}=\sqrt{2|MQ|^2}<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$

Şuňa meňzeşlikde alarys: $|BM|+|BN|<1$; $|CN|+|CP|<1$; $|PD|+|PQ|<1$.

Bu deňsizlikleri goşup, alarys:

$4=|AB|+|BC|+|CD|+|AD|=|AM|+|BM|+|BN|+|NC|+|PC|+$
$+|PD|+|DQ|+|AQ|=(|AM|+|AQ|)+(|BM|+|BN|)+$

$+(|CN|+|CP|)+(|PD|+|DQ|)<1+1+1+1=4$. Gapma, garşylyk alyndy. Diýmek, $MNPQ$ dörtburçlugyň iň bolmanda bir tarapy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sandan kiçi däldir.

## 9-njy synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler (1-nji gün)

**630.** $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ toždestwa Nýuton binomy ulanyp, alarys:

$$C_{2n}^0+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}=(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n).$$

$x^n$-iň koeffisiýentlerini deňläp we $C_n^k=C_n^{n-k}$, $k=0, 1, \ldots, n$ formulany göz öňünde tutup, $C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2$ gatnaşygy alarys.

**631.** 7 ýa-da 14. 9-njy synp okuwçylarynyň sanyny $x$ bilen belgiläliň we birinji şerti ulanyp, olaryň toplan oçkolarynyň umumy sanynyň $\frac{x(x-1)}{2}+2x-7$ deňdigini görkezip bolýar. Ikinji şertden bolsa 14-üň $x$-a bölünýändigi gelip çykýar.

**632.** Goý, bu deňlemäniň iň kiçi položitel köki $x_1$ bolsun. Onda

$$x_1^n+a_1x_1^{n-1}-a_2x_1^{n-2}-\ldots-a_n=x_1^{n-1}\left(x_1+a_1-\frac{a_2}{x_1}-\ldots-\frac{a_n}{x_1^{n-1}}\right)=0.$$

Goý, $x_2>x_1$ bolsun. Onda

$$x_2^n+a_1x_2^{n-1}-a_2x_2^{n-2}-\ldots-a_n=x_2^{n-1}\left(x_2+a_1-\frac{a_2}{x_2}-\ldots-\frac{a_n}{x_2^{n-1}}\right)>0.$$

$x_1$ bolan ýaý 0-a deňdir we $x_2$ ýaýda položitel agzalar moduly boýunça uly, otrisatel agzalary $x_1$ bolan ýaýdakydan kiçidir.

## 8-nji synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler (2-nji gün)

**633.** Goý, $n$ bitin kök bolsun. $n^2(n^2-p)+q=0$ we $q$ san $n^2$-a bölüner, ýagny $n=-1$; $1-p=3$.

**634.** Deňsizligiň iki böleginde $a>0$ köpeldeliň we ony özgerdip, $-\frac{1}{3}a^3+a(b^2+c^2)-a^2(b+c)-abc>0$ deňgüýçli deňsizligi alarys. $abc=1$ we şunlukda, $b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-\frac{2}{a}$. $b^2+c^2$ jemiň bu bahasyny deňsizlikde goýup alarys:

$$a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0.$$

Bu deňsizlik $b+c$ görä kwadrat deňsizlikdir. Onuň diskriminantyny ýazalyň:

$$D=a^4-4a(\frac{1}{3}a^3-3)=a^4-\frac{4}{3}a^4+12a=a(12-\frac{1}{3}a^3)<0.$$

$a^3>36$, $a>0$, onda $b+c$ islendik bahasynda $a(b+c)^2-a^2(b+c)+\frac{1}{3}a^3-3>0$. Şeýlelikde,

$$\frac{2}{3}a^2<a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac.$$

**635.** Birinji utýar. Birinji oýunçynyň strategiýasyny beýan edeliň. Birinji göçümde ol stoldan 85 teňňäni almalydyr. Soňraky her bir göçümde, eger ikinji $x$ teňňe alýan bolsa, onda birinji $101-x$ teňňe almalydyr. Ol ony elmydama ýerine ýetirip biler, çünki eger $x$ san 2-den 100-e çenli jübüt san bolsa, onda $(101-x)$ san 1-den 99-a çenli täk sandyr. $2005=101\cdot19+85+1$, onda birinji oýunçynyň şeýle 19 «jogabyndan» soňra stolda 1 teňňe galar we ikinji oýunçy göçüm edip bilmez, ýagny utular.

