S. Aşyrow, B. S. Aşyrow

DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministirligi tarapyndan hödürlenildi

Türkmen döwlet neşirýat gullugy
Aşgabat – 2012

UOK 378.51
A 78

Aşyrow S., Aşyrow B.
A 78 Differensial deňlemeler. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. –A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

TDNG № 194, 2012 KBK 22.1 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ
DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

Türkmenistanyň Prezidenti hormatly Gurbanguly Berdimuhamedow Berkarar döwletimiziň bagtyýarlyk döwründe ýurdumyzyň ykdysadyýetini dünýä ülňüleriniň derejesinde döwrebap kämilleşdirmäge gönükdirilen düýpli özgertmeleri giňden ýaýbaňlandyrdy. Bu wajyp wezipäni amal etmegiň esasy çözgüdini hormatly Prezidentimiz dünýäniň iň öňdebaryjy tehnikalaryny we innowasion tehnologiýalaryny ýurdumyzyň ykdysadyýetine düýpli ornaşdyryp, özgertmeleri ylmy esasda alyp barmakda görýär. Bu işleriň uly rowaçlyk bilen öňe gitmeginde ylmyň ähli ugurlary bilen deň hatarda matematikanyň hem öz mynasyp orny bar. Ol ykdysady özgertmeleriň matematiki modellerini işläp düzmekde uly ähmiýete eýedir.

Differensial deňlemeler okuw meýilnamasy boýunça öwrenilýän esasy dersiň biridir. Bu dersi öwrenmek üçin her bir talyp matematiki analiz, algebra hem-de analitik geometriýa derslerinde geçilen materiallary bilmelidir.

Differensial deňlemeler wariasion hasaplamalarda, optimal dolandyrmalarda, nazary mehanikada giňden ulanylýar. Fizikanyň, tehnikanyň, himiýanyň, biologiýanyň, ykdysadyýetiň we lukmançylygyň ençeme meseleleri differensial deňlemeleri çözmeklige getirilýär.

Differensial deňlemeler öwrenilip başlaly bäri iki asyrdan gowrak wagt geçdi. Wagtyň geçmegi bilen olaryň nazaryýeti ösdi. Bu ugurda saldamly ylmy netijeler alyndy. Differensial deňlemeler nazaryýetiniň ösmeginde rus alymlarynyň uly goşandy bardyr. Ozalky SSSR YA-synyň akademikleri I.G. Petrowskiý, L.S. Pontrýagin, M.A. Lawrentew, A.N. Tihonow, M.W. Keldyş we başgalar özleriniň nazaryýetlerini döretdiler. Bu alymlar differensial deňlemeler nazaryýetini ösdürmek bilen çäklenmän, alymlary taýýarlamakda-da uly işler bitirdiler.

Differensial deňlemeler nazaryýeti boýunça Garaşsyz, baky Bitarap Türkmenistanda hem uly işler alnyp barylýar. Türkmen alymlary tarapyndan bu ugurda köp sanly ylmy makalalar we monografiýalar çap edildi. Berkarar döwletimiziň bagtyýarlyk döwürde türkmen alymlary ýokary okuw mekdepleri üçin döwrüň talaplaryna laýyk gelýän milli dilde täze okuw kitaplaryny we gollanmalaryny ýazmak ýaly işleri amala aşyrýarlar.

Okuw kitaby sekiz bapdan ybarat. Birinji bapda birinji tertipli ady differensial deňlemeleri çözmekligiň usullary getirilýär. Çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasynyň subudy berilýär. Integral deňsizlikler arkaly çözüwleriň häsiýetleri öwrenilýär.

Ikinji bapda önüme görä çözülmedik deňlemelere garalýar we olary çözmekligiň usullary berilýär.

Üçünji bapda ýokary tertipli ady differensial deňlemeler nazaryýetiniň esaslary beýan edilýär, umumy görnüşdäki deňlemä we onuň tertiplerini kemeldip bolýan görnüşlerine garalýar.

Dördünji bapda üýtgeýän we hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeler öwrenilýär. Olary çözmekligiň usullary beýan edilýär.

Bäşinji bapda ikinji tertipli çyzykly deňlemeler nazaryýetiniň käbir meselelerine garalýar. Deňlemeleriň ikiagzaly görnüşe getiriliş usullary, çözüwleriň nollary baradaky teoremalar, gyra meselesi üçin Grin funksiýasy beýan edilýär.

Altynjy bapda birinji tertipli differensial deňlemeler sistemasynyň çözüwiniň barlygy we ýeke-täkligi baradaky teorema berilýär we sistemanyň çözüwiniň häsiýetleri integral deňsizlikler arkaly derňelýär. Üýtgeýän we hemişelik koeffisiýentli çyzykly sistemalary çözmekligiň usullary beýan edilýär.

Ỳedinji bapda sistemanyň çözüwiniň durnuklylygynyň derňelişiniň usullaryna garalýar. Wagta bagly bolmadyk iki deňlemeli sistemanyň çözüwiniň (traýektoriýasynyň) asuda nokadynyň etrabyndaky ýagdaýy öwrenilýär.

Sekizinji bapda birinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeler öwrenilýär hem-de olary çözmekligiň usullary berilýär.

Kitapda beýan edilen nazary materiallar degişli mysallar we meseleler bilen berkidilýär hem-de özbaşdak çözmek üçin gönükmeler hödürlenilýär.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň fizika we matematika fakultetleriniň talyplaryna niýetlenendir. Ondan beýleki ýokary okuw mekdepleriniň talyplary hem peýdalanyp bilerler.

I bap

ÖNÜME GÖRÄ ÇÖZÜLEN DEŇLEMELER

§1. Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

Differensial deňlemä getirilýän meselä matematiki analiz dersinde duş gelindi. Ol funksiýanyň berlen önümi boýunça onuň özüni tapmak meselesi. Ol meselede durup geçeliň.

Goý, $f(x)$ käbir $y = y(x)$ funksiýanyň önümi bolsun. Meseläniň şertine görä $y(x)$ gözlenilýän funksiýa. Onda

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

bolar. Bu gatnaşyga differensial deňleme diýilýär. Ol differensial deňlemäniň ýönekeý görnüşidir. Gözlenilýän y funksiýany tapmak üçin (1) deňlemäni

$$dy = f(x)dx$$

görnüşde ýazalyň. Bu deňligiň iki böleginden hem integral alsak,

$$y = \int f(x)\,dx + C \tag{2}$$

bolar, bu ýerde C- erkin hemişelik san. (2) funksiýany (1) deňlemede y-iň ornunda goýsak, onda $f(x) \equiv f(x)$ toždestwony alarys. Şeýle ýagdaýda (2) funksiýa (1) deňlemäni kanagatlandyrýar diýilýär. Ol funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi diýilýär. Görnüşi ýaly, (2) funksiýa çözüwleriň tükeniksiz köplügini düzýär, sebäbi ol erkin hemişelik sany özünde saklaýar. Bu çözüwe (1) deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär. Eger C-e kesgitli san bahalary bersek, onda (1) deňlemäniň dürli çözüwlerini alarys. Ol çözüwlere (1) deňlemäniň hususy çözüwleri diýilýär.

Differensial deňlemeler iki topara bölünýär. Olaryň biri ady differensial deňlemeler, beýlekisi hususy önümli differensial deňlemeler. Eger differensial deňlemede gözlenilýän funksiýa bir argumentli bolsa, onda oňa ady differensial deňleme diýilýär.

Eger differensial deňlemede gözlenilýän funksiýa köp argumentli bolsa, onda oňa hususy önümli differensial deňleme diýilýär.

Differensial deňlemäniň tertibi ol deňlemedäki gözlenilýän funksiýanyň önümleriniň iň uly tertibi bilen kesgitlenýär.

Indi ýokarda aýdylan düşünjelere takyk kesgitlemeleri bereliň.

Bagly däl üýtgeýän ululygy, gözlenilýän funksiýany we onuň önümini özünde saklaýan deňlemä differensial deňleme diýilýär.

Birinji tertipli ady differensial deňleme umumy görnüşde

$$F\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right] = 0 \tag{3}$$

deňlik bilen berilýär, bu ýerde x–bagly däl üýtgeýän ululyk, y – gözlenilýän funksiýa, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ – gözlenilýän funksiýanyň önümi, F–berlen funksiýa. (3) deňlemä y'-e görä çözülmedik deňleme diýilýär.

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\,[x, y(x)] \tag{4}$$

görnüşde berlen deňlemä y'-e görä çözülen deňleme diýilýär.

Goý, $f(x, y)$ funksiýa D oblastda berlen bolsun.

Eger käbir (a,b) interwalda $y = \varphi(x)$ differensirlenýän funksiýa

1) $(x, \varphi(x)) \in D,\ x \in (a, b)$;

2) $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = f\,[x, \varphi(x)],\ x \in (a, b)$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda $y = \varphi(x)$ funksiýa (4) deňlemäniň (a, b) interwaldaky çözüwi diýilýär.

Ýokarda differensial deňlemäniň hususy haly üçin tapylan (2) çözüwde hemişelik C sanyň bardygyny gördük. Oňa görä-de differensial deňlemäniň (1) görnüşde berlen ýagdaýy üçin umumy çözüwiniň düzüminde C hemişelik sanyň bolmalydygyny görýäris.

Goý,

$$y = \varphi(x, C) \tag{5}$$

funksiýa x boýunça differensirlenýän bolsun, bu ýerde C – erkin hemişelik. Eger $\forall (x, y) \in D$ nokat üçin (5) deňleme C-e görä çözülýän bolsa, ýagny

$$C = \phi(x, y), (x, y) \in D \tag{6}$$

we (5) funksiýa C-niň kesgitli bahasynda (4) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda (5) funksiýa (4) deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

Eger (4) differensial deňlemäniň umumy çözüwi anyk däl, ýagny $\Phi(x, y, C) = 0$ görnüşde tapylan bolsa, onda oňa (4) deňlemäniň umumy integraly diýilýär.

Umumy çözüwden C sanyň her bir kesgitli bahasy üçin alnan çözüwe differensial deňlemäniň hususy çözüwi diýilýär.

Çözüwiň grafigine integral egri diýilýär. Differensial deňlemäniň çözüwini tapmak ýörelgesine differensial deňlemäni integrirleme diýilýär.

Differensial deňlemeler nazaryýetinde Koşi meselesini öwrenmeklik esasy orun tutýar. Şoňa görä-de birinji tertipli differensial deňleme üçin Koşi meselesini kesgitläliň.

Differensial deňlemäniň

$$\mathrm{y}\,(x_0) = y_0 \tag{7}$$

şerti kanagatlandyrýan $y = \varphi(x)$ çözüwini tapmaklyk meselesine Koşi meselesi diýilýär. (7) deňlige başlangyç şert, x_0 we y_0 sanlara bolsa başlangyç bahalar diýilýär. Başgaça aýdylanda, Koşi meselesi berlen deňlemäniň berlen $M\ (x_0, y_0)$ nokatdan geçýän integral egrisini tapmak meselesidir. Şeýlelikde, (4) deňlemäniň (7) şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak üçin C hemişeligiň

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

deňlemeden kesgitlenen bahasyny $y = \varphi(x, C)$ umumy çözüwde ýerinde goýmaly.

1-nji mysal.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

deňlemä garalyň.

Deňlemäni $dy = \cos x dx$ görnüşde ýazalyň. Bu deňligiň iki bölegini hem integrirläp, berlen deňlemäniň $y = \sin x + C$ umumy çözüwini alarys.

Goý, $y(0) = 1$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun. Onda umumy çözüwde başlangyç bahalary goýup, $1 = \sin 0 + C$ aňlatmany alarys. Bu ýerden $C = 1$, $y = \sin x + 1$ funksiýa garalýan deňlemäniň berlen başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

Egriler maşgalasynyň deňlemesi boýunça differensial deňlemäni düzmek bolar. Hakykatdan-da, goý, $\Phi(x, y, C) = 0$ egriler maşgalasynyň deňlemesi bolsun, bu ýerde Φ differensirlenýän funksiýa. Berlen deňligi x boýunça differensirläp,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

deňligi alarys. Eger bu deňlikde C san bolmasa, onda ol gözlenilýän differensial deňleme bolar.

Eger ol deňlikde C san bolsa, onda ýokardaky iki deňlikden C sany (parametri) çykaryp, berlen egriler maşgalasynyň deňlemesi üçin $F(x, y, y') = 0$ differensial deňlemäni alarys.

2-nji mysal. $y = Ce^x$ egriler maşgalasy üçin differensial deňleme düzmeli.

Berlen funksiýany x boýunça differensirläp, $y' = Ce^x$ deňligi alarys. Bu deňlikden C sany çykaryp, önüme görä çözülen $y' = y$ deňlemäni alarys.

3-nji mysal. $y = \sin(x + C)$ egriler maşgalasy üçin differensial deňlemäni düzmeli.

Berlen funksiýany x boýunça differensirläp, $y' = \cos(x + C)$ deňligi alarys. Bu ýerden $y^2 + y'^2 = 1$ differensial deňlemäni alarys. Bu önüme görä çözülmedik deňlemedir.

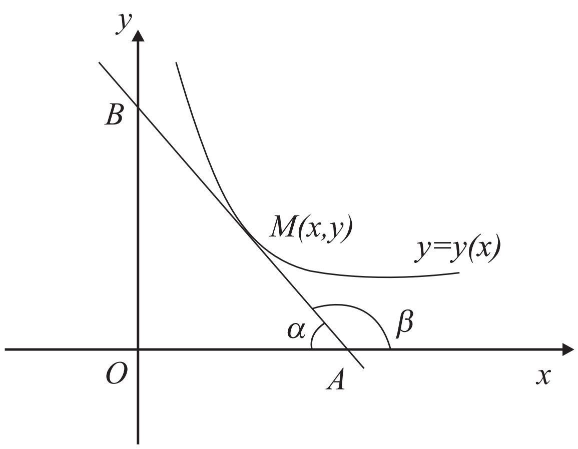
4-nji mysal. $x^2 + Cy^2 = 2y$ egriler maşgalasy üçin differensial deňleme düzmeli.

Berlen funksiýany x boýunça differensirläp, $2x + 2Cyy' = 2y'$ deňligi alarys. Bu ýerden C-ni tapyp we berlen egriler maşgalasynyň deňlemesinde goýup, önüme göra çözülmedik $x^2y' - xy = yy'$ differensial deňlemäni alarys.

Indi differensial deňlemelere getirilýän geometrik we fiziki meselelere garalyň.

1-nji mesele. Galtaşýanyň koordinatalar oklary arasynda çäklenen kesimi galtaşma nokadynda deň ikä bölünýän egrileri tapmaly.

Çözülişi. Goý, $y = y(x)$ gözlenilýän egriniň deňlemesi, $M(x,y)$ – gözlenilýän egriniň erkin galtaşma nokady, $|AB|$ – galtaşýanyň oklar arasyndaky kesimi bolsun. Şerte görä $|BM| = |MA|$.



OBA üçburçlukdan alarys:

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \mathrm{tg}\alpha$$

Bu ýerde $|OB| = 2y$, $|OA| = 2x$, $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\beta = -y'$. Diýmek, $\frac{y}{x} = -y'$. Bu deňlik differensial deňlemedir. Ony

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

ýa-da

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

görnüşde ýazalyň. Soňky deňligiň iki bölegini hem integrirläp, $xy = C$ deňligi alarys. Gözlenilýän egrileriň deňlemesi tapyldy. Meseläniň şertini deňtaraply giperbolalaryň köplügi kanagatlandyrýan eken.

2-nji mesele. Tamdyrdan çykarylan çörek 10 minutda 100 gradusdan 60 gradusa çenli sowady. Howanyň temperaturasy 20 gradus. Näçe wagtdan soň çöregiň temperaturasy 25 gradusa çenli sowar?

Çözülişi. Çöregiň sowama tizligi çörek bilen howanyň temperaturalarynýň tapawudyna proporsionaldyr. Nýutonyň kanunyna laýyklykda, ýagny

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1). \tag{8}$$

Bu ýerde T – çöregiň temperaturasy, k – proporsionallyk koeffisiýenti, T_1 – howanyň temperaturasy, $\frac{dT}{dt}$ – sowama tizligi, t – wagt.

Ýokardaky deňlik differensial deňlemedir. Ol deňlemäni

$$\frac{dT}{T - T_1} = kdt$$

görnüşde ýazalyň. Bu deňligi integrirläp, alarys:

$$\ln|T - T_1| = kt + \ln C,$$

bu ýerden

$$T = T_1 + Ce^{kt} \tag{9}$$

(8) deňlemäniň umumy çözüwi tapyldy. Meseläniň şertine görä $t = 0$ minutda çöregiň temperaturasy $T = 100$ gradus, ýagny $T(0) = 100$. Bu başlangyç şertden peýdalanyp, (9) çözüwden C-niň bahasyny tapalyň: $C = (100 - 20)e^{-0 \cdot k} = 80$.
C-niň tapylan bahasyny (9) deňlikde goýup,

$$T = 20 + 80e^{kt} \tag{10}$$

deňligi alarys.

Meseläniň şertine görä $t = 10$ minutda çöregiň temperaturasy $T = 60$ gradusa geldi, ýagny $T(10) = 60$. Bu bahalary (10) deňlikde goýup,

$$60 = 20 + 80e^{10 \cdot k}$$

deňligi alarys, bu ýerden

$$e^k = 2^{-\frac{1}{10}}.$$

e^k-nyň bahasyny (10)-da goýup,

$$T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}},$$

deňligi alarys. Soňky deňlikde $T = 25$ bolanda, t-niň bahasyny tapalyň.

$$5 = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}, \quad t = 40.$$

Diýmek, tamdyrdan çykarylan çöregiň 100 gradusdan 25 gradusa çenli sowamagy üçin 40 minut wagt gerek eken.

§2. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňlemeler

Eger önüme görä çözülen deňleme

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{1}$$

görnüşde berlen bolsa, onda oňa üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňleme diýilýär. Bu ýerden görnüşi ýaly dx-iň koeffisiýenti diňe x-e görä, dy-iň koeffisiýenti diňe y-e görä funksiýa. $P(x)$ (a, b) interwalda, $Q(y)$ bolsa (c,d) interwalda üznüksiz funksiýalar. (1) deňligi integrirläp,

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \tag{2}$$

deňligi alarys. Bu (1) deňlemäniň umumy integraly bolar. (2) deňligi

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = C \tag{3}$$

görnüşde ýazmak hem bolar.

(1) deňlemäniň $y(x_0) = y_0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0$$
$$(P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0)$$

formula bilen kesgitlenýär. Koşi meselesini çözmek üçin (2) formulany hem peýdalanmak bolar. Onuň üçin integrallary tapyp, x-iň ornuna x_0 - y, y-iň ornuna y_0 - y goýup, $C = C_0$ bahany kesgitlemeli we ony tapylan umumy integralda goýmaly.

Indi

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde P_1, P_2, Q_1, Q_2 üznüksiz funksiýalar.

Deňlemäniň iki bölegini hem $\dfrac{1}{Q_1(x)P_2(y)}$-e köpeldip,

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0,$$
$$Q_1(x)P_2(y) \neq 0$$

(1) görnüşli deňlemäni alarys. Soňra integrirläp,

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = C$$

deňligi alarys. Bu deňlik garalýan deňlemäniň umumy integraly bolar. (4) deňlemäniň hususy görnüşleri bolan

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y), \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

deňlemeleriň üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edip, görkezilen usul bilen olaryň umumy integrallaryny tapmak bolar.

Indi üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňlemelere getirilýän deňlemelere garalyň. Goý,

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

deňleme berlen bolsun, bu ýerde a we b hemişelik sanlar. $ax + by = u(x)$ belgilemäni girizeliň. Onda

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

bolar. Berlen deňleme

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{a}{b} = f(u)$$

görnüşi alar. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl etsek, onda

$$\frac{du}{bf(u)+a} = dx$$

bolar. Bu ýerden

$$\int \frac{du}{bf(u)+a} = x + C$$

Integral tapylandan soň u-nyň ornuna $ax + by$-i goýup, garalýan deňlemäniň umumy integralyny alarys. Eger deňleme

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + C)$$

görnüşde berlen bolsa, onda ony $ax + by + C = u$ belgilemäni girizip, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňlemä getirmek bolar.

1-nji mysal. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäniň iki bölegini hem $\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}$ aňlatma köpeldip,

$$\frac{dx}{(1+x^2)} + \frac{dy}{(1+y^2)} = 0$$

deňlemäni alarys. Bu ýerden

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)} + \int \frac{dy}{(1+y^2)} = C.$$

Deňlemäniň umumy integraly

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$$

görnüşde bolar. Eger C sanyň ýerine arctg$C$ sany alsak, onda umumy integral ýönekeýleşýär. Hakykatdan-da,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C.$$

ýa-da

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C - \operatorname{arctg} x$$

deňligi alarys.

Bu ýerden

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C - \operatorname{arctg} x),$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$$

ýa-da

$$y = \frac{C - x}{1 + Cx}$$

Bu funksiýa berlen deňlemäniň umumy çözüwidir.

2-nji mysal. $\dfrac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$

deňlemäniň $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Indi deňligiň iki bölegini hem integrirläliň:

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + C,$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C,$$

$$\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \text{ýa-da} \qquad y = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Şeýlelikde, deňlemäniň umumy çözüwi alyndy. Berlen başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi tapmak üçin, umumy çözüwde $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$ bahalary goýup, $1 = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$ deňligi alarys.

Bu ýerden $C = 0$. Umumy çözüwde $C = 0$ bahany goýup, talap edilýän çözüwi alýarys. Ol çözüw $y = 1$. Bu çözüw berlen deňlemäniň hususy çözüwidir.

3-nji mysal. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(y - x)$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $y - x = u$ belgilemäni girizeliň. Onda

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1.$$

Berlen deňleme

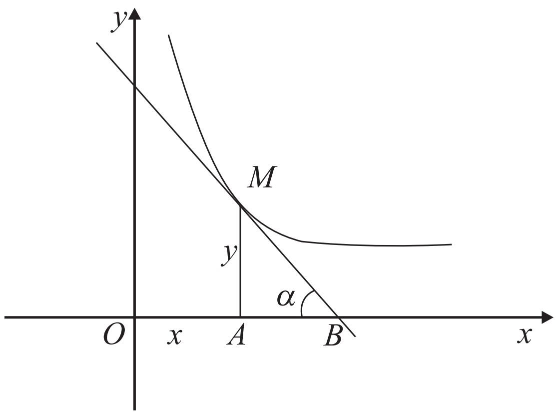
$$\frac{du}{dx} + 1 = \cos u \qquad \text{ýa-da} \qquad -\frac{dy}{1-\cos u} = dx$$

görnüşi alýar. Bu ýerden

$$-\int \frac{du}{1-\cos u} = \int dx + C, \ \operatorname{ctg}\frac{u}{2} = x + C.$$

Soňky deňlikde u-ny $y - x$ bilen çalşyryp, $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C$ berlen deňlemäniň umumy integralyny alarys.

Mesele. Galtaşma astynyň uzynlygy hemişelik a sana deň bolan egrileri tapmaly.



Çözülişi. Şerte görä $|AB| = a$. MAB üçburçlukdan $\operatorname{tg}a = \frac{|MA|}{AB}$ deňligi alarys. Matematiki analiz dersinden $\operatorname{tg}a = -\frac{dy}{dx}$. Onda $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a}$.

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip, ony $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{a}$ görnüşde ýazalyň. Bu ýerden

$$\ln|y| = -\frac{x}{a} + \ln C,$$

ýagny $y = Ce^{-\frac{x}{a}}$. Bu funksiýa garalýan deňlemäniň umumy çözüwi.

Umumy çözüwden görnüşi ýaly, gözlenilýän egri çyzyklar görkezijili funksiýalaryň grafikleridir.

§3. Birjynsly deňlemeler

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

deňlemä garalyň.

Eger $f(x, y)$ nol ölçegli (derejeli) birjynsly funksiýa, ýagny islendik $t \neq 0$ üçin $f(tx, ty) = f(x, y)$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda (1) deňlemä birjynsly deňleme diýilýär.

Goý, $t = \frac{1}{x}$, onda $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ bolar. (1) deňleme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

görnüşi alýar. $\frac{y}{x} = u$ belgilemäni girizeliň. Onda

$$y = ux \tag{3}$$

bolar. Bu ýerde $u = u(x)$ gözlAenilýän funksiýa. (3) deňligi x-e görä differensirläp,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \tag{4}$$

deňligi alarys. (3) we (4) deňlikleri peýdalansak, onda (2) deňleme

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(1,u)$$

görnüşe gelýär. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad f(1,u) - u \neq 0.$$

Bu deňligi integrirläp,

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + C$$

deňligi alýarys. Soňky deňlikde integral tapylandan soň, u-nyň ornuna $\frac{y}{x}$-i goýup, (1) deňlemäniň umumy integralyny alarys. Eger $f(1,u) - u = 0$ bolsa, onda bu deňlemäniň $u = u_i$ köklerini tapýarys. $y_i = u_i x$ funksiýalar (1) deňlemäniň çözüwleri bolar.

Indi

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{5}$$

umumy deňlemä garalyň, bu ýerde $M(x, y)$ we $N(x, y) \neq 0$ käbir oblastda üznüksiz funksiýalar.

Eger $M(x, y)$ we $N(x, y)$ deňderejeli birjynsly funksiýalar, ýagny

$$M(tx,ty) = t^m \cdot M(x, y),$$
$$N(tx,ty) = t^m \cdot N(x, y)$$

şertler ýerine ýetýän, bolsa, onda (5) birjynsly deňleme bolar. Sebäbi $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ gatnaşyk nol derejeli birjynsly funksiýa. Bu ýagdaýda (5) deňlemäni (3) ornuna goýmanyň kömegi bilen, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňlemä getirmek bolar.

Mysal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemäniň sag bölegi birjynsly funksiýa, çünki

$$f(tx, ty) = \frac{2tx \cdot ty}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin (3) ornuna goýmany peýdalansak, berlen deňleme

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

görnüşe geler. Deňlemäniň üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + u^2}{u - u^3} \cdot du.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem integrirlesek, onda

$$\ln|x| = \int \frac{1 + u^2}{u - u^3} du + \ln C$$

ýa-da

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln|1-u| - \ln|1+u| + \ln C$$

bolar. Bu ýerden $\dfrac{Cu}{1-u^2} = x$ deňligi alýarys. u-nyň ornuna $\dfrac{y}{x}$ goýup, deňlemäniň $x^2 - y^2 = C$ umumy integralyny alýarys.

§4. Birjynsly deňlemelere getirilýän deňlemeler

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{1}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $a,b,c,\ a_1,b_1,c_1$ berlen hemişelik sanlar, $f(x)$ – üznüksiz funksiýa. Eger $c = c_1 = 0$ bolsa, onda (1) birjynsly deňlemedir. Bu ýagdaýda (1) deňlemäni $y = ux$ ornuna goýma bilen çözmek bolar.

Goý, c we c_1 sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsun. (1) deňlemäni birjynsly deňlemä getirmek üçin

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = y + \beta \end{cases} \tag{2}$$

ornuna goýmany ulanalyň, bu ýerde t, u – üýtgeýän ululyklar, α, β – häzirlikçe kesgitlenmedik sanlar. (2) deňlikden $dx = dt,\ dy = du$ bolar. Seýlelikde, (1) deňleme

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{at + bu + a\alpha + b\beta + c}{a_1t + b_1u + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right) \tag{3}$$

görnüşi alýar. Bu deňlemäniň birjynsly deňleme bolmaklygy üçin

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

şertler ýerine ýetmelidir. Görnüşi ýaly, (4) sistema α we β ululyklara görä çyzykly deňlemeler sistemasydyr. Olaryň bahalaryny tapmak üçin kesgitleýji düzýäris:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Iki ýagdaýa garalyň:

1) goý,

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ bolsun. Onda (4) sistemanyň $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ ýeke-täk çözüwi bolar. Bu bahalary (3) deňlemä goýup,

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{at + bu}{a_1 + b_1 u}\right)$$

görnüşli birjynsly deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy integralyny tapyp, t-niň deregine $x - \alpha_1$-i, u-nyň deregine $y - \beta_1$-i goýup, (1) deňlemäniň umumy integralyny alýarys;

2) goý,

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bolsun. Onda $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ bolýar.

Bu ýerden $a_1 = a \cdot \lambda$, $b_1 = b \cdot \lambda$. (1) deňlemäni

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right) \tag{5}$$

görnüşde ýazalyň. $ax + by = z$ belgilemäni girizeliň. Onda

$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{dx}$ bolar we (5) deňleme

$$\frac{dz}{dx} = bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a$$

görnüşe geler. Üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edip,

$$\frac{dz}{bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = dx$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy integralyny

$$\int \frac{dz}{bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = x + C$$

görnüşde alarys. Integral tapylandan soň, z-iň ornuna $ax + by$-i goýup, (5) deňlemäniň umumy integralyny almak bolar.

Indi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{6}$$

deňlemä garalyň. Eger (6) birjynsly deňleme bolmasa, onda ony käbir ýagdaýlarda $y = z^{\alpha}$ ornuna goýmany ulanyp, birjynsly deňlemä getirmek bolar. α san alnan deňleme birjynsly bolar ýaly edilip saýlanyp alynýar.

1-nji mysal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 5}{x - y - 1}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemede (2) ornuna goýmany ulanyp,

$$\frac{du}{dt} = \frac{t + u + \alpha + \beta - 5}{t - u + \alpha + \beta - 1}$$

deňlemäni alarys. Bu deňleme üçin (4) sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 5 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

görnüşde bolar. Bu sistemanyň kesgitleýjisi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Bu ýerden $\alpha = 3,\ \beta = 2$. Berlen deňleme

$$\frac{du}{dt} = \frac{t + u}{t - u}$$

görnüşli birjynsly deňlemä gelýär.

Bu deňlemede $u = tz$ ornuna goýmany ulanalyň. Onda

$$z + t \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\frac{1 - z}{1 + z^2} \cdot dz = \frac{dt}{t}.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem integrirläliň:

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} \cdot dz = \int \frac{dt}{t} + C,$$

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \cdot \ln|1 + z^2| = \ln|\,t\,| + \ln C$$

ýa-da $\operatorname{arctg} z = \ln\left|Ct\sqrt{1 + z^2}\,\right|$, z ululygy $\frac{u}{t}$ bilen çalşyrsak, onda

$$\operatorname{arctg}\frac{u}{t} = \ln\left|C\sqrt{t^2 + u^2}\,\right|$$

bolar. Bu deňlikde t-niň ornuna $x – 3$-i, u-nyň ornuna $y – 2$-ni goýup,

$$\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-3} = \ln\left|C\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\,\right|$$

deňligi alarys. Şeýlelikde, berlen deňlemäniň umumy integralyny alarys.

2-nji mysal. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{3x + 3y - 1}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu ýerde kesgitleýji

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$x + y = z$ ornuna goýmadan peýdalanalyň.

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx},$$

ýagny

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1.$$

Berlen deňleme $\frac{dz}{dx} = \frac{4z}{3z - 1}$ görnüşe gelýär. Bu deňlemäniň umumy çözüwi $3z - \ln|\,z\,| = 4x + C$ bolar. Bu ýerde z-niň ornuna $x + y$-i goýup, berlen deňlemäniň umumy integralyny

$$3y - x - \ln|x + y| = C$$

görnüşde alarys.

§5. Çyzykly deňlemeler

Eger gözlenilýän y funksiýa we onuň y' önümi deňlemede birinji derejeli bolsa, onda ol deňlemä çyzykly deňleme diýilýär.

Çyzykly differensial deňleme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

görnüşde berilýär, bu ýerde $P(x)$ we $Q(x)$ funksiýalar (a, b) interwalda berlen üznüksiz funksiýalar. Eger $Q(x) = 0$ bolsa, onda (1) deňlemeden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

deňlemäni alarys.

(1) deňlemä çyzykly birjynsly däl deňleme diýilýär, (2) deňlemä bolsa çyzykly birjynsly deňleme diýilýär. Ilki (2) deňlemäniň umumy çözüwini gözläliň. Ol deňlemäniň üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edip, ony

$$\frac{dy}{y} = P(x)dx$$

görnüşde ýazarys. Bu deňligi integrirläp,

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C$$

deňligi alýarys, ýagny

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, (-\infty < c < \infty) \tag{3}$$

Tapylan funksiýa (2) deňlemäniň umumy çözüwidir. Ony

$$y = C \cdot \exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

görnüşde hem ýazmak bolar.

Indi (2) deňleme üçin Koşi meselesine garalyň. Başgaça aýdylanda, (2) deňlemäniň $y(x_0) = y_0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. (3) deňlikde kesgitsiz integraly ýokarky çägi üýtgeýän ululykly kesgitli integral bilen çalşyrmak bolar. Onda ony

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)dx} \tag{4}$$

görnüşde ýazarys.

Goý, $x = x_0$ bolsun. Onda başlangyç şerti göz öňünde tutup, $C = y_0$ bolýandygyny görýäris. Ony (4) deňlikde ornuna goýup, gözlenilýän çözüwi alarys. Eger $y(0) = 0$ başlangyç şerti alsak, onda $y = 0$ çözüwi alarys.

Indi (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga geçeliň. Onuň üçin Lagranž usulyny (wariasiýa usulyny) ulanalyň. (3) çözüwdäki C hemişelik sany $C(x)$ funksiýa bilen çalşyryp,

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{5}$$

funksiýany alarys. (5) funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar ýaly edip, $C(x)$ funksiýany tapalyň. (5) funksiýany (1) deňlemede y-iň ornuna goýup,

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

deňligi alarys, bu ýerden

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Soňky deňligiň iki böleginden hem integral alsak, onda

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

deňligi alarys. $C(x)$-iň bu bahasyny (5) deňlikde ornuna goýup, (1) deňlemäniň

$$y = C_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{6}$$

umumy çözüwini alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly, (6) çözüw (2) deňlemäniň umumy çözüwiniň we (1) deňlemäniň hususy çözüwiniň jeminden durýar. Munuň şeýledigini subut etmek üçin, (6) deňligiň sag böleginiň degişli goşulyjylarynyň ol deňlemelerde y-iň ornuna goýlanda toždestwolaryň alynýandygyna göz ýetirmek ýeterlikdir.

Eger $y\,(x_0) = y_0$ başlangyç şert berlen bolsa, onda (1) deňlemäniň bu şerti kanagatlandyrýan çözüwi

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} + e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \cdot \int_{x_0}^{x} Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx$$

görnüşde berler.

Indi (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklygyň Bernulli usulyny beýan edeliň. Çözüwi $y = uv$ görnüşde gözleýäris, bu ýerde $u(x)$ we $v(x)$ täze gözlenilýän funksiýalar. Ony (1) deňlemede goýup,

$$\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u + P(x)uv = Q(x)$$

ýa-da

$$\frac{du}{dx}v + \left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right)u + Q(x) \tag{7}$$

deňlemäni alýarys. u-nyň koeffisiýenti nola öwrüler ýaly edip, v-niň bahasyny tapalyň, ýagny v–ni

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

deňlemeden tapalyň. Bu birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi

$$v = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{8}$$

görnüşde bolar. (8) funksiýany (7) deňlikde goýup,

$$\frac{du}{dx}Ce^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

deňlemäni alarys, bu ýerden

$$Cdu = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem integrirläp,

$$u = \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)$$

funksiýany taparys. Onda

$$y = uv = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$$

bolar.

Bu bolsa (1) deňlemäniň umumy çözüwidir.

Mysal.

$$\frac{dy}{dx} + y\sin x = e^{\cos x}$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin

$$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0$$

birjynsly deňlemäniň çözüwini tapalyň. Bu deňlemäniň üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{dy}{y} = -\sin x dx.$$

Soňky deňligi integrirläp,

$$\ln|y| = \cos x + \ln C$$

deňligi alarys. Bu ýerden $y = Ce^{\cos x}$ bolar.

Berlen deňlemäniň çözüwini

$$y = C(x)e^{\cos x} \tag{9}$$

görnüşde gözläliň. Bu funksiýany berlen deňlemede goýup,

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{\cos x} - C(x) \cdot e^{\cos x} \cdot \sin x + C(x) \cdot e^{\cos x} \cdot \sin x = e^{\cos x}$$

deňligi alarys, bu ýerden $\frac{dC(x)}{dx} = 1$, ýagny $C(x) = x + C_1$.

$C(x)$-iň bahasyny (9) formulada goýup, başdaky deňlemäniň

$$y = (x + C_1)e^{\cos x}$$

görnüşli umumy çözüwini alarys.

§6. Çyzykly deňlemelere getirilýän deňlemeler

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m \tag{1}$$

deňlemä garalyň. Bu çyzykly däl deňlemedir. Ol deňlemä Bernulli deňlemesi diýilýär. Eger $m = 0$, $m = 1$ bolsa, onda (1) deňlemeden çyzykly deňlemeler alynýar. Olar ýaly deňlemeleri çözmekligiň usullary öwrenildi. Deňlemedäki $P(x)$ we $Q(x)$ funksiýalar (a,b) interwalda üznüksiz funksiýalar diýip güman edeliň. (1) deňlemäni çyzykly deňlemä getirip bolýandygyny görkezeliň.

Deňlemäniň iki bölegini hem y^m – e bölüp,

$$y^{-m} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-m} = Q(x)$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde $y^{1-m} = u$ ornuna goýmany ulanyp,

$$\frac{du}{dx} + (1-m)P(x)u = (1-m)Q(x)$$

deňlemäni alarys. Bu çyzykly birjynsly däl deňlemäniň umumy çözüwini

$$u = e^{(m-1)\int P(x)dx} \cdot \left[C + (1-m) \cdot \int Q(x) e^{(m-1)\int P(x)dx} dx\right]$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden u funksiýany y^{1-m}-i bilen çalşyryp, (1) deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + (1-m) \cdot \int Q(x) e^{(1-m)\int P(x)dx} dx\right]^{\frac{1}{1-m}} \tag{2}$$

görnüşde alarys.

Çyzykly däl deňlemäniň ýene bir görnüşine garalyň:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x). \tag{3}$$

Bu deňlemä Rikkati deňlemesi diýilýär, bu ýerde $P(x)$, $Q(x)$ we $R(x)$ (a,b) interwalda berlen üznüksiz funksiýalar. Eger (3) deňlemäniň bir hususy çözüwi belli bolsa, onda ony Bernulli deňlemesine getirip bolar. Hakykatdan-da, goý, $y = y_1(x)$ (3) deňlemäniň hususy çözüwi bolsun. Onda

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 \equiv R(x). \tag{4}$$

Indi (3) deňlemede

$$y = y_1 + u \tag{5}$$

ornuna goýmany edeliň, bu ýerde u–täze gözlenilýän funksiýa. (4) toždestwony nazarda tutup,

$$\frac{du}{dx} + (P(x) + 2Q(x)y_1)u + Q(x)u^2 = 0$$

Bernulli deňlemesini alarys. Bu deňligiň iki bölegini hem u^2-a bölüp,

$$u^{-2} \cdot \frac{du}{dx} + T(x)u^{-1} = -Q(x)$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde ýazgyny gysgaltmak maksady bilen ýaýlardaky aňlatmany $T(x)$ bilen belgiledik. $u^{-1} = v$ belgilemäni girizip,

$$\frac{dv}{dx} - T(x)v = Q(x)$$

çyzykly birjynsly däl deňlemäni alarys. Mälim bolşy ýaly, onuň umumy çözüwi

$$v = e^{\int T(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x)e^{-\int T(x)dx}dx\right]$$

görnüşdedir. Bu ýerde v-niň ornuna u^{-1} goýulsa, soňra u-nyň ornuna $y - y_1$ goýulsa, onda (3) deňlemäniň umumy integralyny almak bolar.

Rikkati deňlemesiniň umumy çözüwini tapmak üçin, onuň bir hususy çözüwini tapmaly. Ony tapmak üçin bolsa belli umumy usul ýok. Oňa görä-de, Rikkati deňlemesiniň umumy çözüwini gutarnykly görnüşde tapmak doly çözülmedik mesele bolup durýar.

Mysal. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = y^2 \ln x$ Bernulli deňlemesini çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäniň iki bölegini hem y^2-a bölüp,

$$y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y^{-1} = \ln x$$

deňlemäni alarys. $y^{-1} = u$ belgilemäni ulanyp, $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} \cdot u = -\ln x$ çyzykly birjynsly däl deňlemä geleris. Wariasiýa usulyny ulansak, onda bu deňlemäniň

$$u = -\frac{x \ln^2 x}{2} + Cx$$

görnüşdäki umumy çözüwini taparys. Bu ýerde u-nyň deregine y^{-1}-i goýup, berlen deňlemäniň

$$y = \frac{1}{x\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)}$$

görnüşli umumy çözüwini alarys.

§7. Doly differensially deňlemeler

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $M(x, y)$ we $N(x, y)$ funksiýalar we olaryň $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ hususy önümleri R oblastda üznüksiz funksiýalar.

Eger (1) deňlemäniň çep bölegi kabir $u(x, y)$ funksiýanyň doly differensialy, ýagny

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2}$$

bolsa, onda ol deňlemä doly differensially deňleme diýilýär.

Bu ýagdaýda (1) deňlemäni

$$du(x, y) = 0$$

görnüşde ýazyp bileris.

Bu deňlemäni integrirläp, onuň

$$u(x, y) = C \tag{2_1}$$

görnüşde umumy integralyny alarys.

Mysal. $ydx + xdy = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäniň çep bölegini

$$d(x \cdot y) = ydx + xdy$$

görnüşde ýazalyň. Onda deňlemäni $d(x \cdot y) = 0$ görnüşde ýazarys. Bu deňlemäni integrirläp, onuň umumy integralyny $xy = C$ görnüşinde alarys.

Indi (1) deňlemäniň doly differensially bolmaklyk şertini kesgitläliň hem-de $u(x, y)$ funksiýanyň tapylyş usulyny görkezeliň.

Goý, (1) deňlemäniň çep bölegi $u(x, y)$ funksiýanyň doly differensialy bolsun, ýagny (2) deňlik ýerine ýetýär diýeliň. Matematiki analiz dersinden belli bolşy ýaly, iki argumentli funksiýanyň doly differensialy

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \tag{3}$$

formula boýunça tapylýar. (2) we (3) deňliklerden

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

deňligi alarys. dx-iň we dy-iň koeffisiýentlerini deňeşdirip,

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

$$N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

deňlikleri alarys. (4) deňligi y-e görä, (5) deňligi x-e görä differensirläp,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

deňlikleri alarys. Garyşyk önümleriň deňliginden

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6}$$

deňlik gelip çykýar.

(6) deňlik (1) differensial deňlemäniň doly differensially bolmaklygynyň zerur şertidir.

Indi (6) deňligiň (1) deňlemäniň doly differensially bolmaklygynyň ýeterlik şerti hem bolýandygyny görkezeliň.

Goý, (6) deňlik ýerine ýetýän bolsun. (2) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň. Beýle diýildigi (2) deňligi kanagatlandyrýan $u(x,y)$ funksiýany tapmaly diýildigidir, has takygy (4) we (5) deňlikleri kanagatlandyrýan $u(x, y)$ funksiýany kesgitlemeli diýildigidir. Onuň üçin (4) deňligi x_0-dan x-e çenli integrirläp $(x_0, y_0) \in R$,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi(y) \tag{7}$$

deňligi alarys, bu ýerde $\varphi(y)$ erkin differensirlenýän funksiýa. (7) formula bilen kesgitlenen $u(x, y)$ funksiýa (5) deňligi kanagatlandyrar ýaly edip $\varphi(y)$ funksiýany saýlalyň. Şeýle maksat bilen (7) funksiýany (5) deňlikde goýup,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

deňligi alarys. Kesgitli integraly parametr boýunça differensirleme düzgüni esasynda, bu ýerden

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

deňligi ýazyp bileris. (6) şerti ulanyp,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

ýa-da

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y)$$

deňligi alarys. Bu ýerden $\varphi'(y) = N(x_0,y)$.

Soňky deňligi y_0-dan y-e çenli integrirläp,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1 \tag{8}$$

deňligi alarys. Bu funksiýany (7)-de $\varphi(y)$-iň ornuna goýup,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1 \tag{9}$$

funksiýany taparys. Eger (9) funksiýanyň doly differensialyny alsak, onda (2) deňligi alarys.

Diýmek, (1) deňlemäniň doly differensially deňleme bolmagy üçin, (6) deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlik şertdir.

(9) funksiýany (2_1)-de goýup (1) deňlemäniň

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy = C \tag{10}$$

umumy integralyny alarys.

Eger $u(x,y)$ funksiýany tapmaklygy (5) deňligi integrirlemekden başlap, ýokarda beýan edilen usuly gaýtalasak, onda (1) deňlemäniň umumy integraly

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy = C$$

görnüşde bolar.

(1) deňleme üçin Koşi meselesini kesgitlemek bolar.

Eger $y(x_0)=y_0$ başlangyç şert berlen bolsa, onda (10) formuladan (1) deňlemäniň

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy = 0$$

görnüşdäki hususy çözüwini alarys.

Mysal.

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Ilki bilen (6) şerti barlalyň:

$$M(x,y) = \frac{2x}{y^3},\ \ N(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.$$

Diýmek, berlen deňleme doly differensially deňlemedir.

Berlen deňlemäniň umumy integralyny (10) formula esasynda

$$\int_{x_0}^{x}\frac{2x}{y^3}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{(y^2-3x_0^2}{y^4}dy=C$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerden

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C-\frac{1}{y_0}+\frac{x_0^2}{y_0^3}.$$

Bu deňligiň sag bölegindäki aňlatmany C_1 bilen belgilesek, onda

$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C_1$ bolar.

(1) deňlemäniň umumy integralyny (10) formulany ulanman hem tapmak bolar. Munuň şeýledigini ýokarda garalan mysal üçin görkezeliň.

Beýan edilen usul boýunça $u\,(x, y)$ funksiýany kesgitlemek üçin (4) deňligi

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$$

görnüşde ýazarys. Bu deňligi x boýunça integrirläp,

$$u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$$

deňligi alarys. $\varphi(y)$ funksiýany kesgitlemek üçin soňky deňligi y boýunça differensirläliň:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$$

(5) deňligi peýdalanyp,

$$\frac{y^2-3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$$

deňligi alarys, bu ýerden

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2},$$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1.$$

Diýmek,

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

(2_1) formula esasynda berlen deňlemäniň umumy integralyny

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

görnüşde tapýarys.

§8. Doly differensially deňlemelere getirilýän deňlemeler

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

deňlemä garalyň, bu ýerde M we N geçen paragrafdaky şertleri kanagatlandyrýan funksiýalar. (1) deňleme doly differensially deňleme däl diýip güman edeliň, ýagny

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Bu ýagdaýda deňlemäniň iki bölegini hem $\mu = \mu(x, y)$ funksiýa köpeldip,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

deňlemäni alarys. (2) deňleme üçin

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (3)$$

şert ýerine ýetýär diýeliň. Onda (2) deňleme doly differensially deňleme bolar. Bu ýerden görnüşi ýaly, $\mu = \mu(x, y)$ funksiýa (1) deňlemäni doly differensially deňlemä öwürdi. $\mu = \mu(x, y)$ funksiýa integrirleýji köpeldiji diýilýär. Şeýlelikde, integrirleýji köpeldijini tapmaklyk meselesine gelindi. (3) deňligi ýaýraň görnüşde

$$M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} \cdot \mu = N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \mu$$

ýa-da

$$N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \cdot \mu \tag{4}$$

görnüşde ýazalyň. Şeýlelikde, biz μ-i kesgitlemek üçin hususy önümli differensial deňlemä geldik. Bu deňlemäniň çözüwini tapmak, berlen (1) deňlemäniň çözüwini tapmakdan çylşyrymlydyr. Käbir ýagdaýlarda (4) deňlemäni ýönekeýleşdirmek hem bolar. Ol ýagdaý bolsa, μ funksiýany tapmaklyga mümkinçilik berer.

μ funksiýany $\mu = \mu(x)$ görnüşde gözläliň. Onda (4) deňlemede

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$$

bolar. Onda (4) deňleme

$$\frac{d\mu}{dx} \cdot N = \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \cdot \mu$$

görnüşe geler. Bu deňlemäni

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \tag{5}$$

görnüşde ýazalyň. Eger bu deňlemäniň sag bölegi x-e görä funksiýa bolsa, onda μ-i tapmak aňsat bolar.

Goý,

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \equiv \varphi(x)$$

bolsun. Onda (5) deňleme

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x)\, dx$$

görnüşe geler. Bu deňligi integrirläp,

$$\ln\mu = \int \varphi(x)\,dx + \ln C$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$\mu = Ce^{\int \varphi(x)dx}$$

bolar. Integrirleýji köpeldijiniň birini almak ýeterlikdir. Onda $C = 1$ diýsek,

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx}$$

bolar.

Integrirleýji köpeldijini $\mu = \mu(y)$ görnüşde hem gözlemek bolar. Bu ýagdaý üçin ýokardaky beýan edilen usuly ulansak,

$$\mu = e^{\int \varphi(y)dy}$$

bolar, bu ýerde

$$\varphi(y) = \frac{1}{-M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right].$$

Indi has umumy ýagdaýa garalyň. Integrirleýji köpeldijini $\mu = \mu(\omega)$ görnüşde gözläliň, bu ýerde $\omega = \omega(x, y)$ berlen funksiýa.

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x} \tag{6}$$

önümleri (4) deňlemede goýup,

$$\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot N - \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot M\right]\frac{d\mu}{d\omega} = \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\cdot\mu(\omega)$$

ýa-da

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} \tag{7}$$

deňlemäni alarys.

Eger sag bölegi diňe ω-a görä funksiýa, ýagny

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}\equiv\sigma(\omega) \tag{8}$$

bolsa, onda (7) deňleme

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\omega}=\sigma(\omega)$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni integrirlesek,

$$\mu=e^{\int\varphi(\omega)d\omega} \tag{9}$$

bolar. Bu ýerde $C=1$.

(8) deňlik (1) deňlemäniň integrirleýji köpeldijisiniň ω-a görä funksiýa bolmaklygynyň zerurlyk şertidir.

Indi (8) deňligiň ýeterlik şert hem bolýandygyny görkezeliň. Goý, (8) şert ýerine ýetýän bolsun. Onda (9) funksiýa (1) deňlemäniň integrirleýji köpeldijisi bolar. Bu ýagdaýda (4) deňlemäni

$$N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left[N\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]\cdot\sigma(\omega)\cdot\mu \tag{10}$$

görnüşde ýazmak bolar. (9) funksiýany (10)-da goýalyň. Onda

$$N\cdot\frac{\partial}{\partial x}[e^{\int\sigma(\omega)d\omega}]-M\cdot\frac{\partial}{\partial y}[e^{\int\sigma(\omega)d\omega}]=$$
$$=\left[N\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]\cdot\sigma(\omega)e^{\int\sigma(\omega)d\omega}$$

ýa-da

$$\left[N\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]\cdot\sigma(\omega)e^{\int\sigma(\omega)d\omega}=$$
$$=\left[N\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]\cdot\sigma(\omega)e^{\int\sigma(\omega)d\omega}$$

bolar. Bu toždestwo (9) funksiýanyň (4) deňlemäniň çözüwidigini görkezýär. Eger $\omega=x$ ýa-da $\omega=y$ bolsa, onda (9) deňlikden $\mu=\mu(x)$ we $\mu=\mu(y)$ ýagdaýlar üçin tapylan formulalar alynýar.

Integrirleýji köpeldijileri

$$\mu = \mu(x \pm y), \omega = x \pm y; \quad \mu = \mu(x^2 \pm y^2), \omega = x^2 \pm y^2;$$

$$\mu = \mu(x \cdot y), \omega = x \cdot y; \quad \mu = \mu\left[\frac{y}{x}\right], \omega = \frac{y}{x}$$

görnüşlerde hem gözlemek bolar.

Indi (1) deňleme üçin integrirleýji köpeldijiniň bardygyny görkezeliň.

Teorema. Eger

$$u\,(x, y) = C \tag{11}$$

funksiýa (1) deňlemäniň umumy integraly bolsa, onda ol deňlemäniň integrirleýji köpeldijisi bardyr.

Subudy. Berlen (11) umumy integral boýunça differensial deňlemäni düzeliň.

