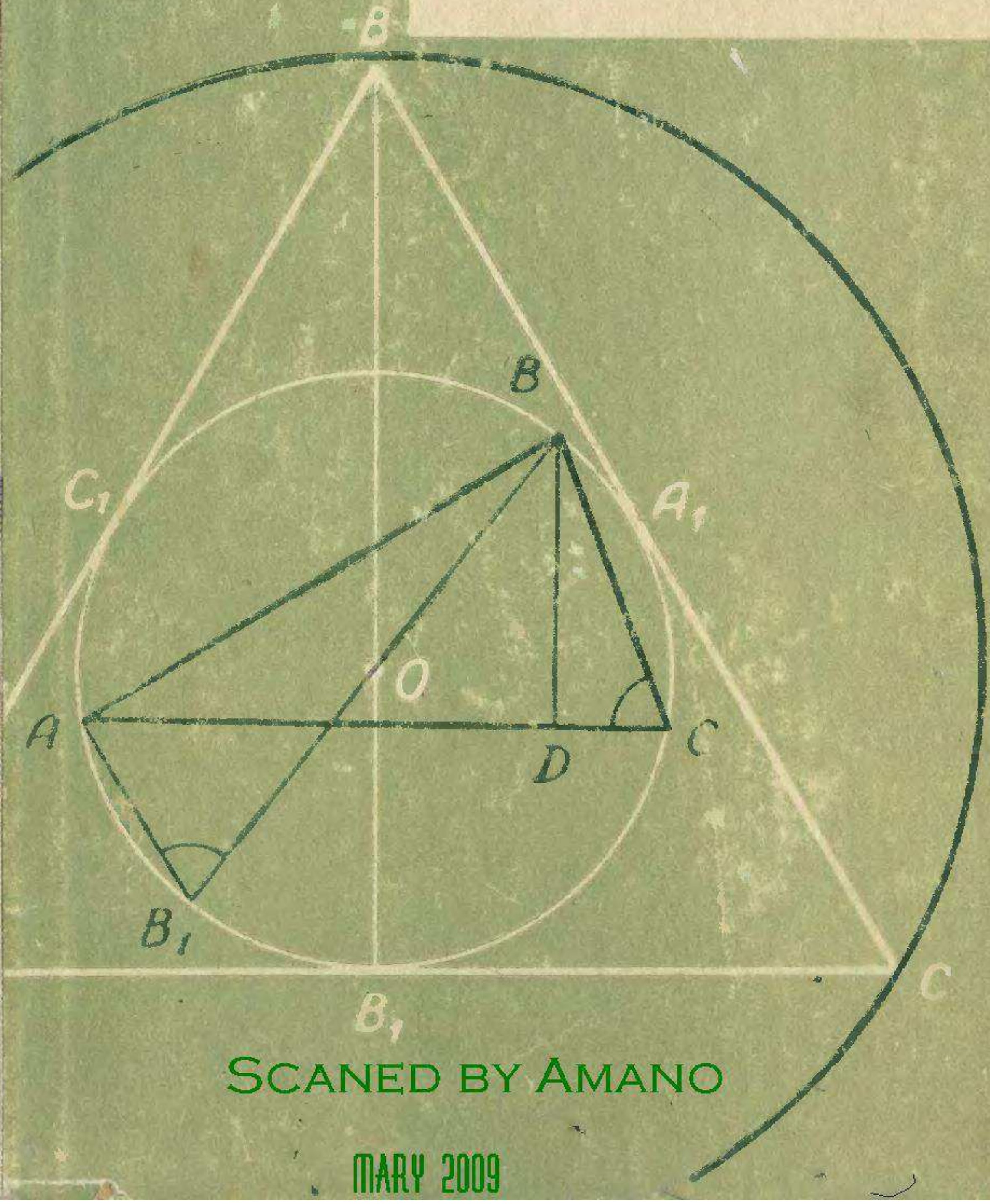
БЕРДИЕВ Б., СЕЙИТМЫРАДОВ С.

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА БОЮНЧА САЙЛАНАН МЕСЕЛЕЛЕР



МАЗМУНЫ

Бердыев Байрамдурды, Сейитмурадов Сахатмурад

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

На туркменском языке

Издательство „Туркменистан“

51 (075)
Б 51

Йорите редактор физика-математика ылымларының кандидаты, доцент Хожаев А.