**636.** $p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le$
$\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{p^2}{3}. \qquad (1)$$

Geron formulasy we orta baha baradaky teorema boýunça alarys:

$$27S^2=27\cdot\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\le$$

$$\le 27\cdot\frac{p}{2}\left[\left(\frac{p}{2}-a\right)+\left(\frac{p}{2}-b\right)+\left(\frac{p}{2}-c\right)\right]=27\cdot\frac{p}{2}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^3}{27}=\frac{p^4}{16}\Rightarrow$$

$\Rightarrow p^2\ge12\sqrt{3}\cdot S$ (2). (1) we (2) deňsizliklerden alarys:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{p^2}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \cdot S = 4\sqrt{3}S.$$

## 9-njy synp adaty we ýöriteleşdirilen mekdepler (2-nji gün)

**637.** 117 sandan $C_{117}^2 = \frac{117 \cdot 116}{2}$=6786 jübüt san düzüp bolýar. Her jübütdäki sanlaryň jemi 201 we 1997 sanlaryň arasynda ýatýar (1798 wariantda). $\frac{6786}{1798} > 3$, şunlukda, haýsy hem bolsa bir dört jübüdiň jemi gabat gelýär. Jemleri gabat gelýän jübütler kesişmeýärler, çünki eger $x+y=x+z$ bolsa, onda $y=z$ we jübütler gabat gelýär.

**638.** Goý, $a$, $b$, $c$ položitel sanlar we $abc$=1. Onda $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z$ hem položitel sanlardyr we $xyz=\frac{1}{abc}=1$. Berlen aňlatma aşakdaky aňlatma ekwiwalentdir:

$$\frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{y^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}+\frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Hakykatdan-da $(U_1, V_1, W_1)$ we $(U_2, V_2, W_2)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly üçin Koşi deňsizliginiň şeýle görnüşi bardyr:

$$(U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2)^2 \leq (U_1^2+V_1^2+W_1^2)(U_2^2+V_2^2+W_2^2).$$

Ony $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ we $(y+z+z+x+x+y)$,

$(x+y+z)^2 \leq 2S(x+y+z)$, ýagny $S \geq \frac{1}{2}(x+y+z)$.

Üç položitel sanyň orta arifmetik we orta geometrik bahasy baradaky deňsizligi ulanyp, alarys.

$$S \geq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}(x+y+z) \geq \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{xyz} = \frac{2}{3}.$$

**639.** Oýny başlaýan utýar. Eger birinji oýunçyny utýan strategiýasy bu oýunda bar bolsa, onda ol ony derrew ulanýar. Eger ýok bolsa, onda ilki başda 1 ýazmaly we soňra ikinji oýunçynyň utýan strategiýasyny ulanmaly.

## PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. – Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap, II tom. – Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2009.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. – Aşgabat, 2007.

4. *Вабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. – Москва. Наука, 1975.

5. *Васильев Н. В.* и др. Заочные математические олимпиады. – Москва. Наука, 1987.

6. *Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь Ф. Л.* Математические соревиования. Арифметика и алгебра. – Москва. Наука, 1970.

7. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад. – Москва. Просвещение, 1971.

8. *Васильев И. В., Егоров А. А.* Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – Москва.: Учпедгиз, 1963.

9. *Васильев Н. В., Савин А. П.* Избраниые задачи математических олимииад. – Москва. МГУ, 1968.

10. Венгерские математическне олимпиады. – Москва. Мнр, 1976.

11. Задачи московских математических олимпиад. Сост. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* – Москва. Просвещение, 1986.

12. *Морозова Е. А., Петраков И. С.* Международные математические олимниады. – Моеква. Просвещеиие, 1971.

13. Сборник задачи московских математических олимппад. Сост. *Леман А. А.* – Москва. Просвещеиие, 1965.

## MAZMUNY

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.