(11) deňligi x boýunça differensirlesek,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{12}$$

bolar. (12) deňlemäni

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{13}$$

görnüşde ýazalyň. (1) deňlemäni

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \tag{14}$$

görnüşde göçüreliň.

(13) bilen (14)-i deňeşdirip,

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{M}{N}$$

ýa-da

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}$$

deňligi alarys.

Bu gatnaşyklary μ bilen belgilesek,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$$

bolar. (1) deňlemäniň çep bölegini $\mu(x, y)$-e köpeltsek,

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du(x,y)$$

ýa-da

$$\mu(Mdx + Ndy) = du(x, y)$$

bolar. Bu deňlik $\mu(x, y)$ funksiýanyň (1) deňlemäniň integrirleýji köpeldijisidigini aňladýar.

1-nji mysal. $(x^2y^2 - 1)dx + 2x^3ydy = 0$ deňlemäniň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Bu ýerde

$$M(x, y) = x^2y^2 - 1, \quad N(x, y) = 2x^3y;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

şert ýerine ýetmeýär.

Integrirleýji köpeldijini tapalyň.

$$\frac{1}{N} \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\frac{2}{x}.$$

Oňa görä-de (5) deňlemäni berlen ýagdaý üçin

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x}dx$$

görnüşde ýazarys. Bu deňligi integrirlesek,

$$\mu = \frac{1}{x^2} \qquad (C = 1 \text{ diýip aldyk})$$

bolar.

Berlen deňlemäniň iki bölegini hem $\mu = \dfrac{1}{x^2}$-a köpeldip,

$$\left[y^2 - \frac{1}{x^2}\right]dx + 2xydy = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemede

$$N(x, y) = y^2 - \frac{1}{x^2}, \quad N(x, y) = 2xy.$$

Onda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Diýmek, alnan deňleme doly differensially deňleme. Bu deňlemäni çözmekligi okyjylara hödürleýäris.

2-nji mysal. $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ deňlemäniň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen deňleme üçin

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

şerti barlalyň. Berlen ýagdaýda

$$M(x, y) = y - xy^2 \ln x, \quad N(x, y) = x$$

Onda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy \ln x, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

bolar.

Diýmek, berlen deňleme doly differensially deňleme däl. Integrirleýji köpeldijini tapmak üçin, ilki bilen (8) formulanyň sanawjysyny tapyp,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\, 2xy \ln x$$

aňlatmany alarys. Soňra ony ol formulanyň maýdalawjysyna bölülenende ýokardaky görkezilen integrirleýji köpeldijileriň birini ulanyp bolar ýaly tapmaly. Berlen ýagdaý üçin (8) formula

$$\frac{1}{Ny - Mx} \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{-2}{xy}$$

görnüşde bolar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, $xy = \omega$ bilen belgilesek, onda $\sigma(\omega) = -\frac{2}{\omega}$ bolar. Şunlukda, integrirleýji köpeldijini $\mu = \mu(\omega)$ görnüşde tapmalydygyny görýäris. (9) formulany peýdalansak,

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{\omega} d\omega} \quad \text{ýa-da} \quad \mu = \frac{1}{x^2 y^2}$$

bolar. Berlen deňlemäniň iki bölegini hem $\mu = \frac{1}{x^2 y^2}$ köpeldip,

$$\left[\frac{1}{x^2 y} - \frac{\ln x}{x}\right] dx + \frac{1}{xy^2} dy = 0$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde

$$M(x, y) = \frac{1}{x^2 y} - \frac{\ln}{x}, \quad N(x, y) = \frac{1}{xy^2};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y^2}.$$

Şeýlelikde, berlen deňleme doly differensially deňlemä getirildi. Ol deňlemäniň çözüwini tapmaklygy okyjylara hödürleýäris.

§9. Differensial deňlemäniň çözüwiniň barlyk we ýeke-täklik teoremasy

Biz birnäçe görnüşli differensial deňlemeleri çözmegiň usullary bilen tanyş bolduk. Differensial deňlemeleri görkezilen usullar bilen çözmek bolýarmy diýen sorag ýüze çykýar. Mundan başga-da ol deňlemeleriň çözüwleri barmy diýen sorag hem gelip çykýar. Elbetde, bu soraglara gös-göni jogap bermek aňsat däl. Ýöne her bir deňlemäni çözmäge girişilende ilki bilen ol deňlemäniň çözüwiniň bardygyny anyklamak zerurdyr. Bu mesele differensial deňlemeler nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biridir. Oňa görä-de biz bu ýerde (önüme görä çözülen) birinji tertipli differensial deňlemäniň çözüwiniň bellibir şertlerde bardygyny we ol çözüwiň ýeke-täkdigini görkezeris.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Koşi meselesine garalyň. Eger $f\ (x,y)$ öz argumentleriniň toplumy boýunça $R = \{|x - x_0\| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ oblastda üznüksiz funksiýa bolsa, onda bu mesele

$$y(x) + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{3}$$

görnüşli integral deňlemä getirilýär.

Gözlenilýän funksiýany integral belgisiniň aşagynda saklaýan islendik deňlemä integral deňleme diýilýär. (1)-(2) meseläniň (3) deňlemä deňgüýçlidigini görkezeliň.

Goý, $\varphi(x)$ funksiýa, (1) deňlemäniň $|x - x_0 \leq h|$ kesimde $\varphi(x_0) = y_0$ (2) şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolsun. Onda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) \tag{4}$$

toždestwony alarys. Bu toždestwony x_0-dan x-e çenli integrirläp, soňra başlangyç şerti göz öňünde tutsak, onda

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \tag{5}$$

toždestwony alarys. Bu toždestwony (3) deňleme bilen deňeşdirip, $y = \varphi(x)$ funksiýanyň (3) deňlemäniň çözüwidigini görýäris. Indi (3) deňlemäniň (1)-(2) meselä deňgüýçlidigini görkezeliň.

Goý, $y = \varphi(x)$ (3) deňlemäniň çözüwi bolsun. Onda (5) toždestwodan $x = x_0$ bolanda $\varphi(x_0) = y_0$ deňligi alarys. (5) toždestwony x boýunça differensirläp,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\right) = f(x, \varphi(x))$$

deňligi alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly, funksiýa (1) deňlemäniň çözüwidir.

Diýmek, (1)-(2) mesele (3) integral deňlemä deňgüýçlidir.

Kesgitleme. Eger $\forall\,(x,\bar{y}),\ (x,\bar{\bar{y}}) \in R$ nokatlar üçin

$$|\,f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{\bar{y}})\,| \le L|\,\bar{y} - \bar{\bar{y}}\,| \tag{6}$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f\,(x,\,y)$ funksiýa R oblastda y boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýar diýilýär. Bu ýerde $L \ge 0$ – Lipşis hemişeligi.

1-nji bellik. Eger R oblastda $f\,(x,y)$ funksiýanyň y boýunça çäkli önümi bar, ýagny

$$|\,f'_y(x,y)\,| \le L \qquad (L \ge 0)$$

bolsa, onda ol oblastda Lipşis şerti ýerine ýetýär. Muny subut etmek kyn däl. Lagranž formulasyny ulanyp $\forall\,(x,\bar{y}),\ (x,\bar{\bar{y}}) \in R$ üçin

$$f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{\bar{y}}) = f'_y[x,\bar{y} + \vartheta(\bar{y} - \bar{\bar{y}}](\bar{y} - \bar{\bar{y}}), \quad 0 < \vartheta < 1$$

deňligi ýazalyň. Bu ýerden

$$|\,f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{y})\,| \le L|\,\bar{y} - \bar{\bar{y}}\,|$$

Lipşis şertini alarys.

Teorema (Pikar teoremasy). Eger $f\ (x,y)$ funksiýa öz argumentleriniň toplumy boýunça $R = \{|\,x - x_0\,| \le a, |\,y - y_0\,| \le b\}$, $(a,\ b\ >\ 0)$ oblastda üznüksiz we y boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda (1) deňlemäniň $|\,x - x_0\,| \le h$ kesimde $\varphi(x_0) = y_0$ (2) şerti kanagatlandyrýan $y = \varphi(x)$ ýeke-täk çözüwi bardyr, bu ýerde

$$h = \min\left[a, \frac{b}{M}\right], \qquad M = \max_R |\,f(x,y|$$

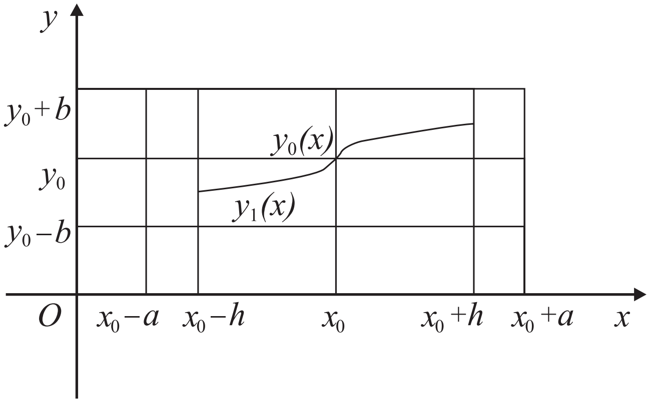
Subudy.

Teoremanyň Pikar yzygiderli ýakynlaşmalar usuly bilen subut edeliň. (3) integral deňlemäniň çözüwini tapmak üçin yzygiderli ýakynlaşmalary aşakdaky düzgün boýunça guralyň. $y_0(x)$ nol ýakynlaşma deregine gözlenilýän funksiýanyň başlangyç bahasy y_0 -y alalyň.

Bu $y_0(x) = y_0$ sany (3) deňlemäniň sag böleginde $y(x)$-iň ornuna goýalyň. Sag böleginde alnan funksiýany birinji ýakynlaşma deregine alalyň. Ony $y_1(x)$ bilen belgiläp,

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt \qquad (7_1)$$

deňligi alarys.



Tapylan $y_1(x)$ funksiýany (3) deňlemäniň sag böleginde $y(x)$-iň ornuna goýup, ikinji ýakynlaşmany alarys. Ony $y_2(x)$ bilen belgiläp,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \qquad (7_2)$$

deňligi alarys.

Bu gurluşlary dowam etdirip, n-nji ýakynlaşmany

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \qquad (7_n)$$

görnüşde alarys.Bu gurluşlary dowam etdirmek bolar.

Şeýlelikde, $\{y_n(x)\}$ ýakynlaşmalar yzygiderligini alarys. Olar üznüksiz funksiýalardyr. Indi $|x - x_0| \le h$ kesimde kesgitlenen $\{y_n(x)\}$ $(n = 1,2,...)$ funksiýalaryň grafikleriniň R oblastyň çäginden çykmaýandygyny görkezeliň. $|f(x,y)| \le M$ we $h \le \dfrac{b}{M}$ deňsizlikleri göz önünde tutup, (7_1) deňlikden

$$|y_1(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y_0)|dt\right| \le$$
$$\le M|x-x_0| \le Mh \le b,$$
$$|y_1(x)-y_0| \le b$$

deňsizligi alarys. Bu deňsizlikden görnüşi ýaly, $y_1(x)$ funksiýanyň grafigi R gönüburçlugyň çäginden çykmaýar.

(7_2) formuladan alarys:

$$|y_2(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\,dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t)|dt\right| \le$$
$$\le M|x-x_0| \le Mh \le b,$$
$$|y_2(x)-y_0| \le b.$$

Soňky deňsizlik y_2(x) funksiýanyň grafiginiň R oblastyň çäginden çykmaýandygyny görkezýär. Bu ýörelgäni dowam etdirsek, onda

$$|y_n(x)-y_0| \le b$$

bolar. Bu deňsizligiň islendik n üçin dogrudygyny matematiki induksiýa usuly bilen subut etmek bolar. Indi $\{y_n(x)\}$ yzygiderligiň $|x-x_0| \le h$ kesimde deňölçegli ýygnanýandygyny görkezeliň. Onuň üçin yzygiderligiň agzalaryndan

$$y_0 + (y_1(x)-y_0(x)) + (y_2(x)-y_1(x)) + \ldots$$
$$\ldots + (y_n(x)-y_{n-1}(x)) + \ldots \qquad (8)$$

funksional hatary düzeliň. (8) hataryň deňölçegli ýygnanýanlygyndan $\{y_n(x)\}$ yzygiderligiň deňölçegli ýygnanýanlygy gelip çykýar. Bu hataryň n-nji bölek jemi $S_n(x) = y_n(x)$.

(8) hataryň her bir agzasyny bahalandyralyň. (7_1) deňlikden alarys:

$$|y_1(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y_0)|dt\right| \le M|x-x_0|$$

ýa-da

$$|y_1(x)-y_0| \le M|x-x_0| \qquad (9_1)$$

(7_2) deňlikden (7_1) deňligiň degişli böleklerini aýralyň hem-de Lipşis şertini ulanalyň:

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t,y_0)]dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|dt\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0|dt\right|\le LM\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|dt\right|=LM\frac{|x-x_0|^2}{2}$$

ýa-da

$$|y_2(x)-y_1(x)|\le LM\frac{|x-x_0|^2}{2!}. \qquad (9_2)$$

(7_3)we(7_2) deňliklerden alarys:

$$|y_3(x)-y_2(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))]dt\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}|y_2(t)-y_1(t)dt|\right|\le L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|t-x_0|^2}{2}dt\right|\le L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}$$

ýa-da

$$|y_3(x)-y_2(x)|\le\frac{L^2M|x-x_0|^3}{3!}. \qquad (9_3)$$

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{L^{n-1}M|x-x_0|^n}{n!} \qquad (9_n)$$

deňsizligiň islendik n natural san üçin dogrudygyny matematiki induksiýa usuly bilen subut edeliň. Goý, (9_n) deňsizlik n san üçin ýerine ýetýän bolsun. Onda

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_n(t))-f(t,y_{n-1}(t))]dt\right|\le$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x}|y_n(t)|-y_{n-1}(t)\,dt\right|\leq L^nM\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|t-x_0|^n}{n!}\cdot dt\right|=L^nM\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

bolar. Bu ýerden (9_n) deňsizligiň islendik n üçin dogrudygy gelip çykýar.

Eger (9_1),(9_2),...,(9_n),... deňsizliklerde $|x-x_0|$-y h bilen çalşyrsak, onda

$$|y_1(x)-y_0|\leq Mh,$$
$$|y_2(x)-y_1(x)|\leq ML\frac{h^2}{2!},$$
$$|y_3(x)-y_3(x)|\leq ML^2\frac{h^3}{3!},$$
$$\cdots$$
$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leq ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$$

deňsizlikleri alarys. Bu deňsizliklerden görnüşi ýaly, (8) hataryň her bir agzasy absolýut ululygy boýunça

$$y_0+Mh+\frac{MLh^2}{2!}+\frac{ML^2h^3}{3!}+\ldots+\frac{ML^{n-1}h^n}{n!}+\ldots$$

san hataryň degişli agzasyndan uly däldir. Bu hatar ýygnanýan hatardyr. Munuň şeýledigini Dalamber nyşany boýunça barlalyň:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{ML^{n-1}h^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{Lh}{n+1}=0<1.$$

Weýerştrass nyşanyna laýyklykda (8) funksional hatar $|x-x_0|\leq h$ kesimde deňölçegli ýygnanýar, diýmek $\{y_n(x)\}$ yzygiderlik hem şonuň ýaly ýygnanýar.

Goý,

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\varphi(x)$$

bolsun, bu ýerde $\varphi(x)|x-x_0|\leq h$ kesimde üznüksiz funksiýa. $y=\varphi(x)$ funksiýanyň (3) deňlemäniň çözüwidigini görkezeliň.

$\{y_n(x)\}$ yzygiderligiň $\varphi(x)$ funksiýa $|x - x_0| \le h$ kesimde deňölçegli ýygnanýanlygyna görä, islendik $\varepsilon > 0$ üçin $N = N(\varepsilon)$ tapylyp, $N > N(\varepsilon)$ bolanda $|y_n(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{L \cdot h}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Oňa görä-de Lipşis şertini peýdalanyp, alarys:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, \varphi(t))|\,dt \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - \varphi(t)|\,dt \right| \le$$

$$\le L \frac{\varepsilon}{L \cdot h} |x - x_0| \le \frac{\varepsilon}{h} \cdot h = \varepsilon.$$

Bu ýerden

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$$

bolar. Eger

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt$$

deňlikde $n \to \infty$ bolandaky predele geçsek, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \right],$$

Onda

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$$

deňligi alarys. Bu ýerden görnüşi ýaly, $\varphi(x)$ funksiýa $|x - x_0| \le h$ kesimde (3) deňlemäniň çözüwi.

Indi (3) deňlemäniň $|x - x_0| \le h$ kesimde diňe bir çözüwiniň bardygyny görkezeliň.

Goý, $y = u(x)$ (3) deňlemäniň erkin çözüwi bolsun. Onda

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt \tag{10}$$

deňligi alarys.

Indi $u(x) - y_n(x)$ tapawudy bahalandyralyň.

(10) we (7_n) deňliklerden alarys:

$$|u(x) - y_n(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} | f(t, u(t) - f(t, y_{n-1}(t)) | dt \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} | u(t) - y_{n-1}(t) | dt \right|$$

ýa-da

$$|u(x) - y_n(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} | u(t) - y_{n-1}(t) | dt \right|.$$

Bu deňsizlikde $n = 1$ bolanda

$$|u(x) - y_1| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} | u(t) - y_0 | dt \right| \leq LMh|x - x_0|$$

bolar, çünki $|u(x) - y_0| \leq Mh$. $n = 2$ bolanda

$$|u(x) - y_2| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} | u(t) - y_1 | dt \right| \leq MhL^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!}$$

bolýar. Matematiki induksiýa usuly bilen islendik n üçin

$$|u(x) - y_n| \leq Mh \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}$$

deňsizligi subut etmek bolar. Bu ýerde $|x - x_0|$-y h bilen çalşyryp,

$$|u(x) - y_n| \leq Mh \frac{|Lh|^n}{n!} \tag{11}$$

deňsizligi alarys.

Goý, (3) deňlemäniň $y = \varphi(x)$, $y = \phi(x)$ çözüwleri bar diýeliň. Onda

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \leq |\varphi(x) - y_n| + |y_n - \phi(x)|$$

bolar. (3) deňlemäniň islendik çözüwi üçin (11) deňsizligiň ýerine ýetýänligine görä, ýokardaky deňsizligi

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \leq 2Mh\frac{(Lh)^n}{n!}$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerde $n \to \infty$ bolandaky predele geçsek,

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \leq 0$$

bolar. Diýmek,

$$\varphi(x) \equiv \phi(x).$$

Teorema subut edildi.

2-nji bellik. Islendik yzygiderli ýakynlaşmany (1)-(2) meseläniň ýa-da (3) integral deňlemäniň takmyny çözüwi deregine almak bolar. Ýygnanyş tizligi (11) formula bilen bahalandyrylýar.

Mesele.

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \quad y(0) = 0$$

meseläniň $R = \left\{-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$ oblastda çözüwini 0,001 takyklykda tapmaly.

Çözülişi. Ilki bilen berlen meseläniň ýeke-täk çözüwiniň bolmaly oblastyny kesgitläliň.

$$M = \max_R |f(x,y)| = \max_R |x + y^2| = \frac{1}{2},$$

$$h = \min\left[a, \frac{b}{M}\right] = \min\left[\frac{1}{4}, 1\right] = \frac{1}{4},$$

$$\frac{|\partial f|}{|\partial y|} = |2y| \leq 1, \quad L = 1.$$

Pikar teoremasynyň hemme şertleri ýerine ýetýär. Diýmek, berlen meseläniň $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ kesimde ýeke-täk çözüwi bardyr. Ol çözüw y_n yzygiderli ýakynlaşmalaryň predelidir. Berlen meseläni

$$y(x) = \int_0^x (t + y^2(t))\,dt$$

integral deňleme bilen çalşyryp, Pikar yzygiderli ýakynlaşmalaryny

$$y_0 = 0, y_n(x) = \int_0^x (t + y_{n-1}^2(t))\,dt, (n = 1, 2...)$$

deňlikler bilen kesgitläliň.

Indi talap edilýän takyklygy üpjün edýän ýakynlaşmanyň nomerini kesgitläliň. (11) formula esasynda

$$|y - y_n| \le \frac{1}{2 \cdot 4^{n+1} \cdot n!} \le 0,001$$

bolmaly. Bu ýerden

$$2 \cdot 4^{n+1} \cdot n! \ge 1000.$$

Diýmek, $n \ge 3$. y_3 meseläniň şertini kanagatlandyrýan çözüw bolar. Ol takmyny çözüwi tapalyň.

$$y_1 = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = \int_0^x \left[t + \frac{t^4}{4}\right]dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20},$$

$$y_3 = \int_0^x \left[t + \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{20} + \frac{t^{10}}{400}\right]dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}.$$

§10. Integral deňsizlikler we olaryň ulanylyşy

1-nji teorema (Gronuoll-Bellman teoremasy). Goý, $v(x)$, $L(x)$ $[x_0, T]$, kesimde otrisatel däl üznüksiz funksiýalar, $C \ge 0$ - hemişelik san bolsun. Eger

$$v(x) \le C + \int_{x_0}^x L(t)v(t)\,dt, \quad x_0 \le x \le T \tag{1}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda

$$v(x) \le Ce^{\int_{x_0}^{x} L(t)dt}, \quad x_0 \le x \le T \tag{2}$$

deňsizlik ýerine ýeter.

Subudy. (1) deňsizligiň sag bölegini $\omega(x)$ bilen belgiläliň:

$$C + \int_{x_0}^{x} L(t)v(t)dt = \omega(x). \tag{3}$$

Onda

$$v(x) \le \omega(x) \tag{4}$$

bolar. Bu deňsizligi $L(x)$-e köpeltsek,

$$L(x)v(x) \le L(x)\omega(x)$$

bolar. (3) deňligi differensirläp, $\omega'(x) = L(x)v(x)$ deňligi alarys. Onda soňky deňsizligi

$$\omega'(x) \le L(x)\omega(x)$$

ýa-da

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \le L(x)$$

görnüşde ýazmak bolar. Deňsizligiň iki bölegini hem x_0-dan x-e çenli integrirläp,

$$\ln\omega(x) - \ln\omega(x_0) \le \int_{x_0}^{x} L(t)dt$$

ýa-da

$$\omega(x) \le Ce^{\int_{x_0}^{x} L(t)dt}, \quad (\omega(x_0) = C)$$

deňsizligi alarys. Bu deňsizligiň sag bölegini (4) deňsizligiň sag böleginde goýup, (2) deňsizligi alarys.

2-nji teorema (Bihari teoremasy). Goý, $v(x)$ $(x_0 \leq x \leq T)$ otrisatel däl üznüksiz fuksiýa

$$v(x) \leq C + \int_{x_0}^{x} \omega[v(t)]dt \tag{5}$$

integral deňsizligi kanagatlandyrýan bolsun, bu ýerde $C \geq 0$ – hemişelik san, $\omega(u)$ $(0 \leq u < \infty)$ kemelmeýän üznüksiz funksiýa, ondan hem başga $u > 0$ bahalar üçin $\omega(u) > 0$ we $\omega(0) = 0$.

Onda

$$v(x) \leq G^{-1}[G(C) + (x - x_0)]$$

deňsizlik ýerine ýetýändir, bu ýerde $G(u)$ funksiýa $\dfrac{1}{\omega(u)}$ funksiýanyň asyl funksiýasy, G^{-1} bolsa G funksiýanyň ters funksiýasy.

Subudy. (5) deňsizlikden

$$v(x) < C + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} \omega[v(t)]dt$$

deňsizligi alarys, bu ýerde ε – ýeterlikçe kiçi položitel san.

$\forall \in [x_0, T]$ üçin

$$v(x) < u(x) \tag{6}$$

deňsizligiň dogrudygyny görkezeliň, bu ýerde $u(x)$ funksiýa

$$u(x) = C + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} \omega[u(t)]dt \tag{7}$$

integral deňlemäniň çözüwidir. $x = x_0$ bahada

$$v(x_0) < u(x_0),$$

ýagny (6) deňsizlik ýerine ýetýär. (6) deňsizlik $[x_0, T]$ kesimiň hemme nokatlarynda ýerine ýetmeýär diýeliň. Onda $u(x)$ we $v(x)$ funksiýalaryň üznüksiz bolanlygy sebäpli, $\bar{x} > 0$ bar bolup, $v(x) < u(x)$ deňsizlik $\forall x \in (x_0, \bar{x})$ bahalar üçin ýerine ýeter we $v(\bar{x}) = u(\bar{x})$ bolar.

$$v(\bar{x}) < C + \varepsilon + \int_{x_0}^{\bar{x}} \omega[\upsilon(t)]dt \le C + \varepsilon + \int_{x_0}^{\bar{x}} \omega[u(t)]dt = u(\bar{x}).$$

Bu bolsa edilen gümana garşy gelýär.

Şeýlelikde, (6) deňsizlik subut edildi.

(7) deňlemäniň

$$u' = \omega(u), u(x_0) = C + \varepsilon$$

meselä deňgüýçlidigini görmek kyn däldir. Bu ýerden

$$\int_{c+\varepsilon}^{u} \frac{dt}{\omega(t)} = x - x_0$$

ýa-da

$$G(u) - G(C + \varepsilon) = x - x_0.$$

Teoremanyň şertlerini göz öňünde tutup, bu ýerden

$$u(x) = G^{-1}[G(C + \varepsilon) + (x - x_0)]$$

deňligi alarys. Diýmek,

$$v(x) \le G^{-1}[G(C + \varepsilon) + (x - x_0)].$$

Bu deňsizlikde $\varepsilon \to 0$ bolandaky predele geçip, subut etmeli deňsizligimizi alarys.

1-nji kesgitleme. Eger islendik $(x,\bar{y}),(x,\bar{\bar{y}}) \in R$ nokatlar üçin

$$|f(x,\bar{y})| - |f(x,\bar{\bar{y}})| \le L(x)|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|,$$

(L(x) - üznüksiz funksiýa) deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x,y)$ funksiýa $R = [x_0, T] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ oblastda y boýunça umumylaşdyrylan Lipşis şertini kanagatlandyrýar diýilýär.

Indi Gronuoll-Bellman teoremasyny peýdalanyp,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{8}$$

meseläniň çözüwiniň käbir häsiýetlerini derňäliň.

3-nji teorema. Goý, $f(x,y)$ funksiýa R oblastda y boýunça umumylaşdyrylan Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsun. Onda (8) meseläniň birden artyk çözüwi bolmaýar.

Subudy. Goý, $\varphi(x)$ we $\phi(x)$ funksiýalar (8) meseläniň çözüwleri bolsun. Olary (8) meselä deňgüýçli integral deňlemede goýup,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]dt$$

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\phi(t)]dt$$

toždestwolary alarys. Bu ýerden

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \leq \int_{x_0}^{x} | f[t,\varphi(t)] - f[t,\phi(t)]|dt.$$

Deňsizligiň sag bölegine Lipşis şertini ulansak,

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \leq \int_{x_0}^{x} L(t)[\varphi(t) - \phi(t)]dt$$

bolar. $|\varphi(x) - \phi(x)| = \upsilon(x)$ belgilemäni girizeliň. Onda soňky deňsizlik

$$\upsilon(x) \leq \int_{x_0}^{x} L(t)\upsilon(t)dt$$

görnüşi alar. Gronuoll-Bellman teoremasyny ulansak,

$$\upsilon(x) \leq 0$$

bolar. Diýmek, $|\varphi(x) - \phi(x)| = 0, \ \forall x \in [x_0, T]$ üçin. Teorema subut edildi.

2-nji kesgitleme. Eger islendik $(x,\overline{y}),(x,\overline{\overline{y}}) \in R$ nokatlar üçin

$$| f(x,\overline{y} | - f(x,\overline{\overline{y}}) \leq \omega(|\overline{y} - \overline{\overline{y}}|)$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, bu ýerde $\omega(u)$ $(0 \leq u \leq \gamma)$ kemelmeýän üznüksiz funksiýa, $u > 0$ bahalar üçin $\omega(u) > 0$, $\omega(0) = 0$ we

$$\int_0^{\gamma} \frac{du}{\omega(u)} = \infty \qquad (9)$$

onda $f(x,y)$ funksiýa y boýunça Osgud şertini kanagatlandyrýar diýilýär.

Eger $f(x,y)$ funksiýa R oblastda y boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda ol y boýunça Osgud şertini kanagatlandyrýar, sebäbi $\omega(u) = Lu$ we (9) şert ýerine ýetýär.

4-nji teorema. Goý, $f(x,y)$ funksiýa R oblastda y boýunça Osgud şertini kanagatlandyrýan bolsun. Onda (8) meseläniň birden artyk çözüwi bolmaýar.

Subudy. Goý, (8) meseläniň iki çözüwi bar diýeliň. Olary $\varphi(x)$ we $\phi(x)$ bilen belgiläp, (8) meselä deňgüýçli integral deňlemä goýsak,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]dt, \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\phi(t)]dt$$

bolar. Bu ýerden

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \le \int_{x_0}^{x} | f[t,\varphi(t)] - f(t,\phi(t))|dt,$$

$$|\varphi(x) - \phi(x)| \le \int_{x_0}^{x} \omega(|\varphi(t) - \phi(t)|)dt.$$

$|\varphi(x) - \phi(x)| = \upsilon(x)$ belgilemäni girizip,

$$\upsilon(x) \le \int_{x_0}^{x} \omega(\upsilon(t))dt$$

deňsizligi alarys. Bihari deňsizligini ulansak, onda

$$\upsilon(x) = |\varphi(x) - \phi(x)| \le G^{-1}[G(0) + (x - x_0)]$$

bolar. (9) şerti nazara alsak,

$$\upsilon(x) = |\varphi(x) - \phi(x)| \le 0$$

bolar. Bu ýerden $\varphi(x) \equiv \phi(x)$.

Şeýlelikde, teorema subut edildi.

Bellik. Subut edilen teoremadan görnüşi ýaly, eger $f(x, y)$ funksiýa y boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda (8) meseläniň birden artyk çözüwi bolmaýar.

§11. Çözüwiň parametre üznüksiz baglylygy we parametr boýunça differensirlenmegi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

meselä garalyň, bu ýerde $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda]$ – parametr.

1-nji teorema. Goý, $f(x, y, \lambda)$ üznüksiz funksiýa $\overline{R} = R \times [\lambda_0, \Lambda]$ oblastda y we λ boýunça umumylaşdyrylan Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsun, ýagny

$$| f(x, \overline{y}, \overline{\lambda}) | - f(x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{\lambda}}) \le L_1(x) | \overline{y} - \overline{\overline{y}} | + L_2(x) | \overline{\lambda} - \overline{\overline{\lambda}} |,$$

$$(x, \overline{y}, \overline{\lambda}), (x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{\lambda}}) \in \overline{R},$$

bu ýerde $L_l(x)$ ($l = 1{,}2$; $x_0 \le x \le T$) – üznüksiz funksiýalar. Onda (1) meseläniň çözüwi λ boýunça üznüksiz funksiýadyr.

Subudy. Goý, $\lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda_0, \Lambda]$ bolsun. (1) meseläniň çözüwini $\varphi(x, \lambda)$ bilen belgiläliň. λ-nyň görkezilen bahalaryna degişli $\varphi(x, \lambda_1)$ we $\varphi(x, \lambda_2)$ çözüwleri (1) meselä deňgüýçli bolan integral deňlemede goýup,

$$\varphi(x, \lambda_l) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t, \lambda_l), \lambda_l] dt, \quad (i = 1, 2)$$

toždestwolary alarys. Bu ýerden

$$| \varphi(x, \lambda_1) - \varphi(x, \lambda_2) | \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} | f[t, \varphi, (t, \lambda_1), \lambda_1] - f[t, \varphi, (t, \lambda_2), \lambda_2] | dt \le$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} [L_1(t)|\varphi(t,\lambda_1) - \varphi(t,\lambda_2)| + L_2(t)|\lambda_1 - \lambda_2|]dt,$$

$$|\varphi(x,\lambda_1) - \varphi(x,\lambda_2)| \leq \int_{x_0}^{T} L_2(t)|\lambda_1 - \lambda_2|dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} L_1(t)|\varphi(t,\lambda_1) - \varphi(t,\lambda_2)|dt$$

Bu ýerde

$$|\varphi(x,\lambda_1) - \varphi(x,\lambda_2)| = \upsilon(x), \quad \int_{x_0}^{T} L_2(t)|\lambda_1 - \lambda_2|dt = C$$

belgilemeleri girizsek, onda

$$\upsilon(x) \leq C + \int_{x_0}^{x} L_1(t)\upsilon(t)\,dt$$

bolar. Gronuoll-Bellman teoremasyny ulansak,

$$\upsilon(x) \leq C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} L_1(t)dt}$$

ýa-da

$$\upsilon(x) \leq \int_{x_0}^{T} L_2(t)\,dt \cdot e^{\int_{x_0}^{T} L_1(t)dt} \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|$$

bolar. Bu deňsizligi

$$|\varphi(x,\lambda_1) - \varphi(x,\lambda_2)| \leq L|\lambda_1 - \lambda_2|$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $L = \int_{x_0}^{T} L_2(t)\,dt \cdot e^{\int_{x_0}^{T} L_1(t)dt}$ – hemişelik san.

Ýokardaky deňsizlikden görnüşi ýaly, $|\lambda_1 - \lambda_2|$ ýeterlikçe kiçi bolanda $|\varphi(x,\lambda_1) - \varphi(x,\lambda_2)|$ ýeterlikçe kiçi bolar. Bu bolsa $\varphi(x,\lambda)$ çözüwiň λ görä üznüksiz funksiýadygyny görkezýär.

2-nji teorema. Goý, $f(x,y,\lambda)$ üznüksiz funksiýa $\overline{R}$ oblastda y boýunça Osgud şertini we λ boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsun, ýagny

$$|f(x,\overline{y},\overline{\lambda})-f(x,\overline{\overline{y}},\overline{\overline{\lambda}})|\le\omega(|\overline{y}-\overline{\overline{y}}|)+L|\overline{\lambda}-\overline{\overline{\lambda}}|,$$
$$(x,\overline{y},\overline{\lambda}),(x,\overline{\overline{y}},\overline{\overline{\lambda}})\in\overline{R},$$

Onda (1) meseläniň çözüwi λ-a görä üznüksiz funksiýadyr.

Subudy. Goý, $\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda_0,\Lambda]$ bolsun. (1) meseläniň çözüwini $\varphi(x,\lambda)$ bilen belgiläliň. Onda

$$|\varphi(x,\lambda_1)-\varphi(x,\lambda_2)|\le$$
$$\le\int_{x_0}^{x}|f[t,\varphi(t,\lambda_1),\lambda_1]-f[t,\varphi(t,\lambda_2),\lambda_2]|dt\le$$
$$\le\int_{x_0}^{x}\omega(|\varphi(x,\lambda_1)-\varphi(t,\lambda_2)|)dt+L(T-x_0)|\lambda_1-\lambda_2|$$

bolar. $\upsilon(x)=|\varphi(x,\lambda_1)-\varphi(x,\lambda_2)|$ belgilemäni girizip, bu ýerden

$$\upsilon(x)\le C+\int_{x_0}^{x}\omega(\upsilon(t))dt$$

deňsizligi alarys, bu ýerde $C=L(T-x_0)|\lambda_1-\lambda_2|$. Bihari teoremasyny ulanyp,

$$|\varphi(t,\lambda_1)-\varphi(t,\lambda_2)|\le G^{-1}[G(L(T-x_0)|\lambda_1-\lambda_2|+(x-x_0))]$$

deňsizligi alarys.

Eger $|\lambda_1-\lambda_2|$ ýeterlik kiçi bolsa, onda $|\varphi(t,\lambda_1)-\varphi(t,\lambda_2)|$-nyň ýeterlik kiçi bolýandygy bu ýerden gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

Indi (1) meseläniň çözüwiniň λ boýunça önüminiň bardygyny görkezeliň hem-de ony kesgitläliň.

3-nji teorema. Goý, $f(x,y,\lambda)$ üznüksiz funksiýanyň $\overline{R}=[x_0,T]\times[y_0-b,y_0+b]\times[\lambda_0,\Lambda]$ oblastda f'_y, f'_λ üznüksiz önümleri bar bolsun we

$$|f'_y| \le L_1, |f'_\lambda| \le L_2, L_1, L_2 = const.$$

Onda (1) meseläniň çözüwiniň λ boýunça önümi bardyr we ol

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^{x} f'_\lambda(t,y,\lambda) \cdot \exp\left[\int_t^x f'_y(s,y,\lambda)\,ds\right] dt$$

formula boýunça tapylýandyr.

Subudy. Goý, $\bar{\lambda} \in [\lambda_0, \Lambda]$ we λ-nyň bu bahasyna degişli (1) meseläniň çözüwi $\bar{y}(x)$ bolsun. Onda

$$\frac{d\bar{y}}{d\lambda} = f(x,\bar{y},\bar{\lambda}), \quad \bar{y}(x_0) = y_0 \tag{2}$$

bolar. (2) we (1) deňliklerden alarys:

$$\frac{d(\bar{y}-y)}{dx} = f(x,\bar{y},\bar{\lambda}) - f(x,y,\lambda),$$

$$\bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0.$$

Deňligiň sag bölegine Lagranž formulasyny ulansak, onda

$$\frac{d(\bar{y}-y)}{dx} = f'_y(x,\tilde{y},\bar{\lambda})(\bar{y}-y) + f'_\lambda(x,y,\tilde{\lambda})(\bar{\lambda}-\lambda), \tag{3}$$

$$\bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$$

bolar, bu ýerde

$$\tilde{y} = y + \vartheta_1(\bar{y}-y),\ \tilde{\lambda} = \lambda + \vartheta_2(\bar{\lambda}-\lambda),\ 0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < 1.$$

Goý, $\tilde{\lambda} \ne \lambda$ bolsun.

$$\upsilon(x,\lambda,\tilde{\lambda}) = \frac{\bar{y}-y}{\bar{\lambda}-\lambda}$$

belgilemäni girizip, (3) meseläni

$$\frac{d\upsilon}{dx} = f'_y(x,\tilde{y},\bar{\lambda})\upsilon + f'_\lambda(x,y,\tilde{\lambda}),$$

$$\upsilon(x_0,\lambda,\bar{\lambda}) = 0$$

görnüşde ýazarys. Bu meseläniň çözüwini

$$\upsilon(x,\lambda,\overline{\lambda}) = \int_{x_0}^{x} f'_{\lambda}(t,y,\tilde{\lambda}) \times \exp\left[\int_{t}^{x} f'_{y}(s,\tilde{y},\overline{\lambda})\,ds\right]dt$$

ýa-da

$$\frac{\overline{y}-y}{\overline{\lambda}-\lambda} = \int_{x_0}^{x} f'_{\lambda}(t,y,\tilde{\lambda}) \times \exp\left[\int_{t}^{x} f'_{y}(s,\tilde{y},\tilde{\lambda})\,ds\right]dt$$

görnüşde taparys. Soňky deňlikde $\overline{\lambda} \to \lambda$ bolandaky predele geçsek, onda

$$\lim_{\overline{\lambda}\to\lambda}\frac{\overline{y}-y}{\overline{\lambda}-\lambda} = \int_{x_0}^{x} f'_{\lambda}(t,y,\lambda)\exp\left[\int_{t}^{x} f'_{y}(s,y,\lambda)\,ds\right]dt$$

ýa-da

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda} = \int_{x_0}^{x} f'_{\lambda}(t,y,\lambda)\exp\left[\int_{t}^{x} f'_{y}(s,y,\lambda)\,ds\right]dt$$

bolar.

§12. Aýratyn çözüwler barada

Eger

$$y' = f(x,y)$$

deňlemäniň sag bölegi R oblastyň her bir nokadynda Pikar teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýan bolsa, onda ol deňlemäniň (x_0,y_0) nokatdan geçýän ýeke-täk çözüwi bar. Bu ýagdaýda (x_0,y_0) nokada ady nokat diýilýär.

Eger (x_0, y_0) nokatda deňlemäniň çözüwiniň ýeke-täkligi bozulsa, onda ol nokada *aýratyn nokat* diýilýär.

Eger $y = \varphi(x)$ çözüwiň grafiginiň hemme nokatlarynda ýeke-täklik şerti bozulsa, onda ol çözüwe *aýratyn çözüw* diýilýär.

Pikar teoremasyndan belli bolşy ýal y, çözüwiň ýeke-täklik şertini üpjün edýän Lipşis şertidir. Oňa görä-de tekizlikde aýratyn çözüwleri

Lipşis şertiniň ýerine ýetmeýän ýerlerinden (nokatlaryndan) gözlemeli. Çözüwiň grafiginiň aýratyn nokatlardan durýandygyny ýa-da durmaýandygyny Lipşis şerti bilen barlamak aňsat iş däl.

Şonuň üçin durmuşda Lipşis şertiniň ýerine

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$$

şert ulanylýar. Bu deňsizligiň Lipşis şertini üpjün edýändigi görkezilipdi. Bu ýagdaýda differensial deňlemäniň aýratyn çözüwi bolmaýar.

Eger $f(x,y)$ funksiýanyň $\frac{\partial f}{\partial y}$ önümi $y = \varphi(x)$ bolanda tükeniksizlige öwrülse, ýagny

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} = \infty$$

bolsa, onda Lipşis şerti ýerine ýetmeýär. Diýmek, $y=\varphi(x)$ funksiýanyň aýratyn çözüw bolaýmaklygy ähtimaldyr.

Eger $y = \varphi(x)$ funksiýa berlen differensial deňlemäni kanagatlandyrsa, onda ol aýratyn çözüw bolar.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ hususy önümi tükeniksizlige öwürýän birnäçe funksiýalaryň bolmagy mümkin. Olaryň aýratyn çözüwler bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny görkezilen usul bilen anyklamak bolar.

1-nji mysal. $y' = \sqrt{y-x}$ deňlemäniň aýratyn çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen ýagdaýda

$$f(x,y) = \sqrt{y-x}\,.$$

Bu funksiýanyň önümi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$$

$y = x$ bolanda tükeniksizlige öwrülýär, ýagny

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=x} = \infty\,.$$

Diýmek, $y = x$ gönüniň nokatlarynda Lipşis şerti ýerine ýetmeýär. Bu $y = x$ funksiýanyň berlen deňlemede goýlanda, ony kanagatlandyrmaýandygyny görýäris.

Diýmek, $y = x$ funksiýa ol deňlemäniň aýratyn çözüwi bolmaýar.

2-nji mysal. $y' = \sqrt{y - x} + 1,$

$y - x \geq 0$

deňlemäniň aýratyn çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Biziň deňlemämizde

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + 1\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - x}}.$$

Öňki mysaldaky ýaly $y = x$ bolanda $\frac{\partial f}{\partial y}$ tükeniksizlige öwrülýär, ýagny Lipşis şerti ýerine ýetmeýär. Bu $y = x$ funksiýanyň garalýan deňlemäniň çözüwidigi aýdyňdyr.

Garalýan deňlemede $y - x = u$ belgilemäni girizip,

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} + x$$

umumy çözüwini taparys. Tapylan $y = x$ çözüwiň her bir (x_0, y_0) nokadyndan umumy çözüwiň $C = -x_0$ bahasyna degişli

$$y = \frac{(x - x_0)^2}{4} + x$$

çözüwi geçýär.

Şeýlelikde, $y = x$ çözüwiň her bir nokadyndan iki sany integral egri geçýär. Diýmek, $y = x$ aýratyn çözüw.

II bap

ÖNÜME GÖRÄ ÇÖZÜLMEDIK DEŇLEMELER

Bapda önüme görä çözülmedik birinji tertipli ady differensial deňlemeler öwrenilýär.

§1. Önüme görä çözülmedik differensial deňlemäniň çözüwiniň barlyk we ýeke-täklik teoremasy

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň. (1) deňleme üçin Koşi meselesini kesgitläliň. (1) differensial deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

şerti kanagatlandyrýan $y = \varphi(x)$ çözüwini tapmaklyga Koşi meselesi diýilýär.

(2) deňlige başlangyç şert diýilýär, x_0, y_0 sanlara başlangyç bahalar diýilýär.

$$R^* = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \times [y'_0 - c, y'_0 + c]$$

belgilemäni girizeliň, bu ýerde a, b, c berlen hakyky sanlar, y'_0 san

$$F(x_0, y_0, y') = 0$$

deňlemäniň hakyky kökleriniň biri.

Indi (1) deňlemäniň (2) şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk çözüwiniň bardygyny subut edeliň.

Teorema. Goý, $F(x, y, y')$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan bolsun:

a) $F(x, y, y')$ funksiýa F_y' we $F_{y'}'$ hususy önümleri bilen bilelikde R^* oblastda üznüksiz,

b) $F_{y'}'(x_0, y_0, y_0') \neq 0$

Onda $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ kesimde (1)-(2) meseläniň $y = y(x)$ ýeke--täk çözüwi bardyr we onuň üçin $y'(x_0) = y_0'$.

Subudy. Teoremanyň şertlerinde $F(x, y, y')$ funksiýa anyk däl funksiýanyň barlyk we ýeke-täklik teoremasynyň talaplaryny kanagatlandyrýar. (Bu bize matanaliz dersinden bellidir). Oňa görä-de (1) deňleme $R^{**} \subset R^*$ oblastda y'-i birbahaly funksiýa hökmünde, ýagny

$$y' = f(x,y) \tag{3}$$

görnüşde kesgitleýär. $f(x,y)$ hususy önümi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bilen bilelikde üznüksiz funksiýa bolup, $f(x_0, y_0) = y_0'$ deňlik ýerine ýetýär.

Diýmek, $f(x,y)$ R^{**} oblastda üznüksiz funksiýa we y boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýar, ýagny (3) deňlemaniň sag bölegi Pikar teoremasynyň şertlerini üpjün edýär. Onda (3) deňlemäniň, ýagny (1) deňlemäniň $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ kesimde $y(x_0) = y_0$ şerti kanagatlandyrýan $y = y(x)$ ýeke-täk çözüwi bardyr.

Indi $y'(x_0) = y_0'$ bolýandygyny görkezeliň. Belli bolşy ýaly, $y = y(x)$ (3) deňlemäniň (2) şerti kanagatlandyrýan çözüwi. Onda hemme $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ bahalar üçin

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Goý, $x = x_0$ bolsun. Onda

$$y'(x_0) \equiv f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y'_0$$

Teorema subut edildi.

§2. Aýratyn çözüwler barada

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

deňlemäniň aýratyn çözüwini tapmaklyga garalyň.

Garalýan (1) deňlemäniň çözüwiniň ýeke-täklik şertiniň bozulýan nokatlaryny tapalyň. Onuň üçin (1) deňlemäni y boýunça differensirlesek,

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0$$

bolar, bu ýerde

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}$$

deňligi alarys.

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$ şertiň ýerine ýetmegi üçin $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ bolmaly.

Şeýlelikde, aýratyn çözüwleri tapmak üçin koordinatalary

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

deňlemeleri kanagatlandyrýan nokatlary gözlemeli. Sistemadan y'-i çykaryp,

$$\varphi(x,y) = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemä (1) deňlemäniň *diskriminant egrisi* diýilýär. Ol deňlemäniň birnäçe bolmagy mümkin. Diskriminant egrileriň aýratyn çözüwler bolmagy ähtimaldyr.

Şeýlelikde, (1) deňlemäniň aýratyn çözüwini tapmak üçin ilki bilen onuň diskriminant egrilerini tapmaly, soňra olaryň integral egrilerdigini (çözüwlerdigini) görkezmeli, iň soňunda bu integral egrileriň nokatlarynda çözüwiň ýeke-täklik şertiniň bozulýandygyny derňemeli.

Mysal.

$$y - xy' + e^{y'} = 0$$

deňlemäniň aýratyn çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňleme üçin (2) sistemany

$$\begin{cases} y - xy' + e^{y'} = 0 \\ -x + e^{y'} = 0 \end{cases}$$

görnüşde alarys. Bu sistemadan y'-i çykaryp,

$$y = x\ln x - x$$

deňleme bilen kesgitlenýän diskriminant egrini taparys. Bu funksiýanyň berlen deňlemäniň çözüwidigi aýdyňdyr.

Berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = Cx - e^{C}$$

görnüşde bolar. Bu gönüler maşgalasynyň deňlemesidir.

Diýmek, $y = x\ln x - x$ integral egriniň her bir nokadyndan iki sany integral egri geçýär, olaryň biri bu egriniň özi, beýlekisi bolsa gönüler maşgalasyndan bir gönüdir.

Şunlukda, diskriminant egri deňlemäniň aýratyn çözüwi bolýar.

§3. Deňlemeleriň çözüliş usullary

1.

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň.

Goý, (1) deňleme öz argumentleriniň hiç birine görä çözülmedik deňleme bolsun. (1) deňlemede x, y, y' üýtgeýän ululyklary üç ölçegli giňişligiň koordinatlary diýip kabul etsek, onda bize belli bolşy ýaly, ol bu giňişlikde üstüň deňlemesi bolar. Bu ýagdaýda, ony

$$x = \varphi(u, v), \;\; y = \psi(u, v), \;\; y' = \omega(u, v) \tag{2}$$

parametrik görnüşde aňlatmak bolar. Bu funksiýalar (1) deňlemäni $F[\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v)] = 0$ toždestwo öwürmelidirler, bu ýerde u, v – parametrler, $\varphi(u,v)$ we $\psi(u,v)$ parametrleriň üýtgeýän oblastynda differensirlenýän funksiýalar. (2) deňlikden dx-i we dy-i tapalyň:

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{dv}dv,$$
$$dy = \frac{\partial\psi}{du}du + \frac{\partial\psi}{dv}dv.$$

Bize $dy = y'dx$ toždestwo bellidir. Bu toždestwoda y', dx, dy üçin tapylan aňlatmalary goýup

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \omega(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right) \tag{3}$$

deňlemäni alarys, bu ýerde u we v deňhukukly üýtgeýän ululyklar. Berlen ýagdaýda, bagly däl üýtgeýän ululyga derek u-y, gözlenilýän funksiýa derek v-ni kabul etsek, onda (3) deňlemäni

$$\frac{dv}{du} = \frac{\omega(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v} - \omega(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}} \tag{4}$$

görnüşde ýazarys. Sag böleginiň maýdalawjysy noldan tapawutly diýeliň. (4) deňlemäniň sag bölegi u-a we v-e görä funksiýadyr. Ony $f(u,v)$ bilen belgiläp,

$$\frac{dv}{du} = f(u,v) \tag{5}$$

deňlemäni alarys. Şeýlelikde, (1) deňleme önüme görä çözülen differensial deňlemä getirildi.

Goý, $v = \sigma(u,C)$ funksiýa (5) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. Onda (2) deňliklerden (1) deňlemäniň parametrik görnüşdäki umumy çözüwini alarys:

$$x = \varphi(u,\sigma(u,C)), \ \ y = \psi(u,\sigma(u,C)).$$

Eger bu deňliklerden u parametri çykarmak başartsa, onda (1) deňlemäniň umumy integraly alnar.

Eger $v = h(u)$ funksiýa (5) deňlemäniň aýratyn çözüwi bolsa, onda

$$x = \varphi(u,h(u)), \ \ y = \psi(u,h(u))$$

(1) deňlemäniň aýratyn çözüwi bolmagy mümkin.

Eger (4) deňlemäniň çözüwini tapmak kyn bolsa, onda (3) deňlemede bagly däl üýtgeýän ululyga derek v-ni, gözlenilýän funksiýa derek u-y kabul edip, önüme görä çözülen başga görnüşli differensial deňlemäni almak bolar. Ol deňlemäniň çözüwini tapmak (4) deňlemäniň çözüwini tapmakdan ýeňil bolmagy mümkin.

1-nji mysal.

$$y' = e^{\frac{xy'}{y}}$$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Berlen deňlemäni parametrik görnüşde aňladalyň. Eger

$$x = uve^{-u}, \quad y = v, \quad y' = e^{u} \tag{6}$$

funksiýalary görnüşlerde kesgitläp, olary berlen deňlemede goýsak, $e^u \equiv e^u$ toždestwony alarys.