СӨЗБАШЫ

Соңкы вагтларда математика физиканың, техниканың өсмегине тәсир этмек билен чәкленмән, бейлеки ылымларың-да өсмегине эсас дөретди. Шол себәпли хем математики биология, математики лингвистика, математики экономика, математики психология дийип атландырылян ылмың тәзе угурлары йүзе чыкды. Электрон хасаплайжы машынларың дөремеги математиканың көп ылымлара тәсир этмегини гүйчлендирди. Шонуң үчин хем орта мекдепде өвренилйән математиканың ылмы дережесини ёкары гөтермәге, оны шу гүнки математика голайлашдырмаклыга бизиң юрдумызда өрән көп ишлер эдилйәр.

Математикадан тәзе программа гечмеклик, факультатив предметиң гиризилмеги техниканың ве ылмың хәзирки заман үстүнликлерини мекдеп курсунда мүмкин болдугыча долы беян этмегиң эсасы чәрелериниң бириндир. Бу гечирилйән тәзеликлериң хеммеси окувчыларың чуңңур пикирленип билмегини, математика дегишли китаплары өзбашдак окап билмегини, „нәме", „хачан", „ниреде", „нәдип" диен сораглары мыдама аңында сакламагыны өңкүден-де гүйчли талап эдйәр. Окувча пикирленмеги, аңыжылыгы, дүшгүрлиги аз вагтда өвредер ялы умумы усул ёк. Чагаларда булар ялы айратынлык көп окамагың, көп пикирленмегиң нетижесинде эмеле гелйәр.

Бу китапда 800-ден говрак мысал ве меселе болуп, оларың чөзүлишлери хем берлендир. Шол мысал ве меселелер математика мугаллымларының класдан дашары ишлерини ве окувчыларың өзбашдак пикирленмеклерини оңатлашдырмакда көп пейда эдер. Китапдакы меселелериң көпүси соңкы йылларда олимпиадаларда ве ёкары окув жайларының гириш экзаменлеринде хөдүрленендир. Шонуң үчин хем бу китап ёкары окув жайларына гирмек үчин тайярланйанлара ве математикадан олимпиадалара гатнашжаклара герекли голланмадыр.

Окувчылар илки билен китапдакы берлен меселелери өзбашдак чөзмәге чалышмалыдырлар, чөзүп билмедик окувчылар болса окув китабының дегишли темаларыны гайталандан соң ене меселәни чөзмәге сынанышмалыдырлар. Эгер өзбашдак чөздүрмесе, онда китапдакы чөзүлиши өвренмелидирлер.

Кын меселәни чөзмек үчин диңе бир теорияны билмек етерлик дәлдир, онуң үчин ойлап тапыжылык, аңыжылык, дүшбүлик герекдир. Меселәни чөзмәге башламаздан өң, меселәниң шертинде нәмәниң берлендигине, нәмәниң гөзленйәндигине ачык гөз етирмек зерурдыр ве чөзүлишиң планыны дүзмек өрән пейдалыдыр.

Шу китапда шолар ялы кын.меселелере үнс берилди, оларың чөзүлиши хем окыжыларың өз пикирленишлерини барлап гөрмеклери үчин ниетленйәр. Китапдакы меселе мысаллары үнс берип чөзен я-да чөзмәге сынанышан адамларың математики пикирленишиниң өсмегине шу китап эп-эсли дережеде ярдам эдер дийип хасап эдйәрис.

I. ОЛИМПИАДАДА ХӨДҮРЛЕНЙӘН МЕСЕЛЕЛЕР

5 – 6-нжы класлар үчин мысал ве меселелер

Садалашдырмалы:

1. $\dfrac{374\cdot299-127+299-299}{172+299\cdot373}$.

2. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}$.

3. $168\cdot\left(\dfrac{13-\frac{13}{9}-\frac{13}{371}-\frac{13}{93}}{46-\frac{48}{9}-\frac{48}{371}-\frac{48}{93}}:\dfrac{7+\frac{7}{15}+\frac{7}{225}+\frac{7}{115}}{11+\frac{11}{15}+\frac{11}{225}+\frac{11}{115}}\right)\cdot\dfrac{168168168}{143143143}$

4. $[3^{11}\cdot3^{10}-5\cdot3^{15}\cdot3^{10}+4\cdot9^{8}\cdot3^{8}]:41\cdot3^{24}$.

5. $\dfrac{1}{10\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot12}+\ldots+\dfrac{1}{18\cdot19}+\dfrac{1}{19\cdot20}$.

6. $17^5+24^4+13^{23}$ саның 10-а бөлүнйәндигини субут этмели.

7. Ашакдакы аңлатмаларың хер бири нәхили цифр билен гутаряр?

а) $3^8+4^8+5^8$; б) $3^{13}+10^{13}+18^{13}$; в) $14^{23}+23^{23}+70^{23}$.

8. Ашакдакы дробларың хайсысы улы:

$$\frac{10^{1968}+1}{10^{1969}+1} \text{ ве } \frac{10^{1969}+1}{10^{1970}+1}?$$

9. Нокатларың еринде болмалы цифрлери тапмалы:

а) $\begin{array}{r} \times\ .1\ldots \\ 237 \\ \hline 7\ldots065 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times\ \ldots \\ .8. \\ \hline \ldots. \\ +\ \ldots \\ .0. \\ \hline \ldots.0 \end{array}$

в)
$$\begin{array}{r} \times\ .... \\ 8.. \\ \hline 4... \\ +\ ...3. \\ .... \\ \hline ......0 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \times\ .9. \\ ...9 \\ \hline .... \\ +\ .3.. \\ ..5. \\ \hline .8..... \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r|l} -\ .... & .. \\ \cline{2-2} ... & ..8.. \\ \hline -\ 000.. & \\ .. & \\ \hline -\ 0... & \\ ... & \\ \hline 000 & \end{array}$$

10. Дүрли харплар дүрли цифрлери аңладян болса, онда харпларың еринде болмалы цифрлери тапмалы:

а)
$$\begin{array}{r|l} -\ Moga & oga \\ \cline{2-2} gap & ga \\ \hline -\ ega & \\ ega & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -\ Myxa & xa \\ \cline{2-2} xa & yxa \\ \hline -\ kx & \\ ap & \\ \hline -\ yxa & \\ yxa & \\ \hline 0 & \end{array}$$

11. x белгилериниң ерине цифрлери язмалы:

$$xxxxx - xxxx = 1.$$

12. Харпларың ве x белгилериниң ерине цифрлери язмалы:

$$\begin{array}{r} \times\ abc \\ bac \\ \hline xxxx \\ +\ xxa\ \ \\ xxxb\ \ \ \\ \hline xxxxxx \end{array}$$

13. x белгилериниң ерине цифрлери язмалы:

а) $xx234x : 72 - x0xxx$;

б)
$$\begin{array}{r|l} -\ xxxx & x \\ \cline{2-2} x\ \ \ & xxx \\ \hline -\ xx\ \ & \\ x\ \ & \\ \hline -\ xx & \\ xx & \\ \hline 0 & \end{array}$$

в) мысалда бөлүнижиниң тәк сандыгы беллидир.

14. Харпларын ерине цифрлери язмалы: $AB \times AB = ACC$.

15. Алтыбелгили саның чеп тарапдакы четки цифри 5. Эгер шол цифр саның ин соңуна гечирилсе, онда илки башдакы сандан 4 эссе кичи сан алыняр. Шол саны тапмалы.

16. Берлен 235·31· саның 45-е галындысыз бөлүнйәндиги белли болса, нокатларын ериндәки цифрлери тапмалы.

17. Хасапламалы:

$$10101 \cdot \left(\frac{5}{111\,111} + \frac{5}{222\,222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right).$$

18. Ашакдакы дробларың хайсысы улы:

$$\frac{43}{99};\ \frac{4343}{9999};\ \frac{434\,343}{999\,999};\ \frac{43\,434\,343}{99\,999\,999}?$$

19. Онлитрлик гапдакы ягың 5 литрини 7 литрлик габа гуймак үчин, мундан башга-да 3 литрлик гап бар болса, оны нәхили ерине етирмели?

20. Дөртлитрлик ве докузлитрлик бедрелер билен ховуздан 6 литр сувы өлчәп алмалы.

21. Берлен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 10 + 10$ сан 9-а бөлүненде алнан пайы ве галындыны тапмалы.

22. Эгер 1-ден 9999 ченли санлар алынса, онда оларың ичинде нәче 1 болар?

23. Сан 12-ә галындысыз бөлүнйәр. Бөлүнижиниң, бөлүжиниң ве пайың жеми 77 болса, шол саны тапмалы.

24. Класда 28 окувчы бар болса, оларың ичинде фамилиялары бирмеңзеш харп билен башланян ики окувчы бардыр дийип тассыкламак болармы?