Indi berlen deňlemäni çözmäge geçeliň. dx-i we dy-i tapyp we $dy = y'dx$ toždestwoda goýup,

$$dv = vdu + udv - uvdu$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde u-ny bagly däl üýtgeýän ululyga derek, v-ni gözlenilýän funksiýa derek kabul edýäris. Onda

$$\frac{dv}{du} = v + u\frac{dv}{du} - uv$$

ýa-da

$$(u-1)\left(\frac{dv}{du} - v\right) = 0$$

deňlemäni alarys.

Iki ýagdaýa garalyň:

1. $\dfrac{dv}{du} - v = 0.$

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip $\dfrac{dv}{v} = du$ deňlemäni, soňra integrirläp $v = Ce^u$ çözüwi taparys. v-niň bu bahasyny (6) deňliklerde goýsak

$$x = Cu, \quad y = Ce^u$$

bolar. Bu funksiýalar bilelikde berlen deňlemäniň parametrik görnüşdäki umumy çözüwi bolar. Bulardan u-ny çykaryp, ol deňlemäniň $y = Ce^{x/C}$ görnüşde umumy çözüwini alarys:

2) $u - 1 = 0$, $u = 1$ bahany (6) deňliklerde goýup $x = ve^{-1}$, $y = v$ deňlikleri alarys. Bu ýerden $y = ex$ funksiýa berlen deňlemäniň aýratyn çözüwi bolar.

2. (1) deňlemäniň x-e görä çözülen ýagdaýyna garalyň:

$$x = F_1(y, y') \tag{7}$$

$y' = p$ belgileme girizeliň, bu ýerde p – parametr. Onda

$$x = F_1(y, p) \tag{8}$$

bolar. Bu funksiýanyň differensialy

$$dx = \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial p}dp$$

bolar. Bu ýerde dx-iň ýerine $\dfrac{dy}{p}$-ni ýazyp,

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial p}dp$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde y we p deňhukukly ululyklardyr. Eger y-i bagly däl üýtgeýän ululyk, p-ni gözlenilýän funksiýa diýip kabul etsek, onda bu ýerden önüme görä çözülen differensial deňlemäni

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\dfrac{1}{p} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial p}} \tag{9}$$

görnüşde alarys. Bulara meňzeş deňlemäni çözmekligiň usullary birinji bapda öwrenilipdi.

Goý,

$$\sigma(y, p, C) = 0 \tag{10}$$

(9) deňlemäniň umumy integraly bolsun. Onda (8) we (10) deňlikler bilelikde (7) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy in-

tegraly bolar. Eger ol deňliklerden p parametri çykarylsa, onda (7) deňlemäniň umumy integraly alnar.

Eger $p = \gamma(y)$ funksiýa (9) differensial deňlemäniň aýratyn çözüwi bolsa, onda ony (8) deňlikde goýup

$$x = F_1(y, \gamma(y))$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň (7) deňlemäniň aýratyn çözüwi bolmagy mümkindir.

2-nji mysal.

$$x = \ln\frac{y}{y'} \quad \text{deňlemäni çözmeli.}$$

Çözülişi. $y' = p$ diýeliň. Onda $x = \ln\frac{y}{p}$ bolar. Bu ýerden

$$dx = \frac{1}{y}dy - \frac{1}{p}dp$$

bolýar. Bu ýerde dx-iň ornuna $\frac{dy}{p}$-ni goýup,

$$\frac{dy}{p} = \frac{1}{y}dy - \frac{1}{p}dp$$

deňlemäni alarys. Eger p-ni gözlenilýän funksiýa diýip hasap etsek, onda bu deňlemäni

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}p - 1 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p - 1$$

görnüşde ýazyp bileris. Birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwini bize belli bolan Lagranž usuly bilen $p = y(C - \ln y)$ görnüşde taparys.

Şeýlelikde,

$$\begin{cases} x = \ln\frac{y}{p} \\ p = y(C - \ln y) \end{cases}$$

funksiýalar berlen deňlemäniň parametrik çözüwi bolar. Bu ýerde p parametri çykaryp, ol deňlemäniň umumy integralyny

$$x = -\ln(C - \ln y) \text{ ýa-da } e^{-x} + \ln y = C$$

görnüşde ýazyp bileris.

3. Goý, (1) deňleme y-e görä çözülen bolsun. Onda

$$y = F_2(x, y') \tag{11}$$

bolar. $y' = p$ belgilemäni girizsek, onda

$$y = F_2(x, p) \tag{12}$$

bolar. Bu funksiýanyň differensialyndan, ýagny

$$dy = \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial p}dp$$

deňlikden, $dy = pdx$ gatnaşygy göz öňünde tutup,

$$pdx = \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial p}dp$$

deňligi alarys.

Eger p-ni gözlenilýän funksiýa diýip hasap etsek, onda önüme görä differensial deňleme, ýagny

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

ýa-da

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \dfrac{\partial F_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial p}}$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy integralyny

$$\sigma(x, p, C) = 0 \tag{13}$$

görnüşde taparys. (12) we (13) deňlikler bilelikde (11) deňlemäniň parametrik görnüşdäki umumy integraly bolar.

Eger olardan p çykarylsa, onda alnan funksiýa (11) deňlemäniň umumy integraly bolar.

Eger $p = \gamma(x)$ funksiýa ýokardaky deňlemäniň aýratyn çözüwi bolaýsa, onda

$$y = F_2(x, \gamma(x))$$

funksiýanyň (11) deňlemäniň aýratyn çözüwi bolaýmagy ähtimaldyr.

3-nji mysal.

$y = x + y' - \ln y'$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $y' = p$ belgilemäni girizip,

$$y = x + p - \ln p$$

funksiýany alarys. Munuň differensialy

$$dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$$

bolar. Bu ýerde dy-iň ornuna pdx-i goýup,

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp$$

deňlemäni alarys.

Goý, $p - 1 \neq 0$ diýeliň. Onda p – 1-e gysgaldyp, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňlemä, ýagny

$$dx = \frac{dp}{p}$$

deňlemä geleris. Bu deňlemäni integrirlesek, onda $x = \ln p + C$ bolar.

Şeýlelikde,

$$\begin{cases} y = x + p - \ln p \\ x = \ln p + C \end{cases}$$

funksiýalar bilelikde berlen deňlemäniň parametrli umumy çözüwi bolar. Bu ýerde p-ni çykaryp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = e^{x-C} + C$$

görnüşde alarys.

Goý, $p - 1 = 0$ diýeliň, onda $p = 1$ bahany

$$y = x + p - \ln p$$

funksiýada goýup, $y = x + 1$ funksiýany alarys. Bu funksiýanyň aýratyn çözüw bolýandygyny görmek kyn däldir.

4. $$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (14)$$

deňlemä garalyň, bu ýerde φ, ψ–differensirlenýän funksiýalar. (14) deňleme (11) deňlemäniň hususy halydyr. (14) deňlemä Lagranž deňlemesi diýilýär.

(14) deňlemede $y' = p$ belgileme girizip,

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{15}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň differensialyny tapyp we dy-iň ornuna pdx-i goýup,

$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp$$

deňlemäni alarys.

Bu ýerde x we p deňhukukly üýtgeýän ululyklardyr. Eger bu ýerde gözlenilýän funksiýa x diýip hasap etsek, onda

$$p\frac{dx}{dp} = \varphi(p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p)$$

ýa-da

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{16}$$

bolar. Bu bolsa birjynsly däl çyzykly deňlemedir. Onuň umumy çözüwini

$$x = C \cdot \exp\left(-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp\right) + \tag{17}$$

$$\exp\left(-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp\right) \cdot \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \exp\left(\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\right)dp$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde $\varphi(p) - p \neq 0$.

(15) we (17) deňlikler bilelikde (14) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy integraly bolar. Eger ol deňliklerden p parametri çykarmak başartsa, onda (14) deňlemäniň umumy integralyny $\omega(x, y, C) = 0$ görnüşde alarys.

Eger (16) deňlemede $\varphi(p) - p = 0$ bolsa, onda bu deňlemäniň p_i hakyky köklerini tapyp we olary (15) funksiýada ornuna goýup,

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \quad (i = \overline{1, n})$$

çözüwleri alarys. Bu çözüwler özlerinde hemişelik sanlary saklamaýarlar. Oňa görä-de, olaryň (14) deňlemäniň aýratyn çözüwleri bolmaklygy ähtimaldyr.

4-nji mysal.

$y = xy'^2 + y'^2$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Berlen deňleme Lagranž deňlemesidir. $y' = p$ belgileme girizip,

$$y = xp^2 + p^2$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň differensialyny tapyp we dy-iň ornuna pdx-i goýup,

$$pdx = p^2dx + 2pxdp + 2pdp$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde x gözlenilýän funksiýa, p onuň argumenti diýip kabul etsek, onda

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2p}{p^2 - p}x = \frac{2p}{p - p^2}$$

görnüşli çyzykly birinji tertipli deňleme alnar.

$p^2 - p \neq 0$ diýeliň. Onda deňlemäni

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p - 1}x = \frac{2}{1 - p}$$

görnüşde ýazyp, umumy çözüwini

$$x = \frac{C}{(p - 1)^2} - 1$$

görnüşde taparys. Şeýlelikde, berlen deňlemäniň parametrli çözüwini

$$y = xp^2 + p^2$$
$$x = \frac{C}{(p - 1)^2} - 1$$

ýa-da

$$x = \frac{C}{(p - 1)^2} - 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p - 1)^2}$$

görnüşde alarys.

Bu ýerde p parametri çykarmaga synanyşalyň. Birinji deňlikden

$$(p-1)^2 = \frac{C}{x+1}, \qquad p = \sqrt{\frac{C}{x+1}} + 1$$

bolar. p-niň bu bahasyny ikinji deňlikde goýup, ýönekeýleşdirilenden soň berlen deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = (\sqrt{C} + \sqrt{x+1})^2$$

görnüşde alarys.

Indi $p^2 - p = 0$ diýeliň. Onda $p = 0$, $p = 1$ bahalary

$$y = xp^2 + p^2$$

funksiýada yzygiderli goýup,

$$y = 0, \qquad\qquad y = x + 1$$

funksiýalary alarys. Bu ýerde $y = 0$ aýratyn çözüw bolar. $y = x + 1$ hususy çözüw bolar, sebäbi bu çözüw umumy çözüwden $C = 0$ bahada alynýar.

5.

$$y = xy' + \psi(y') \tag{18}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde ψ differensirlenýän funksiýa. (18) deňlemä Klero deňlemesi diýilýär. Bu deňleme Lagranž deňlemesiniň hususy halydyr, sebäbi ol deňleme (14) deňlemeden $\varphi(y') = y'$ bolanda alynýar. Eger $y' = p$ diýip belgilesek, onda (18) deňlemeden

$$y = xp + \psi(p) \tag{19}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň differensialy

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

görnüşde bolar. Ýokardaky belgilemäni, ýagny $dy = pdx$ deňligi göz öňünde tutup, bu ýerden

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

ýa-da

$$dp(x + \psi'(p)) = 0$$

deňlemäni alarys.

Iki ýagdaýa garalyň:
1. Goý, $dp = 0$ bolsun. Onda $p = C$ bolar. Bu bahany (19) funksiýada goýup, (16) deňlemäniň

$$y = Cx + \psi(C) \tag{20}$$

görnüşli umumy çözüwini alarys;

2. $$x + \psi'(p) = 0$$

ýa-da

$$x = -\psi'(p). \tag{21}$$

Eger $\psi'(p)$ funksiýanyň ikinji tertipli $\psi''(p)$ üznüksiz önümi bar bolup we $\psi''(p) \neq 0$ bolsa, onda (19) we (21) funksiýalar bilelikde (18) deňlemäniň çözüwini berýändigini görkezeliň. y'-i tapalyň:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d[-\psi'(p)p + \psi(p)]}{d[-\psi'(p)]} = \frac{-p\psi''(p)dp}{-\psi''(p)dp} = p, \tag{22}$$

(19), (21) we (22) formulalary nazarda tutup, (18) deňlemeden

$$-p\psi'(p) + \psi(p) = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

toždestwony alarys. Differensial geometriýa dersinden belli bolşy ýaly, (19) we (21) deňlikler bilelikde integral egriler maşgalasynyň ***oramasy*** bolýar.

Eger (19) we (21) deňliklerden p-ni çykaryp bolsa, onda

$$\sigma(x, y) = 0 \text{ ýa-da } y = \sigma_1(x)$$

funksiýany alarys. Bu funksiýa ýa-da integral egriler oramasy (18) deňlemäniň aýratyn çözüwi bolar. Bu çözüw umumy çözüwden alynmaýar.

5-nji mysal. $y - xy' = e^{y'}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu ýerde $y' = p$ belgilemäni girizsek, onda

$$y = xp - e^p$$

bolar. Bu funksiýanyň differensialyny tapsak we ýokarky belgilemeden peýdalansak,

$$pdx = pdx + xdp - \mathrm{e}^p\, dp$$

ýa-da

$$dp\,(x - e^p) = 0$$

bolar. Bu ýerde iki ýagdaýa garalyň.

Goý, $dp = 0$ bolsun. Onda $p = C$ bolar. Şonuň üçin Klero deňlemesiniň umumy çözüwi

$$y = Cx - e^C$$

görnüşde bolar. Bu göni çyzyklar maşgalasydyr.

Goý, $x - e^p = 0$ bolsun. Bu ýerden $x = e^p$ bolar. Şeýlelikde,

$$\begin{cases} y = xp - e^p \\ x = e^p \end{cases}$$

funksiýalar Klero deňlemesiniň parametrli çözüwidir. Bu sistemadan p parametri çykarsak, onda

$$y = x\,(\ln x - 1)$$

funksiýany alarys. Bu funksiýa berlen deňlemäniň aýratyn çözüwi bolar.

Mesele. Galtaşýanynyň koordinatalar oklary bilen çäklenen kesimi a deň bolan egrini tapmaly.

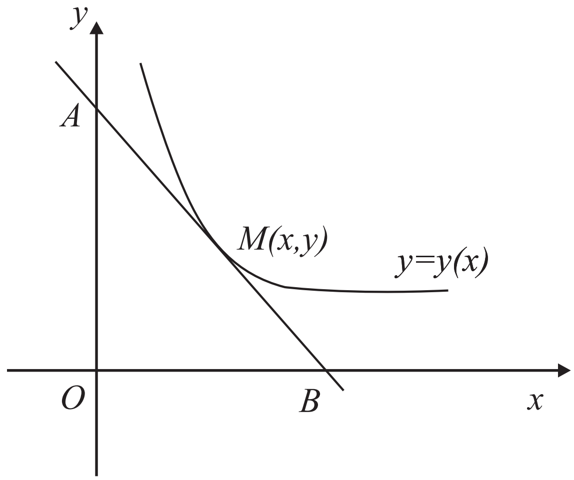
Çözülişi. Goý, $y = y(x)$ gözlenilýän egriniň deňlemesi bolsun. $M\,(x, y)$ gözlenilýän egriniň nokady, M nokatda egrä geçirilen galtaşýanyň deňlemesi

$$Y - y = y'\,(X - x)$$

bolar, bu ýerde X we Y – galtaşma nokadynyň üýtgeýän koordinatalary, x we y – egriniň berlen nokadynyň koordinatalary.

Şerte görä, $|AB| = a$. Galtaşýanyň koordinata oklaryndan kesip alýan kesimlerini onuň deňlemesinden

$$|OA| = y - xy', \quad |OB| = \frac{xy' - y}{y'}$$



görnüşde alarys. Pifagor teoremasyny ulansak,

$$|OA|^2 + |OB|^2 = a^2$$

ýa-da

$$(y - xy')^2 + \left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 = a^2$$

bolar. Bu deňlemäni y-e görä çözüp,

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

görnüşli Klero deňlemesini alarys. Onuň umumy çözüwi

$$y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$$

görnüşde bolar. Bu gönüler maşgalasydyr. Aýratyn çözüwi tapmak üçin Klero deňlemesinde $y' = p$ belgileme girizip,

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýany p boýunça differensirlesek,

$$0 = x \pm \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}$$

bolar. Ýokardaky funksiýalary

$$x = \mp \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad y = \pm \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$$

görnüşlerde ýazalyň. Bu deňliklerden p parametri çykarmak üçin olary $\frac{2}{3}$ derejä göterip, degişli böleklerini goşsak, onda

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

deňlemäni alarys. Bu astroidanyň deňlemesidir. Ol ýokardaky görkezilen gönüler (integral egriler) maşgalasynyň oramasy bolýar. Oňa görä-de ol berlen deňlemäniň aýratyn çözüwi bolar.

6. (1) deňlemäniň başga görnüşlerine garalyň.

Goý, (1) deňleme

$$\begin{aligned} &a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots \\ &\ldots + a_{n-1}(x,y)(y') + a_n(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

görnüşde berlen bolsun, bu ýerde $a_i\,(x, y)$ $(i = 0,1,\ldots, n)$ käbir oblastda üznüksiz funksiýalar, $a_0\,(x, y) \neq 0$.

(23) deňleme derejesi n bolan y'-e görä birinji tertipli differensial deňlemedir. Ol deňlemäniň n sany köki bardyr. Olary y'-e görä çözüp,

$$y' = f_k(x, y) \qquad (k = 1,2,\ldots, n) \tag{24}$$

deňlemeleri alarys, bu ýerde $f_k\,(x,\ y)$ hakyky we kompleks bahaly funksiýalardyr. Biz bu ýerde hakyky bahaly deňlemelere gararys.

Goý, $f_k(x, y)$ funksiýalaryň m sanysy hakyky bahaly bolsun. Onda bu ýerden $y' = f_m(x, y)$ $(m \leq n)$ deňlemeleri alarys. Bu deňlemeleri birinji bapda beýan edilen usullary ulanmak bilen çözüp, olaryň umumy çözüwlerini

$$y = \varphi_1(x, C), \ldots, y = \varphi_m(x, C)$$

ýa-da umumy integrallaryny

$$\omega_1(x, y, C) = 0, \ldots, \omega_m(x, y, C) = 0$$

görnüşlerde taparys. Bu umumy integrallaryň toplumyna (23) deňlemäniň umumy integraly diýilýär. (23) deňlemäniň umumy integralyny

$$\omega_1(x,y,C)\cdot\omega_2(x,y,C)\cdot\ldots\cdot\omega_m(x,y,C)=0$$

görnüşde ýazmak bolýar. Bu deňligiň çep bölegi C-e görä m derejeli köpagzadyr.

6-njy mysal. $y'^2+(x^2-1)y'-x^2=0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňleme y'-e görä kwadrat deňlemedir. Ony y'-e görä çözsek,

$$y'=1, \qquad y'=-x^2$$

bolar. Bu deňlemeleriň umumy çözüwlerini

$$y=x+C, \quad y=-\frac{x^3}{3}+C$$

görnüşde taparys. Onda berlen deňlemäniň umumy integralyny

$$(y-x-C)\left(y+\frac{x^3}{3}-C\right)=0$$

görnüşde ýazarys.

7. (1) deňlemä gözlenilýän y funksiýanyň anyk görnüşde girmeýän ýagdaýyna garalyň.

$$F(x,y')=0 \tag{25}$$

deňlemäniň dürli görnüşlerde bolmaklygy mümkindir. Ol ýagdaýlara aýratynlykda garalyň.

Goý, (25) deňleme y'-e görä çözülen bolsun, ýagny

$$y'=f_k(x) \qquad (k=1,2,\ldots,) \tag{26}$$

bu ýerde $f_k(x)$ hakyky üznüksiz funksiýalar. (26) deňlemeleri integrirläp, olaryň umumy çözüwlerini

$$y=\int f_k(x)dx+C \quad (k=1,2,\ldots,) \tag{27}$$

görnüşde taparys.

Goý, (25) deňleme x-e görä çözülen bolsun, ýagny

$$x=\varphi(y'), \tag{28}$$

bu ýerde φ differensirlenýän funksiýa. Bu ýagdaýda $y'=p$ belgilemäni girizip,

$$x = \varphi(p) \tag{29}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň differensialy

$$dx = \varphi'(p)dp \tag{30}$$

bolar. $y' = p$ ýa-da $dy = pdx$ belgilemede (30) deňligi peýdalansak, onda

$$dy = p\varphi'(p)dp$$

bolar. Bu deňlemäni integrirläp

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C \tag{31}$$

funksiýany taparys.

(29) we (31) funksiýalar bilelikde (28) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy çözüwi ýa-da umumy integraly bolar. Eger bulardan p parametri çykarmak başartsa, onda alnan $\omega(x, y, C) = 0$ funksiýa ol deňlemäniň umumy çözüwi ýa-da umumy integraly bolar.

Eger (25) deňlemäni onuň argumentlerine görä aňladyp bolmaýan bolsa, onda ony

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \tag{32}$$

parametrik görnüşde ýazmak bolar. Bu funksiýalar (25) deňlemäni kanagatlandyrmalydyr, ýagny

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

bolmalydyr. (32) deňliklerden $dy = \psi(t)dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$ deňlemäni alarys. Deňlemäni integrirläp,

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \tag{33}$$

funksiýany taparys. Şeýlelikde,

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$$

funksiýalar bilelikde (25) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy integraly bolar. Eger t parametr bu funksiýalardan çykarylsa, onda alnan funksiýa ol deňlemäniň umumy integraly bolar.

7-nji mysal.

$$x = \ln\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right)$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $y' = p$ diýip belgilesek,

$$x = \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)$$

bolar. Differensirläp, soňra dx-iň ornuna $\dfrac{dy}{p}$-ni goýsak,

$$\frac{dy}{p} = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

ýa-da

$$dy = \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

bolar. Bu deňlemäni integrirlesek, $y = \sqrt{1 + p^2} + C$ bolar.

Şeýlelikde,

$$\begin{cases} x = \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right), \\ y = \sqrt{1 + p^2} + C \end{cases}$$

funksiýalar berlen deňlemäniň parametrik görnüşli umumy integraly bolar. p parametri ol deňliklerden çykarmaga synanyşalyň. Sistemanyň birinji deňliginden

$$e^x = p + \sqrt{1 + p^2}, \quad e^{-x} = -p + \sqrt{1 + p^2}.$$

Bu deňlikleriň degişli böleklerini goşup, $chx = \sqrt{1 + p^2}$ deňligi alarys. Onda sistemanyň ikinji deňligini $y = chx + C$ görnüşde ýazmak bolar. Bu funksiýa berlen deňlemäniň umumy çözüwidir.

8. (1) deňlemäniň

$$F(y, y') = 0 \tag{34}$$

görnüşde berlen ýagdaýyna garalyň, ýagny x anyk görnüşde deňlemäniň düzümine girmeýär.

(34) deňlemäniň çözüwini tapmaklygyň mümkin bolan dürli usullaryny getireliň.

Goý, (34) deňleme y'-e görä çözülen bolsun. Onda ol deňlemeden

$$y' = f_n(y)$$
$$(n = 1,2,...)$$

görnüşdäki bir ýa-da birnäçe deňlemäni alarys. Bu deňlemeleri integrirläp, deňlemäniň umumy integralyny

$$\int \frac{dy}{f_n(y)} = x + C \quad (n = 1, 2, ...) \tag{35}$$

görnüşde taparys.

Eger $f_n(y) = 0$ bolsa, onda onuň köklerini $y = a_n$ görnüşde taparys. Bu kökler (35) deňlemäniň çözüwleridir. Bu çözüwleriň (34) deňlemäniň aýratyn çözüwleri bolmagy mümkindir.

Indi (34) deňlemäniň y-e görä çözülen ýagdaýyna garalyň.

Goý,

$$y = \varphi(y') \tag{36}$$

bolsun. $y' = p$ belgilemäni girizip,

$$y = \varphi(p) \tag{37}$$

funksiýany alarys, bu ýerden $dy = \varphi'(p)dp$. Belgilemeden $dx = \dfrac{dy}{p}$ bolýandygyny nazarda tutup, dy üçin aňlatmany peýdalansak, onda

$$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p}$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäni integrirlesek, onda

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C \tag{38}$$

bolar. (37) we (38) funksiýalar bilelikde (34) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy çözüwi bolar.

Eger $p = 0$ bolsa, onda $F(y,0) = 0$ bolar. Bu deňlemäniň $y = \alpha_i$ kökleri hakyky sanlar bolsa, onda olar (34) deňlemäniň çözüwleri bolarlar.

Goý, (34) deňleme y we y' argumentlere görä çözülmeýän bolsun. Bu ýagdaýda ony parametrik görnüşde aňlatmak bolar. Goý, (34) deňleme parametrik, ýagny

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t) \tag{39}$$

görnüşde aňladylan bolsun. Bu funksiýalar (34) deňlemäni kanagatlandyrmalydyr. (39) deňliklerden

$$dx = \frac{dy}{\psi(t)}, \quad dy = \varphi'(t)dt.$$

Bu deňliklerden

$$dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

deňlemäni alýarys. Bu deňlemäni integrirlesek,

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \tag{40}$$

bolar. (39) deňliklerden $y = \varphi(t)$ we (40) bilelikde (34) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy çözüwini berýär.

8-nji mysal $y = (y' - 1)e^{y'}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $y' = p$ belgileme girizip,

$$y = (p - 1)e^p$$

deňligi alarys. Bu ýerden dy-i tapyp, soňra onuň ornuna pdx-i goýsak,

$$dx = e^p\, dp$$

bolar. Bu deňlemäni integrirläp $x = e^p + C$ funksiýany taparys.

Şeýlelikde,

$$\begin{cases} x = e^p + C \\ y = (p - 1)e^p \end{cases}$$

funksiýalar berlen deňlemäniň parametrik görnüşli çözüwidir. Ýokardaky sistemadan p parametri çykaryp, berlen deňlemäniň

$$y = (x - C)[\ln(x - C) - 1] \qquad (x > C)$$

umumy çözüwini alarys.

Eger $p = 0$ bolsa, onda $y = -1$ bolar. Bu ýerde $y = -1$ berlen deňlemäniň aýratyn çözüwidir.

9-njy mysal. $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemäni y-e we y'-e görä çözmek kynrak. Oňa görä-de ony parametrik görnüşde aňlatmak oňaýly boljak.

Goý, $y = \cos^3 t$, $y' = \sin^3 t$ bolsun. Bu funksiýalary berlen deňlemede goýsak, onda toždestwo alarys. Diýmek, ol funksiýalar berlen deňlemäni kanagatlandyrýarlar.

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{\psi(t)} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t dt}{\sin^3 t} = -3\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt,$$

$$x = -3\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = 3t + 3\mathrm{ctg}t + C.$$

Şeýlelikde,

$$x = 3t + 3\mathrm{ctg}t + C,$$
$$y = \cos^3 t$$

funksiýalar berlen deňlemäniň parametrik görnüşli umumy integralyny berýärler.

9. Indi (1) deňlemäniň diňe y'-e görä deňleme bolan ýagdaýyna garalyň:

$$F(y') = 0, \tag{41}$$

Goý, (41) deňlemäniň

$$y' = a_k \qquad (k = 1,2,...) \tag{42}$$

tükenikli ýa-da tükeniksiz sany hakyky kökleri bar bolsun. Bu deňlemäni integrirlesek,

$$y = a_k x + \mathrm{C}$$

ýa-da

$$a_k = \frac{y - C}{x}$$

bolar. a_k-nyň bahasyny (41) deňlemede goýsak,

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$$

bolar. Bu (41) deňlemäniň umumy integralydyr. Bu umumy integralyň kompleks differensial deňlemeleriň çözüwlerini hem özünde saklamagy mümkindir.

10-njy mysal. $y'^3 - 1 = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemede y'-iň ornuna $\frac{y-C}{x}$-i goýup, umumy integralyny alarys. Bu umumy integral $y' = 1$ hakyky differensial deňlemäniň hem-de

$$y' = \frac{-1 \pm t\sqrt{3}}{2}$$

kompleks differensial deňlemeleriň çözüwlerini özünde saklaýar.

11-nji mysal. $\sin y' = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemäni y'-e görä çözüp

$$y' = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

deňlikleri alarys. Onda

$$y = k\pi x + C$$

bolar. Bu ýerden

$$k\pi = \frac{y-C}{x}.$$

Muny deňlemede y'-iň ornuna goýup, onuň umumy integralyny

$$\sin\frac{y-C}{x} = 0$$

görnüşde alarys.

III bap

ÝOKARY TERTIPLI DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§1. Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

Tertibi 1-den uly bolan differensial deňlemä ***ýokary tertipli differensial deňleme*** diýilýär.

Ýokary tertipli ady differensial deňleme umumy görnüşde

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

deňlik bilen berilýär, bu ýerde x – bagly däl üýtgeýän ululyk, y – gözlenilýän funksiýa, $y',...,y^{(n)}$ – gözlenilýän funksiýanyň önümleri, F – berlen funksiýa.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

görnüşde berlen deňlemä ýokary tertipli önüme görä çözülen deňleme diýilýär. f funksiýa D oblastda üznüksiz.

(1) we (2) deňlemelere n tertipli deňlemeler hem diýilýär.

Eger käbir (a,b) interwalda n gezek differensirlenýän $y = \varphi(x)$ funksiýa (2) deňlemäni toźdestwa öwürýän, ýagny

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$$

bolsa, onda $y = \varphi(x)$ funksiýa ol deňlemäniň çözüwi diýilýär. Çözüwiň grafigine integral egri diýilýär.

Goý,

$$y = \varphi(x, C_1, ..., C_n) \qquad (3)$$

funksiýa D oblastda x boýunça n gezek differensirlenýän bolsun, bu ýerde $C_1,...,C_n$ erkin hemişelikler. Eger

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, ..., C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, ..., C_n) \\ .... \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, ..., C_n) \end{cases} \tag{4}$$

deňlemeler sistemasy $C_1,...,C_n$ hemişeliklere görä çözülýän bolsa, ýagny

$$\begin{aligned} &C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{n-1}) \\ &C_2 = \psi_2(x, y, y', ..., y^{n-1}) \\ &.. \\ &C_n = \psi_n(x, y, y', ..., ^{n-1}) \end{aligned}$$

we (3) funksiýa $C_1,...,C_n$ erkin hemişelikleriň islendik bahalarynda (2) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda (3) funksiýa D oblastda (2) deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

Eger (2) deňlemäniň umumy çözüwi anyk däl, ýagny $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ görnüşde tapylan bolsa, onda oňa (2) deňlemäniň umumy integraly diýilýär. Eger (3) deňlik

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, ..., C_n), \\ y = \psi(t, C_1, ..., C_n) \end{cases}$$

görnüşde aňladylan bolsa, onda oňa (2) deňlemäniň parametrik görnüşli umumy çözüwi diýilýär.

Umumy çözüwden $C_1,...,C_n$ sanlaryň her bir kesgitli bahalary üçin alnan çözüwe ol deňlemäniň hususy çözüwi diýilýär.

Differensial deňlemeler nazaryýetinde Koşi meselesini öwrenmeklik esasy orun tutýar. Şoňa görä-de n tertipli differensial deňleme üçin hem Koşi meselesini kesgitläliň.

(2) differensial deňlemäniň

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{5}$$

şertleri kanagatlandyrýan $y = \varphi(x)$ çözüwini tapmaklyk meselesine Koşi meselesi diýilýär. (5)-däki deňliklere başlangyç şertler diýilýär, $x_0, y_0, y_0' \ldots, y_0^{(n-1)}$ sanlara bolsa başlangyç bahalar diýilýär.

Kesgitleme. Eger

1) $y = \varphi(x, C_1, \ldots C_n)$ n gezek differensirlenýän funksiýa hemişelikleriň islendik bahasynda (2) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa,

2) (5) şertlerdäki $y_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ islendik sanlar üçin, C_i hemişelikleriň degişli C_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bahalary bar bolup, $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ funksiýa Koşi meselesiniň çözüwi bolsa, onda $y = \varphi(x, C_1, \ldots C_n)$ funksiýa (2) deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

(2) deňlemäniň (5)-däki şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmak üçin (4) sistemada $x, y, y' \ldots, y^{(n-1)}$ üýtgeýän ululyklaryň orunlaryna (5)-däki başlangyç bahalaryň degişlilerini goýup, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ erkin hemişelik sanlara görä

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, \ldots C_n) = y'_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (6)$$

görnüşli sistemany alarys. (6) sistemadan kesgitlenen $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$ bahalary $y = \varphi(x, C_1, \ldots C_n)$ umumy çözüwde goýup, $y = \varphi(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ çözüwi alarys. Bu bolsa hususy çözüw bolar.

Eger

$\forall (x, y_1, y'_1, \ldots y^{(n-1)}), (x, y_2 y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)}) \in D$ nokatlar üçin

$$|f(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)})| \leq$$
$$\leq L(|y_1 - y_2| + |y'_1 - y'_2| + \ldots + |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)})|$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ funksiýa D oblastda $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ argumentleri boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýar diýilýär. Bu ýerde $L \geq 0$ – Lipşis hemişeligi.

Eger D oblast güberçek we şol oblastda $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiýanyň $y,y',...,y^{(n-1)}$ argumentleri boýunça çäkli hususy önümleri bar, ýagny

$$|f'_y| \leq L_1,\ |f'_{y'}| \leq L_2,...,|f'_{y^{(n-1)}}| \leq L_n$$

bolsa, onda ol oblastda Lipşis şerti ýerine ýetýändir.

Indi ýokary tertipli deňlemeler üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň barlygynyň we ýeke-täkliginiň teoremasyny getireliň.

Teorema (Koşi-Pikar teoremasy). Eger $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiýa ýapyk $D \subseteq R^{n+1}$ oblastda üznüksiz we $y,y',...,y^{(n-1)}$ argumentleri boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda (2) deňlemäniň $\forall(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)}) \in D$ nokat üçin

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0,...,$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

şertleri kanagatlandyrýan we x_0 nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen ýeke-täk $y = \varphi(x)$ çözüwi bardyr.

Bu teoremanyň subudyny beýan etmekligiň zerurlygy ýok diýip hasap edýäris. Munuň şeýledigi aşakdaky ýagdaý bilen delillendirilýär.

(2) deňlemäni n sany birinji tertipli deňlemeler sistemasyna getirmek bolýar. Goý, $y_1,...y_n$ täze gözlenilýän funksiýalar bolsun. (2) deňlemede

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ y'' = y_3,...,\ y^{(n-1)} = y_n$$

belgilemeleri girizip,

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ .... \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x,y_{1,}y_2,...,y_n) \end{cases} \quad (7)$$

görnüşli deňlemeler sistemasyny alarys. (7) sistema (2) deňlemä ekwiwalentdir (deňgüýçlüdir), ýagny eger $y = \varphi(x)$ funksiýa (2) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda ol (7) sistemanyň hem çözüwidir we tersine.

Deňlemeler sistemasyna ýörite bapda garalar. (7) sistema öwreniljek umumy görnüşli deňlemeler sistemasynyň hususy halydyr. Şol ýerde differensial deňlemeleriň normal sistemasy diýip atlandyrylýan umumy sistema üçin çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasynyň subudy beýan ediler.

Egriler maşgalasynyň deňlemesi boýunça onuň differensial deňlemesini düzmek bolar.

Goý,

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0 \tag{8}$$

egriler maşgalasynyň deňlemesi bolsun, bu ýerde Φ differensirlenýän funksiýa. Berlen egriler maşgalasynyň deňlemesindäki y-e x-iň funksiýasy hökmünde garap hem-de ony x boýunça n gezek yzygiderli differensirläp,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y' = 0,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot y'^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'' = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y^{(n)} = 0$$

görnüşli deňlemeleri alarys. Şeýlelikde, berlen hem-de ony differensirläp alnan deňlemeler sistemasyndan $C_1,...,C_n$ erkin hemişelik sanlary (parametrleri) çykaryp, (1) görnüşli n tertipli differensial deňlemäni alarys. Ol (8) egriler maşgalasynyň differensial deňlemesi bolar.

Mysal.

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2 \tag{9}$$

egriler maşgalasynyň differensial deňlemesini düzmeli.

Çözülişi. Görnüşi ýaly, (9) tekizlikdäki töwerekler maşgalasydyr. Ol özünde C_1,C_2,C_3 üç erkin hemişeligi saklaýar. Oňa görä-de onuň üçin düzülmeli deňleme 3-nji tertipli bolmaly. Berlen deňlemede y-i

x-iň funksiýasy diýip hasap edip, (9) deňligi boýunça 3 gezek yzygiderli differensirläp, alarys:

$$(x - C_1) + (y - C_2) \cdot y' = 0,$$
$$1 + (y - C_2) \cdot y'' + y'^2 = 0,$$
$$(y - C_2) \cdot y''' + 3y'y'' = 0.$$

Soňky iki deňligiň ilkinjisinden $y - C_2$-ni tapyp, soňkuda onuň ornuna goýsak, onda

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

gözlenilýän differensial deňleme alnar.

Differensial deňlemäniň çözüwini tapmak ýörelgesine differensial deňlemäni integrirleme diýilýär. Ýokary tertipli differensial deňlemäni integrirleme meselesi birinji tertipli differensial deňlemäni integrirleme meselesine garanda ep-esli çylşyrymlydyr. Oňa görä-de bu bapda umumy görnüşli (1) deňlemäniň käbir hususy görnüşlerine we onuň tertibini kemeldip bolýan ýagdaýlaryna gararys hem-de olaryň umumy çözüwlerini tapmaklygyň usullary bilen tanyşdyrarys.

(2) deňleme üçin beýan edilen düşünjeler (1) deňlemä hem degişlidir.

§2. Umumy deňlemäniň hususy görnüşleri

Umumy deňlemäniň käbir hususy görnüşleriniň tertibini kemeldip bolýar. Şeýlelikde, olaryň umumy integrallaryny tapmaklyga mümkinçilik döreýär. Şeýle deňlemeleriň birnäçesine garalyň.

1.

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň.

(1) deňlemäni çözmekligiň mümkin bolan birnäçe ýagdaýlaryna garalyň. Goý, (1) deňleme önüme görä çözülen bolsun. Onda ony

$$y^{(n)} = f(x) \tag{2}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $f(x)$ funksiýa (a,b) interwalda üznüksiz. (2) deňlemäni

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x) \quad \text{ýa-da} \quad dy^{(n-1)} = f(x)dx$$

görnüşde göçüreliň. Soňky deňligiň iki bölegini hem integrirläp,

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

deňligi alarys. Bu deňligi

$$dy^{(n-2)} = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$$

görnüşde ýazyp we iki bölegini hem integrirläp,

$$y^{(n-2)} = \int\int f(x)dxdx + C_1x + C_2$$

görnüşli deňlige geleris. Integrirlemekligi $n-2$ gezek yzygiderli gaýtalap,

$$y = \underbrace{\int ... \int}_{n} f(x)dx...dx + \\ + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n \tag{3}$$

deňligi alarys. Bu funksiýa (2) deňlemäniň umumy çözüwidir. (3) çözüwde kesgitsiz integrallary ýokarky çägi üýtgeýän ululykly kesgitli integrallar bilen çalşyrmak bolar, ýagny ony

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)dx...dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazmak bolar.

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)dx...dx = \frac{1}{(n-1!)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt \tag{4}$$

Koşi formulasyny peýdalanyp, umumy çözüwi

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt +$$
$$+ C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazarys.

Goý, (2) deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun. Onda (2) deňlemäniň çep we sag böleklerinden yzygiderli n gezek x_0-dan x-a çenli integral alarys. Her gezek integral alnanda başlangyç şertlerden degişlisini peýdalanyp, (2) deňlemäniň çözüwini

$$y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} f(x)dx \ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{n-1!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + y'_0(x-x_0) + y_0$$

görnüşde taparys. Bu deňlik

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + y'_0(x-x_0) + y_0 \tag{6}$$

ýa-da

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k \tag{7}$$

görnüşlerde göçürilip bilner.

Ýokarda tapylan formula başga ýol bilen hem gelmek bolar.

Goý, $y = \varphi(x)$ funksiýa (2) deňlemäniň (5) şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun, ýagny

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Ony Teýlor formulasy boýunça

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + ...$$

$$... + \frac{\varphi^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1!)}\int_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \quad (8)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

Başlangyç şertleri hem-de $\varphi^{(n)}(x) = f(x)$ toźdestwony göz öňünde tutsak, onda (8)-den (7) deňlige geleris.

(1) deňleme önüme görä çözülen ýagdaýynda birnäçe deňlemeleriň alynmagy mümkin. Olar

$$y^{(n)} = f_i(x)(i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşlerde bolar. Onda (2) deňleme üçin beýan edilen usuly ulanmak bilen olaryň umumy çözüwleri

$$y = \varphi_i(x, C_1, ..., C_n) \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

ýa-da umumy integrallary

$$\omega_i(x, y, C_1, ..., C_n) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşlerde tapylar.

1-nji mysal.

$$y''' = xe^x$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäni $dy'' = xe^x dx$ görnüşde ýazalyň. Bu deňligiň iki bölegini hem integrirlesek,

$$y'' = \int xe^x dx + C_1$$

ýa-da

$$y'' = xe^x - e^x + C_1 \quad (9)$$

bolar. Bu deňlemäni

$$dy' = (xe^x - e^x + C_1)dx$$

görnüşde göçüreliň. Munuň iki bölegini hem integrirläp,

$$y' = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2 \qquad (9_1)$$

görnüşli deňlemä geleris. Bu deňlemäni

$$dy = (xe^x - 2e^x + C_1x + C_2)dx$$

görnüşde ýazyp, iki bölegini integrirlesek, onda

$$y = e^x(x-3) + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \qquad (9_2)$$

bolar. Bu funksiýa garalýan deňlemäniň umumy çözüwidir.

Eger berlen deňlemäniň $y(0)=0, y'(0)=-1, y''(0)=1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilse, onda (9), (9_1), (9_2) deňliklerde (formulalarda) x-iň ornuna 0-y, y-iň ornuna 0-y, y'-iň ornuna - 1-i, y''-iň ornuna 1-i goýup, alnan

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 1 \\ C_2 - 2 = -1 \\ C_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyndan kesgitlenen $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 3$, bahalary umumy çözüwde goýup,

$$y = e^x(x-3) + x^2 + x + 3$$

görnüşli hususy çözüwi taparys.

Garalýan meseläniň çözüwini (6) formuladan peýdalanyp,

$$y = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 te^t dt + \frac{1}{2}x^2 - x$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerdäki integral hasaplanylsa, onda tapylan hususy çözüw alnar. Munuň şeýledigini özbaşdak barlap görüň.

Eger (1) deňlemäni (2) görnüşde ýazmak başartmasa, onda ony

$$x = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t), \quad t - \text{parametr} \qquad (10)$$

parametrik görnüşde bermek bolar, bu ýerde $\varphi(t)$ differensirlenýän funksiýa bolmalydyr we

$$F(\varphi(t),\psi(t)) \equiv 0$$

ýerine ýetmelidir.
(10)-dan $dx = \varphi'(t)dt$ bolar. Ondaky ikinji deňligi

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1.$$

Munuň sag bölegini $\omega_1(t,C_1)$ bilen belgilesek, onda ol

$$y^{(n-1)} = \omega_1(t,C_1)$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni

$$dy^{(n-2)} = \omega_1(t,C_1)dx \text{ ýa-da}$$
$$dy^{(n-2)} = \omega_1(t,C_1)\varphi'(t)dt$$

görnüşde göçüreliň. Bu ýerden

$$y^{(n-2)} = \int \omega_1(t,C_1)\varphi'(t)dt + C_2.$$

Sag bölegini $\omega_2(t,C_1,C_2)$ bilen belgilesek, onda ol

$$y^{(n-2)} = \omega_2(t,C_1,C_2)$$

görnüşli deňleme bolar. Bu usuly ýene $n-2$ gezek gaýtalasak, onda

$$y = \omega_n(t,C_1,...,C_n)$$

görnüşli funksiýa geleris. Şeýlelikde, (1) deňlemäniň

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \omega_n(t,C_1,...,C_n) \end{cases}$$

parametrik görnüşli umumy integralyny alarys. Eger bu deňliklerden t-ni çykarmak başartsa, onda alnan funksiýa ol deňlemäniň umumy integraly ýa-da umumy çözüwi bolar.

Goý, (1) deňleme x-e görä çözülen bolsun. Onda ony $x = \varphi(y^{(n)})$ görnüşde ýazarys. Bu ýerde $y^{(n)} = t$ belgilemäni girizsek, onda $x = \varphi(t)$ bolar. Şeýlelikde, (1) deňleme

$$x = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = t \tag{11}$$

görnüşde aňladylar. Bu ýerden görnüşi ýaly (11) deňleme (10) deňlemäniň hususy halydyr.

2.

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{12}$$

deňlemä garalyň. Goý, (12) deňleme uly önüme görä çözülen bolsun. Onda ony $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ görnüşde ýazarys. $y^{(n-1)} = u$ belgilemäni girizsek, onda deňleme

$$\frac{du}{dx} = f(u)$$

görnüşi alar. Onuň umumy integraly

$$\int \frac{du}{f(u)} = x + C_1, \; f(u) \neq 0$$

görnüşde bolar. Muny

$$F_1(x, u, C_1) = 0$$

görnüşde ýazarys. u-y $y^{(n-1)}$ bilen çalşyryp,

$$F_1(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$$

görnüşli deňlemäni alarys. Bu (1)-e meňzeş deňlemedir.

Eger bu deňleme $y^{(n-1)}$-e görä çözülen bolsa, onda ony

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$$

görnüşde ýazyp, umumy çözüwini

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n-1} \varphi(x, C_1) dx \ldots dx + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots C_{n-1} x + C_n$$

görnüşde taparys.

Indi (12) deňlemäniň argumentlerine görä çözülmeýän ýagdaýyna seredeliň. Goý, (12) deňleme

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t) \tag{13}$$

parametrik görnüşde berlen bolsun, $\varphi(t)$ – differensirlenýän funksiýa. $\varphi(t)$ we $\psi(t)$ funksiýalar

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$$

toźdestwo ýerine ýeter ýaly kesgitlenmelidirler. (13)-den

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)dx$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{\psi(t)} = \frac{d\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

Muny integrirläp,

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1$$

deňligi alarys. Şeýlelikde, (13) deňleme

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1, y^{(n-1)}\varphi(t)$$

görnüşe geler. Bu (10)-a meňzeş deňlemedir. Onuň çözüliş usuly hem edil şonuň ýalydyr.

Goý, (12) deňleme kiçi önüme görä çözülen bolsun, ýagny

$$y^{(n-1)} = f(y^{(n)}).$$

$y^{(n)} = t$ belgilemäni girizsek, onda

$$y^{(n-1)} = f(t)$$

bolar. Şunlukda, biz

$$y^{(n-1)} = f(t), y^{(n)} = t$$

görnüşdäki deňlemäni alarys. Bu bolsa (13) deňlemäniň hususy halydyr.

2-nji mysal. $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $y'' = u$ belgilemäni girizip, garalýan deňlemäni

$$u' = \sqrt{1 + u^2}$$

görnüşe getireris. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip, deňlemäni

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx$$

görnüşde ýazarys. Muny integrirläp,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = x + C_1 \quad \text{ýa-da} \quad \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = x + C_1$$

görnüşde deňligi alarys. Bu ýerden

$$u + \sqrt{1 + u^2} = e^{x + C_1}$$

bolar. Onda

$$-u + \sqrt{1 + u^2} = e^{-(x + C_1)}$$

bolar. Soňky deňlikleriň degişli böleklerini aýryp,

$$u = \operatorname{sh}(x + C_1)$$

deňligi alarys. Bu ýerde u-y y'' bilen çalşyryp,

$$y'' = \operatorname{sh}(x + C_1)$$

deňlemäni alarys. Diýmek,

$$y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

funksiýa garalýan deňlemäniň umumy çözüwidir.

3.

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0 \tag{14}$$

deňlemä garalyň. Goý, (14) deňleme uly önüme görä çözülen bolsun, ýagny

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}). \tag{15}$$

$y^{(n-2)} = u$ ornuna goýmany etsek, onda (15) deňleme

$$u'' = f(u)$$

görnüşi alar. Iki bölegini hem $2u'$-e köpeldip, ony

$$2u'u'' = 2f(u)u' \text{ ýa-da } du'^2 = 2f(u)du$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerden

$$u'^2 = 2\int f(u)du + C_1$$

ýa-da

$$\frac{du}{\sqrt{2\int f(u)du + C_1}} = \pm dx$$

görnüşli deňlemäni alarys. Kök astyndaky aňlatma noldan tapawutlydyr diýeliň. Deňlemäniň iki bölegini hem integrirläp, onuň umumy integralyny

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\int f(u)du + C_1}} = C_2 \pm x$$

görnüşde taparys. Muny

$$\omega(x, u, C_1 C_2) = 0$$

anyk däl görnüşde ýazalyň. u-y $y^{(n-2)}$ bilen çalşyryp,

$$\omega(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$$

görnüşli $n-2$ tertipli deňlemäni alarys. Bu bolsa (1) görnüşli deňlemedir. Oňa görä-de bu deňlemäni çözmeklige görkezilen usullaryň birini ulanmak bolar.

Indi (14) deňlemäniň uly önüme görä çözülmedik ýagdaýyna garalyň. Bu ýagdaýda ony parametrik görnüşde aňlatmak bolar.

Goý,

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t) \tag{16}$$

görnüşde aňladylan bolsun, bu ýerde $\varphi(t)$ differensirlenýän funksiýa. $\varphi(t)$ we $\psi(t)$ funksiýalar (14) deňlemäni toźdestwo öwürmelidir, ýagny

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

(16) deňlemäni çözmek üçin aşakdaky usuly beýan edeliň. Matanaliz dersinden belli bolşy ýaly,

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$$

gatnaşyklary ýazmak bolar. Bu deňliklerden dx-i çykaryp,

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$$

ýa-da

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\psi(t)\varphi'(t)dt$$

deňlemäni alarys. Muny integrirlesek,

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1}$$

bolar. Şeýlelikde, (16) deňleme

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1} \end{cases}$$

görnüşli deňlemä getirildi. Bu bolsa (13) görnüşli deňlemedir.

3-nji mysal. $y'' = y$ deňlemäniň $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemäniň iki bölegini hem $2y'$-e köpeldip,

$$2y'y'' = 2y'y$$

deňlemäni alarys.

$$\frac{dy'^2}{dx} = 2yy'; \; dy'^2 = 2yy'dx; \; dy'^2 = 2ydy;$$

$$y'^2 = y^2 + C_1.$$

Başlangyç şertleri nazarda tutup alnan $C_1 = -1$ bahany soňky deňlemede goýup, $y'^2 = y^2 - 1$ deňlemäni alarys. Bu ýerden

$$y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}, \frac{dy}{\pm y^2 - 1} = dx, \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx.$$

Bu ýerden

$$\ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x + C_2.$$

$y(0) = 1$ şerti peýdalanyp, bu ýerden $C_2 = 0$ bahany tapýarys. Diýmek,

$$\ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x,$$

ýagny

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm x}.$$

Bu funksiýa garalýan meseläniň integralydyr. Muny çözüw görnüşde ýazmaga synanyşalyň. Tapylan integral üçin

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{\mp x}.$$

deňligi ýazarys. Bu deňlikleriň degişli böleklerini goşup,

$$y = \mathrm{ch}x$$

funksiýany alarys. Bu funksiýa berlen meseläniň çözüwidir.

§3. Tertibi kemeldilýän deňlemeler

Umumy deňlemäniň hususy hallaryny öwrenmekligi dowam etdireliň.

1.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 (k \geq 1) \tag{1}$$

deňlemä garalyň. Görnüşi ýaly, (1) deňleme gözlenilýän y funksiýany hem-de onuň $y',...,y^{(k-1)}$ önümlerini özünde saklamaýar. (1) deňlemede $y^{(k)}$ kiçi önümi u bilen belgilesek, onda (1) deňleme

$$F(x, u, u', ..., u^{(n-k)}) = 0. \qquad (2)$$

görnüşi alar. (2) deňlemäniň tertibi $n - k$. Bu bolsa (1) deňlemäniň tertibiniň k birlik kemeldilendigini görkezýär. Eger (2) deňlemäniň umumy integraly tapylan diýsek, onda ony

$$\omega(x, u, C_1, ..., C_{n-k}) = 0$$

görnüşde ýazarys. u-y $y^{(k)}$ bilen çalşyryp,

$$\omega\left(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0 \qquad (3)$$

görnüşli k tertipli deňlemäni alarys. Eger (3) birinji tertipli deňleme bolsa, onda onuň çözüwini tapmak üçin 1-nji bapda beýan edilen usullaryň birini ulanmak bolar. $k > 1$ ýagdaý üçin bolsa, (3) deňlemäniň çözüliş usullary §2-de öwrenildi.