25. Ызлы-ызындан гелйән ики натурал саның көпелтмек хасылы нәхили цифрлер билен гутарып билер?

26. Берлен саны 225-е бөленинде галындыда 150 алыняр. Шол сан 75-е галындысыз бөлүнерми?

27. Дөрт саны ызыгидерли натурал санларың жеми йөнекей сан болуп билерми?

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

28. Хич бири йөнекей сан болмадык ызлы-ызындан гелйән йүз саны натурал сан гөркезмели.

29. Саны 2-ә, 3-е, 5-е, 7-ә ве 11-е бөлeнинде галындыда 1 алыняр. Шулар ялы положител санларың иң кичисини тапмалы.

30. Хер бөлекде тәк санлы хоз болар ялы эдип, 120 хозы докуз бөлеге бөлүп болармы?

31. Ики саның бири бейлекисинден 513 сан артык. Эгер оларың улусыны кичи сана бөлсек, пайда 4 алнып, галындыда болса 78 алнар. Шол санлары тапмалы.

32. Бир сан бейлеки сандан 16 сан артык. Оларың улусыны кичисине бөлeнинде пай 6, галыкды 1 боляр. Шол санлары тапмалы.

33. Бири-бириниң ашагында язылан үч сан берлен:
$$\begin{array}{r}111\\777\\999\end{array}$$
Галан санларың жеми 20 болар ялы эдип, ёкардакы 9 цифриң алтысыны бозмалы.

34. Огланжыкдан яшың нәче дийип соранларында, ол енеде 13 йылдан мениң яшым мундан ики йыл озалкысындан дөрт эссе көп болжак дийип җогап берипдир. Огланжыгың яшы нәче?

35. Ики саның жеми 497. Шол санларың бириси нуль билен гутаряр. Эгер шол нуль бозулса (ташланылса), онда икинжи сан алыняр. Шол санлары тапмалы.

36. Ики саның жеми 120. Эгер биринжи саның 40% икинжи саның 60%-ине дең болса, онда шол санлары тапмалы.

37. Эгер ики саның бириниң $\frac{5}{8}$ бөлеги бейлекисиниң $\frac{3}{4}$ бөлегине дең болса ве оларың бири бейлекисинден 12 сан артык болса, онда шол ики саны тапмалы.

38. Ховзы сувдан долдурмак үчин оңа турба гечирилипдир. Турбаның хапаланмагы зерарлы ондан ховза гелйән сувуң мукдары 20% азалыпдыр.

Ховзы долдурмак үчин герек болан вагт нәче процент артыпдыр?

39. Шәхериң үч районында 120 000 адам яшаяр. Биринжи районда яшаянларың $\frac{2}{3}$-си икинжи районда яшаянларың ярысына ве үчүнжи районда яшаянларың $\frac{2}{5}$-сине дең болса, шәхериң хер бир районында нәче адам яшаяр?

40. Эгер кубуң хер гапыргасы 20% артдырылса, онда онуң долы үсти нәче процент артар?

41. Какасы оглуна ховлының узынлыгыны өлчемеги табшыряр. Ерде гарың барлыгы себәпли, гарың үстүнде онуң аяк ызы галяр. Какасы оглуның өлчейшини барламак максады

билен, оглуның өлчән ерини шол угур боюнча өзи хем әдимләп өлчәп башлаяр ве кәбир ерде оглуның ызы билен какасының ызы габат гелйәр. Шунлукда гарың үстүнде жеми 61 саны аяк ызы галяр. Эгер какасының әдиминиң узынлыгы 0,72 *м*, оглуның әдиминиң узынлыгы 0,54 *м* болса, ховлының узынлыгы нәче метр экен?

42. Пионерлериң бир топарына вожатылары открытка пайлады. Оларың биринжиси 1 открытка ве галан открыткаларың $\frac{1}{10}$-ни, икинжиси 2 открытка ве галан открыткаларың $\frac{1}{10}$-ни, үчүнжиси 3 открытка ве галан открыткаларың $\frac{1}{10}$-ни, бейлеки пионерлер хем шуның ялы эдип алдылар.

Пионерлериң саны нәче экен?

43. Гапжыкда 3 көпүкликден ве 5 көпүкликден 50 саны монета бар. Эгер оларың биринжиси ики эссе, икинжиси үч эссе аз болан болсады, онда оларың саны 19 боларды.

Гапжыкда нәче пул бар экен?

44. Көпелтмек хасылы 1680-е дең болан дөрт саны ызыгидерли саны тапмалы.