1-nji mysal.

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \text{tg}\, x = 0$$

deňlemäniň tertibini kemeltmeli we onuň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemede $y' = u$ belgilemäni girizsek, onda ol

$$u' = \sqrt{1 + u^2} \cdot \text{tg}\, x$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \text{tg}\, x dx$$

görnüşde ýazyp, deňligiň iki böleginden hem integral alsak, onda

$$\ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln C_1 - \ln|\cos x| \quad \text{ýa-da}$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C_1}{\cos x}$$

bolar. Bu ýerden

$$\sqrt{1+u^2}-u=\frac{\cos x}{C_1}$$

deňligi alarys. Soňky deňlikleriň degişli böleklerini aýryp,

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{\cos x}-\frac{\cos x}{C_1}\right) \quad \text{ýa-da} \quad y'=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{\cos x}-\frac{\cos x}{C_1}\right)$$

deňlemäni alarys. Ony çözüp, garalýan deňlemäniň umumy çözüwini

$$y=\frac{C_1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{2C_1}\sin x+C_2$$

görnüşde taparys.

2-nji mysal. $\frac{1}{4x^2}(y''')^2+(y'')^2-1=0$ deňlemäniň tertibini kemeltmeli.

Çözülişi. $y''=u$ belgilemäni girizip,

$$\frac{1}{4x^2}(u')^2+u^2-1=0$$

deňlemäni alarys. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip, ony

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=2xdx$$

görnüşde ýazarys. Iki böleginden hem integral alalyň:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=x^2+C_1.$$

Bu ýerden

$$\arcsin u=x^2+C_1 \quad \text{ýa-da} \quad u=\sin(x^2+C_1)$$

çözüwi taparys. u-y y'' bilen çalşyryp,

$$y''=\sin(x^2+C_1)$$

deňlemäni alarys. Beýle deňlemeleriň çözüliş usullary §2-de beýan edildi.

2.

$$F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \tag{4}$$

deňlemä garalyň. Deňlemäniň tertibini kemeltmek üçin $y' = p(y)$ belgilemäni girizeliň. $y'', ..., y^{(n)}$ önümleri tapalyň:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = pp',$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) \cdot p + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} =$$

$$= \frac{d^2 p}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot p + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} = p(pp'' + p'^2),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{dy''}{dx} = p(p^2 p''' + 2pp'p'' + 2pp'^2 p'' + p'^3),$$

....

$$y^{(n)} = \sigma(p, p', p'', ..., p^{(n-1)}).$$

y-iň x-e görä önümleri p-niň y-e görä önümleri arkaly aňladyldy. $y', y'', ..., y^{(n)}$ üçin alnan aňlatmalary (4)-de goýup,

$$F(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0 \tag{5}$$

deňlemäni alarys. Soňky deňleme $n - 1$ tertiplidir.

Goý, (5) deňlemäniň umumy integraly

$$\omega(y, p, C_1, ..., C_{n-1}) = 0$$

görnüşde tapylan bolsun. Bu deňlemede p-ni y' bilen çalşyryp,

$$\omega(y, y', C_1, ..., C_{n-1}) = 0$$

görnüşli birinji tertipli deňlemäni alarys.

3-nji mysal. $y'' + y'^2 - 2e^{-y} = 0$ deňlemäniň tertibini kemeltmeli we onuň umumy integralyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňleme (4) görnüşdäki deňlemedir. $y' = p$ belgilemäni girizsek, onda

$$P\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$$

görnüşli Bernulli deňlemesi alnar. Bu deňlemäni

$$\frac{1}{2}(p^2)' + p^2 = 2e^{-y}$$

görnüşde ýazalyň. $p^2 = u$ ornuna goýmany girizip,

$$u' + 2u = 4e^{-y}$$

çyzykly birjynsly däl deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy çözüwi

$$u = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}$$

funksiýadyr. u-y, has takygy y'^2 bilen çalşyryp,

$$y'^2 = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}$$

deňlemäni alarys. Bu ýerden

$$y' = \pm\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}}.$$

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen deňleme alyndy. Onuň umumy integraly

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1 + 4e^y} = x + C_2 \quad \text{ýa-da} \quad e^y + \frac{C_1}{4} = (x + C_2)^2$$

görnüşdedir.

Mesele. Egrilik radiusy normal kesiminiň uzynlygyna proporsional bolan tekiz egrileri tapmaly.

Çözülişi. Goý, $y = y(x)$ gözlenilýän egriniň deňlemesi bolsun. Onda onuň egrilik radiusy

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

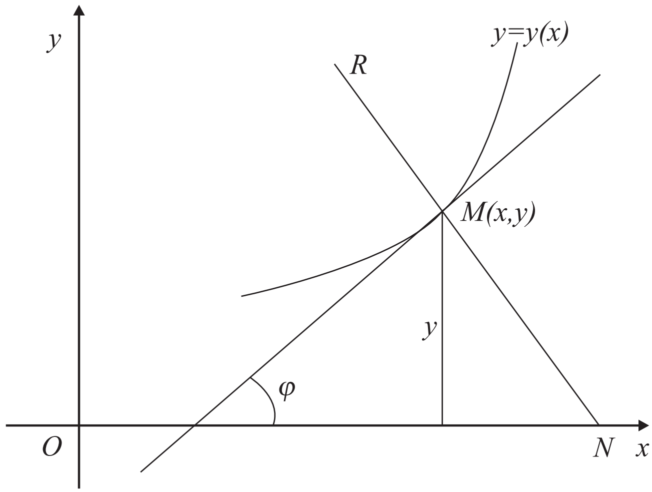
normal kesiminiň uzynlygy bolsa,

$$|MN| = |y|\sqrt{1 + y'^2}$$

bolar. Meseläniň şertine görä, $\dfrac{R}{|MN|} = \lambda$, λ – proporsionallyk koeffisiýenti. Bu deňlikden

$$1 + y'^2 = \lambda y y'' \tag{6}$$

görnüşli deňlemä geleris. (6) deňleme (4) görnüşli deňlemedir.



Ilki bilen (6) deňlemäniň tertibini kemeldeliň. $y' = p$ belgilemäni girizip,

$$1 + p^2 = \lambda yp\frac{dp}{dy}$$

görnüşli birinji tertipli deňlemäni alarys. Ony

$$\frac{dy}{y} = \frac{\lambda pdp}{1 + p^2}$$

görnüşde ýazyp, deňligiň iki böleginden hem integral alsak, onda

$$\ln|y| = \frac{\lambda}{2}\ln|l + p^2| + \ln C_1 \quad \text{ýa-da} \quad y = C_1(1 + p^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýanyň differensialy

$$dy = \frac{\lambda C_1}{2}(1 + p^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}2pdp$$

bolar. dy-i pdx bilen çalşyryp,

$$dx = \lambda C_1(1 + p^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}dp$$

deňligi alarys. Iki böleginden hem integral alsak, onda

$$x = \lambda C_1\int(1 + p^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}dp + C_2$$

bolar. Şunlukda

$$\begin{cases} x = \lambda C_1 \int (1+p^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} dp + C_2, \\ y = C_1 (1+p^2)^{\frac{\lambda}{2}} \end{cases} \tag{6_1}$$

funksiýalar bilelikde (6) deňlemäniň parametrli umumy integralydyr. λ-nyň (6_1) umumy integraldan p parametri çykarmaga mümkinçilik berýän käbir bahalary üçin alnan integral egrileriň görnüşlerini anyklamaga synanşalyň. Umumy ýagdaýda (6_1) integraldan p parametri çykarmaklyk aňsat mesele däldir.

Goý, $\lambda = 1$ bolsun. Onda (6_1)

$$\begin{cases} x = C_1 \int \dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + C_2, \\ y = C_1 \sqrt{1+p^2} \end{cases}$$

görnüşi alar. Bu ýerden

$$x = C_1 \ln\left| p + \sqrt{1+p^2} \right| + C_2,$$
$$y = C_1 \sqrt{1+p^2}.$$

Deňlikleriň ilkinjisinden

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x-C_2}{C_1}}$$

we

$$\sqrt{1+p^2} - p = e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}$$

deňlikleri alarys. Olaryň degişli böleklerini goşup,

$$\sqrt{1+p^2} = \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$$

deňligi alarys. Onda

$$y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$$

bolar. Bu funksiýa zynjyr egrisiniň deňlemesidir. Diýmek, gözlenilýän egriler zynjyr egrilerdir.

Goý, $\lambda = -1$ bolsun. Onda (6_1)

$$x = -C_1 \int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_2,$$
$$y = \frac{C_1}{\sqrt{1+p^2}}$$

görnüşde bolar. Bu ýerden

$$\begin{cases} x = -\dfrac{C_1 p}{\sqrt{1+p^2}} + C_2 \\ y = \dfrac{C_1}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases},$$

ýa-da

$$\begin{cases} x - C_2 = -\dfrac{C_1 p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = -\dfrac{C_1}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

görnüşli funksiýalary alarys. Deňlikleri kwadrata göterip, olardan p parametri çykaryp,

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$$

görnüşde umumy integraly ýazarys. Ol töwerekleriň deňlemesidir. Diýmek, gözlenilýän egriler töwereklerdir.

Goý, $\lambda = 2$ diýeliň. Onda (6_1)-den alarys:

$$\begin{cases} x - C_2 = 2C_1 p, \\ y - C_1 = C_1 p^2. \end{cases}$$

Birinji deňligi kwadrata göterip,

$$\begin{cases} (x - C_2)^2 = 4C_1^2 p^2, \\ y - C_1 = C_1 p^2 \end{cases}$$

görnüşli deňlikleri alarys. Bu ýerden p-ni çykaryp,

$$(x - C_2)^2 = 4C_1 (y - C_1)$$

ýa-da

$$y = \frac{(x - C_2)^2}{4C_1} + C_1$$

görnüşli funksiýany alarys. Bu parabolanyň deňlemesidir. Diýmek, gözlenilýän egriler parabolalardyr.

Goý, $\lambda = -2$ bolsun. Onda (6_1)

$$\begin{cases} x = -2C_1 \int \dfrac{dp}{(1 + p^2)} + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{1 + p^2} \end{cases}$$

görnüşe geler. Ilkinji deňlikdäki integraly tapmaga $p = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$ ornuna goýmany ulansak, onda

$$\begin{cases} x = C_1 \int \sin^2 \dfrac{t}{2} dt + C_2, \\ y = C_1 \sin^2 \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(t - \sin t) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

bolar. Bu funksiýalar sikloidanyň parametrik görnüşdäki deňlemesidir. Diýmek, gözlenilýän egriler sikloidalardyr.

3.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{7}$$

deňlemä garalyň. Goý, F funksiýa $y, y',...,y^{(n-1)}$ argumentlere görä m derejeli birjynsly funksiýa, ýagny islendik $t \neq 0$ üçin

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \tag{8}$$

şerti kanagatlandyrýan bolsun. Bu ýagdaýda (7) deňlemä gözlenilýän funksiýa we onuň önümlerine görä birjynsly deňleme diýilýär.

Deňlemäniň tertibini kemeltmek üçin

$$y = e^{\int u du} \quad \text{ýa-da} \quad y' = yu$$

ornuna goýmany ulanalyň, bu ýerde $u(x)$ täze gözlenilýän funksiýa. Onda

$$\begin{aligned}
y'' &= y'u + yu' = y(u^2 + u'),\\
y''' &= y'(u^2 + u') + y(2uu' + u'') = y(u^3 + 3uu' + u''),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)} &= y\omega(u, u', \ldots, u^{(n-1)})
\end{aligned}$$

bolar. (7) deňlemeden bu deňlikleri we (8) şerti göz öňünde tutup,

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', \ldots, \omega(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0$$

ýa-da

$$F_1(x, u, u', u'', \ldots u^{(n-1)}) = 0 \tag{9}$$

deňlemäni alarys.

Goý,

$$u = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

(9) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. Onda u-y $\dfrac{y'}{y}$ bilen çalşyryp, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen

$$\frac{dy}{y} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx$$

birinji tertipli deňlemäni alarys. Munuň umumy çözüwini

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx}$$

görnüşde ýazmak bolar. Şeýlelikde, (7) deňlemäniň umumy çözüwi alyndy. Eger (9) deňlemäniň umumy integraly $\psi(x, u, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$ görnüşde tapylan bolsa, onda $\psi(x, y, y', C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$ görnüşli deňlemäni alarys. Bu bolsa önüme görä çözülmedik deňlemedir.

4-nji mysal. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$ deňlemäniň tertibini kemeltmeli we onuň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäniň çep bölegi y, y', y'' argumentlere görä iki derejeli (ölçegli) birjynsly funksiýa. Deňlemäni

$$xy^2(u^2 + u') - xy^2u^2 - y^2u = 0$$

görnüşde ýazyp, soňra y^2-a bölsek, onda

$$xu' - u = 0$$

görnüşli deňleme alnar. Munuň umumy çözüwi $u = C_1x$ bolar. u-y $\frac{y'}{y}$ bilen çalşyryp, $\frac{y'}{y} = C_1x$ görnüşli deňlemäni alarys. Bu ýerden berlen deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_2e^{\frac{C_1}{2}x^2}$$

görnüşde taparys.

5-nji mysal. $yy'y'' - y'^3 - xy^3 = 0$ deňlemäniň $y(0)=1$, $y'(0) = 1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Deňlemäniň

$$F(x,y,y',y'') = yy'y'' - y'^3 - xy^3$$

çep bölegi üç derejeli birjynsly funksiýadyr. Hakykatdan-da,

$$F(x,ty,ty',ty'') = (ty)(ty')(ty'') - (ty')^3 - x(ty)^3 =$$
$$= t^3(yy'y'' - y'^3 - xy^3) = t^3F(x,y,y',y'').$$

Diýmek, garalýan deňleme birjynsly. Oňa görä-de $y' = yu$ ornuna goýmany ulanyp, garalýan deňlemäni $udu - xdx = 0$ görnüşe getireris. Onuň umumy çözüwi $u^2 - x^2 = C_1$ bolar. Bu ýerde u-y $\frac{y'}{y}$ bilen çalşyryp,

$$\frac{y'}{y} = \pm\sqrt{x^2 + C_1} \qquad (9_1)$$

görnüşli deňlemäni alarys. Onuň umumy integralyny

$$\ln y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + C_1} + \frac{C_1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + C_1}) + C_2 \qquad (9_2)$$

görnüşde taparys. Bu bolsa garalýan deňlemäniň umumy integraly bolar. (9_1) we (9_2) deňliklerde başlangyç şertleri peýdalanyp, tapylan $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ bahalary (9_2)-de goýup,

$$y^2 = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot e^{x\sqrt{x^2+1}}$$

hususy çözüwi alarys.

4.

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{10}$$

deňlemäniň çep bölegi käbir $F_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ funksiýanyň x-e görä takyk (doly) önümi, ýagny

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx} F_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{11}$$

ýa-da

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

bolsa, onda (10)-a takyk önümli (doly differensially) deňleme diýilýär. (10) deňlemeden (11) deňligi nazarda tutup,

$$\frac{d}{dx} F_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) = 0$$

deňlemäni alarys. Soňky deňligiň iki böleginden hem integral alyp,

$$F_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) = C_1 \tag{12}$$

görnüşli $n - 1$tertipli deňlemä geleris. Muňa (10) deňlemäniň birinji integraly diýilýär. Eger $y = \varphi(x)$ funksiýa (10) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda ol (12) deňlemäniň hem çözüwidir. Onuň tersine bolan tassyklama hem dogrudyr. Oňa görä-de her bir takyk önümli deňlemäniň birinji integralyny tapmak mümkindir.

Adatça, (10) takyk önümli deňleme däldir. Beýle ýagdaýlarda onuň iki bölegi hem käbir $\mu = \mu\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ funksiýa köpeldilýär. Eger

$$\mu \cdot F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{13}$$

deňleme üçin

$$\mu \cdot F = \frac{d}{dx}F_1$$

şert ýerine ýetse, onda (10) deňleme takyk (doly) önümli deňlemä getirildi diýilýär. (13) deňlemäniň çözüwleriniň arasynda (10) deňlemäni kanagatlandyrmaýanlarynyň hem bolmagy mümkindir. Olar ýaly del çözüwleri hasaba almaly däl.

6-njy mysal. $yy''' + 3y'y'' = 0$ deňlemäniň tertibini kemeltmeli we çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlemäni

$$yy''' + y'y'' + 2y'y'' = 0$$

görnüşde göçüreliň.

$$yy''' + y'y'' + 2y'y'' = \frac{d}{dx}(yy'' + y'^2)$$

deňligiň dogrudygy düşnüklidir. Onda soňky deňleme

$$\frac{d}{dx}(yy'' + y'^2) = 0$$

görnüşi alar. Deňligiň iki böleginden hem integral alsak,

$$yy'' + y'^2 = C_1$$

ýa-da

$$\frac{d}{dx}(yy') = C_1$$

bolar. Diýmek,

$$yy' = C_1x + C_2$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = C_1x + C_2.$$

Bu ýerden

$$y^2 = C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

7-nji mysal. $yy'' - y'^2 - y' = 0$ deňlemäniň tertibini kemeltmeli we umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Umumy ýagdaýda (11) şerti kanagatlandyrýan F_1 funksiýany tapmak aňsat iş däl. Berlen ýagdaýda deňlemäniň iki bölegini hem $\mu = \frac{1}{y^2}$ köpeldip,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - \frac{y'}{y^2} = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y}\right) = 0$$

görnüşde göçüreliň. Soňky deňlemäniň iki bölegini hem integrirläp,

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1$$

ýa-da

$$y' - C_1 y = -1$$

deňlemäni alarys. Bu birinji tertipli çyzykly birjynsly däl deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$$

görnüşdedir. Şeýlelikde, bu funksiýa garalýan deňlemäniň umumy çözüwidir.

5. Indi

$$F(y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{14}$$

deňlemä garalyň. Görnüşi ýaly, (14) deňleme x-i we y-i anyk görnüşde özünde saklamaýar. Bu ýagdaýda $y' = u(x)$ belgilemäni girizip, (14)-i

$$F\left(u, u', ..., u^{(n-1)}\right) = 0$$

görnüşli deňlemä getireris. Soňra bu deňlemäniň tertibini kemeltmek üçin $u' = p(u)$ ornuna goýmany ulanyp,

$$F\left(u, p, p', ..., p^{(n-2)}\right) = 0$$

görnüşli deňlemäni alarys. Şeýlelikde, (14) görnüşli deňlemäniň tertibini kemeltmeklige (1) we (4) görnüşli deňlemeler üçin ulanylan usullardan peýdalanyldy.

8-nji mysal. $(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$ deňlemäniň umumy integralyny tapmaly.

Çözülişi. $y' = u(x)$ belgilemäni girizip,

$$(1+u^2)\,u'' - 3uu'^2 = 0$$

ikinji tertipli deňlemäni alarys. Bu deňlemäni $u' = p(u)$ ornuna goýmadan peýdalanyp,

$$(1+u^2)p\frac{dp}{du} - 3up^2 = 0$$

görnüşli birinji tertipli deňlemä getireris. Deňligiň iki bölegini hem p-e gysgaltsak, onda

$$(1+u^2)\frac{dp}{du} - 3up = 0$$

bolar.

$$\frac{dp}{p} = \frac{3udu}{1+u^2}$$

deňlemäniň umumy integralyny

$$\ln p + \ln C_1 = \frac{3}{2}\ln(1+u^2)$$

ýa-da

$$pC_1 = (1+u^2)^{\frac{3}{2}}$$

görnüşde taparys.

p-ni u' bilen çalşyryp,

$$C_1\frac{du}{dx} = (1+u^2)^{\frac{3}{2}}$$

deňlemäni alarys. Bu ýerden

$$dx = \frac{C_1 du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ýagny

$$x = \int \frac{C_1 du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} + C_2$$

ýa-da

$$x = \frac{C_1 u}{\sqrt{1+u^2}} + C_2.$$

u-y y' bilen çalşyryp,

$$x = \frac{C_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} + C_2 \qquad (15)$$

önüme görä çözülmedik birinji tertipli deňlemäni alarys. Ony parametrik görnüşde aňlatmak bolar.

Goý, $y' = \mathrm{tg}t$ bolsun. Onda

$$x = \frac{C_1 \,\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} + C_2$$

ýa-da

$$x = C_1 \sin t + C_2. \qquad (16)$$

Şeýlelikde, (15) deňleme

$$\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \\ y' = \mathrm{tg}\, t \end{cases}$$

parametrik görnüşde aňladyldy. Bu ýerden

$$dy = \mathrm{tg}t dx = C_1 \mathrm{tg}t \cos t dt = C_1 \sin t dt,$$

ýagny

$$y = -C_1 \cos t + C_3 \qquad (17)$$

deňligi alarys. (16) we (17) deňlikler bilelikde (15) deňlemäniň parametrik görnüşdäki umumy integralyny berýärler. Olardan t parametri çykaryp, garalýan deňlemäniň

$$(x - C_2)^2 + (y - C_3)^2 = C_1^2$$

görnüşli umumy integralyna geleris.

Mälim bolşy ýaly, differensial deňlemelerde Koşi meselesini çözmek üçin, ilki bilen deňlemäniň umumy çözüwi tapylýar. Umumy çözüw deňlemäniň tertibine deň bolan sany erkin hemişeligi saklaýar. Erkin hemişelikleriň san bahalary başlangyç şertlerden peýdalanylyp alnan algebraik deňlemeler sistemasyndan tapylýar.

Käbir ýagdaýlarda umumy çözüwiň tapylyş ýörelgesinde başlangyç şertleri peýdalanmak amatly bolýar. Beýle etmeklik bellibir derejede hasaplamalary ýeňilleşdirip biler.

Mysal. $y'' = 2y^3$ deňlemäniň $y(0) = 1$, şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmak üçin agzalan ýollaryň haýsysyny ulanmagyň oňaýlydygyny anyklamaly.

Gönükmeler

Deňlemeleri we meseleleri çözüň:

1. $\sin(y - C_2) = e^{x - C_1}$ egriler maşgalasynyň differensial deňlemesini düzmeli.

Jogaby: $y'' = y'(1 + y'^2)$.

2. $y''' = -\cos x$ deňlemäniň $y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 1,\ y''(\pi) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = \sin x + 2(x - \pi)$.

3. $y''' = e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$ meseläni çözmeli.

Jogaby: $y = e^x - x - 1$.

4. $x - \sin y'' + 2y'' = 0$ deňlemäniň umumy integralyny tapmaly.

Jogaby: $x = \sin t - 2t$,

$$y = -\frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (C_1 - 2 - t^2)\sin t +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - 2C_1\right)t + \frac{2}{3}t^3 + C_2$$

5. $\dfrac{y''}{y'} + e^{y'}y'' = 1$ deňlemäniň umumy integralyny tapmaly.

Jogaby: $x = \ln t + e^t + C_1,\ y = t + te^t - e^t + C_2$.

6. $y'' = e^{2y}$ deňlemäniň $y(0) = 0, y'(0) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = -\ln|x - 1|$.

7. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ deňlemäniň umumy integralyny tapmaly.

Jogaby: $y = \dfrac{C_1x^3}{6} - \dfrac{C_1^3x^3}{2} + C_2x + C_3$.

8. $2y''' - 3y'^2 = 0, y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1$ Koşi meselesiniň çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y(x + 2) = - x - 6$.

9. $yy'' - y'^2 = 0$ differensial deňlemäniň $M(0,1)$ nokatdan geçýän hem-de bu nokatda $x + y = 1$ göni çyzyk bilen galtaşýan integral egrisini tapmaly.

Jogaby: $y = e^{-x}$.

10. Egrilik radiusy normal kesiminiň uzynlygynyň kubuna proporsional bolan tekiz egrileri tapmaly.

Jogaby: $(x - C_1)^2 - C_2y^2 + \lambda C_2^2 = 0$.

11. $xyy'' - 2xy'^2 - yy' = 0$ deňlemäniň umumy integralyny tapmaly.

Jogaby: $y(x^2 + C_1) = C_2$.

12. $yy'' = y'^2$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = C_1e^{C_2x}$.

13. $y'y''' - 3y''^2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$ Koşi meselesini çözmeli.

Jogaby: $y = x$.

14. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ deňlemäniň $y(0) = 1, y'(0) = 1$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = e^{\mathrm{sh}x}$.

IV bap

ÝOKARY TERTIPLI ÇYZYKLY DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§ 1. Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

Eger y gözlenilýän funksiýa we onuň $y',...,y^{(n)}$ önümleri deňlemä çyzykly girýän bolsa, onda ol deňlemä n tertipli çyzykly deňleme diýilýär. Deňleme

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

görnüşde berilýär, bu ýerde $p_i(x)$ we $f(x)$ käbir (a,b) interwalda berlen üznüksiz funksiýalar. $p_i(x)$ funksiýalara deňlemäniň koeffisiýentleri, $f(x)$-a azat agza diýilýär. Eger $f(x) = 0$ bolsa, onda (1) deňleme

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

görnüşi alar. (2) deňlemä birjynsly, (1) deňlemä birjynsly däl deňleme diýilýär. (1) we (2) deňlemelere üýtgeýän koeffisiýentli deňlemeler hem diýilýär.

(2) deňlemäniň çep bölegini $L(y)$ bilen belgiläliň:

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y. \qquad (3)$$

$L(y)$-e çyzykly differensial operator diýilýär. Ol y-iň üstünde edilmeli amallaryň toplumyny görkezýär (özünde saklaýar). Bu belgileme funksiýa belgilemesine meňzeşdir. Bu ýerden görnüşi ýaly, operator düşünjesi funksiýa düşünjesini umumylaşdyrýar.

Mysal. Goý, $L(y) = y'' + xy' - 3y$ bolsun. Onda $y = e^x$ funksiýa üçin

$$L(e^x) = (e^x)'' + x(e^x)' - 3e^x = e^x(x-2),$$

ýagny $L(e^x) = e^x(x-2)$ bolar.

$L(y)$ operator aşakdaky iki häsiýete eýedir.

1. Iki funksiýanyň jeminden operator ol funksiýalardan operatorlaryň jemine deňdir, ýagny

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

2. Hemişelik köpeldijini operator belgisiniň daşyna çykarmak bolar, ýagny

$$L(Cy) = C \cdot L(y).$$

Hakykatdan-da,

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots \\ &\ldots + p_n(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + p_1(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \ldots + p_n(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1 + y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots \\ &\ldots + p_n y_2 = L(y_1) + L(y_2). \end{aligned}$$

Operatoryň beýleki häsiýetiniň dogrulygyna şuňa meňzeşlikde göz ýetirmek bolar.

Bu häsiýetleriň birinjisine operatoryň additiwlik, ikinjisine bolsa birjynslylyk häsiýeti diýilýär. $L(y)$ operatoryň getirilen häsiýetlerinden

$$L\left(\sum_{m=1}^{n} C_m y_m\right) = \sum_{m=1}^{n} C_m L(y_m)$$

deňligiň gelip çykýandygy düşnüklidir.

Eger (a,b) interwalda kesgitlenen $y_1,\ldots,y_n$ funksiýalar üçin iň bolmanda biri noldan tapawutly $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ hemişelikler bar bolup, $\forall x \in (a,b)$ üçin

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \tag{4}$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda ol funksiýalara çyzykly bagly funksiýalar diýilýär. Tersine bolan ýagdaýda ol funksiýalara çyzykly bagly däl funksiýalar diýilýär. Başgaça aýdylanda, eger (4) deňlik diňe $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ bolanda ýerine ýetýän bolsa, onda $y_1,\ldots,y_n$

funksiýalara çyzykly bagly däl funksiýalar diýilýär. Eger $y_1,...,y_n$ funksiýalar (2) deňlemäniň (a,b) interwaldaky çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, onda olara çözüwleriň fundamental sistemasy diýilýär.

Mysal. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ funksiýalary $(-\infty, \infty)$ interwalda çyzykly baglylyga derňäliň.

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \equiv 0$$

toźdestwa garalyň. Kesgitlilik üçin $\alpha_1 \neq 0$ bolsun. Toźdestwoda $x = \frac{\pi}{2}$ bahany goýsak, onda $\alpha_1 = 0$ bolar. Ol mümkin däl. Oňa görä-de garalýan funksiýalar $(-\infty, \infty)$ interwalda çyzykly bagly däl funksiýalardyr.

Goý, $y_1,...,y_n$ funksiýalaryň (a,b) interwalda n tertipli üznüksiz önümleri bar bolsun. Olardan düzülen

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjä Wronskiý kesgitleýjisi diýilýär. Ol $W(x)$ bilen belgilenýär.

(1) deňlemäni $y^{(n)}$-e görä çözülen görnüşde ýazalyň:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x) y^{(n-1)} - ... - p_n(x) y.$$

Bu deňleme geçen bapda öwrenilen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ...y^{(n-1)})$$

deňlemäniň hususy halydyr. Hakykatdan-da, munuň şeýledigini görkezmek üçin soňky deňlemede

$$f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \equiv f(x) - p_1(x) y^{(n-1)} - ... - p_n(x) y$$

diýip hasap etmek ýeterlikdir. (1) deňlemedäki $p_i(x)$ we $f(x)$ funksiýalar üznüksiz bolanlygy üçin $f(x, y, y', ...y^{(n-1)})$ funksiýa 3-nji bapdaky teoremanyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Şonuň üçin hem (1) deňlemäniň (a,b) interwalda kesgitlenen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan ýeke-täk $y = \varphi(x)$ çözüwi bardyr.

§2. Birjynsly deňlemeler

$$L(y) = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň. Onuň çözüwi baradaky teoremany subut edeliň.

1-nji teorema. Eger $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiýalar (1) deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda

$$y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n \tag{2}$$

funksiýa hem ol deňlemäniň çözüwidir.

Subudy. Teoremanyň şertine laýyklykda

$$L(y_1) \equiv 0, ..., L(y_n) \equiv 0.$$

(2) funksiýany (1) deňlemäniň çep bölegindäki y-iň ornuna goýup, çyzykly differensial operatoryň häsiýetlerinden peýdalansak, onda

$$L(C_1y_1 + ... + C_ny_n) = L(C_1y_1) + ... + L(C_ny_n) =$$
$$= C_1L(y_1) + ... + C_nL(y_n) \equiv C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0$$

ýa-da

$$L(C_1y_1 + ... + C_ny_n) \equiv 0$$

bolar. Diýmek, (2) funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi.

Mälim bolşy ýaly, n tertipli deňlemäniň umumy çözüwi n sany erkin hemişelikleri özünde saklaýar. (2) funksiýa hem n sany $C_1, ..., C_n$ erkin hemişeligi saklaýar. (2) funksiýa (1) deňlemäniň umumy çözüwimikä? diýen sorag ýüze çykýar. Umumy ýagdaýda (2) funksiýa (1) deňlemäniň umumy çözüwi bolman hem biler. Aşakda (2) funksiýanyň (1) deňlemäniň umumy çözüwi bolmaklygynyň şertleri getirilýär.

2-nji teorema. Eger y_1, y_2,..., y_n funksiýalar (a, b) interwalda çyzykly bagly funksiýalar bolsa, onda olaryň Wronskiý kesgitleýjisi $W(x) \equiv 0$.

Subudy. Teoremanyň şertine görä, y_1, y_2,..., y_n çyzykly bagly funksiýalar. Onda

$$\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0$$

α_i sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda ýerine ýeter.

Goý, $\alpha_1 \neq 0$ bolsun. Onda

$$y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} y_n$$

ýa-da

$$y_1 = \beta_2 y_2 + ... + \beta_n y_n \tag{3}$$

bolar, bu ýerde $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$ (i = 2,..., n). Wronskiý kesgitleýjisiniň birinji sütünini (3) funksiýa we onuň $y_1', ..., y_1^{(n-1)}$ önümleri bilen çalşyryp,

$$\begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + ... + \beta_n y_n & y_2 & ... & y_n \\ \beta_2 y'_2 + ... + \beta_n y'_2 & y'_2 & ... & y'_n \\ . & . & . & . \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + ... + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjini alarys. Alnan kesgitleýji $n - 1$ sany kesgitleýjiniň jemine deňdir. Olaryň her biriniň iki sütüni özara deň bolanlygy üçin olar nola deň. Şonuň üçin hem Wronskiý kesgitleýjisi nola deňdir.

3-nji teorema. Eger (1) deňlemäniň koeffisiýentleri (a,b) interwalda üznüksiz we $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiýalar onuň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsalar, onda olaryň Wronskiý kesgitleýjisi (a,b) interwalyň nokatlarynyň hiç birinde nola deň däldir, ýagny $\forall x \in (a,b)$ üçin $W(x) \neq 0$.

Subudy. $x_0 \in (a,b)$ nokatda $W(x_0) = 0$ diýeliň. Koeffisiýentleri bu kesgitleýjiniň elementleri bolan birjynsly algebraik deňlemeler sistemasyny düzeliň:

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0) + ... + y_n(x_0)C_n = 0, \\ y'_1(x_0)C_1 + y'_2(x_0)C_2 + ... + y'_2(x_0)C_n = 0, \\ .... \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 + ... + y_n^{(n-1)}(x_0)C_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Algebra dersinden mälim bolşy ýaly, bu sistemanyň noldan tapawutly çözüwleri bardyr. Goý, ol çözüwlerden biri tapylan bolsun. Ony $C_1 = \overline{C}_1, ..., C_n = \overline{C}_n$ bilen belgiläliň. Bu tapylan sanlar bilen teoremadaky $y_1,...,y_n$ çözüwlerden

$$y = \overline{C}_1 y_1 + ... + \overline{C}_n y_n \tag{5}$$

funksiýany düzeliň. (5) funksiýa 1-nji teorema laýyklykda (1) deňlemäniň çözüwidir. (4) sistemada $\overline{C}_1, ..., \overline{C}_n$ bahalary goýup alnan toźdestwolar göz öňünde tutulsa, onda (5) çözüwiň

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{6}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygy düşnüklidir. (1) deňlemäniň (6) şertleri kanagatlandyrýan diňe nol çözüwi bar (çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasyna laýyklykda). (5) deňlikden

$$\overline{C}_1 y_1 + ... + \overline{C}_n y_n = 0 \tag{7}$$

deňligi alarys, bu ýerde $\overline{C}_1, ..., \overline{C}_n$ sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutlydyr. Beýle ýagdaý (7) deňlikdäki $y_1,...,y_n$ funksiýalaryň çyzykly bagly çözüwlerdigini görkezýär. Alnan gapma-garşylyk teoremany subut edýär.

Soňky teoremalardan, eger (a,b) interwalda garalýan $y_1,...,y_n$ funksiýalaryň Wronskiý kesgitleýjisi nola deň bolsa, onda ol funksiýalaryň çyzykly baglydygy, noldan tapawutly bolanda bolsa, çyzykly bagly däldikleri gelip çykýar (deňlemäniň koeffisiýentleri üznüksizdir).

Mysal. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, funksiýalaryň $(-\infty, \infty)$ interwalda çyzykly bagly däldigini görkezmeli.

Bu funksiýalaryň Wronskiý kesgitleýjisi

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Diýmek, garalýan funksiýalar çyzykly bagly däl.

Indi, (2) funksiýanyň (1) deňlemäniň umumy çözüwi bolmaklygynyň şertini beýan edeliň.

4-nji teorema. Eger $y_1,...,y_n$ funksiýalar (1) deňlemäniň fundamental sistemasyny emele getirýän bolsalar, onda ol deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1y_1 + ... + C_ny_n \tag{8}$$

deňlik bilen berilýändir, bu ýerde $C_1, ..., C_n$ hemişelikler.

Subudy. Eger (8) çözüwden her bir hususy çözüwi alyp bolýan bolsa, onda ol umumy çözüwdir. (8) çözüwden hususy çözüwi almak üçin başlangyç şertler berilmeli. Goý,

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{9}$$

bolsun. (8) funksiýany $n - 1$ gezek differensirläp we (9) şertleri göz öňünde tutup, $C_1, ..., C_n$ ululyklara görä

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0) + ... + y_n(x_0)C_n = y_0, \\ y'_1(x_0)C_1 + y'_2(x_0)C_2 + ... + y'_n(x_0)C_n = y'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 + ... + y_n^{(n-1)}(x_0)C_n = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{10}$$

algebraik deňlemeler sistemasyny alarys. (10) sistemanyň kesgitleýjisi 3-nji teorema laýyklykda noldan tapawutly, ýagny

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & ... & y'_n(x_0) \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_{(0)}) \neq 0.$$

Onda (10) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bardyr. Goý, $C_1 = \alpha_1, ..., C_n = \alpha_n$ sanlar (10) sistemanyň çözüwi bolsun. Bu san bahalary (8)-de goýup,

$$y = \alpha_1y_1 + ... + \alpha_ny_n \tag{11}$$

funksiýany alarys. Bu funksiýa (1) deňlemäniň (9) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwidir. Diýmek, (8) funksiýa (1) deňlemäniň umumy çözüwi.

5-nji teorema. Eger $y = u(x) + iv(x)$ funksiýa hakyky koeffisiýentli (1) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda $u(x)$ we $v(x)$ funksiýalar hem ol deňlemäniň çözüwleridir.

Subudy. Teoremanyň şertine görä, $L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0$. Operatoryň häsiýetleri esasynda

$$L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0.$$

Bu ýerden $L(u(x)) \equiv 0$, $L(v(x)) \equiv 0$. Diýmek, $u(x)$ we $v(x)$ funksiýalar (1) deňlemäniň çözüwleri.

§3. Birjynsly däl deňlemeler

Birjynsly däl n-nji tertipli

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

deňlemä garalyň. Bu deňlemäni belgilemä laýyklykda

$$L(y) = f(x)$$

gysga görnüşde hem ýazmak bolar.

(1) deňlemeden $f(x) \equiv 0$ bolanda alynýan

$$L(y) = 0 \qquad (2)$$

deňlemäni hem ýazalyň. Muňa (1) deňlemä degişli birjynsly deňleme diýilýär.

Aşakdaky tassyklama adalatlydyr.

1-nji teorema. Birjynsly däl (1) deňlemäniň umumy çözüwi onuň hususy çözüwi bilen birjynsly (2) deňlemäniň umumy çözüwiniň jemine deňdir.

Subudy. Goý, $v = v(x)$ funksiýa (1) deňlemäniň hususy çözüwi, $u = C_1y_1 + ... + C_ny_n$ funksiýa (2) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun, ýagny

$$L(v(x)) \equiv f(x), \;\; L(u) \equiv 0$$

toźdestwolar ýerine ýetýär. $y = v + u$ funksiýany (1) deňlemede goýup,

$$L(v+u) \equiv L(v) + L(u) \equiv f(x)$$

ýa-da

$$L(v+u) \equiv f(x)$$

toźdestwony alarys. Diýmek,

$$u = v + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \tag{3}$$

funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi.

Eger (3) çözüwden islendik hususy çözüwi alyp bolýan bolsa, onda ol (1) deňlemäniň umumy çözüwidir. (3) çözüwden hususy çözüwi almak üçin goşmaça şertler berilmeli.

Goý,

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

berlen bolsun. (3)-de we onuň yzygiderli $n-1$ gezek alnan önümlerinde $x_0 \in (a,b)$ bahany goýup, berlen şertleri göz öňünde tutsak, onda $C_1, \dots, C_n$ ululyklara görä

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0) + \dots + y_n(x_0)C_n = y_0 - v(x_0), \\ y'_1(x_0)C_1 + y'_2(x_0)C_2 + \dots + y'_n(x_0)C_n = y'_0 - v'(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)C_n = y_0^{(n-1)} - v^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

görnüşli deňlemeler sistemasyny alarys. Onuň kesgitleýjisi $W(x_0) \neq 0$, çünki edilen gümana görä $y_1, y_2, \dots, y_n$ çyzykly bagly däl funksiýalar. Diýmek, sistemanyň ýeke-täk çözüwi bar. Goý, $C_1 = \alpha_1, \dots, C_n = \alpha_n$ onuň çözüwi bolsun. Bu sanlary (3)-de goýup,

$$y = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

görnüşli hususy çözüwi alarys. (3) funksiýanyň (1) deňlemäniň umumy çözüwidigi görkezildi.

Hususy çözüwleri tapmaklykda ulanylýan ýönekeý teoremany getireliň.

2-nji teorema. Eger $v_1 = v_1(x)$ funksiýa $L(y) = f_1(x)$ deňlemäniň hususy çözüwi bolsa, $v_2 = v_2(x)$ funksiýa $L(y) = f_2(x)$ deňlemäniň hususy çözüwi bolsa, onda olaryň jemi $v = v_1 + v_2$ funksiýa

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (4)$$

deňlemäniň hususy çözüwidir.

Subudy. Teoremanyň şertine görä

$$L(v_1(x)) \equiv f_1(x), \ \ L(v_2(x)) \equiv f_2(x)$$

toźdestwolary alarys. $v = v_1 + v_2$ funksiýany (4) deňlemäniň çep böleginde y-iň ornuna goýup, toźdestwolary göz öňünde tutsak, onda

$$L(v_1(x) + v_2(x)) = L(v_1(x)) + L(v_2(x)) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

ýa-da

$$L(v_1(x) + v_2(x)) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

bolar.

Diýmek, $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ funksiýa (4) deňlemäniň hususy çözüwi.

Teoremanyň tassyklamasy deňlemäniň sag böleginde goşulyjylaryň islendik tükenikli sanysy bolanda hem dogrudyr.

Indi erkin hemişelikleriň wariasiýasy usuly (Lagranź usuly) bilen birjynsly däl (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga girişeliň. Usulyň ulanylyşyny beýan edeliň.

Goý, (2) deňlemäniň

$$y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n \qquad (5)$$

umumy çözüwi tapylan bolsun. (1) deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_1(x) y_1 + ... + C_n(x) y_n \qquad (6)$$

görnüşde gözläliň. (6) funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar ýaly edip $C_1(x), ..., C_n(x)$ funksiýalary kesgitläliň. Olar differensirlenýän funksiýalar bolmaly. (6) funksiýany differensirläp, alarys:

$$y' = C_1 y'_1 + ... + C_n y'_n + C'_1 y_1 + ... C'_n y_n.$$

(6)-da gözlenilýän funksiýalar n, emma deňleme bir. Şonuň üçin hem şertleri (6)-nyň önümleriniň $n-1$ tertibe çenlisi $C_i(x) = const.$ bolandaky görnüşi alar ýaly edip saýlalyň, ýagny

$$C'_1 y_1 + ... + C'_n y_n = 0 \qquad (7_1)$$

şert goýalyň. Onda

$$y' = C_1 y'_1 + ... + C_n y'_n \qquad (6_1)$$

bolar. Ony differensirläp,

$$y'' = C_1 y''_1 + ... + C_n y''_n + C'_1 y'_1 + ... + C'_n y'_n$$

aňlatmany alarys.

$$C'_1 y'_1 + ... + C'_n y'_n = 0 \qquad (7_2)$$

şert goýalyň. Onda

$$y'' = C_1 y''_1 + ... + C_n y''_n \qquad (6_2)$$

bolar. Bu düzgüni $n-1$ gezek yzygiderli gaýtalap,

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} + C'_1 y_1^{(n-2)} + ... + C'_n y_n^{(n-2)}$$

deňligi alarys.

$$C'_1 y_1^{(n-2)} + ... + C'_n y_n^{(n-2)} = 0 \qquad (7_{n-1})$$

şert goýalyň. Onda

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} \qquad (6_{n-1})$$

bolar. Bu ýerden

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n)} + ... + C_n y_n^{(n)} + C'_1 y_1^{(n-1)} + ... + C'_n y_n^{(n-1)}. \qquad (6_n)$$

(1) deňlemeden (6), (6_1), ..., (6_n) deňlikleri nazarda tutup, ýazyp bileris:

$$\begin{aligned} &C_1 (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + ... + p_n y_1) + ... \\ &+ C_n (y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + ... + p_n y_n) + \\ &C'_1 y_1^{(n-1)} + ... + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned}$$

Edilen gümana görä, $y_1, y_2, ..., y_n$ (2) deňlemäniň bagly däl çözüwleri. Oňa görä-de ýaýlardaky duran aňlatmalar nola deňdirler. Şonuň üçin hem

$$C'_1 y_1^{(n-1)} + ... + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \qquad (7_n)$$

görnüşli deňleme alnar.

Şeýlelikde, (7_1), (7_2),..., (7_{n-1}), (7_n) deňlemelerden $C'_1, C'_2, ..., C'_n$ ululyklara görä

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + ... + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + ... + C'_n y'_n = 0, \\ .... \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + ... + C'_n y_n^{(n-2)} = 0. \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + ... + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (8)$$

deňlemeler sistemasyny düzeris. Sistemanyň kesgitleýjisi

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y'_1 & y'_2 & ... & y'_n \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

bolar. Munuň $W(x)$ Wronskiý kesgitleýjisidigi aýdyňdyr. $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiýalaryň çözüwleriň fundamental sistemasyny düzýändigi (5)-den belli. Oňa görä-de $W(x) \neq 0$. Diýmek, (8) sistemanyň ýeke-täk çözüwiniň barlygyny üpjün edýän şert ýerine ýetýär. Onda Kramer düzgünine laýyklykda, $C'_i(x)$

$$C'_i(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \ (i = 1, 2, ..., n) \qquad (9)$$

formulalar boýunça tapylýar. (9) önüme görä çözülen birinji tertipli deňlemelerdir. Olaryň çözüwleri

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + C_i, \ (i = 1, 2, ..., n) \qquad (10)$$

görnüşlerde bolar, bu ýerde C_i erkin hemişelikler. (10)-y (6)-da goýup, (1) deňlemäniň

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx$$

görnüşdäki umumy çözüwine geleris.

Tapylan umumy çözüwdäki birinji goşulyjy (2) deňlemäniň umumy çözüwi, ikinji goşulyjy bolsa (1) deňlemäniň hususy çözüwi. Diýmek, eger birjynsly (2) deňlemäniň umumy çözüwi belli bolsa, onda (1) deňlemäniň umumy çözüwini erkin hemişelikleriň wariasiýasy usuly bilen hem tapyp bolýan eken.

§4. Birjynsly hemişelik koeffisiýentli deňlemeler

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $a_1,...,a_n$ koeffisiýentler hakyky sanlar. (1) deňlemede

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y \tag{1_1}$$

belgilemäni girizeliň. Onda ol

$$L(y) = 0$$

görnüşde ýazylar. (1) deňlemäniň çözüwini

$$y = e^{\lambda x} \tag{2}$$

görnüşde gözläliň, bu ýerde λ heniz kesgitlenilmedik san. (2) funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar ýaly edip λ-ny saýlalyň. Şu maksat bilen (2)-ni we onuň $y' = \lambda e^{\lambda x},...,y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ önümlerini (1) deňlemede goýup,

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0 \tag{3}$$

görnüşli deňligi alarys. $e^{\lambda x} \neq 0$ bolanlygy üçin

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4}$$

bolmaly. Şeýlelikde, n tertipli (1) deňlemäniň çözüwini tapmaklyk n derejeli (4) algebraik deňlemäniň çözüwini tapmaklyga getirildi. (4) deňlemä (1) deňlemäniň *häsiýetlendiriji deňlemesi* diýilýär. Onuň köklerine *häsiýetlendiriji sanlar* diýilýär. Algebra dersinden belli bolşy ýaly, (4) deňlemäniň n sany köki bardyr. Goý, olar tapylan bolsun. Olary $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ bilen belgiläliň. Bu sanlary (2) deňlikde yzygiderli goýup,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

funksiýalary alarys.

Indi (4) häsiýetlendiriji deňlemäniň köklerine baglylykda (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga geçeliň.

1. Goý, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ kökler hakyky we dürli bolsunlar. (5) funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny düzýärler. Hakykatdan-da, olaryň Wronskiý kesgitleýjisi

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_2 x} & \lambda_2^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \times$$

$$\times (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\dots(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \times$$
$$\times (\lambda_{n-1} - \lambda_1)(\lambda_{n-1} - \lambda_2)\dots(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})\dots(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Soňky kesgitleýji Wandermond kesgitleýjisi diýip atlandyrylýar. Ol kesgitleýjiniň görkezilen tapawutlaryň köpeltmek hasylyna deňdigi bellidir. Şeýlelikde, (5) funksiýalaryň Wronskiý kesgitleýjisiniň noldan tapawutlydygy anyklanyldy. Diýmek, ol funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny düzýärler. Şonuň üçin hem, §2-däki 4-nji teorema laýyklykda, (1) deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

görnüşde ýazmak bolar.

1-nji mysal. $y'' + y' - 2y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňleme $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ görnüşde bolar. Onuň kökleri $\lambda_1 = 1$ we $\lambda_2 = -2$ hakyky we dürli. Şonuň üçin hem garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

görnüşdedir.

2-nji mysal. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ deňlemäniň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

ýa-da

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

deňlemedir. Munuň kökleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

görnüşde alarys.

2. Goý, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kökleriň arasynda kompleksleri bar bolsun. $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \ \lambda_2 = \alpha - \beta i$, galanlary hakyky we dürli sanlar diýip hasap edeliň. $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ sany (2)-de goýup, $y = e^{(\alpha + \beta i)x}$ görnüşli funksiýany alarys. Ony Eýler formulasyna laýyklykda

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

görnüşde ýazarys. §2-däki 5-nji teorema görä,

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{6}$$

funksiýalar (1) deňlemäniň çözüwleridir. Eger $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ sany (2)-de goýsak, onda şol teorema laýyklykda ýene (6) funksiýalary alarys. Diýmek, kompleks kökleriň her bir jübütine (6) hususy çözüwler degişli bolýan eken. Şeýlelikde,

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ y_3 = e^{\lambda_3 x},...,$$
$$y_n = e^{\lambda_n x}$$

çözüwler (1) deňlemäniň fundamental sistemasyny düzýär. Şonuň üçin hem (1) deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x} \qquad (7)$$

görnüşde bolar.

Eger (4) deňlemäniň kökleriniň arasynda kompleks sanlaryň jübütleriniň birnäçesi bar bolsa, onda olaryň her birine hususy çözüwleriň jübüti degişlidir. Goý, $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, ..., \lambda_r = \alpha_r + \beta_r i$ sanlar (4) deňlemäniň kökleri bolsun, ýagny (4) deňlemäniň $2r$ sany kompleks kökleri bar. Beýleki $\lambda_{2r+1}, ..., \lambda_n$ kökleri hakyky we dürli sanlar diýip hasap edeliň. Bu ýagdaýda (1) deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = \sum_{j=1}^{r} C_j e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x + \sum_{j=1}^{r} \overline{C}_j e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x + \sum_{j=2r+1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}$$

görnüşde ýazylar.

3-nji mysal. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$$

görnüşde bolar. Deňlemäniň kökleri: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + 3i,\ \lambda_3 = 2 - 3i.$ Bulara degişli

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}\cos 3x, \quad y_3 = e^{2x}\sin 3x$$

hususy çözüwler fundamental sistemany düzýärler. Deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x$$

görnüşde bolar.

4-nji mysal. $y''' - 8y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemäni

$$\lambda^3 - 8 = 0 \quad \text{ýa-da} \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

görnüşde ýazarys. Onuň kökleri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$. Bu köklere degişli $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x$, $y_3 = e^{-x}\sin\sqrt{3}\,x$ funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýärler. Oňa görä-de deňlemäniň umumy çözüwini (7)-den peýdalanyp,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x + C_3e^{-x}\sin\sqrt{3}\,x$$

görnüşde alarys.

5-nji mysal. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňleme

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0 \quad \text{ýa-da} \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4) = 0$$

görnüşdedir. Onuň kökleri: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2i,\ \lambda_3 = -2i$. Deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$$

görnüşde ýazylar.

3. Goý, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ kökleriň arasynda k sanysy hakyky we özara deň, ýagny $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$ $(k \leq n)$ bolsun. Garalýan (1) deňlemäniň tertibi n bolanlygy üçin, onuň umumy çözüwi özünde n sany erkin hemişeligi saklamaly. Kökleri (2)-de yzygiderli goýup, alnan funksiýalardan düzülen umumy çözüwiň özünde n-den az hemişeligi saklajakdygyny görmek kyn däl, ýagny ondaky goşulyjylaryň sany n-den az bolar. Oňa görä-de umumy çözüwdäki ýetmeýän goşulyjylary tapmaly bolar. Şu ýagdaý üçin (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklygyň usulyny beýan edeliň.