45. *A* ве *B* пунктларың арасындакы узаклыгы пароход $4\frac{1}{2}$ сагатда, терсине болса шол узаклыгы 3 сагатда гечйәр. *B* пунктда деря челек атылыпдыр. Челек *BA* аралыгы нәче сагатда гечер?

46. Ир сагат 9-да ики саны сагада тов берилйәр. Оларың бири догры йөрейәр. Бейлекиси болса хер сагатда 1,5 минут өңе гидйәр. Нәче вагтдан соң шол сагатларың гөркезйән вагтлары габат гелер ве шол вагтда сагат нәче болар?

47. Пароход бир пристандан бейлеки пристаңа тарап угpaяр. Ёлуң ярысыны гечендeн соңра, тизлигини сагатда 0,25 *км* артдыряр ве шоңа гөрә ол бейлеки пристана бармалы вагтындан ярым сагат ир баряр. Пристанларың арасындакы узаклыгы пароход нәче сагатда гечипдир?

48. Шәхер билен колхозың арасы 40,5 километр. Колхозчы шәхерден гайданда ир сагат 6-да уграяр. Ир сагат 7-де оңа колхоздан ат иберйәрлер ве ол ата мүнүп, колхоза гүндиз 12 сагат 20 минутда баряр. Атың тизлигини кесгитлемели.

49. Автобусда барян адам ёлда өз достуны гөрүп, 10 секунт гечендeн соң автобусдан дүшйәр. Пыяда барян адам автобусың херекет эдйән угруның терсине баряр. Автобусдан дүшен адам достундан ики эссе тиз ве автобусдан 5 эссе хаял йөрейән болса, онда ол нәче вагтда достуның ызындан етер?

50. Йүк дашаян поездиң тизлиги сагатда 38 *км*, ёлагчы поездиңки болса сагатда 57 *км*. *A* станциядан оларың биринжиси икинжисинден 7 сагат өң чыкяр, эмма икинжи поезд биринжиниң ызындан етип гечйәр ве B станция ондан 2 сагат өң гелйәр. A ве B станцияларың арасындакы узаклыгы кесгитлемели.

51. Йүки бир рейсде әкитмек үчин бәш тонналык, үч тонналык ве бир ярым тонналык йүк машынлары уланылды, шунлукда үч тонналык машынларың саны бәш тонналыкларың санындан ики эссе артык болуп, бир ярым тонналык машынларың саны бәш тонналыкларың санындан 6 машын артыкды. Эгер машынларың хеммеси үч тонналык болан болсады, онда оларың хер бирине 2,8 *т* йүк йүкләп, йүки бир рейсде әкитмек боларды.

Йүк машынларың херсинден нәчеси бар экен?

52. Колхозчы шәхерден оба тарап атлы уграяр. 7 сагат гечenden соң шол ёл билен автобус онуң ызындан уграяр. Колхозчы хер сагатда $7\frac{3}{5}$ *км*, автобус болса хер сагатда $20\frac{1}{3}$ *км* гечйәр. Автобус шол колхозчының ызындан етип гечйәр ве оба баран дессине ызына уграяр. Ол колхозчы билен ене-де душушяр.

Эгер биринжи ве икинжи душушыгың арасындакы вагтда колхозчы 38 *км* гечен болса, онда шәхер билен обаның арасындакы узаклыгы тапмалы.

53. Эгер колхозчы демир ёл станциясына тарап уграп, сагатда 3,5 *км* ёл гечсе, онда ол поезд уграпдан $\frac{1}{2}$ сагат гечenden соң станция бараrды. Эгер-де колхозчы сагатда 4,2 *км* ёл гечсе, онда ол поездиң уграмагына 20 минут галанда станция бараrды. Колхозчы станция ченли нәче километр ёл гечмели?

54. Хер машының номери дөртбелгили сан. Номериң илкинжи ики цифри ве ахыркы ики цифри аркалы дүзүлен икибелгили санларың жеми 100 болян номерли машынларың саны нәче?

55. Бир адада догручылар ве яланчылар яшаярлар. Оларың биринжилери хемише догры, икинжилери болса хемише ялан сөзлейәрлер. Ада тәзе гелен адам адада яшаянларың бириnден: сен кимлерден дийип сораяр, эмма онуң берен жогабыны эшитмәни себәпли, оларың икинжисинден: нәме дийди дийип сораяр. Онда шол икинжи шейле айдяр: Ол „мен яланчы диййәр дийди". Шол икинжи догручылардан мы я-да яланчылардан?