(1_1) belgilemede $y = e^{\lambda x}$ funksiýany goýup,

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}p(\lambda) \tag{8}$$

toźdestwony alarys, bu ýerde

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Muňa häsiýetlendiriji polinom hem diýilýär. (8) deňligi λ boýunça m gezek differensirläliň:

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x}\cdot p(\lambda)),$$
$$\frac{d^m}{d\lambda^m}L(e^{\lambda x}) = L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m}e^{\lambda x}\right) = L(x^m e^{\lambda x}), \tag{9}$$

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x}p(\lambda)) = x^m e^{\lambda x}p(\lambda) + C_1^{(m)}x^{m-1}e^{\lambda x}p'(\lambda) + ,...,$$
$$+e^{\lambda x}p^{(m)}(\lambda)$$

Onda (9) deňlik

$$L(x^m e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(x^m p(\lambda) + C_1^{(m)}x^{m-1}p'(\lambda) + ... + p^{(m)}(\lambda)) \tag{10}$$

görnüşi alar. Edilen gümana görä, λ_1 san $p(\lambda) = 0$ deňlemäniň köki bolup, kratnylygy k sana deň (k sany köki özara deň). Algebra dersinden belli bolşy ýaly, λ_1 san

$$p'(\lambda) = 0, p''(\lambda) = 0, ..., p^{(k-1)}(\lambda) = 0$$

deňlemeleriň hem köküdir. Şeýlelikde,

$$p(\lambda_1) = 0,\ p'(\lambda_1) = 0, ...,\ p^{(k-1)}(\lambda_1) = 0$$

deňlikleri alarys. Diýmek, (10) deňligiň sag bölegi $\lambda = \lambda_1$ we $m = 0,1,2,\dots,k-1$ bolanda nola deňdir, ýagny

$$L(x^m e^{\lambda_1 x}) = 0.$$

Şeýlelikde, $x^m e^{\lambda_1 x}$ funksiýa $m = 0,1,2,\dots,k-1$ bahalarda (1) deňlemäniň çözüwidir. $m = 0,1,2,\dots,k-1$ bahalar üçin

$$e^{\lambda_1 x},\quad xe^{\lambda_1 x},\quad x^2 e^{\lambda_1 x}, ...,\quad x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{11}$$

funksiýalar (1) deňlemäniň hususy çözüwleri bolar. Olaryň islendik (a,b) interwalda çyzykly bagly däl funksiýalardygyny barlamak kyn däl. Goý, x-iň hemme bahalary üçin

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 xe^{\lambda_1 x} + C_k x^{k-1}e^{\lambda_1 x} = 0$$

deňlik ýerine ýetýän bolsun. $e^{\lambda_1 x}$ funksiýanyň x-iň hemme bahalarynda noldan tapawutlydygy bellidir. Şonuň üçin hem $\forall x \in (a,b)$ üçin

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_kx^{k-1} = 0$$

bolmaly. Soňky deňligiň diňe $C_1, C_2, ..., C_k$ koeffisiýentleriň nola deň bolan ýagdaýynda ýerine ýetýändigi düşnüklidir. Diýmek, (11) çözüwler fundamental sistemany düzýärler. Munuň şeýledigini Wronskiý kesgitleýjisi arkaly hem görkezmek bolar. Şeýlelikde, (1) deňlemäniň umumy çözüwini düzýän n sany goşulyjylaryň kratny köke degişli bölegi

$$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x} + ... + C_kx^{k-1}e^{\lambda_1 x}$$

goşulyjylardan ybarat bolar. Eger (4) deňlemäniň λ_1-den başga kratny kökleri bar bolsa, onda her kratny kök üçin ýokarda görkezilen aňlatma meňzeş bolan aňlatmalary düzüp, olary umumy çözüwiň düzümine girizmeli. Eger $\lambda_1 = \alpha + \beta_i$ kompleks köküň kratnylygy k bolsa, ýagny $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \alpha + \beta_i$ bolsa, onda hususy çözüwleri

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad xe^{(\alpha+\beta i)x}, ..., x^{k-1}e^{(\alpha+\beta i)x}$$

görnüşlerde bolar. Bulary Eýler formulasyndan peýdalanyp,

$$e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$xe^{\alpha x}\cos\beta x + ixe^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$...$$
$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + ix^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

görnüşlerde ýazmak bolar. §2-däki 5-nji teorema laýyklykda, $2k$ sany

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ ..., \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ ..., \ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

çözüwleri alarys. λ_1-iň $\overline{\lambda}_1 = ... = \overline{\lambda}_k = \alpha - \beta i$ çatyrymlysy üçin hem şol çözüwler alnar. Şeýlelikde, (1) deňlemäniň umumy çözüwiniň bu köklere degişli bölegi

$$e^{\alpha x}(C_1 + C_2x + ... + C_kx^{k-1})\cos\beta x +$$
$$+ e^{\alpha x}(C_{k+1} + C_{k+2}x + ... + C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x$$

bolar.

Eger kratny kompleks kökleriň sany köp bolsa, onda olaryň her biri üçin ýokardaky aňlatma meňzeş aňlatma alnar. Eger $\lambda_1 = \beta i$ köküň kratnylygy k bolsa, onda (1) deňlemäniň umumy çözüwiniň λ_1-e degişli bölegi

$$(C_1 + C_2 x + ... + C_k x^{k-1})\cos\beta x +$$
$$+(C_{k+1} + C_{k+2} x + ... + C_{2k+1} x^{k-1})\sin\beta x$$

görnüşde bolar.

Şeýlelikde, (1) deňlemäniň umumy çözüwiniň görnüşi häsiýetlendiriji deňlemäniň köklerine bagly. Şonuň üçin hem (1) deňlemäniň umumy çözüwiniň dogry düzülmegi üçin häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerine degişli goşulyjylar dogry tapylmalydyr.

6-njy mysal. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňleme

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \text{ ýa-da}$$
$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

görnüşde bolar. Onuň kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Bu köklere degişli

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}, \quad y_3 = x^2 e^{2x}$$

çözüwleri alarys. Onda deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$$

görnüşde bolar.

7-nji mysal. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemesini

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

görnüşde ýazarys. Deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ bolar. Bulara

$$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = xe^{2x}, \quad y_3 = e^{3x}$$

çözüwler degişli bolarlar. Onda deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{3x}$$

görnüşde ýazarys.

8-nji mysal. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

görnüşde bolar. Beýle deňlemä *gaýdymly* deňleme diýilýär. Onuň iki bölegini hem λ^2-a bölüp,

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 3 = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňleme häsiýetlendiriji deňlemä ekwiwalentdir. $\lambda + \frac{1}{\lambda} = t$ belgilemäni girizeliň. Onda $\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = t^2 - 2$ bolar we ýokardaky deňleme

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

görnüşi alar. Bu deňlemäniň kökleri $t_1 = t_2 = -1$. Bulary belgilemede t-niň ornuna yzygiderli goýup, iki sany kwadrat deňlemäni alarys. Olaryň kökleri

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Bu köklere

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2 = xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$
$$y_3 = e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_4 = xe^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

hususy çözüwler degişli bolarlar. Talap edilýän çözüw

$$y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + e^{-\frac{x}{2}}(C_3 + C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

görnüşde bolar.

9-njy mysal. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \text{ ýa-da } (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

bolar. Onuň kökleri $\lambda_{1,2} = 2i,\ \lambda_{3,4} = -2i$, hyýaly sanlardyr. Bulara

$$y_1 = \cos 2x,\quad y_2 = x\cos 2x,\quad y_3 = \sin 2x,\quad y_4 = x\sin 2x$$

hususy çözüwler degişli bolarlar. Onda gözlenilýän umumy çözüw

$$y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x$$

görnüşde ýazylar.

10-njy mysal. $y'' - 5y' + 4y = 0$ deňlemäniň $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$. Bulara degişli hususy çözüwler $y_1 = e^{4x}, y_2 = e^x$ görnüşlerde bolarlar. Onda garalýan deňlemäniň umumy çözüwini $y = C_1e^{4x} + C_2e^x$ görnüşde ýazarys. Başlangyç şertleri peýdalanmak üçin umumy çözüwiň önümini tapalyň:

$$y' = 4C_1e^{4x} + C_2e^x.$$

$$y(0) = C_1 + C_2 \quad \text{we} \quad y'(0) = 4C_1 + C_2.$$

Diýmek,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

bolmaly. Bu ýerden $C_1 = 0,\ C_2 = 1$. Bulary umumy çözüwde goýup, talap edilýän $y = e^x$ çözüwi alarys.

11-nji mysal. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ deňlemäniň $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji deňleme

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{ýa-da} \quad (\lambda - 1)^3 = 0$$

görnüşde bolar. Onuň kökleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Umumy çözüw $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$ görnüşde ýazylar. Başlangyç şertleri nazarda tutup $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$ bahalary taparys. Diýmek, tapmaklygy talap edilýän çözüw $y = e^x(1 + x)$ görnüşde bolar.

12-nji mysal. $y^{IV} - y = 0$ deňlemäniň $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $\lambda^4 - 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

görnüşde bolar. Bu funksiýada we y', y'', y''' üçin aňlatmalarda başlangyç bahalary goýup,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 - C_2 + C_4 = 1, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 1, \\ C_1 - C_2 - C_4 = 1 \end{cases}$$

görnüşli sistemany alarys. Onuň çözüwi bar. Çünki kesgitleýjisi $\Delta = -8 \neq 0$. Onda

$$C_1 = \frac{3}{4},\quad C_2 = -\frac{1}{4},\quad C_3 = -\frac{1}{2},\quad C_4 = 0.$$

Tapylan san bahalary umumy çözüwde goýup,

$$y = \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$$

hususy çözüwi alarys.

Indi hemişelik koeffisiýentli deňlemä getirilýän deňlemeleriň käbirlerine garalyň.

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \tag{12}$$

deňleme berlen bolsun. Görnüşi ýaly, deňlemäniň koeffisiýentleri derejeli funksiýalar. (12) deňlemä *Eýler deňlemesi* diýilýär. Muny $x = e^t$ $(x > 0)$ ýa-da $t = \ln x$ ($x < 0$ bolanda $x = -e^t$) ornuna goýma arkaly hemişelik koeffisiýentli deňlemä getirmek bolar.

Ilki $y', y'',\dots, y^{(n)}$ önümleri tapalyň:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x} +$$

$$+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x^3},$$

$$y^{(n)} = \left(\frac{d^ny}{dt^n} + \alpha_1\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x^n} =$$

$$= \frac{1}{x^n}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\dots\left(\frac{d}{dt} - n + 1\right)\cdot y.$$

Tapylan aňlatmalary (12) deňlemede goýup,

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}y' + b_ny = 0$$

hemişelik koeffisiýentli deňlemäni alarys.

(12) - ä garanda umumyrak bolan

$$\begin{aligned}&(ax+b)^ny^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots\\ &\dots a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = 0\end{aligned} \tag{13}$$

görnüşli deňlemäni hemişelik koeffisiýentli deňlemä getirmek üçin $ax + b = e^t$ ornuna goýmany ulanmak bolar, bu ýerde a,b,a_i $(i = 1,2,\dots,n)$ hemişelik sanlar.

13-nji mysal. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Deňlemäni $x = e^t$ ornuna goýma arkaly hemişelik koeffisiýentli deňlemä getireliň. y' we y'' üçin tapylan aňlatmalary berlen deňlemede goýup,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

deňlemäni alarys.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3$. Onda onuň umumy çözüwi

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

görnüşde ýazylar. Bu ýerde t-ni $\ln x$ bilen çalşyryp, garalýan deňlemäniň

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

görnüşdäki umumy çözüwine geleris.

Deňlemeleriň ýene bir görnüşine garalyň:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad (n - const.) \tag{14}$$

Bu görnüşli deňlemä *Çebyşew deňlemesi* diýilýär. Ony $x = \cos t \ \ (|x| < 1)$ ornuna goýma arkaly hemişelik koeffisiýentli deňlemä getirmek bolýar. y' we y'' üçin tapylan, ýagny

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right] = \frac{d}{dt}\cdot\left[\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right]\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right) + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right]\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right) =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

aňlatmalary (14) deňlemede goýup,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0$$

görnüşli hemişelik koeffisiýentli deňlemäni alarys.

$$\lambda^2 + n^2 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = ni,\ \lambda_2 = -ni$. Onda soňky differensial deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$$

görnüşde bolar. Bu ýerde t-ni $\arccos x$ bilen çalşyryp, garalýan deňlemäniň umumy çözüwini

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x)$$

görnüşde taparys.

14-nji mysal. $(1-x^2)\,y'' - xy' + 2y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. $x = \cos t$ ornuna goýmany edeliň. y' we y'' üçin tapylan önümleri deňlemede goýup,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$$

görnüşli deňlemäni alarys. Munuň $\lambda^2 + 2 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri $\lambda_1 = \sqrt{2}\,i$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}\,i$. Onuň çözüwini

$$y = C_1 \cos\sqrt{2}\,t + C_2 \sin\sqrt{2}\,t$$

görnüşde ýazarys. t-ni $\arccos x$ bilen çalşyryp, garalýan deňlemäniň çözüwini

$$y = C_1 \cos(\sqrt{2} \arccos x) + C_2 \sin(\sqrt{2} \arccos x)$$

görnüşde alarys.

Gönükmeler

Deňlemeleri we meseleleri çözüň:

1. $y'' - 10y' + 21y = 0$.

Jogaby: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x}$.

2. $y'' - y' + y = 0$.

Jogaby: $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3. $2y'' + y' + 2\sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ \cdot y = 0$.

Jogaby: $y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{1}{4}x}$.

4. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

Jogaby: $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

5. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

Jogaby: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$.

6. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Jogaby: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-x}$.

7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Jogaby: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.

8. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$.

Jogaby: $y = C_1e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$.

9. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$.

Jogaby: $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x + C_4x^2)$.

10. $y^{IV} + y = 0$.

Jogaby:
$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + \\ + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

11. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Jogaby: $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

12. $y^{IV} - 12y'' + 27y = 0$.

Jogaby: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x}$.

13. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

Jogaby: $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3\cos x + C_4\sin x$.

14. $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Jogaby: $y = e^{-x}[(C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x]$.

15. $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

Jogaby: $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x.$

16. $y^{VI} - y = 0.$

Jogaby:

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$
$$+ e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

17. $y'' - 4y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10.$

Jogaby: $y = 4e^{x} + 2e^{3x}.$

18. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$

Jogaby: $y = -\frac{1}{3}e^{x}\cos 3x.$

19. $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Jogaby: $y = x + e^{-x}.$

20. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0.$

Jogaby: $y = \cos x.$

21. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 1.$

Jogaby: $y = e^{x}.$

Eýler deňlemelerini çözmeli:

22. $x^2y'' - xy' + y = 0.$

Jogaby: $y = x(C_1 + C_2 \ln x).$

23. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

Jogaby: $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3.$

24. $(2x + 1)\, 2y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0.$

Jogaby: $y = C_1\,(2x + 1) + C_2\,(2x + 1)\ln(2x + 1).$

§5. Birjynsly däl hemişelik koeffisiýentli deňlemeler

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

görnüşli deňlemä garalyň, bu ýerde a_i $(i = 1,2,...,n)$ koeffisiýentler hemişelik sanlar, $f(x)$ azat agza (a,b) interwalda berlen üznüksiz funksiýa. §3 - de üýtgeýän koeffisiýentli birjynsly däl deňlemäniň umumy çözüwiniň Lagranź usuly boýunça tapylyşy beýan edilipdi. Oňa görä-de garalýan (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga hem şol usuly ulanmak bolar. Ol iň oňaýly usullaryň biridir. Emma ol usul bilen deňleme çözülende uly hasaplamalary ýerine ýetirmeli bolýar. Şonuň üçin hem (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga käbir ýagdaýlarda §3-däki 1-nji teoremany ulanmak amatly bolýar. Ol teorema laýyklykda umumy çözüwi tapmak üçin (1) deňlemäniň hususy çözüwini tapmaly. Hususy çözüw $f(x)$ funksiýanyň görnüşlerine bagly. Ol $f(x)$ funksiýanyň görnüşlerine baglylykda gözlenilýär. Hususy çözüwi tapmaklyk üçin kesgitlenmedik koeffisiýentler usuly diýip atlandyrylýan usul ulanylýar. Bu ýagdaýda deňlemäniň hususy çözüwi algebraik amallar arkaly tapylýar. Şeýlelikde, (1) deňlemäniň umumy çözüwi 1-nji teorema laýyklykda düzülýär.

Indi birjynsly däl (1) deňlemäniň birnäçe ýörite görnüşlerine garalyň hem-de olary çözmekde kesgitlenmedik koeffisiýentler usulynyň ulanylyşyny beýan edeliň.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x} P_m(x) \tag{2}$$

görnüşli deňlemä garalyň, bu ýerde,

$$P_m(x) = p_m x^m + ... + p_1 x + p_0$$

berlen m derejeli polinom. (2) deňlemäni

$$L(y) = e^{\alpha x} P_m(x)$$

gysga görnüşde hem ýazmak bolar. Eger hemişelik α san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolmasa (başgaça aýdylanda, kökleri bilen gabat gelmese), ýagny $P(\alpha) \neq 0$ bolsa, onda (2) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \qquad (3)$$

görnüşde gözlemek bolar, bu ýerde

$$Q_m(x) = q_m x^m + ... + q_1 x + q_0$$

koeffisiýentleri kesgitlenmedik m derejeli polinom. (3) funksiýa (2) deňlemäniň çözüwi bolar ýaly edip, $Q_m(x)$ polinomyň koeffisiýentlerini kesgitlemeli. Onuň üçin (3)-i (2) deňlemede y-iň ornuna goýup,

$$L(e^{\alpha x} Q_m(x)) = e^{\alpha x} P_m(x) \qquad (4)$$

toźdestwonyň ýerine ýetmekligi talap edilýär. Ilki bilen (4) deňligiň çep bölegindäki amallar ýerine ýetirilýär. Onuň üçin §4 -däki (8) we (10) formulalar ulanylýar, soňra alnan deňligiň iki bölegi hem $e^{\alpha x}$ köpeldijä gysgaldylýar. Deňligiň çep böleginde koeffisiýentleri $Q_m(x)$-iň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladylýan polinom, sag böleginde bolsa berlen polinom bolar. Şeýlelikde, polinomlaryň deňligi alnar. x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňläp, $Q_m(x)$ polinomyň q_0, q_1,...,q_m koeffisiýentlerine görä,

$$\begin{cases} q_m P(\alpha) = p_m, \\ q_{m-1} \cdot P(\alpha) + q_m C'_m P'(\alpha) = p_{m-1}, \\ \qquad \qquad ... \\ q_0 \cdot P(\alpha) + q_1 P'(\alpha) + ... + q_m P^{(m)}(\alpha) = p_0 \end{cases}$$

görnüşli $m+1$ deňlemeler sistemasyny alarys. Näbellileriň san bahalaryny yzygiderli tapyp (3)-de goýsak, tapmaklygy talap edilýän hususy çözüwi alarys.

Eger α san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolup, kratnylygy k sana deň bolsa (k sany kökleri bilen gabat gelse), onda ol

$$P(\alpha) = 0, \quad P'(\alpha) = 0, ..., \quad P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

deňlikleri kanagatlandyrar we $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ bolar. Bu ýagdaýda (2) deňlemäniň hususy çözüwini (3) görnüşde gözläp bolmaz, çünki $P(\alpha) = 0$.

Garalýan ýagdaýda (2) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$$

görnüşde gözlemek bolar. $Q_m(x)$-iň $q_0, q_1, ..., q_m$ koeffisiýentleri öňki ýagdaýdaka meňzeşlikde tapylýar. Olar

$$\begin{cases} C_{k+m}^{k} P^{k}(\alpha) q_m = p_m, \\ C_{m+k-1}^{k} \cdot P^{(k)}(\alpha) q_{m-1} + C_{m+k}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) q_m = p_{m-1}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ P^{(k)}(\alpha) q_0 + P^{(k+1)}(\alpha) q_1 + ... + P^{(k+m)}(\alpha) q_m = p_0 \end{cases}$$

görnüşli sistemadan yzygiderli tapylýarlar, çünki $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, bu ýerde $C_r^l = \dfrac{r!}{l!(r-1)!}$.

Eger (2) deňlemede $\alpha = 0$ bolsa, onda ol

$$L(y) = P_m(x) \tag{5}$$

görnüşi alar. $\alpha = 0$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl bolsa, onda (5) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = Q_m(x)$$

görnüşde gözlemeli. Eger $\alpha = 0$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolup, kratnylygy k sana deň bolsa, onda (5) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = x^k Q_m(x)$$

görnüşde gözlemeli bolar.

Indi

$$L(y) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x \tag{6}$$

görnüşli deňlemä garalyň, bu ýerde $P_m(x)$ derejesi m bolan polinom, α, β - hakyky sanlar. (6) deňlemäni (2) görnüşli ýagdaýa getirmek bolar.

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}$$

Eýler formulasyny peýdalansak, onda (6) deňleme

$$L(y) = \frac{1}{2} e^{(\alpha + \beta i)x} P_m(x) + \frac{1}{2} e^{(\alpha - \beta i)x} P_m(x) \tag{7}$$

görnüşi alar.

§3-däki 2-nji teorema laýyklykda (7) deňlemäniň çözüwi

$$L(y)=\frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta i)x}P_m \tag{8}$$

$$L(y)=\frac{1}{2}e^{(\alpha-\beta i)x}P_m(x) \tag{9}$$

deňlemeleriň çözüwleriniň jemine deňdir.

Eger $\alpha+\beta i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolmasa, onda (8) we (9) deňlemeleriň hususy çözüwlerini

$$V_1(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}Q_m(x)$$

$$V_2(x)=e^{(\alpha-\beta i)x}\overline{Q}_m(x)$$

görnüşlerde gözlemek bolar, bu ýerde $Q_m(x)$, $\overline{Q}_m(x)$ m derejeli koeffisiýentleri kesgitlenmedik çatyrymly sanlar bolan polinomlar. Bu hususy çözüwleriň jemi

$$V(x)=V_1(x)+V_2(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}Q(x)+e^{(\alpha-\beta i)x}\overline{Q}_m(x)$$

(7) deňlemäniň hususy çözüwidir. Bu ýerde görkezijili funksiýalardan trigonometrik funksiýalara geçilse, onda (6) deňlemäniň

$$V(x)=e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+S_m(x)\sin\beta x] \tag{10}$$

görnüşli kompleks sany saklamaýan hususy çözüwi alnar, bu ýerde $R_m(x)$, $S_m(x)$ koeffisiýentleri kesgitlenmedik polinomlar. Olaryň koeffisiýentlerini tapmak üçin V-ni we onuň önümlerini (6) deňlemäniň çep böleginde y-iň we onuň degişli önümleriniň orunlaryna goýmaly. Deňligiň iki bölegini hem $e^{\alpha x}$ köpeldijä gysgaltmaly. Alnan deňligiň sag we çep böleklerindäki $\cos\beta x$ we $\sin\beta x$ köpeldijileriň degişli koeffisiýentlerini deňlemeli. Soňra x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňleşdirip, (10)-da görkezilen polinomlaryň koeffisiýentlerine görä deňlemeler sistemasy alnar. Näbellileriň tapylan san bahalaryny (10)-da goýup, gözlenilýän hususy çözüwi ýazmak bolar.

Eger $\alpha+\beta i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolup, kratnylygy k san bolsa, onda (6) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x] \tag{11}$$

görnüşde gözlemeli bolar.

Eger deňleme

$$L(y) = e^{\alpha x} P_m(x)\sin\beta x \tag{12}$$

görnüşde berlen bolsa, onda onuň hususy çözüwini (10) we (11) görnüşlerde gözlemek bolar.

Indi (6) we (12) deňlemeleri özünde saklaýan

$$L(y) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + \overline{P}_m(x)\sin\beta x] \tag{13}$$

görnüşli deňlemä garalyň, bu ýerde P_m, $\overline{P}_m$ koeffisiýentleri hakyky sanlar bolan m derejeli polinomlardyr. Olaryň biriniň derejesiniň m-den kiçi bolmagy hem mümkin. (13) deňlemäni garalan deňlemelere syrykdyrmak bolar.

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \ \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

Eýler formulalaryny peýdalansak, onda (13) deňleme

$$\begin{aligned} L(y) = e^{(\alpha+\beta i)x}\left[\frac{1}{2}P_m(x) - \frac{i}{2}\overline{P}_m(x)\right] + \\ e^{(\alpha-\beta i)x}\left[\frac{1}{2}P_m(x) + \frac{i}{2}\overline{P}_m(x)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

görnüşi alar, bu ýerdäki kwadrat ýaýlardaky polinomlar kompleks çatyrymlydyrlar.

$$L(y) = e^{(\alpha+\beta i)x}\left[\frac{1}{2}P_m(x) - \frac{i}{2}\overline{P}_m(x)\right] \tag{15}$$

$$L(y) = e^{(\alpha-\beta i)x}\left[\frac{1}{2}P_m(x) + \frac{i}{2}\overline{P}_m(x)\right] \tag{16}$$

deňlemelere seredeliň. Eger $\alpha + \beta i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolmasa, onda (15) we (16) deňlemeleriň hususy çözüwlerini degişlilikde

$$V_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}\left[\frac{1}{2}R_m(x) - \frac{i}{2}S_m(x)\right] \tag{17}$$

$$V_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}\left[\frac{1}{2}R_m(x) + \frac{i}{2}S_m(x)\right] \quad (18)$$

görnüşlerde gözläris. $R_m(x)$ we $S_m(x)$ polinomlaryň koeffisiýentleri degişli deňlemeler sistemalaryndan kesgitlenilýärler. $S_m(x)$ we $R_m(x)$ polinomlaryň degişli koeffisiýentleri kompleks çatyrymlydyrlar.

Oňa görä-de V_2 çözüw V_1 çözüwiň kompleks çatyrymlysy bolar. Olar goşulyp, ondaky görkezijili funksiýalar trigonometrik funksiýalar bilen çalşyrylsa, onda (13) deňlemäniň gözlenilmeli hususy çözüwi

$$V(x) = e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]$$

görnüşde bolar.

Eger $\alpha + \beta i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolup, kratnylygy k san bolsa, onda (13) deňlemäniň hususy çözüwini

$$V(x) = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]$$

görnüşde gözlemeli, bu ýerde $R_m(x)$, $S_m(x)$ koeffisiýentleri kesgitlenmedik m derejeli polinomlar.

(1) deňlemäniň hususy çözüwleriniň gözlenilmeli görnüşlerini salgy berýän maglumatlary jemläliň.

Deňlemäniň sag bölegi	**Häsiýetlendiriji deňlemäniň**	**Hususy çözüwiň gözlenilmeli görnüşi derejeli**
m derejeli $P_m(x)$ polinom	0 san köki bolmasa	$V = Q_m(x)$
	0 san köki bolup, kratnylygy k bolsa	$V = x^k Q_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	α san köki bolmasa	$V = Q_m(x)e^{\alpha x}$
	α san köki bolup, kratnylygy k bolsa	$V = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}$
$P_m(x)\cos\beta x +$ $+\overline{P}_m(x)\sin\beta x$	$\pm\beta i$ sanlar kökleri bolmasa	$V = R_m(x)\cos\beta x +$ $+S_m(x)\sin\beta x$
	$\pm\beta i$ sanlar kökleri bolup, kratnylygy k bolsa	$V = x^k[R_m(x)\cos\beta x +$ $+S_m(x)\sin\beta x]$

$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x +$	$\alpha \pm \beta i$ sanlar kökleri bolmasa	$V = e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x +$ $+S_m(x)\sin\beta x]$
$+\overline{P}_m(x)\sin\beta x]$	$\alpha \pm \beta i$ sanlar kökleri bolup, kratnylygy k bolsa	$V = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\times$ $\times\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]$

Indi hemişelik koeffisiýentli deňlemelere getirilýän deňlemelere seredeliň.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$
$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = x^{\alpha} f(\ln x)$$

görnüşli deňlemeleri §4-de bellenilişi ýaly, degişlilikde $x = e^t$ ýa-da $t = \ln x$ ornuna goýmalar arkaly hemişelik koeffisiýentli deňlemelere getirmek bolar.

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

deňleme üçin $ax + b = e^t$ ýa-da $t = \ln(ax + b)$ ornuna goýmany ulanýarlar.

1-nji mysal. $y'' + 2y' + y = x^2 + x$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Seredilýän deňlemä degişli birjynsly deňlemäni ýazalyň:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Munuň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Onuň umumy çözüwi

$$u = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

görnüşde bolar.

$\alpha = 0$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bilen gabat gelmeýänligi üçin, garalýan deňlemäniň hususy çözüwini

$$v = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

görnüşde gözlemek bolar. Ony deňlemede goýup,

$$2q_2 + 2(2q_2x + q_1) + q_2x^2 + q_1x + q_0 = x^2 + x$$

deňligi alarys. x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňläp,

$$\begin{cases} q_2 = 1, \\ 4q_2 + q_1 = 1, \\ 2q_2 + 2q_1 + q_0 = 0 \end{cases}$$

görnüşli sistemany alarys. Bu ýerden $q_2 = 1, q_1 = -3, q_0 = 4$. Deňlemäniň hususy çözüwini

$$v = x^2 - 3x + 4$$

görnüşde ýazarys. Şeýlelikde, garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2 - 3x + 4$$

görnüşde tapyldy.

2-nji mysal. $y''' - y'' = 1$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Häsiýetlendiriji

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1$. Birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi

$$u = C_1 + C_2^{x} + C_3e^x$$

görnüşde bolar. Garalýan deňlemede $\alpha = 0$. Bu 0 san häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň ikisi bilen gabat gelýär. Onda garalýan deňlemäniň hususy çözüwini $v = q_0x^2$ görnüşde gözlemek bolar. Muny ol deňlemede goýup, x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňläp, $q_0 = -\frac{1}{2}$ bahany taparys. Onda $v = -\frac{1}{2}x^2$ görnüşli hususy çözüwi alarys. Garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = C_1 + C_2x + C_3e^x - \frac{1}{2}x^2$$

bolar.

3-nji mysal. $y^{IV} + 3y'' - 4y = e^{2x}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = \pm 1,\ \ \lambda_2 = \pm 2i$. Şonuň üçin hem birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

görnüşde bolar. Görnüşi ýaly, $\alpha = 2$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. Onda onuň hususy çözüwi $v = q_0 e^{2x}$ görnüşde gözlener. Muny garalýan deňlemede goýup, $q_0 = \frac{1}{24}$ san bahany taparys. Onda $v = \frac{1}{24}e^{2x}$ görnüşli hususy çözüwi alarys. Şeýlelikde, garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 2x + \\ + C_4 \sin 2x + \frac{1}{24}e^{2x}$$

görnüşde bolar.

4-nji mysal. $y'' + y = \cos x$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. $\lambda^2 + 1 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = - i$. Şonuň üçin hem degişli birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

görnüşde bolar. $\alpha + \beta i = 0 + 1 \cdot i = i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki. Onda hususy çözüwi

$$v = x(q_0 \cos x + \bar{q}_0 \sin x)$$

görnüşde gözlemeli bolar. Muny garalýan deňlemede y-iň ornuna goýup, $\sin x$ we $\cos x$ köpeldijileriň degişli koeffisiýentlerini deňläp, $q_0 = 0$, $\bar{q}_0 = \frac{1}{2}$ san bahalary alarys. Onda onuň hususy çözüwi

$$v = \frac{1}{2}x \sin x$$

bolar.

Garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

5-nji mysal. $y'' + y' = \cos^2 x + xe^x + x^2$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Garalýan deňlemä degişli

$$y'' + y' = 0$$

birjynsly deňlemäniň

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$. Onda onuň umumy çözüwi

$$u = C_1 + C_2 e^{-x}$$

bolar. Indi garalýan deňlemäni

$$y'' + y' = \frac{1}{2}\cos 2x + xe^x + x^2 + \frac{1}{2}$$

görnüşde ýazalyň.

$$y'' + y' = \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$y'' + y' = xe^x$$

$$y'' + y' = x^2 + \frac{1}{2}$$

deňlemeleriň hususy çözüwleriniň jemi berlen deňlemäniň hususy çözüwidir. Hususy çözüwler olaryň sag böleklerindäki funksiýalara baglylykda gözlenilmelidir. Üç deňlemäniň ilkinjisiniň hususy çözüwini

$$v_1 = q_0 \cos 2x + \overline{q}_0 \sin 2x$$

görnüşde gözlemeli, çünki $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. v_1-i deňlemede goýup, $q_0 = -\frac{1}{10}, \overline{q}_0 = \frac{1}{20}$ sanlary tapýarys. Onda onuň

$$v_1 = -\frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$$

görnüşli hususy çözüwini alarys. Ikinji deňlemäniň hususy çözüwini

$$v_2 = (q_1x + q_0)e^x$$

görnüşde gözleýäris, çünki $\alpha = 1$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. v_2-ni deňlemede goýup,

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_0 = -\frac{3}{4}$$

san bahalary alarys. Onda

$$v_2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Üçünji deňlemäniň hususy çözüwini

$$v_3 = x(q_2x^2 + q_1x + q_0)$$

görnüşde gözleýäris, çünki $\alpha = 0$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki. Ony deňlemede goýup,

$$q_3 = \frac{1}{3},\ q_1 = -1,\ q_0 = \frac{5}{2}$$

sanlary alarys. Onda

$$v_3 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x$$

bolar. Garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v_1 + v_2 + v_3 = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{10}\cos 2x +$$
$$+\frac{1}{20}\sin 2x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x$$

görnüşde bolar.

6-njy mysal. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Birjynsly deňlemäniň

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri $\lambda_1 = -1 + 2i,\ \ \lambda_2 = -1 - 2i.$ Onuň umumy çözüwi

$$u = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

görnüşde bolar. Görnüşi ýaly $\alpha + \beta i = -1 + 2i$. Ol häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň biri bilen gabat gelýär. Onda garalýan deňlemäniň hususy çözüwini

$$v = xe^{-x}(q_0 \cos 2x + \overline{q}_0 \sin 2x)$$

görnüşde gözleýäris. v-ni we onuň v', v'' önümlerini deňlemede goýup, soňra alnan deňligiň iki bölegini hem e^{-x} gysgaldyp,

$$-4q_0 \sin 2x + 4\overline{q}_0 \cos 2x = \cos 2x$$

deňligi alarys. Bu ýerden $-4q_0 = 0$, $4\overline{q}_0 = 1$. Onda $q_0 = 0$, $\overline{q}_0 = \frac{1}{4}$.

Şeýlelikde, hususy çözüwi $v = \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$ görnüşde taparys. Onda garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$$

görnüşde bolar.

7-nji mysal. $y'' - y' = \text{ch}2x$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Garalýan deňlemä degişli

$$y'' - y' = 0$$

birjynsly deňlemäniň $\lambda^2 - \lambda = 0$ häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1.$$

Onda

$$u = C_1 + C_2 e^x$$

birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi bolar.

Indi garalýan deňlemäni

$$y'' - y' = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

görnüşde ýazalyň.

$$y'' - y' = \frac{1}{2}e^{2x}, \ y'' - y' = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

deňlemeleriň hususy çözüwlerini degişlilikde

$$v_1 = q_0 e^{2x}, \ v_2 = \overline{q}_0 e^{-2x}$$

görnüşlerde gözleýäris. Olaryň jemi

$$v = v_1 + v_2 = q_0 e^{2x} + \overline{q}_0 e^{-2x}$$

garalýan deňlemäniň gözlenilýän hususy çözüwi bolar.

Bu hususy çözüwi

$$v = q_0 e^{2x} + \overline{q}_0 e^{-2x} = q_0(\mathrm{ch}2x + \mathrm{sh}2x) +$$
$$\overline{q}_0(\mathrm{ch}2x - \mathrm{sh}2x) = (q_0 + \overline{q}_0)\mathrm{ch}2x +$$
$$+(q_0 - \overline{q}_0)\mathrm{sh}2x$$

ýa-da

$$v = A_1 \mathrm{ch}2x + A_2 \mathrm{sh}2x$$

görnüşde ýazarys. Muny garalýan deňlemede goýup,

$$(4A_1 = 2A_2)\mathrm{ch}2x + (4A_2 - 2A_1)\mathrm{sh}2x = \mathrm{ch}2x$$

görnüşli deňlemäni alarys. Bu ýerden

$$\begin{cases} 4A_1 - 2A_2 = 1 \\ -2A_1 + 4A_2 = 0 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyna geleris. $A_1 = \frac{1}{3}, \ A_2 = \frac{1}{6}$ bolar. Deňlemäniň hususy çözüwini

$$v = \frac{1}{3}\mathrm{ch}2x + \frac{1}{6}\mathrm{sh}2x$$

görnüşde ýazarys. Şeýlelikde, garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = u + v = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{3}\mathrm{ch}2x + \frac{1}{6}\mathrm{sh}2x$$

görnüşde bolar.

8-nji mysal. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Bu deňlemäni kesgitlenmedik koeffisiýentler usuly bilen çözüp bolmaýar. Şonuň üçin hem onuň umumy çözüwini tapmaklyga Lagranź usulyny peýdalanalyň. Ilki bilen garalýan deňlemä degişli

$$y'' + 4y = 0$$

birjynsly deňlemäniň

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

umumy çözüwini ýazalyň.

Garalýan deňlemäniň çözüwini

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$$

görnüşde gözläliň. $C_1(x)$ we $C_2(x)$ funksiýalary tapmaly. Olar üçin §3-däki (8) sistema laýyklykda

$$\begin{cases} C'_1 \cdot \cos 2x + C'_2 \cdot \sin 2x = 0, \\ C'_1(-2\sin 2x) + C'_2(2\cos 2x) = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

sistemany alarys. Bu sistemanyň kesgitleýjisi $W(x) = 2 \neq 0$. Onda

$$C'_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x,$$

$$C_1(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}x + C_2$$

funksiýalary taparys. Olary gözlenilýän çözüwde goýup, garalýan deňlemäniň

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}x \sin 2x$$

görnüşli umumy çözüwine geleris.

Gönükmeler

Deňlemeleri we meseleleri çözüň:

1. $y'' + y' = x - 2.$

Jogaby: $y = C_1 + C_2e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 3\right).$

2. $y'' + y = x^2 + x.$

Jogaby: $C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 + x - 2.$

3. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Jogaby: $y = \frac{1}{20}x^5e^{2x}.$

4. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Jogaby: $y = \frac{3}{2}x^2e^{-2x}.$

5. $y'' + y = \sin x \cdot \sin 2x.$

Jogaby: $y = \left(C_1 + \frac{x}{4}\right)\sin x + C_2\cos 3x.$

6. $y'' + 4y = e^x\cos 2x.$

Jogaby: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{e^x}{17}(\cos 2x + 4\sin 2x).$

7. $y'' - y = 2x\cos 3x.$

Jogaby: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{x}{5}\cos 3x + \frac{3}{25}.$

8. $y'' + y = e^x + \cos x.$

Jogaby: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(e^x + x\sin x).$

9. $y'' + 2y' = e^{-x}\cos x + xe^{-x}.$

Jogaby: $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) - e^{-x}\cos x + \frac{x^3}{6}e^{-x}.$

10. $y'' + 4y = \sin x + \sin 2x.$

Jogaby: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$

11. $y'' + y = \mathrm{ch}x.$

Jogaby: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}\mathrm{ch}x.$

12. $y'' - y = 2\mathrm{sh}x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Jogaby: $y = x\mathrm{ch}x.$

13. $y''' + y'' = 3xe^x.$

Jogaby: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x.$

14. $y''' - y = \cos x.$

Jogaby:

$$y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

15. $y^{\mathrm{IV}} - y = 5e^x\sin x.$

Jogaby: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - e^x\sin x.$

16. $y^{\mathrm{IV}} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1.$

Jogaby:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + x\cos x + 2xe^{-x} - 1.$$

17. $y^{\mathrm{IV}} - y''' = xe^x + \sin x.$

Jogaby:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + x\left(\frac{1}{2}x - 3\right)e^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

18. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = x\sin x.$

Jogaby:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x(C_3 + C_4x) + \frac{1}{8}x(x\sin x + 2\sin x + 3\cos x).$$

19. $y^{VI} - y^{IV} = 1.$

Jogaby: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 + C_4 x + C_5 x^2 + C_6 x^3 - \dfrac{x^4}{24}.$

Deňlemeleriň hususy çözüwleriniň gözlenilmeli görnüşlerini ýazmaly:

20. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x.$

21. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x.$

Deňlemeleri Lagranź usulyny ulanyp çözmeli:

22. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}.$

Jogaby: $y = e^x (C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{x}.$

23. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}.$

Jogaby:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}[e^x (x - \ln(x + 1)) + 1 - e^x \ln(e^x + 1)].$

24. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

Jogaby: $y = \dfrac{\pi}{2} \cos x + \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|.$

25. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}.$

Jogaby: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sqrt{\sin 2x}.$

26. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cdot \cos x}}.$

Jogaby: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{4}{3} \cos x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} x}.$

27. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}.$

Jogaby:

$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln|\cos x| + \sin x(x - \operatorname{tg} x).$

28. $y'' + y = 1 - \dfrac{1}{\sin x}$ deňlemäni beýan edilen usullary ulanyp çözmeli.

Jogaby:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1 + x \cos x - \sin x \cdot \ln|\sin x|.$$

Eýler deňlemelerini çözmeli:

29. $x^2y'' - xy' + y = 6x \ln x.$

Jogaby: $y = x(C_1 + C_2 \ln x) + x \ln^3 x.$

30. $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x.$

Jogaby: $y = x[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] - x \ln x.$

31. $x^2y'' - 3xy' + y = \sin(\ln x).$

Jogaby: $y = \dfrac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln x) - \dfrac{1}{2}\cos(\ln x).$

32. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x).$

Jogaby: $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cdot \cos(\ln x).$

V bap

IKINJI TERTIPLI ÇYZYKLY DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§1. Öz-özüne çatyrymly ikinji tertipli differensial deňleme. Deňlemeleriň ikiagzaly görnüşe getiriliş usullary

Eger ikinji tertipli deňlemede y'-iň koeffisiýenti y''-iň koeffisiýentiniň önümi bolsa, onda ol deňlemä öz-özüne çatyrymly deňleme diýilýär. Beýle deňleme

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde $p(x) \neq 0$ (a,b) interwalda üznüksiz differensirlenýän funksiýa.

Islendik ikinji tertipli deňlemäni öz-özüne çatyrymly görnüşe getirmek bolar. Goý,

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

deňleme berlen bolsun, bu ýerde $p_0 \neq 0, p_1, p_2$ koeffisiýentler (a,b) interwalda üznüksiz funksiýalar. (2) deňlemäniň iki bölegini hem käbir $\mu = \mu(x)$ funksiýa köpeldip,

$$\mu(x)p_0(x)y'' + \mu(x)p_1(x)y' + \mu(x)p_2(x)y = 0 \tag{3}$$

deňlemäni alarys. $\mu(x)$ funksiýany (3) öz-özüne çatyrymly deňleme bolar ýaly edip, saýlap almaly. Onuň üçin $\mu(x)$ we $p_0(x)$ funksiýalar differensirlenýän bolmaly we

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)p_0(x)) = \mu(x)p_1(x)$$

deňlik ýerine ýetmeli. Soňky deňligi

$$\frac{d\mu(x)}{dx}p_0(x)+\frac{dp_0(x)}{dx}\mu(x)=\mu(x)p_1(x)$$

görnüşde göçüreliň. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip,

$$\frac{d\mu}{\mu}=\left(\frac{p_1(x)-p'_0(x)}{p_0(x)}\right)dx$$

deňlemäni alarys. Onuň çözüwi

$$\mu(x)=\frac{1}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$$

görnüşde bolar. Muny (3)-de goýup,

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y''+\frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'+\frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y=0 \tag{4}$$

görnüşli deňlemäni alarys.

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}=p(x)$$

belgilemäni girizsek, onda

$$p'(x)=\frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}$$

bolar. Diýmek, (4) öz-özüne çatyrymly deňleme.

Indi deňlemäniň ikiagzaly görnüşe getiriliş usullaryna seredeliň. (1) deňlemäni

$$\frac{d}{dx}(p(x)y')+q(x)y=0 \tag{5}$$

görnüşde ýazalyň. Ikiagzaly görnüşe getirmek üçin

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{p(s)}ds,\quad x_0\in[a,b],\quad p(x)\neq 0 \tag{6}$$

ornuna goýmany ulanalyň. (6) funksiýanyň önümi bar hem-de monoton. Şonuň üçin hem onuň ters funksiýasy bardyr. Ony $x=\varphi(t)$ bilen belgiläliň. (6) funksiýanyň girizilenligi üçin

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{p(x)},$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{p(x)}$$

bolar. Onda (5) deňleme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(x)q(x)y = 0$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(\varphi(t))q(\varphi(t))y = 0$$

ýa-da

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)y = 0$$

görnüşde ýazarys, bu ýerde $p(\varphi(t))q(\varphi(t)) = Q(t)$ belgileme ulanyldy.

Indi deňlemäniň ikiagzaly görnüşe getirilişiniň başga usulyna garalyň. Goý,

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{7}$$

deňleme berlen bolsun, bu ýerde $p_1(x)$ funksiýanyň üznüksiz önümi bar. (7) deňlemäni $y = u(x)v(x)$ ornuna goýma arkaly

$$vu'' + (2v' + p_1 v)u' + (v'' + p_1 v' + p_2 v)u = 0 \tag{8}$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerde u'-iň koeffisiýenti nola deň bolar ýaly edip v funksiýany saýlalyň. Ony kesgitlemek üçin u'-iň koeffisiýentini

$$2 \cdot v' + p_1 v = 0$$

bolar ýaly edip alarys. Bu ýerden

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx}.$$

Muny (8)-de goýup,

$$u'' + \left(p_2(x) - \frac{1}{4}p_1^2(x) - \frac{1}{2}p'_1(x)\right)u = 0$$

deňlemäni alarys. Ýaýlardaky aňlatmany $Q(x)$ bilen belgiläp,

$$u'' + Q(x)u = 0$$

deňlemäni alarys.

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = f(x)$$
$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

birjynsly däl deňlemeler hem beýan edilen usullar bilen özünde y'-i saklamaýan deňlemelere getirilip bilnerler.

Mysal. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ Çebyşew deňlemesini öz-özüne çatyrymly görnüşe getirmeli.

Çözülişi. $p(x) = 1 - x^2$, $p'(x) = -2x$. Görnüşi ýaly, garalýan deňleme öz-özüne çatyrymly deňleme däl. Formula boýunça

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Deňlemäniň iki bölegini hem muňa köpeldip,

$$\sqrt{1 - x^2}\,y'' - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}y' + \frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}}y = 0$$

görnüşli öz-özüne çatyrymly deňlemäni alarys.

Gönükmeler

1. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Leźandr deňlemesi öz-özüne çatyrymly deňlememi?

2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
Bessel deňlemesini öz-özüne çatyrymly görnüşe getirmeli.

3. $y'' - 2xy' + x^2y = 0$
denlemäni ikiagzaly görnüşe getirmeli.

§2. Çözüwleriň nollary baradaky teoremalar

$$y'' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

görnüşli deňlemä garalyň, bu ýerde $Q(x)$ koeffisiýent (a,b) interwalda üznüksiz funksiýa. Mälim bolşy ýaly, (1) deňlemäniň iki sany çyzykly bagly bolmadyk hususy çözüwi bardyr. Onuň her bir hususy çözüwi (a,b) interwalyň birnäçe nokadynda nola öwrülip biler. Bu ýerde garaljak mesele nol däl çözüwiň nola öwrülýän nokatlary barada. $y = y_1(x)$ çözüwiň nollary diýip, $y_1(x) = 0$ deňlemäniň hakyky köklerine düşünilýär. Has takygy $y_1(x_0) = 0$ bolsa, onda x_0 nokada çözüwiň noly diýilýär. Çözüwiň nola öwrülýän nokatlary onuň grafiginiň abssissalar okuny kesip geçýän nokatlarydyr. Çözüwiň nollary köp boldugyça onuň alamaty hem şonça üýtgeýär. Oňa *çözüwiň yrgyldylygy* diýilýär.

Kesgitleme. Eger (1) deňlemäniň $y = \varphi(x)$ çözüwiniň (a,b) interwalda ikiden az bolmadyk nollary bar bolsa, onda ol çözüwe (1) deňlemäniň şol interwaldaky yrgyldyly çözüwi diýilýär. Tersine bolan ýagdaýda yrgyldysyz çözüw diýilýär.

1-nji mysal. $y'' - y = 0$ deňlemäniň $y_1 = e^x$ we $y_2 = e^{-x}$ çözüwleriniň her biri $(-\infty, \infty)$ interwalda yrgyldysyz çözüwlerdir.

2-nji mysal. $y'' + y = 0$ deňlemäniň $y_1 = \cos x$ we $y_2 = \sin x$ çözüwleriniň her biriniň $(-\infty, \infty)$ interwalda tükeniksiz köp nollary bardyr, çünki olaryň grafikleri abssissalar okuny tükeniksiz köp nokatda kesip geçýärler. Olaryň nollarynyň arasyndaky uzaklyk π-e deňdir. Şonuň üçin hem ol çözüwler garalýan deňlemäniň yrgyldyly çözüwleridir.

1-nji teorema. Eger (a,b) interwalda $Q(x) \le 0$ bolsa, onda (1) deňlemäniň çözüwleri yrgyldysyzdyrlar.

Subudy. (1) deňlemäniň erkin çözüwini $y_1(x)$ bilen belgiläliň. $y_1(x)$ funksiýa (1) deňlemäniň yrgyldyly çözüwi diýeliň. Kesgitlemä laýyklykda, $y_1(x)$ çözüw (a,b) interwalyň iň bolmanda x_0 we $x_1 (x_0 < x_1)$ iki nokadynda nola öwrülmelidir, ýagny

$$y_1(x_0) = 0, \quad y_1(x_1) = 0$$

Kesgitlilik üçin (x_0, x_1) interwalda $y_1(x) > 0$ diýeliň. Onda $y_1'(x_0) > 0$. $y_1(x)$ çözüwi (1) deňlemede goýup,

$$y_1''(x) + Q(x)y_1(x) = 0$$

toźdestwony alarys. Bu ýerden $y_1''(x) = -Q(x)y_1(x) \geq 0$ ýa-da $(y'_1(x))' \geq 0$. Diýmek, $y'_1(x)$ kemelmeýän funksiýa. Şonuň üçin hem $0 < y'_1(x_0) \leq y'_1(x)$.

Lagranź formulasyna laýyklykda

$$y_1(x_1) - y_1(x_0) = y_1'(c)(x_1 - x_0). \quad (x_0 < c < x_1)$$

Deňligiň çep bölegi nol, sag bölegi poloźitel san. Alnan gapma-garşylyk teoremanyň tassyklamasyny subut edýär.

2-nji teorema (Şturm). Eger x_0 we x_1 (1) deňlemäniň $y_1(x)$ çözüwiniň yzygiderli nollary bolsa, onda x_0 we x_1 nollaryň aralygynda ol deňlemäniň beýleki çyzykly bagly däl $y_2(x)$ çözüwiniň takyk bir noly bardyr.

Subudy. Teoremanyň şertine görä,

$$y_1(x_0) = 0, \quad y_1(x_1) = 0$$

$y_2(x)$ çözüwiň (x_0, x_1) interwalda noly ýok diýeliň. $y_2(x_0) \neq 0$, $y_2(x_1) \neq 0$, çünki $y_1(x)$ we $y_2(x)$ çyzykly bagly däl çözüwler. Olaryň Wronskiý kesgitleýjisi x_0 we x_1 nokatlarda noldan tapawutly bolmasa, teoremanyň şertine garşy gelýär.

Kesgitlilik üçin (x_0, x_1) interwalda $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ diýeliň. Bularyň Wronskiý kesgitleýjisi

$$W(x) = y'_1 y_2 - y'_2 y_1.$$

$W(x) > 0$ diýeliň. Soňky deňligiň iki bölegini hem $y_2^2(x)$ -a bölüp,

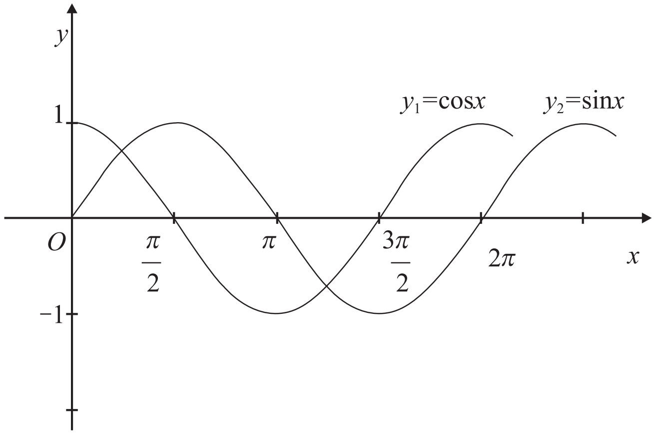
$$\frac{W(x)}{y_2^2(x)} = \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)'$$

deňligi alarys. Toźdestwonyň iki bölegini hem (x_0, x_1) interwalda integrirläp,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{W(x)}{y_2^2(x)} dx = \frac{y_1(x_1)}{y_2(x_1)} - \frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)}$$

görnüşli deňligi alarys. Bu deňligiň çep bölegi poloźitel, sag bölegi nol. Beýle bolmagy mümkin däl.

$y'' + y = 0$ deňlemäniň $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ çözüwleri bu teorema üçin mysal bolup biler.



Koeffisiýentleri (a,b) interwalda üznüksiz funksiýalar bolan

$$y'' + Q_1(x)y = 0 \tag{2}$$

$$u'' + Q_2(x)u = 0 \tag{3}$$

deňlemelere garalyň.

3-nji teorema (deňeşdirme teoremasy). Eger (a,b) interwalda $Q_2(x) \geq Q_1(x)$ bolsa, onda (2) deňlemäniň islendik $y_1(x)$ çözüwiniň (a,b) interwala degişli her bir yzygiderli iki nolunyň aralygynda (3) deňlemäniň islendik $u_1(x)$ çözüwiniň iň bolmanda bir noly bardyr.

Subudy. Goý, x_0 we x_1 $(a < x_0 < x_1 < b)$ nokatlarda $y_1(x)$ çözüwiň nollary bolsun. Onda $y_1(x_0) = 0$, $y_1(x_1) = 0$ bolar. $u_1(x)$ çözüwiň (x_0, x_1) interwalda noly ýok diýeliň.

Kesgitlilik üçin (x_0, x_1) interwalda $y_1(x) > 0$, $u_1(x) > 0$ diýip hasap edeliň. Onda $y'_1(x_0) > 0$, $y'_1(x_1) < 0$.

$y_1(x)$ çözüwi (2)-de, $u_1(x)$-i (3)-de goýup,

$$y_1'' + Q_1(x)y_1 = 0, \quad u_1'' + Q_2(x)u_1 = 0$$

toźdestwolary alarys. Olaryň birinjisini $u_1(x)$-e, ikinjisini $y_1(x)$-e köpeldip we degişli böleklerini aýryp,

$$y_1'' u_1 - u_1'' y_1 = (Q_2(x) - Q_1(x)) y_1 u_1$$

ýa-da

$$(y_1' u_1 - u_1' y_1)' = (Q_2(x) - Q_1(x)) y_1 u_1$$

görnüşli deňligi alarys.

Bu toźdestwonyň iki bölegini hem (x_0, x_1) interwalda integrirläp,

$$y'_1(x_1)u_1(x_1) - u'_1(x_1)y_1(x_1) - y'_1(x_0)u_1(x_0) + u'_1(x_0)y_1(x_0) =$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} (Q_2(x) - Q_1(x)) y_1 u_1 \, dx$$

görnüşli deňligi alarys.

$$y_1'(x_1) < 0, \quad u_1(x_1) > 0, \quad y_1(x_1) = 0, \quad y_1'(x_0) > 0,$$
$$u_1(x_0) > 0, \quad y_1(x_0) = 0, \quad Q_2(x) - Q_1(x) \geq 0$$

bolýandyklaryny göz öňünde tutsak, onda ýokardaky deňligiň çep böleginiň otrisatel san bolýandygyny, sag böleginiň bolsa położiteldigini görmek kyn däldir. Alnan gapma-garşylyk teoremanyň tassyklamasynyň dogrudygyny görkezýär.

$y'' + y = 0$ we $u'' + 4u = 0$ deňlemeleriň çözüwleri $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $u_1 = \cos 2x$, $u_2 = \sin 2x$. Birinji deňlemäniň her bir çözüwiniň iki nolunyň aralygynda ikinji deňlemäniň islendik çözüwiniň bir nolunyň bardygyny olaryň grafikleri boýunça görkeziň.

§3. Ostrogradskiý-Liuwill formulasy we onuň ulanylyşy

Goý, $y_1(x)$ we $y_2(x)$ funksiýalar

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsun. Olary deňlemede goýup

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

toźdestwolary alarys. Olaryň birinjisini y_2-ä, ikinjisini y_1-e köpeldip, soňra alnan birinji deňligi ikinjisiniň degişli böleklerinden aýryp,

$$(y_2{}'y_1 - y_1{}'y_2)' + p(x)(y_2{}'y_1 - y_1{}'y_2) = 0$$

deňligi alarys. Bu deňlikde $W(x) = y_2{}'y_1 - y_1{}'y_2$ bolýandygyny nazarda tutup, alarys:

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

$W(x)$-a görä birinji tertipli çyzykly birjynsly deňleme alyndy. Onuň çözüwi:

$$W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

görnüşdedir. Muňa Ostrogradskiý-Liuwill formulasy diýilýär.

Bu formula çyzykly birjynsly n tertipli deňleme üçin hem dogrudyr.

Indi (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapmaklyga girişeliň.

Goý, (1) deňlemäniň hususy çözüwi tapylan bolsun. Ony $y_1(x)$ bilen belgiläliň. Gözlenilýän çözüwi y bilen belgiläliň. Bu çözüwler üçin Ostrogradskiý-Liuwill formulasyny ýazalyň:

$$W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

ýa-da

$$y'y_1 - y'_1 y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Deňligiň iki bölegini hem $y_1^2(x)$-a bölsek, ol

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

görnüşe geler. Bu deňligiň iki bölegini hem integrirläp, (1) deňlemäniň

$$y(x) = y_1 \int \frac{C \cdot \exp\left(-\int p(x)dx\right)}{y_1^2(x)}dx + C_1 y_1(x) \qquad (2)$$

görnüşli umumy çözüwini alarys.

Mysal. $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiýa $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$ deňlemäniň hususy çözüwi. Onuň umumy çözüwini (2) formula boýunça

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}\int \frac{C \cdot \exp\left(-\int \frac{2}{x}dx\right)}{\sin^2 x}dx + C_1\frac{\sin x}{x}$$

ýa-da

$$y = C\frac{\cos x}{x} + C_1\frac{\sin x}{x}$$

görnüşde taparys.

Gönükmeler

1. $y_1 = x$ funksiýa

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

deňlemäniň hususy çözüwi. Deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = C_1x + C_2\ln x$.

2. $y_1 = e^x$ funksiýa

$$(1 + x)y'' - y' - xy = 0$$

deňlemäniň hususy çözüwi. Deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = C_1(3 + 2x)e^{-x} + C_2e^x$.

3. $y_1 = \cos x$ funksiýa

$$y'' - 2(\mathrm{ctg}\, x) \cdot y' - y = 0$$

deňlemäniň hususy çözüwi. Deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $y = C_1(\sin x - x\cos x) + C_2\cos x$.

§4. Gyra meselesi we Grin funksiýasy barada

Differensial deňlemeler teoriýasynda gyra meseleler möhüm orun tutýarlar. Beýle meselelere ylmyň köp meseleleri öwrenilen-de duş gelinýär. Adaty amaly meseleleriň köpüsi ikinji tertipli gyra meselelerine getirilýär. Şoňa görä-de bu paragrafda ikinji tertipli deňlemeler üçin gyra meseleleri öwrenilýär.

Çyzykly ikinji tertipli deňleme

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

görnüşde berlen bolsun, bu ýerde p_0, p_1, p_2, f funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz. Eger $f(x) \equiv 0$ bolsa, onda (1) deňleme

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

görnüşi alar.

(1) deňleme üçin Koşi meselesine ozal garalypdy. Ol mesele (1) deňlemäniň başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklygy talap edýär. Başlangyç şertler gözlenilýän funksiýanyň we onuň önüminiň berlen nokatdaky bahalarydy.

Gyra meselelerinde gözlenilýän funksiýanyň we onuň önümleriniň bahalary kesimiň uçlarynda berilýär.

Meselem, (1) deňleme üçin gyra şertleri

$$y(\alpha) = a, \quad y(\beta) = b \tag{3}$$

görnüşlerde bermek bolar.

(1) deňlemäniň (3) şertleri (deňlikleri) kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk meselesine gyra meselesi diýilýär, (3) şertlere bolsa gyra şertler diýilýär. Başgaça aýdylanda, (1), (3) gyra meselesi garalýan (1) deňlemäniň berlen (α, a) we (β, b) nokatlardan geçýän integral egrisini tapmak meselesidir.

(1), (3) gyra meselesine ikinokatly mesele hem diýilýär.

Gyra şertleri

$$y(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = 0 \tag{4}$$

görnüşlerde hem berlip bilner. Bulara birjynsly gyra şertler diýilýär. (1) deňlemäniň (4) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk meselesine birjynsly däl gyra meselesi, (2) deňlemäniň (4) şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk meselesine bolsa birjynsly gyra meselesi diýilýär.

Gyra şertler (1) deňleme üçin

$$\begin{cases} \alpha_1 y(\alpha) + \beta_1 y(\beta) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y'(\alpha) + \beta_2 y'(\beta) = \gamma_2, \end{cases} \tag{5}$$

ýa-da

$$\begin{cases} \alpha_1 y(\alpha) + \beta_1 y'(\alpha) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y(\beta) + \beta_2 y'(\beta) = \gamma_2 \end{cases} \tag{6}$$

umumyrak görnüşlerde hem berlip bilner, bu ýerde α_i, β_i, γ_i, $(i = 1,2)$ hemişelik sanlar, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$. (5)-e we (6)-a hem birjynsly däl gyra şertler diýilýär. Eger $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ bolsa, onda olara birjynsly gyra şertler diýilýär. Şeýlelikde, ýokarda getirilen şertlere ikinokatly şertler diýilýär.

(1), (4) ikinokatly meselä garalyň. Ol mesele üçin Grin funksiýasyny kesgitläliň.

Kesgitleme. Eger $x \in [\alpha, \beta]$, $s \in (\alpha, \beta)$ üçin kesgitlenen $G(x,s)$ funksiýa her bir $s \in (\alpha, \beta)$ üçin

1) $x \neq s$ bolanda (2) deňlemäni kanagatlandyrýan;

2) $x = \alpha$, $x = \beta$ bahalarda (4) gyra şertleri kanagatlandyrýan;

3) $x = s$ bolanda x-e görä üznüksiz we x-e görä önümi $x = s$ nokatda birinji jynsly üzülişe eýe bolup, towusmasy $\dfrac{1}{p_0(s)}$-e deň, ýagny

$$G(s + 0, s) = G(s - o, s),$$
$$G_x(s + 0, s) - G_x(s - o, s) = \frac{1}{p_0(s)}$$

bolsa, onda $G(x,s)$ funksiýa (1), (4) gyra meselesiniň Grin funksiýasy diýilýär.

Indi Grin funksiýasynyň barlygy baradaky teoremany subut edeliň.

1-nji teorema. Eger (2) deňlemäniň (4) birjynsly gyra şertleri kanagatlandyrýan diňe triwial çözüwi bar bolsa, onda (2), (4) gyra meselesiniň Grin funksiýasy bardyr.

Subudy. Goý, $y_1(x)$ we $y_2(x)$ funksiýalar (2) deňlemäniň $[\alpha, \beta]$ kesimde çyzykly bagly däl çözüwleri bolsun. Kesgitlemä görä, Grin funksiýasy (2) deňlemäniň çözüwi bolmaly. Oňa görä-de

$$G(x,s)=\begin{cases}C_1y_1(x)+C_2y_2(x), & x\in[\alpha,s],\\ \overline{C_1}y_1(x)+\overline{C_2}y_2(x), & x\in[s,\beta]\end{cases}$$

görnüşde bolmaly, bu ýerde $C_1, C_2, \overline{C_1}, \overline{C_2}$ häzirlikçe kesgitlenmedik hemişelikler.

Grin funksiýasynyň 3-nji häsiýetine laýyklykda

$$C_1y_1(s)+C_2y_2(s)=\overline{C_1}y_1(s)+\overline{C_2}y_2(s),$$

$$\overline{C_1}y_1'(s)+\overline{C_2}y_2'(s)-C_1y'_1(s)-C_2y_2'(s)=\frac{1}{p_0(s)}$$

görnüşli deňlikleri ýazarys.
$\overline{C_1}-C_1=\gamma_1$, $\overline{C_2}-C_2=\gamma_2$ belgilemeleri girizip, γ_1 we γ_2 ululyklara görä

$$\begin{cases}y_1(s)\gamma_1+y_2(s)\gamma_2=0,\\ y'_1(s)\gamma_1+y'_2(s)\gamma_2=\dfrac{1}{p_0(s)}\end{cases}$$

görnüşli deňlemeler sistemasyny alarys. Bu sistemanyň ýeke-täk çözüwi

$$\gamma_1(s)=-\frac{y_2(s)}{p_0(s)W(s)},\quad \gamma_2(s)=\frac{y_1(s)}{p_0(s)W(s)}$$

görnüşde bolar. Onda

$$\overline{C}_1=C_1+\gamma_1(s),\quad \overline{C}=C_2+\gamma_2(s). \qquad (7)$$

Şeýlelikde,

$$G(x,s)=\begin{cases}C_1y_1(x)+C_2y_2(x), & x\in[\alpha,s]\\ (C_1+\gamma_1(s))y_1(x)+(C_2+\gamma_2(s))y_2(x), & x\in[s,\beta]\end{cases}$$

görnüşde alnar.

Kesgitlemäniň 2-nji häsiýeti boýunça $G(x, s)$ funksiýa gyra şertlerini kanagatlandyrmaly, ýagny

$$C_1y_1(\alpha)+C_2y_2(\alpha)=0,$$
$$C_1y_1(\beta)+C_2y_2(\beta)=-y_1(\beta)\gamma_1(s)-y_2(\beta)\gamma_2(s)$$

bolmaly. Bu sistemadan tapylan $C_1=C_1(s)$ we $C_2=C_2(s)$ bahalary (7)-de goýup, $G(x,s)$ funksiýany

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x), & x\in[\alpha,s],\\ \overline{C_1}(s)y_1(x)+\overline{C_2}(s)y_2(x), & x\in[s,\beta]\end{cases}$$

görnüşde alarys. Bu funksiýa (2), (4) meseläniň Grin funksiýasydyr.

2-nji teorema. Eger $G(x,s)$ funksiýa (2), (4) meseläniň Grin funksiýasy we $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$ üznüksiz funksiýa bolsa, onda (1) deňlemäniň (4) şertleri kanagatlandyrýan çözüwi

$$y(x)=\int_\alpha^\beta G(x,s)f(s)ds \tag{8}$$

formula bilen berler.

Subudy. (8) funksiýanyň (1) deňlemäniň çözüwidigini görkezeliň. Onuň üçin (8)-i

$$y(x)=\int_\alpha^x G(x,s)f(s)ds+\int_x^\beta G(x,s)f(s)ds$$

görnüşde göçüreliň. Integraly parametr boýunça differensirleme düzgüninden peýdalanyp ýazyp bileris:

$$y'(x)=G(x,x)f(x)+\int_\alpha^x G_x(x,s)f(s)ds-$$

$$-G(x,x)f(x)+\int_x^\beta G_x(x,s)f(s)ds=\int_\alpha^\beta G_x(x,s)f(s)ds,$$

$$y''(x)=G(x,x-0)f(x)+\int_\alpha^x G_{xx}(x,s)f(s)ds-$$

$$-G_x(x,x+0)f(x)+\int_x^\beta G_{xx}(x,s)f(s)ds=$$

$$=[G_x(x,x-0)-G_x(x,x+0)]f(x)+\int_\alpha^\beta G_{xx}(x,s)f(s)ds=$$

$$=[G_x(x+0,x)-G_x(x-0,x)]f(x)+\int_\alpha^\beta G_{xx}(x,s)f(s)ds=$$

$$=\frac{1}{p_0(x)}f(x)+\int_\alpha^\beta G_{xx}(x,s)f(s)ds.$$

y, y', y'' üçin alnan aňlatmalary (1) deňlemede goýsak, onda

$$\int_{\alpha}^{\beta}[p_0(x)G_{xx}(x,s)+p_1(x)G_x(x,s)+p_2(x)G(x,s)]f(s)ds +$$
$$+f(x)\equiv f(x)$$

bolar. Şerte görä, $G(x,s)$ funksiýa (2) deňlemäniň çözüwi. Onda $f(x)\equiv f(x)$ bolar. Toźdestwo (8) funksiýanyň (1) deňlemäniň çözüwidigini görkezýär.

Indi (8) funksiýanyň $y(\alpha)=0,\;\; y(\beta)=0$ gyra şertleri kanagatlandyrýandygyna göz ýetirmek galýar. Hakykatdan-da, Grin funksiýasynyň 2-nji häsiýeti boýunça

$$G(\alpha,s)=G(\beta,s)=0.$$

Onda

$$y(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}G(\alpha,s)f(s)ds=0,$$
$$y(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}G(\beta,s)f(s)ds=0$$

bolar. Şunlukda, teorema subut edildi.

Mysal. $y''+y=f(x),\;\; y(0)=0,\;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ gyra meseläniň Grin funksiýasyny tapmaly.

Çözülişi. $y''+y=0$ deňlemäniň umumy çözüwi

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

görnüşde bolar. $\cos x$ we $\sin x$ çyzykly bagly däl funksiýalardyr. $G(x,s)$ funksiýany

$$G(x,s)=\begin{cases}C_1\cos x+C_2\sin x, & 0\le x\le s\\ \overline{C_1}\cos x+\overline{C_2}\sin x, & s\le x\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

görnüşde gözläliň. Kesgitlemä laýyklykda

$$C_1\cos s+C_2\sin s=\overline{C_1}\cos s+\overline{C_2}\sin s,$$
$$-\overline{C_1}\sin s+\overline{C_2}\cos s+C_1\sin s-C_2\cos s=1$$

deňlikleri ýazarys.

$\overline{C_1} - C_1 = \gamma_1, \quad \overline{C_2} - C_2 = \gamma_2$ belgilemeleri girizip,

$$\begin{cases} (\cos s)\gamma_1 + (\sin s)\gamma_2 = 0 \\ -(\sin s)\gamma_1 + (\cos s)\gamma_2 = 1 \end{cases}$$

görnüşli deňlemeler sistemasyny alarys. Onuň kesgitleýjisi $W(s) = 1$. Sistemanyň çözüwi

$$\gamma_1 = -\sin s, \quad \gamma_2 = \cos s$$

bolar. Onda

$$\overline{C_1} = C_1 - \sin s, \quad \overline{C_2} = C_2 + \cos s$$

$G(x,s)$ funksiýany

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ (C_1 - \sin s)\cos x + (C_2 + \cos s)\sin x \end{cases}$$

görnüşde ýazarys.

Bu funksiýa kesgitlemäniň 2-nji häsiýeti boýunça

$$G(0,s) = 0, \quad G\left(\frac{\pi}{2}, s\right) = 0$$

gyra şertleri kanagatlandyrmaly. Onda C_1 we C_2 ululyklara görä sistemany çözüp, $C_1 = 0$, $C_2 = -\cos s$ bahalary alarys.

Şeýlelikde, Grin funksiýasy

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x, & 0 \le x \le s \\ -\sin s \cos x, & s \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

görnüşde bolar.

Gönükmeler

Gyra meseleleri üçin Grin funksiýalaryny tapmaly:

1. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

Jogaby: $G(x,s) = \begin{cases} -(1-s)x, & 0 \le x \le s, \\ -s(1-x), & s \le x \le 1. \end{cases}$

2. $y'' = f(x),\quad y(-1) = 0,\quad y(1) = 0\quad (-1 \le x \le 1).$

$$\textit{Jogaby: } G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(1-s)(1+x), & -1 \le x \le s, \\ -\dfrac{1}{2}(1+s)(1-x), & s \le x \le 1. \end{cases}$$

3. $y'' - y = f(x)$, $y(x)$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ interwalda çäkli.

$$\textit{Jogaby: } G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^{x-s}, & -\infty \le x \le s, \\ -\dfrac{1}{2}e^{s-x}, & s \le x \le +\infty. \end{cases}$$

4. $y'' + y = f(x),\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 0.$

$$\textit{Jogaby: } G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{\sin x \cdot \sin(1-s)}{\sin 1}, & 0 \le x \le s, \\ -\dfrac{\sin s \cdot \sin(1-x)}{\sin 1}, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

5. $y'' = f(x),\quad y(0) + y(1) = 0,\quad y'(0) + y'(1) = 0.$

$$\textit{Jogaby: } G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(x-s) - \dfrac{1}{4}, & 0 \le x \le s, \\ -\dfrac{1}{2}(s-x) - \dfrac{1}{4}, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

BIRINJI TERTIPLI DIFFERENSIAL DEŇLEMELER SISTEMASY

§1. Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{1}$$

görnüşdäki deňlemeler sistemasyna garalyň.

(1) sistemany

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde hem ýazmak bolýar, bu ýerde x – bagly däl üýtgeýän ululyk, $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ gözlenilýän funksiýalar, $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, ..., n)$ $n + 1$ ölçegli giňişligiň D oblastynda berlen üznüksiz funksiýalar. (1) *sistema n* deňlemeler sistemasynyň normal görnüşi diýilýär.

Kesgitleme.

Eger (a,b) interwalda berlen $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ differensirlenýän funksiýalar:

1) $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)) \in D, x \in (a, b)$;

2) $\dfrac{d\varphi_i(x)}{dx} = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)), x \in (a, b), (i = 1, 2, ...n)$

şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ...,$ $y_n = \varphi_n(x)$ funksiýalara (a,b) interwalda (1) sistemanyň çözüwi diýilýär. Çözüwiň grafigine integral egri diýilýär.

Kesgitleme. (1) deňlemeler sistemasynyň

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0 \tag{2}$$

şertleri kanagatlandyrýan $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x),$ çözüwini tapmaklyk meselesine Koşi meselesi diýilýär. $x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ sanlara başlangyç bahalar diýilýär. Başgaça aýdylanda, Koşi meselesi garalýan sistemanyň berlen $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$ nokatdan geçýän integral egrisini tapmaly diýildigidir.

Kesgitleme. Eger

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, ..., c_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

funksiýalar toplumy:

1) D oblastyň her bir $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ nokady üçin (3) sistema $c_1, c_2, ..., c_n$ hemişeliklere görä çözülen, ýagny

$$c_i = \psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4}$$

bolsa;

2) $c_1, c_2, ..., c_n$ hemişelikleriň (4) deňlikler sistemasyndan kesgitlenen her bir bahasy üçin (3) funksiýalar toplumy (1) sistemanyň çözüwi bolsa, onda (3) funksiýalar toplumyna D oblastda (1) sistemanyň umumy çözüwi diýilýär.

Koşi meselesiniň çözüwini tapmak üçin (3)-däki $x, y_1, y_2, ..., y_n$ argumentleriň (üýtgeýän ululyklaryň) orunlaryna, degişlilikde, $x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ başlangyç bahalary goýup, alnan sistemadan $c_i = c_i^0, (i = 1, 2, ..., n)$ san bahalary kesgitläp (3)-de goýsak, onda (3)

$$y_i = \varphi_i(x, c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0) \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşi alar. Bu funksiýalar toplumy (1) sistemanyň (2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Beýle çözüwe (1) sistemanyň hususy çözüwi diýilýär.

Kesgitleme. Eger

$\forall (x, \overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_n}), (x, \overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{y_2}}, ..., \overline{\overline{y_n}}) \in D$ nokatlar üçin

$$|f_i(x,\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_n})-f_i(x,\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{y_2}},...,\overline{\overline{y_n}}|\leq L\cdot\sum_{j=1}^{n}|\overline{y_j}-\overline{\overline{y_j}}|$$

deňsizlikler ýerine ýetýän bolsa, onda
$f_i(x,y_1,y_2,...,y_n),(i=1,2,...,n)$ funksiýalara D oblastda $y_1,y_2,...,y_n$ argumentler boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýar diýilýär, bu ýerde $L>0$ – Lipşis hemişeligi.
Bu ýerde Lipşis şertine degişli käbir belligi ýatlalyň.
Eger D oblastda $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n),(i=1,2,...,n)$ funksiýalaryň $y_1,y_2,...,y_n$ argumentler boýunça

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j},(i,j=1,2,...,n)$$

çäkli hususy önümleri bar, ýagny $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|\leq L$

bolsa we oblast argumentlere görä güberçek bolsa, onda şol oblastda Lipşis şerti ýerine ýetýär.

Agzalan tassyklamanyň dogrulygyny anyklamaga islendik

$$(x,\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_n}),(x,\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{y_2}},...,\overline{\overline{y_n}})\in D$$

iki nokat üçin

$$|f_i(x,\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_n})-f_i(x,\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{y_2}},...,\overline{\overline{y_n}}|$$

tapawuda orta baha baradaky Lagranž formulasyny yzygiderli ulanmaly hem-de ýokarda görkezilen deňsizligi göz öňünde tutmaly. Ondaky L hemişelige derek hususy önümleriň absolýut bahalarynyň iň ulusyny almak ýeterlik. Şunlukda, Lipşis şertiniň ýerine ýetýändigini görmek kyn däldir (Munuň barlanyşyny gönükme hökmünde okyjylara hödürleýäris).

Çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasy

Differensial deňlemeler sistemasyny çözmäge girişilende ilki bilen ol sistemanyň çözüwiniň bardygyny anyklamak zerurdyr. Bu mesele differensial deňlemeler nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biridir. Şoňa görä-de biz bu ýerde birinji tertipli deňlemeler sistemasynyň çözüwiniň barlygyny we ol çözüwiň ýeke-täkligini üpjün edýän şertleri özünde saklaýan teoremany beýan ederis.

Teorema (Pikar teoremasy). Eger $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, ..., n)$ funksiýalar merkezi $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ nokatda bolan $n + 1$ ölçegli $D = \{|x - x_0| \le a, |y_i - y_i^0| \le b, i = 1, 2, ..., n\}$ ýapyk oblastda (parallelepipedde) üznüksiz we $y_1, y_2, ..., y_n$ argumentler boýunça Lipşis şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda (1) sistemanyň (2) şertleri kanagatlandyrýan $|x - x_0| \le h$ kesimde $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$, ýeke-täk çözüwi bardyr, bu ýerde $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$,

$$M = \max_{1 \le i \le n} |f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)|, \quad (x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$$

Subudy. Mälim bolşy ýaly, birinji tertipli bir deňleme üçin Koşi meselesiniň integral deňlemä getiriliş usulyny ulanyp, (1)-(2) mesele

$$y_i = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)\,dt, i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

integral deňlemeler sistemasyna getirilýär. (1)-(2) meseläniň (5) sistema deňgüýçlüdigini görkezmek kyn däldir. Diýmek, bize (5) sistemanyň çözüwini tapmaklyk galýar. Onuň üçin Pikar yzygiderli ýakynlaşmalar usulyny ulanalyň. Yzygiderli ýakynlaşmalary aşakdaky düzgün boýunça guralyň:

Nolunjy ýakynlaşmanyň deregine
$y_i(x) = y_i^0, (i = 1, 2, ..., n)$ başlangyç bahalary kabul ederis. Soňky yzygiderli ýakynlaşmalary

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1^{(m-1)}(t), ..., y_n^{(m-1)}(t))\,dt,$$

$$(i = 1,2,...,n;\ m = 1,2,...) \tag{6}$$

formulalar boýunça hasaplap,

$$\{y_1^{(m)}(x)\}, ..., \{y_n^{(m)}(x)\} \tag{7}$$

n sany yzygiderli ýakynlaşmalary alarys. Olar üznüksiz funksiýalardyr.

Teoremanyň subudy birnäçe böleklerden durýar:
1) kesgitlenen (7) yzygiderlikleriň grafikleriniň D oblastyň çäginden çykmaýandyklaryny görkezeliň.
$|f_i(x, y_1, ..., y_n)| \leq M$ we $h \leq \frac{b}{M}$ deňsizlikleri göz öňünde tutup, (6) formuladan $m = 1$ üçin

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0)| dt \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^0| \leq b, (i = 1, 2, ..., n)$$

deňsizlikleri alarys. Bu deňsizliklerden görnüşi ýaly, $y_i^{(1)}(x)$ $(i = 1,2,...,n)$ funksiýalaryň grafikleri D oblastyň çäginden çykmaýarlar. Şonuň ýaly, (6) formuladan

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^0| \leq b, (i = 1, 2, ..., n)$$

deňsizlikleri alarys. Bu deňsizlikleriň islendik m üçin dogrulygyny matematiki induksiýa usuly bilen görkezmek kyn däldir.
2) (7) yzygiderlikleriň $|x - x_0| \leq h$ kesimde deňölçegli ýygnanýandyklaryny görkezeliň. Onuň üçin olaryň agzalaryndan

$$\begin{aligned} & y_i^0 + (y_i^{(1)}(x) - y_i^0(x)) + (y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)) + ... \\ & ... + (y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)) + ... \end{aligned} \tag{8}$$

funksional hatarlary görnüşlerde düzeliň. (8) hatarlaryň her biriniň deňölçegli ýygnanýanlygyndan (7) yzygiderlikleriň her biriniň deňölçegli ýygnanýanlygy gelip çykýar.

(8) hatarlaryň her bir agzasyny bahalandyralyň. (6)-dan $m = 1$ üçin

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^0| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0)| dt \right| \leq M|x - x_0|,$$

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^0| \leq M|x - x_0|$$

deňsizlikleri alarys.

(6)-dan $y_i^{(2)} - y_i^{(1)}$ tapawudy düzüp, ony bahalandyralyň. Lipşis şertini we ýokardaky bahalandyrmalary nazarda tutup,

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(t, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0)| dt \right| \le$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |y_j^{(1)}(t) - y_j^0| dt \right| \le MnL \frac{|x - x_0|^2}{2}, (i = 1, 2, ..., n)$$

deňsizlikleri alarys. Bahalandyrmalary dowam etdirip,

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \le M(nL)^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}$$
$$(i = 1,2,...,n)$$

deňsizliklere geleris.

Bu deňsizlikleriň islendik m natural san üçin adalatlydygyny matematiki induksiýa usuly bilen subut etmek bolar. Bahalandyrylýan agzalarda $|x - x_0|$ ululygy h bilen çalşyrsak, (8) funksional hatarlaryň ikinji agzalaryndan başlap her bir agzasy absolýut ululygy boýunça

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nL)^{m-1} \frac{h^m}{m!} \qquad (9)$$

san hatarynyň degişli agzasyndan uly däldigini görýäris. Dalamber nyşany boýunça (9) ýygnanýan hatar. Onda Weýerştrass nyşanyna laýyklykda (8) funksional hatarlar $|x - x_0| \le h$ kesimde deňölçegli ýygnanýarlar, diýmek, (7) yzygiderlikler hem şonuň ýaly ýygnanýarlar.

Şeýlelikde, olaryň predelleriniň barlygy anyklanyldy. Goý, $\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = \varphi_i(x)$ bolsun, bu ýerde $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,...,n)$ $|x - x_0| \le h$ kesimde üznüksiz funksiýalar.

3) $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, ...n)$ funksiýalar toplumynyň (5) sistemanyň çözüwidigini görkezeliň. (7) yzygiderlikleriň, degişlilikde, $|x - x_0| \le h$ kesimde $\varphi_i(x), ..., \varphi_n(x)$ üznüksiz funksiýalara deňölçegli ýygnanýandyklaryna görä we $f_i(x, y_1, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ D oblastda üznüksiz funksiýalar bolandyklary üçin $f_i(x, y_1^{(m)}, ..., y_n^{(m)})$

$i = 1,2,...,n;\ m = 1,2,...)$ yzygiderlikler D oblastda $f_i(x,\varphi_1(x),$ $...,\varphi_n(x))$ funksiýalara deňölçegli ýygnanýarlar. Mälim bolşy ýaly, yzygiderligiň ýygnanma kadasyna laýyklykda integral belgisiniň aşagynda limit belgisini ýazmak (predele geçmek) bolýar.
Onda

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_i(t,y_1^{(m)},...,y_n^{(m)})dt = \int_{x_0}^{x}\lim_{m\to\infty} f_i(t,y_1^{(m)},...,y_n^{(m)})dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f_i(t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))dt$$

bolar. (6)-nyň iki böleginden predel alsak, ýagny

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t,y_1^{(m-1)},...,y_n^{(m-1)})dt\right),$$

onda

$$\varphi_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))dt \tag{10}$$

deňliklere geleris.

(10) we (5) deňlikleri deňeşdirip, $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ funksiýalar toplumynyň $|x-x_0|\le h$ kesimde (5) sistemanyň çözüwidigini görýäris.

4) (5) sistemanyň $|x-x_0|\le h$ (başgaça ýazylyşy $[x_0-h,x_0+h]$) kesimde diňe bir çözüwiniň bardygyny görkezeliň.

Goý, $|x-x_0|\le h$ kesimde (5) sistemanyň $y_i=\varphi_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$ çözüwinden başga $y_i=\psi_i(x)\,(i=1,2,...,n)$ çözüwi hem bar diýeliň. Onda $|x-x_0|\le h$ kesimde

$$\psi_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t,\psi_1(t),...,\psi_n(t))dt,\ (i=1,2,...,n) \tag{11}$$

toždestwolary alarys. (10) we (11) deňliklerden Lipşis şertini nazarda tutup,

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| \le L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j(t) - \psi_j(t)| dt \right|,$$
$$(i = 1,2,...,n)$$

deňsizliklere geleris.

Bu deňsizlikleriň degişli böleklerini goşup

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)| \le nL \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)| dt \right|$$

deňsizligi alarys.

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)| = v(x)$$

belgilemäni girizsek, ýokardaky deňsizlik

$$v(x) \le nL \cdot \left| \int_{x_0}^{x} v(t) dt \right|$$

görnüşi alar.

Kesgitlilik üçin $x \in [x_0, x_0 + h]$ bolsun. Onda soňky deňsizlik

$$v(x) \le nL \cdot \int_{x_0}^{x} v(t) dt$$

görnüşde bolar. *Gronuoll-Bellman deňsizligini* ulansak, onda $v(x) \le 0$ ýa-da $\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)| \le 0$ bolar. Diýmek, $[x_0, x_0 + h]$ kesimde $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Görkezilen düzgüni gaýtalap, $x \in [x_0 - h, x_0]$ üçin hem $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$ deňlikleri görkezmek bolar.

Şeýlelikde, teorema doly subut edildi.

Mysal.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = x + yz \\ &\frac{dz}{dx} = x^2 - y^2 \\ &y(0) = 1, z(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

meseläniň $R = \{-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, -1 \le z \le 1\}$ oblastda çözüwiniň we ikinji ýakynlaşmasynyň tapawudyny 0,01 takyklykda bahalandyrmaly.

Çözülişi. Ilki garalýan meseläniň ýeke-täk çözüwiniň bolmaly oblastyny anyklalyň:

Biziň ýagdaýymyzda

$$f_1(x,y,z) = x + yz, \; f_2(x,y,z) = x^2 - y^2.$$

Onda

$$|f_1(x,y,z)| = |x + yz| \le |x| + |y| \cdot |z| \le 1 + 2 \cdot 1 = 3$$
$$|f_2(x,y,z)| = |x^2 - y^2| \le |x^2| + |y^2| \le 1 + 4 = 5.$$

R oblastyň islendik nokadynda
$|f_1(x,y,z)| \le 5, |f_2(x,y,z)| \le 5$ deňsizlikler ýerine ýetýär. Şonuň üçin $M = 5$ edip alarys. f_1 we f_2 funksiýalaryň önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = z, \; \frac{\partial f_1}{\partial z} = y, \; \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2y, \; \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$
$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| \le 1, \; \left|\frac{\partial f_1}{\partial z}\right| \le 2, \; \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| \le 4, \; \left|\frac{\partial f_2}{\partial z}\right| = 0.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, $L = 4$ sany Lipşis hemişeligi edip alarys. Çözüwiň bolmaly kesimini

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

formula boýunça kesgitläris.

Şeýlelikde, Pikar teoremasynyň hemme şertleri ýerine ýetýär. Diýmek, garalýan meseläniň $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ kesimde ýeke-täk çözüwi bar.

Garalýan mesele

$$\begin{cases} y = 1 + \int_0^x (t + yz)dt, \\ z = \int_0^x (t^2 - y^2)dt \end{cases} \tag{14}$$

integral deňlemeler sistemasyna deňgüýçlüdir. (14) sistemany çözmäge yzygiderli ýakynlaşmalary

$$\left.\begin{aligned} y_n &= 1 + \int_0^x (t + y_{n-1} z_{n-1})dt, \\ z_n &= \int_0^x (t^2 - y_{n-1}^2)dt \\ n &= 1, 2, ... \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

formula boýunça hasaplarys. Nolunjy ýakynlaşma derek $y_0(x) = 1$, $z_0(x) = 0$ başlangyç bahalary alarys. Beýlekileri (15) boýunça taparys:

$$y_1 = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{x^2}{2}, y_2 = 1 +$$

$$+ \int_0^x \left[t + \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\right]dt = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36},$$

$$z_1 = \int_0^x (t^2 - 1)dt = \frac{x^3}{3} - x, \; z_2 = \int_0^x \left[t^2 - \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2\right]dt = -x - \frac{x^5}{20}.$$

Indi (14) sistemanyň çözüwi bilen ikinji ýakynlaşmanyň tapawudyny bahalandyrmak üçin

$$\begin{aligned} &|y(x) - y_0| = |y(x) - y(x_0)| = |x - x_0| \cdot |y'(c)| = \\ &= |x - x_0| \cdot f_1(c, y(c), z(c)) \leq M \cdot |x - x_0| \\ &|z(x) - z(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$

deňsizlikleri peýdalanyp,

$$|y(x) - y_n(x)| \leq M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|z(x) - z_n(x)| \leq M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

deňsizlikleri alarys we ulanarys. Garalýan sistema üçin,

$$|y(x) - y_2(x)| \leq 5 \cdot (2 \cdot 4)^2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3!} = \frac{320}{750} \approx 0,42,$$

$$|z(x) - z_2(x)| \leq 0,42.$$

Şeýlelikde, garalýan meseläniň talabyna jogap alyndy.

§2. Çözüwiň parametre üznüksiz baglylygy we parametr boýunça differensirlenmegi

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= f_i(x, y_1, ..., y_n, \lambda) \\ y_i(0) &= y_{i0}, (i = 1, 2, ..., n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

meselä garalyň, bu ýerde λ – parametr.

Goý, $f_i(x, y_1, ..., y_n, \lambda)$ funksiýalar

$$R = [0, T] \cdot \lfloor y_{1,0} - r, y_{1,0} + r \rfloor \cdot ... \cdot \lfloor y_{n,0} - r, y_{n,0} + r \rfloor \cdot$$
$$\cdot [\lambda_0, \lambda_0 + \wedge]$$

oblastda kesgitlenen, üznüksiz we $y_1, ..., y_n, \lambda$ argumentleriň toplumy boýunça üznüksiz hususy önümleri bar bolsun. Agzalan şertler λ-nyň her bir berkidilen (fiksirlenen) bahasynda çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasynyň talaplaryny kanagatlandyrýarlar. Diýmek, (1) meseläniň ýeke-täk çözüwi bar. Ol çözüwi $y_i = y_i(x, \lambda)$ ýa-da $y_i = y_{i\lambda}(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ görnüşde ýazalyň. Bu çözüwiň parametre üznüksiz baglylygyny we parametr boýunça önüminiň barlygyny görkezeliň. Ýazgylary tygşytlamak maksady bilen $y_i = y_{i\lambda}(x)$ belgilemäni ulanarys. $\lambda \neq \overline{\lambda}$ bahalara degişli çözüwleri $y_{i,\lambda}(x)$ we $y_{i\overline{\lambda}}(x)$ bilen belgiläliň. Onda

$$y'_{i\lambda}(x) = f_i(x, y_{1\lambda}(x), ..., y_{n\lambda}(x), \lambda), y_{i\lambda}(0) = y_{i0},$$
$$y'_{i\overline{\lambda}}(x) = f_i(x, y_{1\overline{\lambda}}(x), ..., y_{n\overline{\lambda}}(x), \overline{\lambda}), y_{i\overline{\lambda}}(0) y_{i0},$$
$$(i = 1, 2, ...n)$$

toždestwolary alarys. Bu ýerden Lagranž formulasyna laýyklykda

$$[y_{i\lambda}(x) - y_{i\overline{\lambda}}(x)]' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{\lambda})(y_{j\lambda}(x) - y_{j\overline{\lambda}}(x)) +$$
$$+ f_{i\lambda}(x, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{\lambda})(\lambda - \overline{\lambda})$$
$$\lfloor y_{i\lambda}(x) - y_{i\overline{\lambda}}(x) \rfloor_{x=0} = 0, (i = 1, 2, ..., n)$$

ýa-da

$$\frac{y_{i\lambda}(x) - y_{i\bar{\lambda}}(x)}{\lambda - \bar{\lambda}} = \int_0^x \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(s, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{\lambda}) \cdot \frac{y_{j\lambda}(s) - y_{j\bar{\lambda}}(s)}{\lambda - \bar{\lambda}} ds + \qquad (2)$$

$$+ \int_0^x f_{i\lambda}(s, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{\lambda}) ds, (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşli deňliklere geleris.

Ýokarda agzalan şertlere laýyklykda

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq M, \quad | f_{i\lambda} | \leq N, \quad (i,j = 1, 2, ..., n).$$

Onda

$$\left| \frac{y_{i\lambda}(x) - y_{i\bar{\lambda}}(x)}{\lambda - \bar{\lambda}} \right| \leq nM \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^x \left| \frac{y_{i\lambda}(s) - y_{i\bar{\lambda}}(s)}{\lambda - \bar{\lambda}} \right| ds + TN$$

deňsizlikleri alarys.

$$V_{\lambda\bar{\lambda}}(x) = \max_{l \leq i \leq n} \left| \frac{y_{i\lambda}(x) - y_{i\bar{\lambda}}(x)}{\lambda - \bar{\lambda}} \right|$$

belgilemäni girizsek, soňky deňsizlikler

$$V_{\lambda\bar{\lambda}}(x) \leq nM \cdot \int_0^x V_{\lambda\bar{\lambda}}(s) ds + TN$$

görnüşi alar.

Gronuoll-Bellman teoremasyny ulanyp,

$$V_{\lambda\bar{\lambda}}(x) \leq TN \cdot \exp(nMT)$$

deňsizligi alarys.

Bu deňsizligi

$$| y_{i\lambda}(x) - y_{i\bar{\lambda}}(x) | \leq C \cdot | \lambda - \bar{\lambda} | \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde ýazarys, bu ýerde $C = TN \cdot \exp(nMT)$ – hemişelik san. Soňky deňsizlikleriň

$$| y_{i\lambda}(x, \lambda) - y_{i\bar{\lambda}}(x, \bar{\lambda}) | \leq C \cdot | \lambda - \bar{\lambda} | \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşlerde ýazylyşy düşnüklidir.

Bu ýerden görnüşi ýaly, $|\lambda-\bar{\lambda}|$ ýeterlikçe kiçi bolanda $|y_{i\lambda}(x,\lambda)-y_{i\bar{\lambda}}(x,\bar{\lambda}|$ ýeterlikçe kiçi bolar. Bu bolsa $y_i(x,\lambda)$ $(i=1,2,...,n)$ çözüwleriň λ boýunça deňölçegli üznüksiz funksiýalardygyny görkezýär.

Indi (1) meseläniň $y_{i\lambda}(x,\lambda)$ çözüwiniň λ boýunça önüminiň bardygyny we $\dfrac{\partial y_{i\lambda}(x)}{\partial\lambda}=u_{i\lambda}(x)$ funksiýalar toplumynyň

$$u'_{i\lambda}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)\cdot u_{j\lambda}+f_{i\lambda}(x,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda),$$
$$u_{i\lambda}(0)=0$$

meseläniň ýa-da

$$\begin{aligned}u_{i\lambda}(x)=&\int_0^x\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)\cdot u_{j\lambda}(s)\,ds+\\&+\int_0^x f_{i\lambda}(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)ds,(i=1,2,...,n)\end{aligned}\tag{3}$$

çyzykly integral deňlemeler sistemasynyň çözüwidigini görkezeliň.

(2) we (3) deňliklerden

$$\begin{aligned}&\frac{y_{i\lambda}(x)-y_{i\bar{\lambda}}(x)}{\lambda-\bar{\lambda}}-u_{i\lambda}(x)=\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_0^x\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(s,\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\bar{\lambda})\cdot\left[\frac{y_{j\lambda}(s)-y_{j\bar{\lambda}}(s)}{\lambda-\bar{\lambda}}-u_{j\lambda}(s)\right]ds+\\&+\int_0^x\{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(s,\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\bar{\lambda})}{\partial y_j}-\frac{\partial f_i(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)}{\partial y_j}\right]\cdot u_{j,\lambda}(s)+\\&+[f_{i\lambda}(s,\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\tilde{\lambda})-f_{i\lambda}(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)]\}\,ds\end{aligned}\tag{4}$$

deňliklere geleris.

$y_{i\lambda}(x)$ funksiýalar λ boýunça üznüksiz, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ we $\dfrac{\partial f_i}{\partial\lambda}$ $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ funksiýalar argumentleriniň toplumy boýunça üznüksiz. Onda $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle $\delta>0$ san tapylyp, $|\lambda-\bar{\lambda}|<\delta$ bolanda,

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(s,\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\lambda)}{\partial y_j}-\frac{\partial f_i(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)}{\partial y_j}\right]\cdot u_{j\lambda}(s)+\right.$$
$$+[f_{i\lambda}(s,\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\tilde{\lambda})-f_{i\lambda}(s,y_{1\lambda},...,y_{n\lambda},\lambda)]\Big|<\frac{\varepsilon}{\exp(nMT)}$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

(4) deňlikden $|\lambda-\overline{\lambda}|<\delta$ üçin

$$V_{\lambda\overline{\lambda}}(x)\le nM\cdot\int_0^x V_{\lambda\overline{\lambda}}(s)\,ds+\varepsilon\exp(-nMT)$$

deňsizligi alarys, bu ýerde

$$V_{\lambda\overline{\lambda}}(x)=\max_{l\le i\le n}\left|\frac{y_{i\lambda}(x)-y_{i\overline{\lambda}}(x)}{\lambda-\overline{\lambda}}-u_{i\lambda}(x)\right|.$$

Soňky deňsizlige Gronuoll-Bellman teoremasynyň netijesini ulanyp, $V_{\lambda\overline{\lambda}}(x)<\varepsilon$ ýa-da $\left|\dfrac{y_{i\lambda}(x)-y_{i\overline{\lambda}}(x)}{\lambda-\overline{\lambda}}-u_{i\lambda}(x)\right|<\varepsilon$ deňsizliklere geleris. Şoňa görä-de bulary

$$\lim_{|\lambda-\overline{\lambda}|\to 0}\frac{y_{i\lambda}(x)-y_{i\overline{\lambda}}(x)}{\lambda-\overline{\lambda}}=u_i(x,\lambda)=\frac{dy_i(x,\lambda)}{d\lambda}$$

görnüşlerde ýazyp bileris.

§3. Üýtgeýän koeffisiýentli çyzykly deňlemeler sistemasy. Erkin hemişelikleriň wariasiýa (Lagranž) usuly

Kesgitleme. Eger $y_1,...,y_n$ gözlenilýän funksiýalar we olaryň birinji önümleri sistemanyň düzümine çyzykly girýän bolsalar, onda oňa çyzykly sistema diýilýär.

Sistema;

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(x)y_j+f_i(x),\qquad (i=1,2,...,n)\tag{1}$$

görnüşde berilýär. (1)-e birjynsly däl çyzykly deňlemeler sistemasy diýilýär. $P_{ij}\,(x)$ funksiýalara sistemanyň koeffisiýentleri, $f_i(x)$ funksiýalara azat agzalar diýilýär. Goý, $P_{ij}(x)$ we $f_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$ $[a,b]$

kesimde üznüksiz funksiýalar bolsun. Onda çözüwiň barlyk we ýeke-täklik teoremasynyň şertleri ýerine ýetýär.

Diýmek, (1) sistemanyň

$$y_1(x_0) = y_1^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0 \tag{2}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $[a,b]$ kesimde $y_1 = \varphi_i(x), ...,$ $y_n = \varphi_n(x)$ ýeke-täk çözüwi bardyr, bu ýerde $x_0 \in [a,b]$.

Eger (1) sistemada $f(x) \equiv 0$ bolsa, onda ol

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x) y_j, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

görnüşi alar. Muňa birjynsly deňlemeler sistemasy diýilýär.

(3) sistemanyň $y_1(x) = 0, ..., y_n(x) = 0$ görnüşde nol çözüwiniň barlygy görnüp dur. $y_1(x_0) = 0, y_2(x_0) = 0, ..., y_n(x_0) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan (3) sistemanyň çözüwi hem noldur.

Kesgitleme. (a,b) interwalda kesgitlenen

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n} \\ ... \\ y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nn} \end{array}\right\} \tag{4}$$

funksiýalar toplumy üçin $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0$

$(k = 1, ..., n; a < x < b, \alpha_i$ – hemişelik) toždestwolar diňe $\alpha_1 = \alpha_2 = ...$ $= \alpha_n = 0$ ýagdaýda ýerine ýetse, (4) funksiýalar toplumyna çyzykly bagly däl diýilýär. Eger $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolup, görkezilen toždestwolar ýerine ýetse, onda (4) topluma çyzykly bagly diýilýär.

Kesgitleme. (4) toplumda setirleýin ýerleşdirilen n sany funksiýalar (3) sistemanyň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, olaryň toplumyna çözüwleriň fundamental sistemasy diýilýär.

(4) toplumdaky funksiýalardan düzülen

$$\left|\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n} \\ ... \\ y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nn} \end{array}\right|$$

kesgitleýji Wronskiý kesgitleýjisi diýlip atlandyrylýar we $W(x)$ bilen belgilenýär.

Teorema. Eger (3) sistemanyň koeffisiýentleri (a,b) interwalda üznüksiz we (4) toplumdaky funksiýalar (3) sistemanyň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsalar, onda olaryň Wronskiý kesgitleýjisi (a,b) interwalyň nokatlarynyň hiç birinde nola deň däldir, ýagny $\forall x \in (a,b)$ üçin $W(x) \neq 0$.

Bu teoremanyň subudy kitabyň 130-njy sahypasynda getirilen teoremanyň subudyna meňzeş. Şonuň üçin hem teoremany subutsyz kabul etmegi makul bildik.

Teorema. Eger (a,b) interwalda (4) funksiýalar toplumy (3) deňlemeler sistemasynyň fundamental sistemasyny emele getirýän bolsa, onda (3) sistemanyň umumy çözüwi

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1} \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2} \\ &\ldots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

görnüşde berler, bu ýerde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – erkin hemişelikler.

Subudy. (5) belgidäki funksiýalar toplumynyň (3) sistemanyň umumy çözüwidigini görkezmek üçin (5)-däki $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiýalaryň

$$y_i(x_0) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (6)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly edip $C_1, C_2, \ldots, C_n$ hemişelikleri saýlalyň. Onuň üçin (5)-de $x = x_0$ bahany goýup, (6) şertleri göz öňünde tutup, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ululyklara görä

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{21}(x_0) \ldots + C_n y_{n1}(x_0) &= y_1^0 \\ C_1 y_{12}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) \ldots + C_n y_{n2}(x_0) &= y_2^0 \\ \ldots \\ C_1 y_{1n}(x_0) + C_2 y_{2n}(x_0) \ldots + C_n y_{nn}(x_0) &= y_n^0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

görnüşli deňlemeler sistemasyny alarys. (7) sistemanyň kesgitleýjisi $W(x_0) \neq 0$.