56. Окувчы магазинден 9 перо, 30 көпүкден бирнәче дептер алды. Сатыжы оңа 2 манат 60 көпүклик чек язып берди. Окувчы: „Сиз нәдогры хасапладыңыз" дийди. Окувчы сатыжының нәдогры хасапланыны нәдип билди?

57. A ве B пунктдан бир вагтда ики автобус бир-бирине тарап уградылар. 7 сагатдан соңра оларың арасы 136 *км*-е

деӊ болды. Эгер автобусларың бири әхли аралыгы 12 сагатда, бейлекиси 10 сагатда гечйән болса, A ве B пунктларың аралыгыны кесгитлемели..

58. Бәш ящигиң хер биринде деӊ санда алма бар. Эгер хер ящикден 60 саны алма алсак, онда әхли ящикде галан алмаларың саны илкинжи ики ящикдәки алмаларың санына деӊ боляр. Хер ящикде илки башда нәче алма бар экен?

59. Поезд кәбир аралыгы 10 сагатда гечйәр. Эгер онуң тизлиги сагатда 10 *км* артса, поезд шол аралыгы 8 сагатда гечйәр. Шол аралыгы ве поездиң тизлигини тапмалы.

60. Гысгалдыландан соң $\frac{17}{83}$ дробь әмеле гелер ялы, $\frac{52\,357}{47\,633}$ дробуң санавжысындан хайсы саны айырмалы ве шоны майдалавжысына гошмалы?

61. Дөрт саны ызыгидерли натурал саның көпелтмек хасылы 3024. Бу санлары тапмалы?

62. Китабың сахыпаларыны нумерлемек үчин 6869 цифр герек болды. Китабың нәче сахыпасы бар?

63. Кондукторсыз автобусда 32 ёлагчы бар. Оларда диңе 10, 15, 20 көпүклик монеталар бар. Оларың хер бириниң ёл кирейни төләп, гайтаргысыны аландыгы белли болса, ёлагчылардакы монеталарың умумы санының 40-дан аз дәлдигини субут этмели.

64. Докуза бөлүнйән 1967 цифрли сан алнан. Онуң цифрлериниң жемини A билен, A саның цифрлериниң жемини болса B билен белләлиң. B саның цифрлериниң жемини тапмалы?

65. 300 саны бирлигиң ве ислендикче нулуң көмеги билен долы квадрат саны язып болармы?

66. Диңе бирликлериң көмеги билен язылан 81 белгили сан 81-е бөлүнерми?

67. Күшт тагтасының ашакы чепки бурчунда ат бар. Ол ат хер өйде диңе бир гезек болуп, ёкаркы сагкы бурча барып билерми?

68. 77 телефоның хер бирини оларың гөни 15-си билен бирлешдирип болармы?

69. Биринде 73, бейлекисинде 56 саны күкүрт чөпли ики гапдан ики оюнчы гезеклешип чөп алярлар. Оюнчыларың хер бири өз гезегинде ислендик бир гапдан ислендик саны чөп алып билер. Иң соңкы алан оюнчы утды дийип хасапланяр. Биринжи оюнчы утмак үчин нәхили ойнамалы?

70. Ики оюнчы шейле оюн ойнаярлар: Биринжи ислендик бирбелгили (1, 2, 3, 4, 5, ...9) санларың бирини кагыза язяр, икинжи болса онуң язан санына ене бирбелгили исленен саны гошуп, жемини язяр. Бу жеме биринжи ене бирбелгили исленен саны гошуп, жемини язяр ве ене-де шуnуң ялы эдйәрлер. Илкинжи болуп 66 саны язан оюнчы утды дийип хасап эдилйәр. Илкинҗи башлан оюнчы утмак үчин нәхили ойнамалы?

71. Күшт тагтасының чепки ашакы өйүнде пыяда бар. Ол пыяданы бир гөчүмде янашык дуран сагкы, ёкаркы өе ве саг тарапдакы өйүң ёкарсындака гөчмеклиге ругсат берилйәр. Иң соңкы гөчен оюнчы утяр. Утмак үчин нәхили ойнамалы?

72. Столуң үстүнде 1967 саны күкүрт чөпи бар. Ики оюнчының хер бири гезеклешип, бирден она ченли чөп алярлар. Иң соңкы чөплери алан оюнчы утяр. Чөплери илки алып башлан оюнчының утмагы үчин, ол чөплери нәхили алмалы?

73. Шол бир улулыклы исләндикче моненталар ве гөнүбурчлы формалы стол бар. Ики оюнчы гезеклешип, столуң үстүне монета гойярлар. Гойлан моненталары еринден гозгамага ве олары бири-бириниң үстүнде гоймага ругсат эдилмейәр. Өз гезегинде столуң үстүнде монета гояр ялы ер тапмадык оюнчы утуляр. Ойны башлан оюнчының утмагы үчин, ол нәхили ойнамалы?

74. Бир гыйматлы 9 саны монета бар. Оларың бириниң галпдыгы белли. Галп монетаның аграмы хакыкы моненталарыңкыдан еңил. Чекүв дашсыз, окаралы терезиниң көмеги билен ики чекимде галп монетаны тапмалы.

75. Бир гыйматлы 4 саны монетаның бириниң галпдыгы белли, эмма онуң хакыкы монетадан еңилдиги я-да агырдыгы белли дәл. Хакыкы монетаның аграмы 5 *г*. Бәш грамлык бир саны дашың ве окаралы терезиниң көмеги билен, ики гезек чекип, галп монетаны тапмалы. Онуң хакыкы монетадан еңилдигини я-да агырдыгыны билмели.

76. Дүрли аграмлы дөрт саны предмет ве чекүв дашсыз терези берлен. Терезиде бәш гезек чекип, ол предметлери аграмларының өсүш тертибинде ерлешдирип болжакдыгыны, эмма дөрт гезек чекип, олары шол тертипде ерлешдирип болмажакдыгыны субут этмели.

77. Сегсен саны монетаның бириниң галпдыгы ве хакыкы монетадан еңилдиги белли болса, чекүв дашсыз терезиде дөрт гезек чекип, галп монетаны тапмалы.

78. Сандыкда бирмеңзеш өлчегли 10 жүбүт гара ве 10 жүбүт ак эллик бар. Реңки меңзеш бир жүбүт эллик болар ялы, сандыкдан гөрмән нәче эллик чыкармалы?

79. Бир стаканда 5 чемче чай, бейлеки стаканда болса 5 чемче сүйт бар. Биринҗи стакандан бир чемче чайы икинҗи стакана гуйярлар ве сүйт билен говы гарышдырярлар. Гарындыдан бир чемче алып, биринҗи стакана гуйярлар. Чая гошулан сүйдүң мукдары көпми я-да сүйде гошулан чайың мукдары көпми?

80.

$$A = 4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4},$$

$$B = 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}.$$

A ве *B* санларың хайсысының улудыгыны тиз хасапламалы.

81. Күшт тагтасының гырасындан ики клетка кесилип айрыляр. Галан клеткалары хайсы ягдайда шу $\boxed{\quad\mid\quad}$ гөрнүшдәки фигуралар билен япып болар?

82. Ашакдакы деңсизлиги субут этмели.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

83. Ашакдакы деңлиги субут этмели.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}.$$

84. $a = 6$, $b = 36$ боланда ашакдакы аңлатманың сан бахасыны хасапламалы. $a^8(a + b^3)(a^7 - b^{14})\cdot(a^2 - b)$.

85. Деңянлы үчбурчлугың дашкы бурчларының бири 118°. Үчбурчлугың кичи бурчларының депелеринден гечирилен бейикликлериң арасындакы бурчы тапмалы.

86. Үчбурчлугың медианасы эдил шол бир депеден чыкян тарапларың ярым жеминден кичидир. Оны субут этмели.

87. *ABC* гөнүбурчлы үчбурчлугың *AB* гипотенузасының үстүнде *K* ве *M* нокатлар алнан, шунлукда $AK = AC$, $BM = BC$. *MCK* бурчуң 45° деңдигини субут этмели.

88. *M* нокат *ABC* үчбурчлугың ичинде ятыр. *BAC* ве *BMC* бурчларың хайсысы улы?

89. Катетлериниң бири (*a* катети) ве гипотенуза гечирилен *h* бейиклиги боюнча гөнүбурчлы үчбурчлук гурмалы.

7-нҗи клас үчин мысал ве меселелер

Көпелдиҗилере дагытмалы:

90. $(x^2 + x)(x^2 + x - 14) + 24$.

91. $x^7 + x^5 + 1$.

92. Тождествоны субут этмели:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \cdots + \frac{20}{x^2-100} = 11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \cdots + \frac{1}{(x-10)(x+1)}\right].$$

93. Эгер $a + b + c = 0$ болса, онда $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ тождествоны субут этмели.