(7) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bar. Goý,

$C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$ onuň çözüwi bolsun. Bu san bahalary (5)-de goýup, (3) sistemanyň

$$y_i = C_1^0 y_{1i} + C_2^0 y_{2i} + ... + C_n^0 y_{ni}, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{8}$$

görnüşli hususy çözüwini alarys. Diýmek, (5) çözüw (3) sistemanyň umumy çözüwi.

Indi (1) sistemanyň umumy çözüwini tapmaklyga girişeliň. Oňa erkin hemişelikleriň wariasiýa usulyny ulanalyň.

Goý, (3) sistemanyň umumy çözüwi tapylan bolsun. Mälim bolşy ýaly, onuň umumy çözüwi

$$y_i = C_1 y_{1i} + C_2 y_{2i} + ... + C_n y_{ni}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde berilýär. (1) sistemanyň çözüwini

$$y_i = C_1(x) y_{1i} + C_2(x) y_{2i} + ... + C_n(x) y_{ni}, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{9}$$

görnüşde gözläliň. (9)-daky funksiýalar (1) sistemanyň çözüwi bolar ýaly edip, $C_1(x) = C_2(x), ..., C_n(x)$ funksiýalary saýlalyň. Onuň üçin (9)-y (1) sistemada goýup,

$$\begin{aligned}
&C'_1 y_{1i} + C'_2 y_{2i} + ... + C'_n y_{ni} + C_1 y'_{1i} + C_2 y'_{2i} + ... + C_n y'_{ni} = \\
&= P_{i1}(C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + ... + C_n y_{n1}) + ... + \\
&+ P_{in}(C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + ... + C_n y_{nn}) + f_i(x), (i = 1, 2, ..., n)
\end{aligned}$$

ýa-da

$$\begin{aligned}
&C_1(y'_{1i} - P_{i1} y_{11} - ... - P_{in} y_{1n}) + ... + \\
&+ C_n(y'_{ni} - P_{i1} y_{n1} - ... - P_{in} y_{nn}) + \\
&+ C'_1 y_{1i} + ... + C'_n y_{ni} = f_i(x), \quad (i = 1, 2, ..., n)
\end{aligned}$$

deňlikleri alarys.

Edilen gümana görä ýaýlardaky aňlatmalar nola deňdirler. Onda bu ýerden $C'_1, C'_2, ..., C'_n$ ululyklara görä

$$C'_1 y_{1i} + ... + C'_n y_{ni} = f_i(x), \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{10}$$

deňlemeler sistemasyny alarys.

(10) sistemanyň kesgitleýjisi $W(x) \neq 0$. Onda (10) sistemanyň ýeke--täk çözüwi bardyr. Ony

$$C'_i(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde taparys.

Deňligiň iki bölegini integrirläp,

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + \overline{C}_i, \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{11}$$

deňligi alarys. Bu ýerde $\overline{C_1}$ erkin hemişelikler. (11)-i (9)-da goýup, (1) sistemanyň umumy çözüwini

$$y_i = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + \overline{C}_1\right) y_{1i} + ... + \left(\int \frac{W_n(x)}{W(x)} dx + \overline{C}_n\right) y_{ni}$$
$$(i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde ýazarys.

§4. Hemişelik koeffisiýentli birjynsly deňlemeler sistemasy

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n, \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

deňlemeler sistemasy görnüşde berilýär. Bu ýerde $y_1,...,y_n$ gözlenilýän funksiýalar, a_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ koeffisiýentler hemişelik sanlar. (1) sistemany

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

görnüşde hem ýazmak bolar. (1) sistemanyň çözüwini tapmaga Eýleriň teklip eden usulyny beýan ederis. (1) sistemanyň hususy çözüwini

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \quad (2)$$

görnüşde gözläris, bu ýerde $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ we λ häzirlikçe kesgitlenmedik hemişelikler. (2)-däki funksiýalar (1) sistemanyň çözüwi bolar ýaly edip, olary kesgitlemeli. Şol maksat bilen (2)-däki $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiýalary we olaryň önümlerini (1) sistemada goýup, soňra onuň iki bölegini $e^{\lambda x}$ köpeldijä gysgaldyp, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ ululyklara görä

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0 \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

görnüşli birjynsly deňlemeler sistemasyna geleris. Eger (3) sistemanyň kesgitleýjisi noldan tapawutly bolsa, onda onuň nol çözüwiniň bardygy belli. Bizi ol sistemanyň nol däl çözüwi gyzyklandyrýar. Şeýle çözüw diňe (3) sistemanyň kesgitleýjisiniň nola deň bolan ýagdaýynda bardyr. Şoňa görä-de, (3) sistemanyň nol däl çözüwini tapmak üçin, onuň kesgitleýjisini nola deňläp, ýagny

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

deňligi alarys.

Bu λ – a görä *n* derejeli algebraik deňleme. (4) deňlemä (1) sistemanyň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär, onuň köklerine häsiýetlendiriji sanlar diýilýär.

Goý, (4) deňlemäniň kökleri tapylan bolsun. Olary $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ bilen belgiläliň.

Indi (1) sistemanyň umumy çözüwini tapmaga girişeliň.

1) goý, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ kökler hakyky we dürli sanlar bolsun. Olary (3) sistemada λ-nyň ornuna nobatlaýyn goýup, olara degişli sistemalary alarys.

Şolaryň biri

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_1)\gamma_1+a_{12}\gamma_2+...+a_{1n}\gamma_n=0\\ a_{21}\gamma_1+(a_{22}-\lambda_1)\gamma_2+...+a_{2n}\gamma_n=0\\ ...\\ a_{n1}\gamma_1+a_{n2}\gamma_2+...+(a_{nn}-\lambda_1)\gamma_n=0\end{array}\right\} \qquad (3_1)$$

görnüşde bolar. Bu sistemanyň kesgitleýjisi nola deň. Diýmek, (3_1) sistemanyň nol däl çözüwi bar.

Goý, $\gamma_1=\gamma_{11},\gamma_2=\gamma_{12},...,\gamma_n=\gamma_{1n}$ sanlar (3_1) sistemanyň çözüwi bolsun. Bu bahalary we λ_1 – *i* (2)-de goýup,

$$y_{11}=\gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, y_{12}=\gamma_{12}e^{\lambda_1 x},...,y_{\mathrm{ln}}=\gamma_{\mathrm{ln}}e^{\lambda_1 x} \qquad (4_1)$$

(1) sistemanyň birinji hususy çözüwini alarys. Şonuň ýaly λ_2-ni (3)-de λ-nyň ornuna goýup, alnan sistemadan $\gamma_1=\gamma_{21},\gamma_2=\gamma_{22},...,\gamma_n=\gamma_{2n}$ bahalary taparys. Bulary we λ_2-ni (2)-de goýup,

$$y_{21}=\gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, y_{22}=\gamma_{22}e^{\lambda_2 x},...,y_{2n}e^{\lambda_2 x}=\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x} \qquad (4_2)$$

(1) sistemanyň ikinji hususy çözüwini alarys. Bu hasaplamany dowam etdirip, λ_n üçin

$$y_{n1}=\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, y_{n2}=\gamma_{n2}e^{\lambda_n x},...,y_{nn}=\gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \qquad (4_n)$$

n-nji hususy çözüwi taparys.

(4_1), (4_2),...,(4_n) funksiýalar (1) sistemanyň çyzykly bagly däl hususy çözüwleridir, ýagny olar çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýär. Onda üýtgeýän koeffisiýentli birjynsly deňlemeler sistemasyndaky teorema laýyklykda (1) sistemanyň umumy çözüwi

$$\left.\begin{array}{l}y_1=C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x}+C_2\gamma_{21}e^{\lambda_2 x}+...+C_n\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}\\ y_2=C_1\gamma_{12}e^{\lambda_1 x}+C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x}+...+C_n\gamma_{n2}e^{\lambda_n x}\\ ...\\ y_n=C_1\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}+C_2\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}+...+C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}\end{array}\right\}$$

görnüşde ýazylar.

2) goý, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ kökleriň arasynda $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\lambda_2=\alpha-\beta i$ kompleks sanlar bar diýeliň. Galanlary hakyky we dürli sanlar.

$\lambda_1=\alpha+\beta i$ sany (3) sistemada λ-nyň ornuna goýup,

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, ..., \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}$$

bahalary taparys. Onda (2) deňlikler

$$y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(\alpha+\beta i)x}, ..., y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(\alpha+\beta i)x}$$

görnüşde bolar.
Eýler formulasyny peýdalanyp, bu deňlikleri:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\gamma_{11}\cos\beta x - \gamma_{21}\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\gamma_{11}\sin\beta x + \gamma_{21}\cos\beta x)$$
$$...$$
$$y_n = e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\cos\beta x - \gamma_{2n}\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\gamma_{1n}\sin\beta x + \gamma_{2n}\cos\beta x)$$

görnüşlerde ýazarys.

Bu ýerden kompleks çözüwiň hakyky we hyýaly böleklerini

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= e^{\alpha x}(\gamma_{11}\cos\beta x - \gamma_{21}\sin\beta x), ..., y_{1n} = e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\cos\beta x - \gamma_{2n}\sin\beta x \\ y_{21} &= e^{\alpha x}(\gamma_{11}\sin\beta x + \gamma_{21}\cos\beta x), ..., y_{2n} = e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\sin\beta x + \gamma_{2n}\cos\beta x \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

görnüşlerde göçürip, iki sany funksiýalar toplumyny alarys. Olaryň (1) sistemanyň çözüwleridigini görkezmek kyn däldir.

Eger $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ sany (3) deňlemede λ-nyň ornuna goýsak, onda ýene (5) deňlikdäki funksiýalary alarys.

Diýmek, kompleks kökleriň her bir jübütine (5) görnüşli jübüt hususy çözüwler degişli bolýan eken. Bu ýagdaýda (1) sistemanyň umumy çözüwini

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}(\gamma_{11}\cos\beta x - \gamma_{21}\sin\beta x) +$$
$$+ C_2 e^{\alpha x}(\gamma_{11}\sin\beta x + \gamma_{21}\cos\beta x) + C_3\gamma_{31}e^{\lambda_3 x} + ... + C_n\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}$$
$$...$$
$$y_n = C_1 e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\cos\beta x - \gamma_{2n}\sin\beta x) +$$
$$+ C_2 e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\sin\beta x + \gamma_{2n}\cos\beta x) + C_3\gamma_{3n}e^{\lambda_3 x} + ... + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}$$

görnüşde ýazarys.

3) Goý, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m$ $(m \le n)$ bolsun. Onda (1) sistemanyň m sany hususy çözüwlerini tapmaly. Olary

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x} \quad (6)$$

görnüşlerde gözlemeli, bu ýerde $P_1(x), P_2(x),..., P_n(x)$ koeffisiýentleri kesgitlenmedik m – 1-den uly bolmadyk derejeli köpagzalardyr. Olaryň koeffisiýentlerini tapmak üçin (6)-daky funksiýalary (1) sistemada goýup, onuň iki bölegini $e^{\lambda x}$ köpeldijä gysgaldarys. Soňra deňlikleriň çep we sag böleklerindäki x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini we azat agzalaryny deňläp, köpagzalaryň näbelli koeffisiýentlerine görä deňlemeler sistemasyna geleris. Ondaky deňlemeleriň sany näbelli koeffisiýentleriň sanyndan az bolar. Şoňa görä-de, bu koeffisiýentleriň m sanysy erkin bolmaly, beýlekileri olar arkaly tapylmalydyrlar. Näbellileriň san bahalaryny tapyp, (6)-daky aňlatmalarda goýsak, tapmaklygy talap edilýän (1) sistemanyň hususy çözüwlerini kesgitläris. Şeýlelikde, (1) sistemanyň umumy çözüwini düzmäge mümkinçilik döreýär.

1-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \tag{7}$$

sistemany çözmeli.

Çözülişi.

Sistemadan görnüşi ýaly, $x(t)$ we $y(t)$ gözlenilýän funksiýalardyr. Sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t} \tag{8}$$

görnüşde gözläliň. Bu funksiýalary sistemada goýup, iki bölegini $e^{\lambda t}$-e gysgaldyp, γ_1 we γ_2 ululyklara görä

$$\gamma_1\lambda = 2\gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_2\lambda = 3\gamma_1 + 4\gamma_2$$

ýa-da

$$\begin{cases} (2-\lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + (4-\lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

görnüşli sistema geleris. Bize mälim bolşy ýaly, (9) sistemanyň nol däl çözüwini tapmak üçin, onuň kesgitleýjisini nola deňläris, ýagny

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bu (7) sistemanyň häsiýetlendiriji deňlemesi bolar. Ony $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ görnüşde ýazarys. Onuň kökleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

$\lambda_1 = 1$ sany (9) sistemada λ-nyň ornuna goýup,

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

sistemany alarys. Bu ýerde $\gamma_1 = 1$ edip alsak, $\gamma_2 = -1$ bolar. Tapylan san bahalary (8)-de goýup, (7) sistemanyň birinji hususy çözüwini $x_1 = e^t, \quad y_1 = -e^t$ görnüşde ýazarys. Soňra $\lambda_2 = 5$ sany (9)-da goýup,

$$\begin{cases} -3\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

sistema geleris. Bu ýerde $\gamma_1 = 1$ edip alarys. Onda $\gamma_2 = 3$ bolar. Bulary (8)-de goýup, (7) sistemanyň ikinji hususy çözüwini $x_1 = e^{5t}, \quad y_2 = 3e^{5t}$ görnüşde taparys. Şeýlelikde,

$$x_1 = e^t, \qquad y_1 = -e^t$$
$$x_2 = e^{5t}, \qquad y_2 = 3e^{5t}$$

funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýär. Onuň şeýledigi

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^t & -e^t \\ e^{5t} & 3e^{5t} \end{vmatrix} \neq 0$$

bolýanlygyndan gelip çykýar. Onda (7) sistemanyň umumy çözüwi

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases} \tag{10}$$

görnüşde bolar.

Eger garalýan (7) sistemanyň $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilse, onda (10)-da x we y ululyklaryň orunlaryna degişlilikde 3 we 1 sanlary, t-niň ornuna noly goýmaly.

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 1 = -C_1 + 3C_2 \end{cases}$$

sistemadan $C_1 = 2,\ C_2 = 1$ bahalary kesgitläris. Bu sanlary (10)-da goýup, (7) sistemanyň

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{5t} \\ y = -2e^t + 3e^{5t} \end{cases}$$

görnüşde hususy çözüwini taparys.

2-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases} \tag{11}$$

sistemany çözmeli.

Çözülişi. (11) sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t} \tag{12}$$

görnüşde gözläris.

(12)-ni (11) sistemada goýup, iki bölegini $e^{\lambda t}$ köpeldijä gysgaldyp,

$$\begin{cases} (1-\lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -2\gamma_1 + (3-\lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

görnüşli sistema geleris. (11) sistemanyň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ýa-da} \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

görnüşde bolar. Onuň kökleri $\lambda_1 = 2 + i,\ \lambda_2 = 2 - i.$ $\lambda_1 = 2 + i$ sany (13)-de λ-nyň ornuna goýup,

$$\begin{cases} (-1-i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -2\gamma_1 + (1-i)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

sistemany alarys. γ_1 - i erkin san diýip kabul edýäris. $\gamma_1 = 1$ edip alsak, onda $\gamma_2 = 1 + i$ bolar. $\lambda_1 = 2 + i,\ \ \gamma_1 = 1,\ \ \gamma_2 = 1 + i$ sanlary (12)-de goýup,

$$x = e^{(2+i)t} = e^{2t}\cos t + ie^{2t}\sin t$$
$$y = (1+i)e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t - \sin t) + ie^{2t}(\cos t + \sin t)$$

funksiýalary alarys.

Bularyň hakyky we hyýaly böleklerini aýyl-saýyl edip, (11) sistemanyň hususy çözüwlerini

$$x_1 = e^{2t}\cos t, \qquad x_2 = e^{2t}\sin t,$$
$$y_1 = e^{2t}(\cos t - \sin t), \quad y_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t)$$

görnüşlerde taparys.

Eger $\lambda_2 = 2$-i sany (13)-de goýsak, onda ýene ýokardaky tapylan funksiýalara geleris. Şoňa görä-de, $\lambda_2 = 2 - i$ san üçin (13) sistemadan γ_1 we γ_2 ululyklary gaýtadan tapmaklygyň zerurlygy ýok. Tapylan hususy çözüwler fundamental sistemany emele getirýär. Onda (11) sistemanyň umumy çözüwi

$$x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$$
$$y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t].$$

3-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases} \tag{15}$$

sistemanyň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. (15) sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \qquad y = \gamma_2 e^{\lambda t} \tag{16}$$

görnüşde gözläris.

Bu funksiýalary we olaryň önümlerini (15) sistemada goýup, $e^{\lambda t}$ funksiýa gysgaldyp,

$$\begin{cases} (2-\lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + (4-\lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

sistema geleris. Bu ýerden

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

edip, (15) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

görnüşde alarys. Deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$. Onda (15) sistemanyň çözüwini (16) görnüşde däl-de

$$x = (at + b)e^{3t}, \ \ y = (a_1 t + b_1)e^{3t}$$

(18)

görnüşde gözlemeli bolýar, sebäbi häsiýetlendiriji deňlemäniň iki köki özara deň (kratny). Bu ýerde a, b, a_1, b_1 näbelli sanlar. Olary tapmak üçin (18) funksiýalary we olaryň önümlerini (15) sistemada goýup, deňlikleriň iki bölegini e^{3t} funksiýa gysgaldyp,

$$\begin{cases} (a - a_1)t + a + b - b_1 = 0 \\ (a - a_1)t + a_1 + b - b_1 = 0 \end{cases}$$

görnüşli sistema geleris.

Bu ýerden a, b, a_1, b_1 näbellileriň san bahalaryny kesgitlemek üçin

$$a - a_1 = 0, a + b - b_1 = 0, a - a_1 = 0, a_1 + b - b_1 = 0$$

dört deňlemeler sistemasyny alarys. Olaryň a we b ikisini erkin sanlar hasaplarys, beýlekilerini olar arkaly aňladarys.

Onda $a_1 = 1$, $b_1 = a_1 + b$ edip alarys. Goý, $a = 0$, $b = 1$ bolsun. Onda $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ bolar. Bulary (18)-de goýup,

$$x_1 = e^{3t}, \quad y_1 = e^{3t}$$

funksiýalary alarys. Goý, $a = 1$, $b = 0$ bolsun. Onda $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ bolar. Bulary hem (18)-de goýup,

$$x_2 = te^{3t}, \quad y_2 = (t + 1)e^{3t}$$

funksiýalary alarys.

Tapylan funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýär. Munuň şeýledigine göz ýetirmek kyn däl. Şeýlelikde, garalýan

(15) sistemanyň umumy çözüwi

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \quad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$$

görnüşde bolar.

4-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases} \tag{19}$$

sistemanyň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t}, \quad z = \gamma_3 e^{\lambda t} \tag{20}$$

görnüşde gözläris.

(20)-däki funksiýalary (19) sistemada goýup, alnan her bir deňligiň iki bölegini $e^{\lambda t}$-e gysgaldyp, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ näbellilere görä

$$\begin{cases} (1-\lambda)\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - \lambda\gamma_3 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

deňlemeler sistemasyny alarys. Onuň kesgitleýjisini nola deňläp, ýagny

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

görnüşli häsiýetlendiriji deňlemäni alarys. Deňlemäniň $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ kökleriniň her biri üçin (21) sistemany çözüp, (20)-däki formulalardan (19) sistemanyň üç hususy çözüwini kesgitläris: $\lambda_1 = 1$ sany (21)-de goýup,

$$\begin{cases} -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

sistemany alarys. Sistemanyň matrisasynyň rangy $r = 2$.

Bu ýerde γ_3-i erkin näbelli hasaplarys. Şonuň üçin $\gamma_3 = 1$ edip alsak, onda $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ bahalary taparys.

(19) sistemanyň birinji hususy çözüwi

$$x_1 = e^t, \quad y_1 = e^t, \quad z_1 = e^t$$

görnüşde bolar. $\lambda_2 = 2$ sany (21)-de goýup,

$$\begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

sistemany alarys. Onuň rangy $r = 2$. γ_3-i erkin näbelli hasaplarys. $\gamma_3 = 1$ edip alsak, onda bu sistemadan $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$ bahalary taparys. (19) sistemanyň ikinji hususy çözüwi

$$x_2 = e^{2t}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = e^{2t}$$

görnüşde bolar. $\lambda_3 = -1$ sany (21)-de goýup,

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

sistemany alarys. Bu sistemanyň hem rangy $r = 2$. Erkin näbellä derek γ_3-i alarys. $\gamma_3 = 1$ edip, soňky sistemadan

$$\gamma_1 = -\frac{1}{5}, \ \gamma_2 = \frac{3}{5}$$

bahalary alarys. Eger γ_1 we γ_2 näbellileriň bitin sanlar bolmagyny islenilse, onda soňky sistemadan

$$\gamma_1 = -\frac{\gamma_3}{5}, \quad \gamma_2 = \frac{3\gamma_3}{5}, \text{ bahalarda } \gamma_3 = -5$$

edilip alynsa, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3$ bolar.

Bu sanlary (20)-de goýup, (19) sistemanyň üçünji hususy çözüwini

$$x_3 = e^{-t}, \quad y_3 = -\, 3e^{-t}, \quad z_3 = -\, 5e^{-t}$$

görnüşde taparys. Şeýlelikde, tapylan hususy çözüwler

$$\begin{aligned} &x_1 = e^t, \quad y_1 = e^t, \quad z_1 = e^t; \\ &x_2 = e^{2t}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = e^{2t}; \\ &x_3 = e^{-t}, \quad y_3 = -\, 3e^{-t}, \quad z_3 = -\, 5e^{2t} \end{aligned}$$

garalýan sistemanyň fundamental sistemasyny emele getirýär.

Garalýan (19) sistemanyň umumy çözüwi

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{cases}$$

görnüşde bolar.

5-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases} \tag{22}$$

sistemanyň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. (22) sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t}, \quad z = \gamma_3 e^{\lambda t} \tag{23}$$

görnüşde gözläris. Bu funksiýalary (22)-de goýup, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ululyklara görä

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_3 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

sistemany alarys. Munuň nol däl çözüwini tapmak üçin onuň kesgitleýjisini nola deňläp,

$$(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$$

häsiýetlendiriji deňlemäni alarys. Onuň kökleri $\lambda_1=1, \lambda_2=1+2i, \lambda_3=1-2i$ sanlardyr. $\lambda_1=1$ köki (24)-de λ-nyň ornuna goýup,

$$-\gamma_2-\gamma_3=0,\ \gamma_1=0,\ 3\gamma_1=0$$

sistemadan $\gamma_1=0, \gamma_2=-\gamma_3$ bahalary taparys. Bu ýerde γ_3 erkin näbelli san. $\gamma_3=-1$ edip alarys. Onda $\gamma_1=0, \gamma_2=1$ bolar. $\lambda_1=1$, $\gamma_1=0, \gamma_2=1$ $\gamma_3=-1$ sanlary (23)-de goýup, (22) sistemanyň

$$x_1=0,\quad y_1=e^t,\quad z_1=-e^t \tag{25}$$

birinji hususy çözüwini alarys.

Ýokarda görkezilişi ýaly, (24)-de $\lambda_2=1+2i$ sany λ-nyň ornuna goýup,

$$-2i\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3=0,\ \gamma_1-2i\gamma_2=0,\ 3\gamma_1-2i\gamma_3=0$$

sistemany alarys. Sistemanyň ikinji deňlemesinden $\gamma_1=2i\gamma_2$ bahany soňky deňlemede goýup, $\gamma_3=3\gamma_2$ deňligi alarys. Bu ýerde γ_2-ni erkin san hasap ederis. $\gamma_2=1$ edip alarys. Onda $\gamma_1=2i, \gamma_3=3$ bolar. $\lambda_2=1+2i,\ \gamma_1=2i,\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=3$ sanlary (23)-de goýup,

$$x=2ie^{(1+2i)t},\quad y=e^{(1+2i)t},\quad z=3e^{(1+2i)t}$$

funksiýalary alarys.

Eýler formulasyny peýdalanyp, bulary

$$x=2ie^t(\cos 2t+i\sin 2t)$$
$$y=e^t(\cos 2t+i\sin 2t)$$
$$z=3e^t(\cos 2t+i\sin 2t)$$

ýa-da

$$x=2ie^t\cos 2t-2e^t\sin 2t$$
$$x=e^t\cos 2t+ie^t\sin 2t$$
$$z=3e^t\cos 2t+3ie^t\sin 2t$$

görnüşlerde ýazarys.

Bu ýerden olaryň hakyky we hyýaly böleklerini aýyl-saýyl edip,

$$\begin{cases} x_1 = -2e^t \sin 2t \\ y_1 = e^t \cos 2t \\ z_1 = 3e^t \cos 2t \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2e^t \cos 2t \\ y_2 = e^t \sin 2t \\ z_2 = 3e^t \sin 2t \end{cases} \tag{27}$$

funksiýalary alarys. Bular (22) sistemanyň iki hususy çözüwleri bolar. Şeýlelikde, (25), (26) we (27)-däki funksiýalar çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýändigine göz ýetirmek kyn däldir.

$\lambda_3 = 1 - 2i$ üçin (24) sistemadan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ululyklary kesgitlemegiň zerurlygy ýok, sebäbi eýýäm fundamental sistema alyndy.

Şeýlelikde, (22) sistemanyň umumy çözüwi

$$x = -2C_2 e^t \sin 2t + 2C_3 e^t \cos 2t$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t$$
$$z = -C_1 e^t + 3C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t$$

görnüşde tapylar.

6-njy mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z \end{cases} \tag{28}$$

sistemany çözmeli.

Çözülişi. (28) sistemanyň çözüwini

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t}, \quad z = \gamma_3 e^{\lambda t} \tag{29}$$

görnüşde gözläris.

(29)-y (28) sistemada goýup, iki bölegini $e^{\lambda t}$ köpeldijä gysgaldyp,

$$
\begin{cases}
-\lambda\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\
\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\
\gamma_2 + (1-\lambda)\gamma_3 = 0
\end{cases} \tag{30}
$$

sistemany alarys. Onuň

$$
\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ýa-da} \qquad \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0
$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ bolar. $\lambda_1 = 0$ bahany (30)-da goýup,

$$
\begin{cases}
\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\
\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\
\gamma_2 + \gamma_3 = 0
\end{cases}
$$

sistemany alarys. Sistemanyň rangy $r = 2$.

γ_3-i erkin näbelli hasaplarys. Bu ýerde $\gamma_3 = 1$ edip alsak, onda $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$ bolar. $\lambda_1 = 0$ we oňa degişli bahalary (29)-da goýup, (28) sistemanyň birinji hususy çözüwini $x_1 = 2,\ y_1 = -1,\ z_1 = 1$ görnüşde taparys.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ özara deň kökleriň bolanlygy üçin (28) sistemanyň beýleki hususy çözüwlerini

$$
\begin{aligned}
&x = e^t(a_1 t + a_2), \quad y = e^t(b_1 t + b_2), \\
&z = e^t(c_1 t + c_2)
\end{aligned} \tag{31}
$$

görnüşde gözläris. Bu ýerde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ näbelli ululyklar. Olaryň san bahalaryny kesgitlemek üçin (31) deňlemedäki aňlatmalary we olaryň önümlerini (28) sistemada goýup hem-de alnan deňlikleriň her biriniň iki bölegini e^t köpeldijä gysgaldyp,

$$
\begin{cases}
a_1 t + a_2 + a_1 = (b_1 + c_1)t + b_2 + c_2 \\
b_1 t + b_2 + b_1 = (a_1 + b_1 - c_1)t + a_2 + b_2 - c_2 \\
c_1 t + c_2 + c_1 = (b_1 + c_1)t + b_2 + c_2
\end{cases}
$$

görnüşli deňlikleri alarys.

Bu ýerden t-niň koeffisiýentlerini we azat agzalaryny deňläp,

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + c_1 \\ b_1 = a_1 + b_1 - c_1 \\ c_1 = b_1 + c_1 \\ a_2 + a_1 = b_2 + c_2 \\ b_2 + b_1 = a_2 + b_2 - c_2 \\ c_2 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases}$$

ýokarda agzalan näbellilere görä, deňlemeler sistemasyna geleris. Onda $b_1 = 0$, $a_1 = c_1$, $b_2 = c_1$, $a_2 = c_2$ bolar. Bu ýerde c_1 we c_2 hemişelikleri erkin sanlar hasaplalyň. Şonuň üçin $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ edip alsak, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ bolar. Onda $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $c_1 =1$, $c_2 = 0$ bahalary (31)-de goýup, (28) sistemanyň ikinji hususy çözüwini

$$x_2 = te^t, \quad y_2 = e^t, \quad z_2 = te^t$$

görnüşde taparys.

$c_1= 0$, $c_2 = 1$ edip alsak, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ bolar. Onda $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ bahalary (31)-de goýup (28) sistemanyň üçünji hususy çözüwini

$$x_3 = e^t, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = e^t$$

görnüşde taparys.

Tapylan hususy çözüwleriň Wronskiý kesgitleýjisi, ýagny

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ te^t & e^t & te^t \\ e^t & 0 & e^t \end{vmatrix} = 3e^{2t} \neq 0.$$

Diýmek, hususy çözüwleriň toplumy çözüwleriň fundamental sistemasyny emele getirýär. Şoňa görä-de (28) sistemanyň çözüwini

$$\begin{aligned} x &= 2C_1 + (C_2 t + C_3)e^t \\ y &= -C_1 + C_2 e^t \\ z &= C_1 + (C_2 t + C_3)e^t \end{aligned}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Üýtgeýän koeffisiýentli birjynsly däl çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözüwini tapmaklyga Lagranž usuly ulanylypdy. Şoňa laýyklykda hemişelik koeffisiýentli sistemalarynyň çözülişlerini şol usul bilen görkezeris.

7-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + tgt \end{cases} \tag{32}$$

sistemany çözmeli.

Çözülişi. Berlen sistema degişli

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \tag{33}$$

birjynsly deňlemeler sistemasynyň umumy çözüwini tapmaly. (33) görnüşli deňlemäni ikinji tertipli deňlemä getirmek amatly bolýar. Sistemanyň birinji deňlemesini differensirläp, $x'' = y'$ deňligi ikinjisinde goýsak, onda $x'' + x = 0$ deňlemä geleris. Onuň çözüwi $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ bolar. Muny differensirläp (33) sistemanyň birinji deňlemesinde goýsak, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$ funksiýany alarys. Şeýlelikde, (33) sistemanyň umumy çözüwini

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

görnüşde taparys. Garalýan sistemanyň çözüwini

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \end{cases} \tag{34}$$

görnüşde gözläris.

$C_1(t)$ we $C_2(t)$ funksiýalary kesgitlemek üçin (34)-däki funksiýalary (32)-de goýup,

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \mathrm{tg}^2 t - 1 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \mathrm{tg} t \end{cases}$$

görnüşli sistemany alarys. Bu ýerden alarys:

$$C_1'(t) = -\cos t, \quad C_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

Bulary integrirläp,

$$C_1(t) = C_1 - \sin t$$
$$C_2(t) = C_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t$$

deňlikleri alarys. C_1 we C_2 funksiýalaryň bahalaryny (34)-de goýup, (32) sistemanyň umumy çözüwini

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + tgt \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2 \end{cases}$$

görnüşde taparys, bu ýerde C_1 we C_2 hemişelik sanlar.

Gönükmeler

Deňlemeler sistemalaryny çözüň:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$,
$y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$,
$y = 2C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 8y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0 \end{cases}$

Jogaby:
$x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$,
$y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

Jogaby:
$x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$,
$y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

Jogaby:
$x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$,
$y = C_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) +$
$+ C_2(\sin 3t - 3 \cos 3t)$.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$

Jogaby:
$x = e^{3t}[(2C_1 + C_2)\sin 2t +$
$+ (C_1 - 2C_2)\cos 2t]$,
$y = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$

Jogaby:
$x = (C_1 + 3C_2 t)e^{2t}$,
$y = (C_2 - C_1 - 3C_2 t)e^{2t}$.

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - x \end{cases}$

Jogaby:
$x = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t$,
$y = (C_1 + C_2 t)e^t$.

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

Jogaby:
$x = (C_1 + C_2 t)e^t$,
$y = -(C_1 + C_2(1 + t))e^{2t}$.

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

Jogaby:
$x = (C_1 + C_2 t)e^t$,
$y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t$.

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 + 3C_2 e^{2t},$
$y = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t},$
$z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t}.$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t},$
$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t},$
$z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t],$
$y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t +$
$+(C_3 - C_2)\sin t],$
$z = C_1 e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t +$
$+(2C_3 + C_2)\sin t]$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 + C_2 e^{t},$
$y = 3C_1 + C_3 e^{t},$
$z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^{t}.$

Erkin hemişelikler wariasiýasy usuly boýunça çözüň:

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 1 \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t +$
$+\dfrac{t}{2}\cos t + 1,$
$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t -$
$-\dfrac{t}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t.$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \sin t \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t,$
$y = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2e^{2t},$
$y = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 5e^{2t}.$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t \\ x(0) = 1, y(0) = -2 \end{cases}$

Jogaby:
$x = (1 - t)\cos t - \sin t,$
$y = (t - 2)\cos t + t\sin t.$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

Jogaby:
$x = C_1 + 2C_2 e^{-t} +$
$+ 2e^{-t} \ln|e^t - 1|,$
$y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} -$
$-3e^{-t} \ln|e^t - 1|.$

VII bap

DURNUKLYLYK NAZARYÝETI BARADA

Differensial deňlemeleriň çözüwleriniň durnuklylyk nazaryýetiniň esasyny goýanlar rus matematigi A.M. Lýapunow we fransuz matematigi A.Puankare. Olar durnuklylyk meselesi boýunça bir döwürde işlän alymlar. Çözüwiň durnuklylyk düşünjesi Lýapunow tarapyndan girizilipdir. Şonuň üçin hem çözüwiň durnuklylygy Lýapunow manysynda ulanylýar.

XIX asyryň ahyrynda Lýapunow differensial deňlemeler sistemasynyň çözüwiniň durnuklylygyny derňemekligiň umumy usulyny işläp taýýarlapdyr. Onuň bu ugurda alan ylmy netijeleri differensial deňlemeler nazaryýetiniň ösmegine hem-de dürli fiziki we mehaniki sistemalaryň yrgyldylaryny öwrenmeklige itergi bolupdyr.

Lýapunowyň ylmy işlerine çenli çözüwiň durnuklylygy meselesi diňe birinji ýakynlaşma atlandyrylýan sistema boýunça çözülipdir (kesgitlenipdir), ýagny deňlemeleriň çyzykly däl agzalarynyň hemmesi taşlanylypdyr, üstesine-de onuň şeýle edilmeginiň kanunylygy aýdyňlaşdyrylmandyr. Şeýlelikde, nädogry netijelere gelnipdir. Durnuklylyk baradaky meseläniň birinji ýakynlaşma boýunça çözüp bolýanlygynyň şertini Lýapunow takyk anyklapdyr. Lýapunowyň ylmy taglymatlary öz ähmiýetini şu wagta çenli saklady we häzirki döwürdäki durnuklylyk meseleleriniň derňewlerinde giňden ulanylýar.

§1. Durnuklylyk düşünjesi. Birinji ýakynlaşma boýunça çözüwiň durnuklylygynyň derňelişi. Lýapunowyň funksiýasy

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \quad (i = 1, ..., n) \tag{1}$$

sistema garalyň, bu ýerde t – bagly däl üýtgeýän ululyk, $x_1,...,x_n$ – gözlenilýän funksiýalar, f_i – koordinatalar başlangyjynyň etrabynda differensirlenýän funksiýalar, $f_i(t,0,...,0) \equiv 0$. t argumente wagt ýaly garalýar, (1) sistemanyň her bir hususy çözüwine hereket diýilýär.

Goý, $f_i(t,x_1,...,x_n)$ funksiýalar üznüksiz we olaryň $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i,j = 1,...,n)$ üznüksiz hususy önümleri bar bolsun, bu ýerde $t_0 \le t < \infty$, D bolsa $x_1,...,x_n$ üýtgeýänler giňişliginiň çäkli oblasty. Onda (1) sistemanyň $\varphi_i(t_0) = x_i^0$ $(i = 1,...,n)$ başlangyç, şertleri kanagatlandyrýan $x = \varphi_i(t)$ ýeke-täk çözüwi bardyr.

Kesgitleme. Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bar bolup, (1) sistemanyň her bir $x_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ çözüwiniň başlangyç bahalary üçin $|\overline{x}_i^0 - x_i^0| < \delta$ deňsizlikler ýerine ýetende, t-niň $[t_0,\infty)$ ýarym kesimdäki hemme bahalarynda

$$|\psi_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$$

deňsizlikler ýerine ýetse, $x_i = \varphi_i(t)$ $(i =,...,n)$ çözüwe (1) sistemanyň Lýapunowyň manysynda durnukly çözüwi diýilýär, bu ýerde $x_i = \psi_i(t)$ (1) sistemanyň $\psi_i(t_0) = \overline{x}_i^0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi.

Eger $x_i = \varphi_i(t)$ çözüw (1) sistemanyň durnukly çözüwi bolmasa, onda oňa durnuksyz çözüwi diýilýär.

Eger $x_i = \varphi_i(t)$ funksiýa (1) sistemanyň durnukly çözüwi bolmagyndan başga

$$\lim_{t\to\infty}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)| = 0 \tag{2}$$

şerti kanagatlandyrsa, oňa (1) sistemanyň asimptotik durnukly çözüwi diýilýär.

(1) sistemanyň nol däl çözüwiniň durnuklylygynyň derňelişini öwürme arkaly alnan nol çözüwli sistemanyň çözüwiniň durnuklylygynyň derňelişine getirmek bolýar.

Goý, $x_i = \varphi_i(t)\,(i = 1,...,n)$ (1) sistemanyň durnuklylyga derňelýän çözüwi, $x_i = \psi_i(t)$ ol sistemanyň erkin çözüwi bolsun. Getirilmeli nol çözüwli sistemanyň bolmaklygy üçin $\psi_i(t) - \varphi_i(t) = u_i(t)$ çalşyrmany edeliň. Onda $u_1(t)$ $(i = 1,...,n)$ täze gözlenilýän funksiýalar bolar.

Ýokardaky deňlikleri differensirläp,

$$\frac{d\psi_i}{dt} - \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{du_i}{dt}$$

ýa-da

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t,\psi_1,...,\psi_n) - f_i(t,\varphi_1,...,\varphi_n) =$$
$$= f_i(t,\varphi_1 + u_1,...,\varphi_n,...,u_n) - f_i(t,\varphi_1,...,\varphi_n)$$

görnüşli deňlikleri alarys.

Soňky tapawudy $F_i(t,u_1,...,u_n)$ bilen belgilesek, onda başdaky (1) sistema

$$\frac{du_i}{dt} = F_i(t,u_i,...,u_n), \quad (i = 1,...,n) \tag{3}$$

görnüşi alar. Bu sistemadaky gözlenilýän funksiýalaryň orunlaryna nol goýsak, onda (3) sistema $0 \equiv 0$ toždestwo öwrüler.

Diýmek, $u(t) = 0$ $(i = 1,...,n)$ (3) sistemanyň çözüwi. Şeýlelikde, (1) sistemanyň $x_i = \varphi_i(t)$ çözüwiniň durnuklylygynyň derňelişi (3) sistemanyň $u_i(t) = 0$ çözüwiniň durnuklylygynyň derňelişine getirildi. Şoňa görä-de (1) sistema (3) görnüşe getirilen diýip hasap edeliň (düşüneliň) hem-de onuň $u_i(t) \equiv 0$ çözüwiniň durnuklylyk ýagdaýyna garalyň. Ýokarda getirilen kesgitlemäni (3) sistema üçin aşakdaky görnüşde ýazalyň.

Kesgitleme. Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bar bolup $|u_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)\,(i = 1,2,...,n)$ deňsizlikler ýerine ýetende, t-niň $[t_0,\infty)$ ýarym kesimdäki hemme bahalary üçin $|u_i(t)| < \varepsilon\,(i = 1,2,...,n)$

deňsizlikler ýerine ýetse, onda $u_i(t) \equiv 0$ çözüwe (3) sistemanyň Lýapunow manysynda durnukly çözüwi diýilýär.
Mundan başga-da

$$\lim_{t \to \infty} |u_i(t)| = 0, (i = 1, 2, ..., n)$$

bolsa, $u_i(t) \equiv 0$ çözüwe (3) sistemanyň asimptotik durnukly cözüwi diýilýär.

(1) sistemany

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \nu_i(t, x_1, ..., x_n) \tag{4}$$

görnüşe getirmek bolýar, bu ýerde

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(t, 0, ..., 0)}{\partial x_i}, \ (i, j = 1, ..., n)$$

koeffisiýentler hemişelik sanlar, ν_i funksiýalar $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ nokadyň etrabynda $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ bilen deňeşdirilende tertibi birden ýokary tükeniksiz kiçi ululyklar.

(1) sistemanyň (4) görnüşli sistema getirmek üçin, ol sistemanyň sag bölegini koordinatalar başlangyjynyň etrabynda Teýlor hataryna dagytmaly. Soňra alnan sistemada emele gelen çyzykly däl agzalary taşlap,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ (i = 1, ..., n) \tag{5}$$

görnüşli çyzykly sistemany alarys. (5) sistema (1) sistemanyň birinji ýakynlaşmasy diýilýär. Mälim bolşy ýaly, (5) birjynsly deňlemeler sistemasy. Onuň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda .... a_{2n} \\ ... & \\ a_{n1} & a_{n2} \ \ a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

λ görä n derejeli algebraik deňlemedir.

Goý, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sanlar onuň kökleri bolsun. (4) sistemanyň nol çözüwiniň durnuklylygyny görkezýän ýeterlik şertleri özünde saklaýan birnäçe teoremalaryň subutlarynyň üstünde durmazdan, olaryň şertlerini mysallarda barlap görmegi makul bildik.

1-nji teorema.

Eger (6) häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň hemmesi otrisatel sanlar bolsa,

$$\nu_i(t, x_1, ..., x_n), (i = 1, 2, ..., n)$$

funksiýalaryň hemmesi

$$\begin{gathered} |v_i(t, x_1, ..., x_n)| \leq Mr^{1+\alpha}, \\ (i = 1, 2, ..., n) \end{gathered} \tag{7}$$

şerti kanagatlandyrsa, onda (4) sistemanyň nol çözüwi durnukly, bu ýerde $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, \alpha > 0$, M – hemişelikler.

2-nji teorema.

Eger (6) häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň hemmesiniň hakyky bölekleri otrisatel sanlar bolsa we $v_i(t, x_1, ..., x_n), (i = 1, 2, ..., n)$ funksiýalaryň hemmesi (7) şerti kanagatlandyrsa, onda (4) sistemanyň nol çözüwi durnukly.

3-nji teorema.

Eger (6) häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň iň bolmanda biriniň hakyky bölegi položitel san bolsa we $v_i(t, x_1, ..., x_n), (i = 1, 2, ..., n)$ funksiýalaryň hemmesi (7) şerti kanagatlandyrsa, onda (4) sistemanyň nol çözüwi durnuksyz.

1-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy - x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$$

sistemanyň nol çözüwiniň durnuklylygyny derňemeli.

Çözülişi. $x = 0, y = 0$ garalýan sistemanyň çözüwidigini görýäris.

Sistemany

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + v_1(t,x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 3y + v_2(t,x,y) \tag{8}$$

görnüşde ýazarys:

$$v_1 = 2xy, \quad v_2 = 5x^4 + y^3$$

(8) sistemanyň çyzykly däl bölekleridir.
Onda garalýan sistema üçin birinji ýakynlaşma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$$

görnüşde bolar. Munuň

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ýa-da} \qquad \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$$

otrisatel sanlar. Şeýlelikde, 1-nji teoremanyň ilkinji şerti ýerine ýetýär.

Teoremanyň soňky şertini derňemek üçin v_1 we v_2 funksiýalary bahalandyralyň. x we y-i polýar koordinatalar sistemasy arkaly aňladarys: $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, bu ýerde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Onda

$$|v_1| = |2xy| = \mathrm{r}^2|2\cos\varphi\sin\varphi| = r^2|\sin 2\varphi| \le r^2 \cdot 1, |v_1| \le r^{1+1} \cdot 1,$$

bu ýerde $\alpha = 1, M = 1$.

$$|v_2| = |5x^4 + y^3| = |5x^4 + |y^3|| \le |x^2 + y^2| =$$
$$= r^2|\cos^2\varphi + \sin^2\varphi| = r^2 \cdot 1, |v_2| \le r^{1+1} \cdot 1,$$

bu ýerde hem $\alpha = 1, M = 1$.
Şeýlelikde, 1-nji teoremanyň şertleri ýerine ýetýär.

Diýmek, garalýan sistemanyň nol çözüwi durnukly.

2-nji mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8\sin y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 - e^e - 3y - \cos y \end{cases}$$

sistemanyň $x = 0$, $y = 0$ nol çözüwiniň durnuklylygyny derňemeli.

Çözülişi.

Sistemadaky $\sin y$, e^x, $\cos y$ çyzykly däl funksiýalary Makloren formulasy boýunça dagydyp, ýagny

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - ...,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...,$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - ...,$$

aňlatmalary garalýan sistemada orunlaryna goýup,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8\left(y - \dfrac{y^3}{3!} + \dfrac{y^5}{5!} - ..\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ...\right) - 3y - \left(1 - \dfrac{y^2}{2!} + \dfrac{y^4}{4!} - ...\right) \end{cases}$$

görnüşli sistemany alarys.

Soňky sistemanyň çyzykly däl agzalaryny v_1 we v_2 bilen belgiläp, ony

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y + v_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = - x - 3y + v_2 \end{cases}$$

görnüşde ýazarys.

Bu ýerden garalýan sistema üçin

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y,$$

$$\frac{dy}{dt} = - x - 3y$$

birinji ýakynlaşma sistemany alarys.

Munuň

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ýa-da} \quad \lambda^2 + \lambda + 3 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesiniň

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

kökleriniň hakyky bölekleri otrisatel sanlar. Diýmek, 2-nji teoremanyň birinji şerti ýerine ýetýär.
v_1 we v_2 çyzykly däl bölekler koordinatalar başlangyjynyň etrabynda. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ görä tertibi birden ýokary tükeniksiz kiçi ululyklar.
v_1 we v_2 ululyklar bahalandyrylanda

$$|v_1| \le \frac{1}{15} r^5 = M, r^{1+4},$$

$$M_1 = \frac{1}{15}, \ \alpha = 4 \ (x^2 + y^2 \le 1)$$

$$|\nu_2| \le \frac{(e+1)}{2} r^2, \quad M_2 = \frac{e+1}{2}, \ \alpha = 1$$

deňsizlikler alyndy.
Garalýan sistemanyň $x = 0$, $y = 0$ çözüwi durnukly.

Çözüwiň durnuklylygyny derňemegiň ýene bir usulyna Lýapunowyň funksiýalar usuly (ýa-da Lýapunowyň ikinji usuly) diýilýär. Bu usulyň öňki usula garalanda käbir artykmaçlygy bar. Ol hem garalýan sistemanyň çözüwini tapmazdan, onuň durnuklylygyny derňemek bolýar. Ýöne bu usuly ulanmak aňsat däl, sebäbi Lýapunowyň $v(x_1,...,x_n)$ funksiýasyny $x_1,...,x_n$ ululyklaryň dürli ýa-da deň derejeli köpagzalaryň jemi görnüşinde gözlemeli bolýar. $v(x_1,...,x_n)$ funksiýany gurmagyň umumy usulynyň ýoklugy belli. Ýöne onuň aşakdaky

$$v(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2,$$

$$v(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^4,$$

$$v(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^2, \quad (a > 0, b > 0)$$

görnüşlerde gözlenilýänligi mälim.

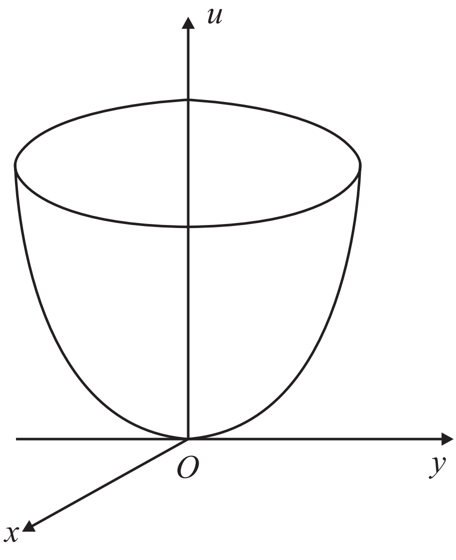
Kähalatlarda v funksiýanyň

$$v=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_ix_j,\qquad a_{ij}=a_{ji}$$

kwadratik forma görnüşinde gözlenilýändigini hem-de onuň çözgüdine bolan şertleri käbir ýazarlar öz gollanmalarynda belleýärler.

Goý, $v(x_1,...,x_n)$ funksiýanyň koordinatalar başlangyjyny özünde saklaýan D oblastda üznüksiz we üznüksiz hususy önümleri bar bolsun.

Kesgitleme. Eger D oblastda $v(x_1,...,x_n)\geq 0$ we $x_1=...=x_n=0$ bahada $v(x_1,...,x_n)=0$ bolsa, onda $v(x_1,...,x_n)$ funksiýa şol oblastda položitel kesgitlenen funksiýa diýilýär. Bu kesgitleme üçin $v=x_1^2+...+x_n^2$ funksiýa mysal bolup biler, sebäbi ol $x_1=...=x_n=0$ nokadyň islendik etrabynda položitel kesgitlenen. $n=2$ bolan ýagdaýda $v=x_1^2+x_2^2$ funksiýa $(x_1,\ x_2)$ tekizligiň koordinatalar başlangyjynda galtaşýan paraboloid aýlanmasyny emele getirýär (*1-nji surat*). Onuň beýleki nokatlary ol tekizlikden ýokarda ýatýarlar. Bize mälim bolşy ýaly, v funksiýanyň dereje çyzyklary $x_1^2+x_2^2=C\quad(C\geq 0)$ töwereklerdir. Bu ýerden görnüşi ýaly, $x_1^2+x_2^2=C$ ýapyk egriler. Bular $C\to+0$ bolanda (0,0) nokada dartylýarlar.



1-nji surat

Çözüwiň durnuklylygyny derňemek üçin ulanyljak $v(x_1,...,x_n)$ funksiýa Lýapunowyň funksiýasy diýilýär.

Indi (1) sistemanyň nol çözüwiniň durnuklylygyny derňemäge degişli teoremany getireliň.

4-nji teorema.

Eger $v(x_1,...,x_n)$ differensirlenýän funksiýa D oblastda

1) $v(x_1,...,x_n) \geq 0$ we $v(0,...,0) = 0$

2) $v(x_1,...,x_n)$ funksiýanyň doly önümi bolup,

3) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, ..., x_n) \leq 0, t_0 \leq t$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda (1) sistemanyň $x_i(t) = 0$ çözüwi Lýapunowyň manysynda durnukly.

Eger $v(x_1,...,x_n)$ funksiýa teoremadaky görkezilen şertlerden başga

$$\frac{dv}{dt} \leq -\omega(x_1, ..., x_n) < 0, t_0 \leq t$$

deňsizligi kanagatlandyrsa, onda (1) sistemanyň $x_i(t) = 0$ çözüwi asimptotik durnukly, bu ýerde $\omega(x_1, ..., x_n)$ D oblastda $\omega(x_1, ..., x_n) \geq 0$ üznüksiz, $x_1 = 0,...,x_n = 0$ nokatda nola öwrülýän funksiýa. Bu ýerde bir zady bellemek gerek. Ol hem teoremadaky $\frac{dv}{dt}$ önüm düzülende $\frac{dx_i}{dt}(i = 1, ..., n)$ önümleri garalýan (1) sistemanyň sag bölegindäki $f_i\ (x_1,...,x_n)$ $(i = 1,2,...,n)$ funksiýalar bilen çalşyrylmalydygy ünsden düşürilmeli däldir.

Ýokarda agzalan teoremanyň $v = v\ (t, x_1,...,x_n)$ görnüşli funksiýa üçin hem dogrulygyny Lýapunow öz işinde subut edenligi mälimdir. Onuň üçin ol teoremanyň birinji şertiniň ýerine koordinatalar başlangyjynyň etrabynda $(t \leq t_0)$

$$v(t, x_1, ..., x_n) \geq \omega(x_1, ..., x_n) > 0$$

şert bilen çalşyrylmalydygy aýdylýar, bu ýerde ω – üznüksiz funksiýa, koordinatalar başlangyjynda

$$v(t, 0, ..., 0) = \omega(0, ..., 0) = 0$$

Ikinji şert öňküligine galýar, ýagny $\frac{dv}{dt} \le 0$, ýöne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, ..., x_n)$$

görnüşde bolýar.

3-nji mysal.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = yx^2 \end{cases}$$

sistemanyň çözüwiniň durnuklylygyny anyklamaly.

Çözülişi.

Garalýan sistema üçin $v = 2x^2 + y^2$ funksiýany alalyň. Bu položitel kesgitlenen funksiýadyr, ýagny

$$v(x, y) \ge 0, v(0, 0) = 0.$$

Onuň önümi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{\partial x}(-xy^2) + \frac{\partial v}{\partial y}(yx^2)$$

$$= 4x(-xy^2) + 2y(yx^2) = -4x^2y^2 + 2y^2x^2 = -2x^2y^2.$$

$x \ne 0, y \ne 0$ bolanda

$$\frac{dv}{dt} < 0 \frac{dv(x, 0)}{dt} = 0, \quad \frac{dv(0, y)}{dt} = 0$$

Diýmek, garalýan sistemanyň $x = 0$, $y = 0$ çözüwi durnukly.

4-nji mysal.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3 \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3 \end{cases}$$

sistemanyň çözüwiniň durnuklylygyny derňemeli.

Çözülişi.

Goý, $v = x^2 + y^2$ görnüşde berlen bolsun.

Onda

$$v(x,y) \geq 0, \;\; v(0,0) = 0.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) =$$

$$= -4x^4 - 6y^4 = -(4x^4 + 6y^4) \leqslant 0.$$

Diýmek, $x = 0$, $y = 0$ çözüw asimptotik durnukly.

Gönükmeler

Lýapunowyň birinji ýakynlaşma usuly boýunça sistemalaryň nol çözüwleriniň durnuklylygyny derňäň:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$ *jogaby:* durnukly.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 7y \end{cases}$ *jogaby:* asimptotik durnukly.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}$ *jogaby:* durnuksyz.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sin x + 3y + x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3 \end{cases}$ *jogaby:* durnukly.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2e^x + 5y - 2 + x^4 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 6\cos y - 6 - y^2 \end{cases}$ *jogaby:* durnuksyz.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4\sin x + \ln(1+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + x^2 y \end{cases}$ *jogaby:* durnuksyz.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8y} - 2e^{y} \end{cases}$ *jogaby:* durnuksyz.

Lýapunowyň funksiýasy usuly boýunça sistemalaryň nol çözüwleriniň durnuklylygyny anyklamaly:

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \dfrac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}$ $v = x^4 + y^4$ Lýapunowyň funksiýasy.

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 7y^3 \end{cases}$ $v = x^2 + y^2$ Lýapunowyň funksiýasy.

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases}$ $v = x^2 + y^2$ Lýapunowyň funksiýasy.

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2) \end{cases}$ $v = x^2 + 2y^2$

Lýapunowyň funksiýasy.

§2. Wagta garaşly bolmadyk iki deňlemeli sistema

Sistemany

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

görnüşde ýazarys.

(1) sistemanyň sag bölegi t argumenti anyk görnüşde saklamaýanlygyny görýäris. (1) görnüşli sistema awtonom sistema diýilýär. $f_1(x,y)$ we $f_2(x,y)$ xOy tekizligiň kesgitli D oblastynda differensirlenýän üznüksiz funksiýalar. Eger (1) sistemanyň sag bölegi $x = x_0$, $y = y_0$ bahalarda nola öwrülse, ýagny $f_1(x_0,y_0) = f_2(x_0,y_0) = 0$ bolsa, onda M (x_0, y_0) nokada (1) sistemanyň asuda (rahat) nokady diýilýär.

Eger (1) sistemanyň sag bölegi x we y-e görä çyzykly funksiýalar bolsa, onda (1) sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (2)$$

görnüşi alar, bu ýerde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \; a_{ij}(i,j = 1,2)$$

koeffisiýentler hemişelik sanlar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, $x = 0$, $y = 0$ (2) sistema üçin asuda nokatdyr. Ony M (0,0) bilen belgiläliň. Bu nokadyň etrabynda (2) sistemanyň çözüwiniň grafiginiň (traýektoriýasynyň) ýerleşişine gararys. Mälim bolşy ýaly, (2) sistemanyň çözüwiniň görnüşleri häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň görnüşlerine baglydyr. Şonuň üçin (2) sistemanyň häsiýetlendiriji deňlemesini

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

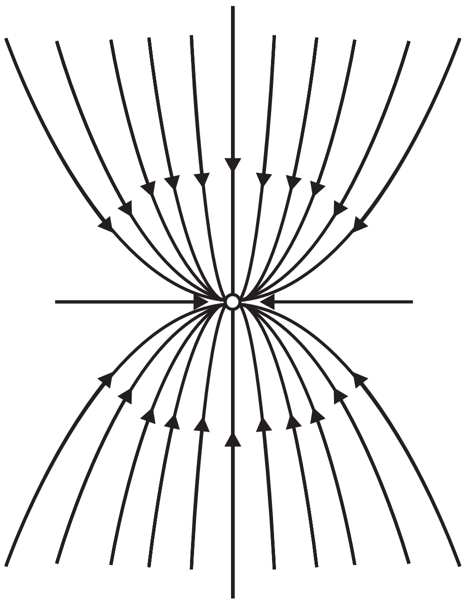
görnüşde ýazarys. Munuň köklerini λ_1 we λ_2 bilen belgiläris.

(2) sistemanyň umumy çözüwini bu kökleriň görnüşlerine baglylykda taparys.

1. Goý, λ_1 we λ_2 hakyky we dürli sanlar bolsun. Onda (2) sistemanyň umumy çözüwi

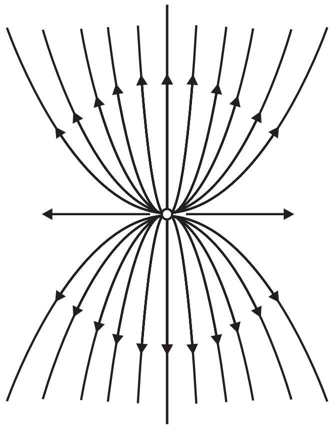
$$\begin{cases} x = C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_{21}e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1\gamma_{12}e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{3}$$

görnüşde bolar, bu ýerde $\gamma_{ij}(i,j = 1,2)$ – hemişelik sanlar, C_1, C_2 – erkin hemişelikler. Eger $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ bolsa, onda $x = 0$, $y = 0$ asuda nokat asimptotik durnukly, sebäbi $t \to \infty$ bolanda $x \to 0, y \to 0$. Bu ýagdaýda $M(0,0)$ nokada *durnukly düwün nokady* diýilýär (*2-nji surat*).



2-nji surat

Goý, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Eger $t \to -\infty$, bolsa, onda sistemanyň traýektoriýasy öňki ýaly, ýöne nokatlar traýektoriýa boýunça öňküniň tersine hereket edýärler. Bu ýagdaýda $M(0,0)$ nokada *durnuksyz düwün* nokady diýilýär (*3-nji surat*). Suratda peýkamlar t-niň artmagy bilen nokadyň traýektoriýa boýunça hereketiniň ugruny görkezýär.



3-nji surat

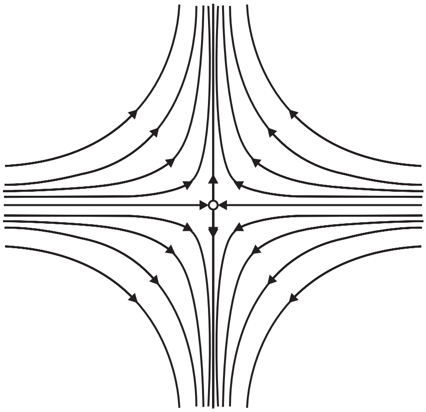
2. Eger $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ (ýa-da $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$) bolsa, onda asuda nokat durnuksyz, sebäbi bu ýerde $t \to \infty$ bolanda, $e^{\lambda_2 t} \to \infty$ bolýar. (3)-den $C_1 = 0$ bolanda

$$x = C_2 \gamma_{21} e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2 \gamma_{22} e^{\lambda_2 t}$$

traýektoriýa boýunça koordinatalar başlangyjynyň etrabyndaky nokatlar tükeniksizlige tarap gidýärler. $C_2 = 0$ bolan ýagdaýda $t \to \infty$ bolanda

$$x = C_1 \gamma_{11} e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1 \gamma_{12} e^{\lambda_1 t}$$

traýektoriýa boýunça nokatlaryň hereketi koordinatalar başlangyjyna (asuda nokada) tarap bolýar. Bu ýagdaýda $M(0,0)$ nokada *eýer* diýilýär (*4-nji surat*).

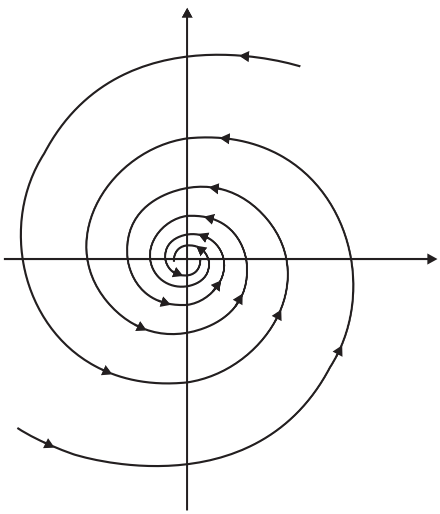


4-nji surat

3. Goý, $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ bolsun. Bu köklere degişli (2) sistemanyň umumy çözüwi

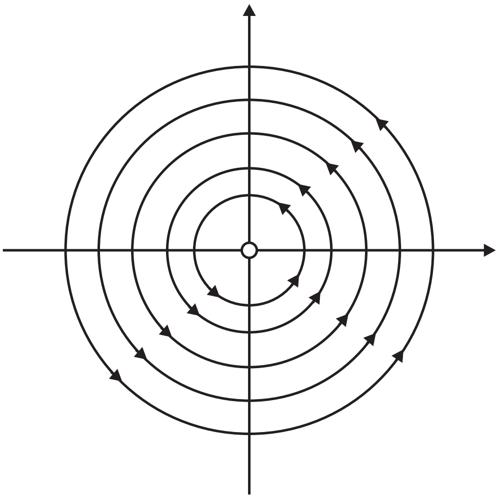
$$\begin{cases} x = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \\ y = e^{\alpha t}(\overline{C_1} \cos \beta t + \overline{C_2} \sin \beta t) \end{cases}$$

görnüşde tapylýar, bu ýerde $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ sanlar C_1 we C_2 sanlaryň jemi ýa-da tapawudy. Eger $\alpha < 0, t \to \infty$ bolsa, onda $e^{\alpha t} \to 0$, ýaýlardaky aňlatmalar çäkli. Şeýlelikde, $x \to 0, y \to 0$. Bu ýagdaýda $M(0,0)$ nokada durnukly fokus diýilýär (*5-nji surat*). Sistemanyň traýektoriýasy spirala öwrülýär. Eger $\alpha > 0, t \to -\infty$ bolsa, onda $x \to 0, y \to 0$. Ýene öňki traýektoriýa, ýöne t-niň artmagy bilen hereket onuň tersine bolýar, ýagny koordinatalar başlangyjyndan daşlaşýar. $M(0,0)$ nokada *durnuksyz fokus* diýilýär.



5-nji surat

4. Eger $\alpha = 0$ bolsa, onda $\lambda_1 = +\beta i$, $\lambda_2 = -\beta i$ bolar. Bu ýagdaýda $M(0,0)$ nokady gurşap alan ýapyk traýektoriýalar (egriler) emele gelýär. $M(0,0)$ nokada *merkez* diýilýär (*6-njy surat*).



6-njy surat

Bu nokat asimptotik durnuksyz, sebäbi $t \to \infty$ ýagdaýy üçin

$$\begin{cases} x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \\ y = \overline{C_1} \cos \beta t + \overline{C_2} \sin \beta t \end{cases}$$

çözüw nola ymtylmaýar.

5. $\lambda_1 = \lambda_2$ bolanda (2) sistemanyň umumy çözüwi

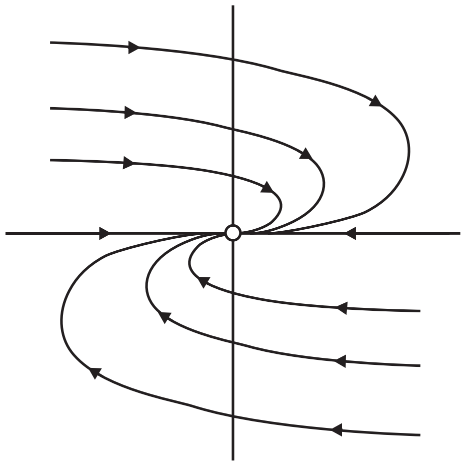
$$x = (C_1 \gamma_{11} + C_2 \gamma_{12} t) e^{\lambda_1 t}$$
$$y + (C_1 \gamma_{21} + C_2 \gamma_{22} t) e^{\lambda_2 t}$$

görnüşde tapylýar.

Eger $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ we $t \to \infty$ bolanda $x \to 0, \quad y \to 0$, sebäbi

$$\lim_{t \to \infty} (C_1 \gamma_{11} + C_2 \gamma_{12} t) e^{\lambda_1 t} = 0$$
$$\lim_{t \to \infty} (C_1 \gamma_{21} + C_2 \gamma_{22} t) e^{\lambda_2 t} = 0$$

M (0,0) nokat asimptotik durnukly. Bu nokada *durnukly düwün nokady* diýilýär. Eger $\gamma_{12} = \gamma_{22} = 0$ bolsa, onda oňa *durnukly düwün* diýilýär (*7-nji surat*).



7-nji surat

Eger $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ bolanda t-ni $-\,t$ çalşyryp, öňki ýagdaýa gelner. Ýöne nokadyň hereketiniň ugry traýektoriýa boýunça tersine bolar. Bu ýagdaýda asuda nokada *durnuksyz düwün nokady* diýilýär.

Mysal.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\,6x - 5y \end{cases}$$

sistemanyň asuda nokadynyň adyny anyklamaly.

Çözülişi.

Garalýan sistema üçin $M(0,0)$ asuda nokat. Onuň adyny anyklamak üçin sistemanyň häsiýetlendiriji deňlemesini

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

görnüşde ýazalyň. Onuň kökleri $\lambda_1 = -\,2 + 3i$, $\lambda^2 = -\,2 - 3i$ bolar. Diýmek, sistema durnukly fokusa eýe.

Gönükmeler

Sistemalaryň asuda nokatlarynyň atlaryny anyklamaly.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = - 2x + y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = - x + y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - 2x + \dfrac{5}{7}y \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x - 3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$

VIII bap

BIRINJI TERTIPLI HUSUSY ÖNÜMLI DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

Bu bapda ady differensial deňlemelere getirilýän deňlemelere, ýagny çyzykly we kwaziçyzykly hususy önümli deňlemelere degişli düşünjeleri bereris hem-de deňlemeleriň çözüliş usullaryny beýan ederis.

§1. Birjynsly çyzykly deňlemeler

$$P_1(x_1,...x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1,....,x_n) = 0 \tag{1}$$

görnüşli deňlemä birjynsly çyzykly hususy önümli deňleme diýilýär, bu ýerde $x_1,........x_n$ bagly däl üýtgeýän ululyklar, $u = u(x_1,....x_n)$ gözlenilýän funksiýa, $P_i(x_1,...,x_n)$, $(i = 1,....n)$ koeffisiýentler käbir $(x_1^0,.....x_n^0) \in D \in R^n$ nokatlaryň etrabynda hemme argumentleri boýunça üznüksiz we üznüksiz hususy önümleri bar bolan, hem-de şol bir wagtda bu nokatda nola öwrülmeýän funksiýalardyr, ýagny

$$\sum_{i-1}^{n} P_i(x_1,....,x_n) > 0$$

(1) deňlemäniň çözüwini tapmaklyk meselesi

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,...x_n)} = ... = \frac{dx}{P_n(x_1,...x_n)} \tag{2}$$

ady differensial deňlemeler sistemasynyň çözüwiniň tapmaklygyna getirilýär.

Eger $\varphi(x_1,....,x_n)$ differensirlenýän funksiýa (2) sistemanyň çözüwi bolsa, onda $u = \varphi(x_1,....x_n)$ funksiýa (1) deňlemäniň çözüwidir we tersine. (2)-ä simmetrik görnüşli sistema diýilýär. (2) deňlemeler sistemasyna (1) hususy önümli deňlemäniň häsiýetlendiriji sistemasy diýilýär. (2) sistemanyň her bir çözüwine (1) deňlemäniň häsiýetlendirijileri ýa-da häsiýetlendiriji egrileri diýilýär.

Eger D oblastda (2) sistemanyň bagly däl çözüwleri

$$\varphi_1(x_1,....,x_n) = C_1,....,\varphi_{n-1}(x_1,....,x_n) = C_{n-1} \tag{3}$$

görnüşde tapylan bolsa, onda (1) sistemanyň umumy çözüwi $u = \Phi(\varphi_1,....,\varphi_{n-1})$ görnüşde bolar (tapylar), bu ýerde Φ – erkin differensirlenýän funksiýa. Bu çözüw özünde islendik hususy çözüwi saklaýar.

(3)-däki çözüwleriň her birine (2) sistemanyň birinji integraly diýilýär. Olaryň çep bölegindäki $\varphi_1,....,\varphi_{n-1}$ funksiýalar (1) deňlemäniň çözüwleridir.

Indi (1) deňleme üçin Koşi meselesini kesgitläliň.

Kesgitleme. (1) deňlemäniň

$$u(x_1,....,x_{n-1},x_n^0) = \varphi(x_1,.....,x_{n-1})$$

şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk meselesine Koşi meselesi diýilýär. Bu ýerde x_n^0 – berlen san, $\varphi(x_1,....,x_{n-1})$ berlen differensirlenýän funksiýa.

Eger deňleme

$$P_1(x_1,.....,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1,....,x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = f(x_1,....,x_n)$$

görnüşde berlen bolsa, onda onuň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$\frac{dx_1}{P_1} = ... = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{f}$$

görnüşde ýazylar. Bu görnüşli hususy önümli deňlemä birjynsly däl çyzykly deňleme diýilýär.

Ýokarda getirilen düşünjeleriň we käbir umumy tassyklamalaryň çözgütleriniň beýanynyň düşünilmesi ýönekeý (aňsat) bolar ýaly, hem-

-de birnäçe aňlatmalaryň gelip çykyşyny ýönekeýleşdirilen görnüşde öwrenmek maksady bilen (1) deňlemäni iki we üç argumentli gözlenilýän funksiýalar üçin garamaklygy makul bildik. Sebäbi olara degişli mysallary we meseleleri özbaşdak çözmäge okyjylaryň (talyplaryň) endiklerini artdyrar diýen niýet göz öňünde tutuldy.

(1) deňlemäni iki argumentli gözlenilýän funksiýa üçin

$$P_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + P_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerde $P_1(x,y), P_2(x,y)$ koeffisiýentler D oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolan we şol bir wagtda nola öwrülmeýän funksiýalar, ýagny

$$P_1^2(x,y) + P_2^2(x,y) \neq 0.$$

Differensirlenýän $u = \varphi(x,y)$ funksiýa (4) deňlemäni toždestwo öwürýän, ýagny

$$P_1(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_2(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0$$

bolsa, onda oňa (4) deňlemäniň çözüwi diýilýär. Bu çözüw üç ölçegli giňişlikde üsti kesgitleýär. Oňa *integral üst* diýilýär.

(4) deňleme üçin Koşi meselesini kesgitläliň.
(4) deňlemäniň

$$u(x_0 y) = \varphi(y) \tag{5}$$

deňligi kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk meselesine Koşi meselesi diýilýär. (5) deňlige başlangyç şert diýilýär. Ony $x = x_0$, $u = \varphi(y)$ görnüşde hem ýazmak bolar. Ol deňlik tekizlikde egri çyzygy kesgitleýär. Başgaça aýdylanda, Koşi meselesi (4) deňlemäniň berlen (5) egri çyzykdan geçýän $u = \varphi(x,y)$ integral üsti kesgitlemeli diýildigidir. (5) deňligiň ýerine $u(x,y_0) = \varphi(x)$ şerti hem almak bolýar. Onda ol (4) deňleme üçin başga görnüşli Koşi meselesini emele getirýär.

Indi (4) deňlemäniň

$$\frac{dx}{P_1(x,y)} = \frac{dy}{P_2(x,y)} \tag{6}$$

simmetrik görnüşli ady differensial deňlemä deňgüýçlüdigini görkezeliň.

Goý,

$$\varphi(x,y) = C \tag{7}$$

(6) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. Onuň doly differensialy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

görnüşde bolar. Bu deňlikde dx we dy ululyklary, degişlilikde, $P_1(x,y)$ we $P_2(x,y)$ proporsional funksiýalar bilen çalşyryp,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}P_1(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}P_2(x,y) = 0 \tag{8}$$

deňlige geleris.

(4) we (8)-i deňeşdirip, $u = \varphi(x,y)$ funksiýanyň (4) deňlemäniň çözüwidigini görýäris. Bu ýerden görnüşi ýaly, $\varphi(x,y$ funksiýa (7) deňligiň çep bölegi eken. $u = \Phi(\varphi(x,y))$ funksiýanyň (4) deňlemäniň çözüwidigini görkezeliň. Bu ýerde Φ – erkin differensirlenýän funksiýa.

$u = \Phi(\varphi)$ funksiýanyň (4) deňlemäniň çep böleginde u-nyň ornuna goýsak, onda

$$P_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + P_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} = P_1\Phi^1_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_2.\Phi^1_\varphi.\frac{\partial\varphi}{\partial y} =$$
$$= \Phi^1_\varphi\left(P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \Phi^1_\varphi.0 \equiv 0$$

bolar. Diýmek, $\Phi(\varphi)$ funksiýa (4) deňlemäniň çözüwi. Munuň umumy çözüw bolýanlygyny subut edeliň. Goý, $\psi(x,y)$ funksiýa (4) deňlemäniň çözüwi bolsun. Onda

$$\begin{cases} P_1\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + P_2\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \\ P_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + P_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

toždestwolar sistemasyny alarys.

Bu sistema D oblastyň her bir nokadynda P_1 we P_2 ululyklara görä, birjynsly çyzykly deňlemeler sistemasy hökmünde gararys. Edilen gümana laýyklykda P_1 we P_2 şol bir wagtda nola deň däl. Diýmek, sistema nol däl çözüwe eýedir, sebäbi bu birjynsly sistemanyň kesgitleýjisi (ýakobiýan)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{bolýanlygy düşnükli.}$$

Bu ýagdaý ψ we φ funksiýalaryň arasynda funksional baglylygy görkezýär. Diýmek, $u = \Phi(\varphi(x,y))$ funksiýa (4) deňlemäniň umumy çözüwi.

Indi ýokarda belleýşimiz ýaly, (1) deňlemäni üç argumentli $u(x,y,z)$ gözlenilýän funksiýa üçin garalyň.

Onda (1) deňleme

$$P_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + P_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + P_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

görnüşde bolar. $u = u(x,y,z)$ – gözlenilýän funksiýa. P_1, P_2, P_3 koeffisiýentler $D \in R^3$ oblastda üznüksiz hususy önümli funksiýalar we $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \neq 0$ (9) deňlemä degişli simmetrik görnüşli ady differensial deňlemeler sistemasy

$$\frac{dx}{P_1(x,y,z)} = \frac{dy}{P_2(x,y,z)} = \frac{dz}{P_3(x,y,z)} \tag{10}$$

görnüşde bolar. Bu iki deňlemeli sistema.

Goý, (10) sistemanyň umumy çözüwi

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = c_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = c_2 \end{cases} \tag{11}$$

görnüşde tapylan bolsun.

(11)-däki deňlikleriň doly differensialy

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}dz = 0 \end{cases}$$

görnüşde bolar.

Bu deňliklerde *dx, dy, dz* ululyklary, degişlilikde, olara proporsional P_1,P_2,P_3 funksiýalar bilen çalşyryp,

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}P_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}P_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}P_3 = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}P_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}P_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}P_3 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

deňlikleri alarys.

(9) bilen (12)-ni deňeşdirip,

$$u = \varphi_1(x, y, z), u = \varphi_2(x, y, z)$$

funksiýalaryň (9) deňlemäniň çözüwleridigini görýäris.
$u = \Phi[(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)]$ funksiýa (9) deňlemäniň çözüwi bolar.

Bu ýerde Φ – erkin differensirlenýän funksiýa.
$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ funksiýanyň (9) deňlemäniň umumy çözüwidigini görkezmek kyn däldir. Onuň üçin iki argumentli gözlenilýän funksiýanyň subudyny gaýtalamak ýeterlikdir. Umuman, *n* argumentli $u(x_1,....., x_n)$ gözlenilýän funksiýa üçin hem subut ediliş usuly şoňa meňzeşdir.

Indi (9) deňleme üçin Koşi meselesine garalyň.

(9) deňleme $u(x_0, y, z) = \varphi(y, z)$ başlangyç şert bilen Koşi meselesini emele getirýär. Berlen başlangyç şerti $u = \varphi(y, z), x = x_0$ görnüşde hem ýazmak bolýar. Beýle diýildigi (9) deňlemäniň berlen egriden geçýän integral üstüni tapmaly diýildigidir.

Bu meseläni çözmekligiň düzgünini beýan edeliň.

Ilki (9) deňleme üçin (10) sistemany düzüp, onuň umumy çözüwini (11) görnüşde tapmaly. Soňra $x = x_0$ bahany (11)- de goýmaly. Onda

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x_0, y, z) = c_2 \end{cases}$$

görnüşli sistema geleris.
Bu ýerden, $y = \psi_1(c_1, c_2)$, $z = \psi_2(c_1, c_2)$ bahalary $u = \varphi(y, z)$ funksiýada goýup, $u = \delta(c_1, c_2)$ deňligi alarys.

Bu ýerde c_1 we c_2 ululyklary (11) sistemanyň çep bölegindäki aňlatmalar bilen çalşyryp, $u = \delta(\varphi_1, \varphi_2)$ gözlenilýän çözüwi taparys.

§2.Kwaziçyzykly deňlemeler

$$P_1(x_1,..,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1,..,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}P(x_1,...,x_n,u) \quad (1)$$

görnüşli deňlemä kwaziçyzykly deňleme diýilýär. Bu ýerde $x_1,.....,x_n$ – bagly däl üýtgeýän ululyklar. $u = u(x_1,..., x_n)$ – gözlenilýän funksiýa, $P_1,...., P_n$ – koeffisiýentler, P – azat agza. Bu funksiýalar $x_1,..., x_n$ bagly däl ululyklardan başga u gözlenilýän funksiýany özlerinde saklaýar. Şonuň üçin olara çyzykly däl funksiýalar hem diýilýär. $P_i(i = 1,..., n)$, P funksiýalaryň $D \in R^{n+1}$ oblastda hemme argumentleri boýunça üznüksiz hususy önümleri bardyr we $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_1,...,x_n,u) \neq 0$ diýip güman edeliň. (1) deňlemäniň çözüwi $v(x_1,...,x_n,u) = 0$ anyk däl funksiýa görnüşinde gözlenýär. $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$ şert hem talap edilýär. Şu ýagdaýda (1) deňleme

$$P_1(x_1,..,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1,..,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n} + \\ + P(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \quad (2)$$

görnüşli deňlemä getirilýär.

(2) deňlemä degişli simmetrik sistema

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = ... = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P} \quad (3)$$

görnüşde bolar.

Eger (3) sistemanyň bagly däl çözüwi

$$\varphi_i(x_1,...x_n,u) = C_i, (i = \overline{1,n}) \quad (4)$$

görnüşde tapylan bolsa, onda (2) deňlemäniň umumy çözüwi

$$v = \Phi(\varphi_1,....,\varphi_n)$$

deňlik bilen kesgitlener.

$v = (x_1,....,x_n,u) = 0$ deňligi göz öňünde tutsak, onda

$$\Phi(\varphi_1,...,\varphi_n) = 0 \quad (5)$$

bolar, bu ýerde Φ – erkin differensirlenýän funksiýa. (5) deňlik (1) deňlemäniň anyk däl umumy çözüwi bolar. Eger (5)-i u arkaly aňlatmak başartsa, onda ol çözüw anyk görnüşde bolar.

Indi (1) deňlemäni iki argumentli gözlenilýän funksiýa üçin sererderis.

Deňlemäni

$$P_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+P_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=P_3(x,y,u) \tag{6}$$

görnüşde ýazarys. Bu ýerde x,y – bagly däl üýtgeýän ululyklar, $u = u\ (x,y)$ – gözlenilýän funksiýa.

Goý, P_1,P_2,P_3 funksiýalaryň hemme argumentleri boýunça D oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolsun we $P_1^2(x,y,u)+$ $+P_2^2(x,y,u)\neq 0$. (6) deňlemäniň çözüwini

$$v(x,y,u)=0 \tag{7}$$

anyk däl görnüşde gözläris, bu ýerde v funksiýa ähli argumentleri boýunça üznüksiz hususy önümlere eýedir we $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$. Onda (7) deňligi x we y boýunça differensirläp,

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

deňlikleri alarys.

Bu ýerden

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial u}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial u}}$$

önümleri görnüşde taparys. Bulary (6)-da ýerine goýup, degişli amallary edip,

$$P_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+P_2(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial y}+P_3(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0. \tag{8}$$

görnüşli deňlemä geleris.

Görnüşi ýaly, (8) birjynsly çyzykly deňlemedir. Bu ýerde $v(x,y,u)$ gözlenilýän funksiýa bolar. Şeýlelikde, (6) deňleme birjynsly çyzykly (8) görnüşli deňlemä getirildi. Onuň simmetrik görnüşli deňlemesiniň sistemasy

$$\frac{dx}{P_1} = \frac{dy}{P_2} = \frac{du}{P_3} \tag{9}$$

görnüşde bolýanlygy belli.

Mälim bolşy ýaly, (9) sistemanyň bagly däl çözüwi

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,u) = C_1 \\ \varphi_2(x,y,u) = C_2 \end{cases}$$

görnüşde tapylan bolsun. Onda

$$v = \varphi_1(x,y,u), \qquad v = \varphi_2(x,y,u)$$

(8)deňlemäniň çözüwleridir.

(8) deňlemäniň umumy çözüwi

$$v = \Phi[\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)]$$

görnüşde tapylar. Onda (7) deňlik

$$\Phi[\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)] = 0 \tag{10}$$

görnüşi alar.

Soňky deňlik (6) deňlemäniň umumy çözüwidir. Eger (10) deňligi u arkaly aňlatmak başartsa, onda ol funksiýa (6) deňlemäniň anyk görnüşli çözüwi bolar.

(6) deňleme üçin Koşi meselesi birjynsly deňleme üçin garalan Koşi meselesi ýaly kesgitlenilýär.

1-nji mysal.

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi.

Garalýan deňlemä degişli simmetrik görnüşli ady differensial deňlemäni

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

görnüşde düzeliň. Munuň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, $xdx + ydy = 0$ görnüşde ýazarys. Onuň iki bölegini integrirläp, $x^2 + y^2 = C$ görnüşli umumy çözüwini taparys. Onda $u = x^2 + y^2$ funksiýa garalýan deňlemäniň çözüwi bolar. Onuň umumy çözüwi $u = \Phi(x^2 + y^2)$ görnüşde ýazylar. Bu Ou okunyň daşynda aýlanma üstleriň köplügini emele getirýär. Bu ýerde Φ – erkin üznüksiz differensirlenýän funksiýa. $u = \Phi(x^2 + y^2)$ funksiýa garalýan deňlemäniň umumy çözüwidir.

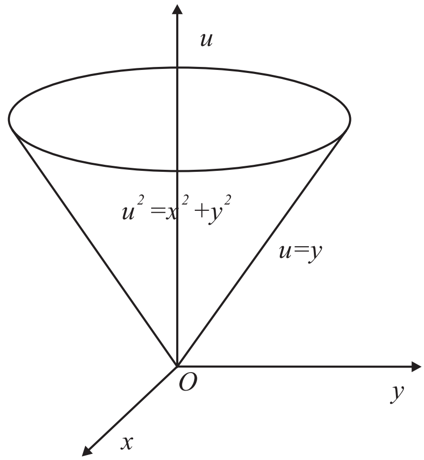
Hakykatdan-da,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\Phi^1(x^2 + y^2), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = +\,2y\Phi^1(x^2 + y^2)$$

bolýanlygyndan

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = (2xy - 2xy)\,\Phi^1(x^2 + y^2) \equiv 0$$

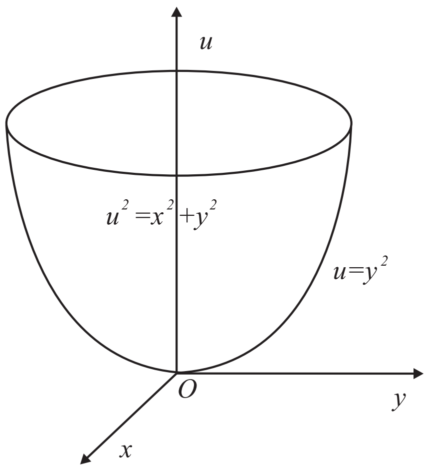
toždestwony alarys. Diýmek, $u = \Phi$ funksiýa deňlemäniň çözüwi eken. Eger garalýan deňlemäniň $u\,(0,y) = y$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilse, onda $x = 0$, $u = y$, $x^2 + y^2 = C$ deňliklerden x we y ululyklary çykarmaly. Onuň üçin $x = 0$ bahany üçünji deňlikde goýup, $y^2 = C$ deňligi alarys. Bu ýerden alnan $y = \sqrt{C}$. Onda ikinji deňlik $u = \sqrt{C}$ görnüşde bolar. C-niň ornuna $x^2 + y^2$ aňlatmany ýazyp, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ gözlenilýän çözüwi alarys. Muny $u^2 = x^2 + y^2$ görnüşde hem ýazmak bolar. Bu $u = y$ göniniň Ou okunyň daşyndan aýlanmasy arkaly alnan şekili, ýagny konusy emele getirýär (*8-nji surat*).



8-nji surat

Eger garalýan deňleme üçin başlangyç şerti $u\,(0,y) = y^2$ görnüşde alynsa, onda gözlenilýän çözüw $u = x^2 + y^2$ görnüşde bolar. Bu $u = y^2$ egri çyzygyň, ýagny parabolanyň aýlanmasy arkaly alnan şekili–

–paraboloidi emele getirýär (*9-njy surat*)



9-njy surat

2-nji mysal.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemelerini simmetrik görnüşde ýazalyň:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Bu ýerden $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni alarys we onuň umumy çözüwini $\ln y = \ln x + \ln c_1$ ýa-da $\frac{y}{x} = c_1$ görnüşde taparys. Indi $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni alarys. Onuň çözüwi $\frac{z}{x} = c_2$ görnüşde bolar. Garalýan deňlemäniň çözüwleri $u = \frac{y}{x}$, $u = \frac{z}{x}$ görnüşlerde ýazylar.

Onuň umumy çözüwi $u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ görnüşde tapylar. Bu ýerde, Φ – erkin differensirlenýän funksiýa.

3-nji mysal.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $u(x,1) = 2x$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ görnüşde bolar. Bu birinji tertipli üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edilen ady differensial deňlemedir. Onuň umumy çözüwi $xy = c$. Garalýan deňlemäniň çözüwi $u = 2xy$ bolar. Umumy çözüwini $u = \Phi(2xy)$ görnüşde ýazarys. $y = 1$ bahany $xy = C$ deňlikde goýup, $x = C$ deňligi alarys. Bu bahany $u = 2xy$ deňlikde goýup, $u = 2xC$ deňlige geleris. Bu ýerde C-ni xy bilen çalşyryp, gözlenilýän çözüwi $u = 2xy$ görnüşde taparys.

4-nji mysal.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $x = 0$, $u = y$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňleme üçin häsiýetlendiriji deňlemäni

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2e^x - y}$$

görnüşde ýazarys.

Muny $\frac{dy}{dx} + y = 2e^x$ görnüşde ýazyp bileris. Bu birinji tertipli çyzykly deňleme. Onuň çözüwi $y = Ce^{-x} + e^x$ görnüşde tapylar. Bu ýerden

$$\frac{y - e^x}{e^{-x}} = C \quad \text{ýa-da} \quad C = e^x y - e^{2x}$$

birinji integraly alarys. $u = e^x y - e^{2x}$ funksiýa garalýan deňlemäniň çözüwi. Onuň umumy çözüwi $u = \Phi(e^x y - e^{2x})$ görnüşde bolar.

Indi berlen şerti kanagatlandyrýan çözüwi tapmaga girişeliň.

$$x = 0, \;\; u = y, \;\; e^x y - e^{2x} = C \tag{1}$$

deňliklerden x we y çykarmaly. Onuň üçin x=0 bahany soňky deňlikde goýup, $y - 1 = C$ deňligi alarys. Bu ýerden, $y = C + 1$ bolar. Muny (1)-iň ikinjisinde goýup, $u = C + 1$ deňligi alarys. Bu deňlikde C-niň ornuna $e^x y - e^{2x}$ aňlatmany goýup, talap edilýän çözüwi $u = e^x y - e^{2x} + 1$ görnüşde taparys.

5-nji mysal.

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

deňlemäniň $x = 0$, $u = y^2$ egriden geçýän integral üstüni tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňleme üçin simmetrik deňlemeler sistemasy

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}$$

görnüşde bolar. Bu ýerden

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} \quad \text{ýa-da} \quad xydx = y^2dy$$

deňlemäni y-e gysgaltsak, ol $ydy = xdx$ görnüşe geler. Munuň çözüwi $y^2 - x^2 = C_1$ bolar. Bu birinji integral. $\frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}$ deňlemäni $\frac{dy}{y} = du$ görnüşde ýazarys.

Iki bölegini integrirläp, $\ln y = u + C_2$ ýa-da $\ln y - u = C_2$ deňligi alarys. Bu bolsa birinji integralyň ikinjisi. Garalýan meseläniň çözüwini tapmak üçin

$$y^2 - x^2 = C_1, \ \ln y - u = C_2, \ x = 0, u = y^2 \qquad (1)$$

deňliklerden x, y, u ululyklary çykarmaly. Onuň üçin $x = 0$ bahany birinji integralda goýup, $y^2 = C_1$ deňligi alarys. Bu ýerden $y = \sqrt{C_1}$ bolar. Ikinji integral $\ln\sqrt{C_1} - C_1 = C_2$ görnüşde ýazylar. Bu deňlikde C_1 we C_2 üçin tapylan aňlatmalaryň çep böleklerini goýup,

$$\ln\sqrt{y^2 - x^2} - y^2 + x^2 = 1ny - u \qquad \text{ýa-da}$$
$$u = \ln y - \ln\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 - x^2$$

garalýan deňlemäniň anyk görnüşdäki çözüwini alarys.

6-njy mysal.

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial u}{\partial y} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

deňlemäni çözmeli.

Çözülişi. Garalýan deňleme üçin simmetrik sistema

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2z^2} = \frac{dz}{yz}$$

görnüşde ýazylýar.

Bu ýerden gatnaşyklaryň jübütini alarys:

$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}$ deňlemäni $\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}$ görnüşde ýazarys. Munuň umumy çözüwini $x = c_1 z$ görnüşde taparys. $\frac{x}{z} = c_1$ simmetrik sistemanyň birinji integraly bolar. Simmetrik sistemanyň birinji integralynyň ikinjisini tapmak üçin

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n}$$

formulany ulanarys. Bu ýerde $k_1, \ldots, k_n$ – erkin koeffisiýentler.

Simmetrik sistemanyň birinji drobunyň sanawjysyny we maýdalawjysyny z-e, üçünjisini x-e köpeldip, olaryň sanawjylaryny we maýdalawjylaryny goşup, alnan jemi ikinji droba deňläp,

$$\frac{zdx + xdz}{zxy + xyz} = \frac{dy}{x^2z^2}$$

görnüşde deňlemäni alarys. Soňra xz-e gysgaldarys.

Deňlemäni

$$\frac{d(xz)}{2y} = \frac{dy}{xz} \quad \text{ýa-da} \quad (xz)d(xz) = 2ydy$$

görnüşde ýazarys hem-de ony integrirläp,

$$\frac{(xz)^2}{2} = y^2 + C_2 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{(xz)^2}{2} - y^2 = C_2$$

deňlige geleris. Bu birinji integralyň ikinjisi.

Tapylan birinji integrallaryň bagly däldiklerini anyklamany Ýakobian kesgitleỳjisi arkaly derňäris. Garalỳan deňlemäniň çözüwleri $u = \varphi_1 = \frac{x}{z}, u = \varphi = \frac{(xz)^2}{2} - y^2$ görnüşlerde bolar. Bular birinji integrallaryň çep bölekleri:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ xz_2 & -2y \end{vmatrix} = -\frac{2y}{z} \neq 0.$$

Diỳmek, tapylan birinji integrallar bagly däl eken. Onda deňlemäniň umumy çözüwi

$$u = \Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{x^2 z^2}{2} - y^2\right)$$

görnüşde tapylar, bu ỳerde Φ – erkin differensirlenỳän funksiỳa.

7-nji mysal.

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

deňlemäniň çözüwini tapmaly.

Çözülişi. Garalỳan kwaziçyzykly deňlemedir. Onuň simmetrik sistemasyny

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}$$

görnüşde ỳazarys.

Sistemanyň deňlemelerini

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu}, \frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}$$

görnüşlerde alarys.

Birinji deňlemäniň iki bölegini u-a köpeldip, $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ deňlemäni alarys. Munuň çözüwi $\frac{x}{y} = C_1$ görnüşde tapylar. Ikinji deňlemede x-iň ornuna C_1y-i ýazyp, $\frac{dy}{yu} = \frac{du}{C_1y^2}$ görnüşli deňlemäni alarys. $\frac{1}{y}$-e gysgaldarys. Onda $udu = C_1ydy$ bolar. Muny integrirläp, $u^2 = C_1y^2 + C_2$ görnüşdäki funksiýany alarys. Bu ýerde C_1-iň bahasyny goýup, $u^2 = xy + C_2$ ýa-da $u^2 - xy = C_2$ görnüşli çözüwi alarys. Onda garalýan deňlemäniň umumy çözüwi

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, u^2 - xy\right) = 0$$

görnüşde bolar.

8-nji mysal.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 2xu$$

kwaziçyzykly deňlemäniň $x + y = 2$, $yu = 1$ egriden geçýän integral üstüni tapmaly.

Çözülişi. Garalýan deňlemä degişli simmetrik sistemany

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{2xu}$$

görnüşde ýazarys.

Bu ýerden $\frac{dx}{u} = \frac{du}{2xu}$ deňlemäniň iki bölegini $\frac{1}{u}$ köpeldijä gysgaldyp, $2xdx = du$ deňlemä geleris. Munuň çözüwi $x^2 = u + C_1$ ýa-da $x^2 - u = C_1$. Bu birinji integralyň biri. $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-xy}$ deňlemäni birinji integraly peýdalanyp, $\frac{dx}{x^2 - C_1} = \frac{dy}{-xy}$ görnüşde ýazarys. Üýtgeýän ululyklaryny aýyl-saýyl edip, onuň çözüwini

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - C_1) + \ln y = \ln C_2$$

görnüşde taparys. Muny potensirläp, $y\sqrt{x^2 - C_1} = C_2$ ỳa-da $y\sqrt{u} = C_2$ görnüşde ỳazarys. Bu ikinji integral. Onda garalỳan deňlemäniň umumy çözüwi $\varPhi(x^2 - u, y\sqrt{u}) = 0$ görnüşde bolar. Indi deňlemäniň berlen şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly. Onuň üçin

$$x + y = 2, yu = 1, x^2 - u = C_{1,} y\sqrt{u} = C_2 \qquad (1_1)$$

deňliklerden x,y,u ululyklary çykaralyň. Bu ỳerden $y = 2 - x, u = \frac{1}{y}$ bahalary (1_1) belgilemäniň soňky aňlatmalarynda goỳup,

$$x^2 - \frac{1}{2-x} = C_1, (2-x)\sqrt{\frac{1}{2-x}} = C_2 \qquad (2_1)$$

deňlikleri alarys.
Soňky deňligiň iki bölegini kwadrata göterip, $2 - x = C_2^2$ deňlige geleris. Bu ỳerden $x = 2 - C_2^2$ bahany (2_1)-däki aňlatmalaryň birinjisinde goỳsak, onda $(2 - C_2^2)^2 - \frac{1}{C_2^2} = C_1$ deňlik alnar. (1_1) belgilemedäki C_1 we C_2 ululyklara degişli aňlatmalary soňky deňlige goỳup,

$$(2 - y^2u)^2 - \frac{1}{y^2u}x^2 - u \quad \text{ỳa-da}$$

$$y^2u[(2 - y^2u)^2 - x^2 + u] = 1$$

görnüşde gözlenilỳän çözüwi alarys.

Gönükmeler

1. $$(x + 2y)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = \varPhi(xy + y^2)$.

2. $$(x - 2e^y)\frac{\partial u}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(x,0) = x$$

meseläni çözmeli.

Jogaby: $u = xe^y - e^{2y} + 1.$

3. $$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(0,y) = 2y$$

meseläni çözmeli.

Jogaby: $u = \sqrt{x^2 - y^2}.$

4. $$\cos y\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cdot \cos y$$

deňlemäni çözmeli.

Jogaby: $u = \sin y + F(\sin x - \sin y).$

5. $$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $\Phi(x^2 - y^2, x - y + u) = 0$

6. $$2\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, u = y^2, x = 1.$$

meseläniň çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = y^2 e^{2\sqrt{x} - 2}.$

7. $$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $u = y^2$, $x = 1$ egriden geçỳän integral üstüni tapmaly.

Jogaby: $u = x^2 y^2.$

8. $$yu\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $u = x^2$, $y = 1$ başlangyç şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = \frac{x^2}{y^2}.$

9. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $u = -y$, $x = 1$ şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = \dfrac{y}{\ln x - 1}$.

10. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

deňlemäniň $u = y$, $x = 1$ başlangyç şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = xy$.

11. $$u(x+u)\frac{\partial u}{\partial x} - y(y+u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

deňlemäniň $u = \sqrt{y}, x = 1$ şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u^2 = xy$.

12. $$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

deňlemäniň $y = x$, $u = x^3$ egriden geçỳän çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = x^2y$.

13. $$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2, y = 1, u = x^2$$

meseläniň çözüwini tapmaly.

Jogaby: $2x^2(y+1) = y^2 + 4u - 1$

14. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u = x^y,\ z = 1$$

meseläniň çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u = \dfrac{x^y}{z}$.

15. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

deňlemäniň $u = \dfrac{2}{x^2}, y^2 + z^2 = 2$ başlangyç şerti kanagatlandyrỳan çözüwini tapmaly.

Jogaby: $u(x,y,z) = \dfrac{y^2 + z^2}{x^2}$.

16. $$u\frac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + x = 0, y = x^2, u = 2x$$

meseläniň çözüwini tapmaly.

Jogaby: $x^2 + u^2 = 5(xu - y)$.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. – Aşgabat, 2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow. Gysgaça terjimehal. – Aşgabat, 2007.
3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. – Aşgabat, 2007.
4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Eserler ýygyndysy. – Aşgabat, 2007.
5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. – Aşgabat, 2007.
6. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. – Aşgabat, 2008.
7. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Älem içre at gezer. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2011.
8. *Aşyrow S.* Birinji tertipli ady differensial deňlemeler. – Aşgabat, Ylym, 1994.
9. *Aşyrow S.* Ýokary tertipli ady differensial deňlemeler. – Aşgabat., Ylym, 2001.
10. *Aşyrow S.* Birinji tertipli ady differensial deňlemeler sistemalary. – Aşgabat., Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008.
11. *Богданов Ю., Сыроид Ю.Б.* Дифференциальные уравнения. – Минск., Высшая школа, 1983.
12. *Еругин Н.П., Штокало И.З.* и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев., Высшая школа, 1974.
13. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М., Наука, 1980.
14. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., Высшая школа, 1978.

15. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М., Наука, 1981.
16. *Мамедов Я.Д., Ашыров С., Атдаев С.* Теоремы о неравенствах. – Ашхабад, Ылым, 1980.
17. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, Высшая школа, 1974.
18. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., Изд-во МГУ, 1984.
19. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1988.
20. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения, примеры и задачи. –М., Высшая школа, 1989.
21. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М., Физматгиз, 1959.
22. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М., Наука, 2005.
23. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М., Наука, 1992.
24. *Мамедов Я.Д.* Методы вычислений. Учебник. Баку–1988, издательство “Маариф”.
25. *Матвеев Н.М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Санкт-Петербург, 1996.
26. *Дмитриев В.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, изд. КДУ, 2007.
27. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Москва, Физматлит, 2005.
28. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – Москва, изд-во МАИ, 2000.

KITAPDA ADY AGZALAN ALYMLAR

1. Bessel (1784–1846) – nemes matematigi.
2. Bellman R. (1920–1984) – amerikan matematigi.
3. Bernulli J. (1667–1748) – şweýsar matematigi.
4. Bihari – wenger matematigi.
5. Çebyşew P.L. (1821–1894) – rus matematigi.
6. Dalamber Ž. (1717–1783) – fransuz matematigi.
7. Eýler I. (1707–1783) – Şweýsariýada doglan matematik.
8. Grin J. (1793–1841) – iňlis matematigi.
9. Gronuoll T.– amerikan matematigi.
10. Koşi O. (1789–1857) – fransuz matematigi.
11. Kramer G. (1704–1752) – şweýsar matematigi.
12. Klero A.K. (1713–1765) – fransuz matematigi.
13. Ležandr A. (1752–1833) – fransuz matematigi.
14. Leýbnis G. (1646–1716) – nemes matematigi.
15. Lagranž Ž. (1789–1857) – fransuz matematigi.
16. Lipşis R. (1832–1903) – nemes matematigi.
17. Liuwill Ž. (1809–1882) – fransuz matematigi.
18. Lýapunow A.M. (1857–1918) – rus matematigi.
19. Nýuton (1643–1727) – iňlis matematigi.
20. Osgud – amerikan matematigi.
21. Ostrogradskiý M.W. (1801–1862) – rus matematigi.
22. Pikar Ş. (1856–1941) – fransuz matematigi.
23. Puankare Ž. (1854–1912) – fransuz matematigi.
24. Pifagor S. (b.e.öň. 570–500) – gadymy grek matematigi.
25. Rikkati Ỳ.F. (1676–1754) – italýan matematigi.
26. Şturm Ž. (1803–1856) – fransuz matematigi.
27. Wandermond A. (1735–1796) – fransuz matematigi.
28. Weýerştrass K. (1815–1897) – nemes matematigi.
29. Wronskiý G. (1776–1853) – polýak matematigi.
30. Ýakobi K. (1804–1851) – nemes matematigi.

MAZMUNY

IV bap. Ýokary tertipli çyzykly differensial deňlemeler

V bap. Ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

VI bap. Birinji tertipli differensial deňlemeler sistemasy

VII bap. Durnuklylyk nazaryýeti barada

VIII bap. Birinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeler

Sapar Aşyrow, Baýram Saparowiç Aşyrow

DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*O. Bäşimowa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh.redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Neşir üçin jogapkär	*O. Aşyrow*

Çap etmäge rugsat edildi 25.07.2012. Möçberi 60x90 1/16. Ofset kagyzy.
Edebi garniturasy. Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 17,0. Şertli reňkli ottiski 52,25.
Hasap-neşir listi 11,16. Çap listi 17,0. Sargyt 901. Sany 1200.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000, Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.