94. 31^{11} ве 17^{14} санларың хайсысы улы?

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

95. Эгер $x_1 - x_2 = 1$ болса, онда $x^2 + kx + 7 = 0$ деңлемеде k-ны тапмалы.

96. Эгер x_1 ве x_2 берлен $\frac{3a-b}{c}x^2 + \frac{c(3a+b)}{3a-b} = 0$ деңлемәниң көклери болса, онда $x_1^9 + x_2^9$ жеми тапмалы.

97. Эгер a натурал сан болса, онда $\frac{14a+3}{21a+4}$ дробь гысгалян дробмы я-да гысгалмаян дробмы?

98. n санын хич бир битин бахасында $\frac{n-16}{15}$ ве $\frac{n-15}{24}$ дробларың бир вагтда битин санлара дең болуп билмежекдиклерини субут этмели.

99. a-ның хайсы битин бахаларында $\frac{2a+3}{5a+7}$ дробы гысгалтмак мүмкиндир?

100. Эгер хайсы хем болса бир сан 3-е бөлүнйән болса, онда шол санын квадраты хем 3-е бөлүнйәндир. Оны субут этмели.

101. Эгер $a - b$ аңлатма 3-е бөлүнйән болса, онда $a^3 - b^3$ аңлатманың 9-а бөлүнйәндигини субут этмели (a ве b — положител ве битин санлардыр).

102. Тараплары 5 ве 11 болан йити бурчлы үчбурчлугың үчүнжи тарапының хем тәк сан билен аңладыляндыгы белли. Булар ялы үчбурчлукларың хеммесини тапмалы.

103. n-иң ислендик тәк бахасында $n^3 + 3n^2 - n - 3$ аңлатманың 48-е бөлүнйәндигини субут этмели.

104. Эгер p сан 2-ден ве 3-ден үйтгешик йөнекей сан болса, онда $p^2 - 1$ санын 24-е бөлүнйәндигини субут этмели.

105. Эгер ики санын квадратларының жеми 7-ә бөлүнйән болса, онда шол санларың хер бири-де 7-ә бөлүнйәр. Оны субут этмели.

106. $43^{23} + 23^{43}$ аңлатманың 66-а бөлүнйәндигини субут этмели.

107. а) $43^{43} - 17^{17}$ санын 10-а бөлүнйәндигини субут этмели.

б) $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$ санын 10-а бөлүнйәндигини субут этмели.

108. $11^{10} - 1$ санын 100-е бөлүнйәндигини субут этмели.

109. $5555^{2222} + 2222^{5555}$ жем 7-ә бөлүнерми?

110. Мен сениң яшыңдакам сениң шол вагтдакы яшың мениң шу вагтдакы яшымдан ики эссе кичиди. Сен мениң хәзирки яшыма бараныңда икимизиң яшымыз 72 болар. Бизиң хер биримиз нәче яшымызда?

111. Түкениксиз хатарың жемини тапмалы:

$$\frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \cdots$$

112. a-ның хич бир бахасында $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ дробуң гысгалмаяндыгыны субут этмели.

113. 5^{7^6} ве 5^{6^7} санлар такык квадрат болуп билерлерми?

114. Эгер натурал санын квадратындакы онлукларың саны тәк болса, онда шол санын бирликлериниң цифри диңе 6 болар. Оны субут этмели.

115. n-иң хайсы бахаларында $2^n + 1$ сан такык квадратдыр?

116. Ашакдакы деңсизлиги субут этмели:

$$\frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{abc} \geqslant 6,$$ бу ерде a, b, c положител санлардыр.

117. Эгер $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ болса, онда

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}},$$ бу ерде

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$$

118. $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = 1$ болса, онда шу дробларың бири — 1-е дең болуп, бейлеки икисиниң хер бириниң + 1-е деңдигини субут этмели.

119. Ашакдакы жеми хасапламалы:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

120. $x^2 + px + q = 0$ деңлеме берлен. Шу деңлемәниң көклерини тапмаздан $x_1^2 + x_2^2$ ве $x_1^3 + x_2^3$ хасапламалы.

121. $x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$ деңлемәниң көклериниң квадратларының жеми иң кичи баха эе болар ялы эдип, a-ны кесгитлемели.

122. Ислендик x үчин $(x-4)(x-6)+3$ аңлатманың положителдигини субут этмели.

123. Деңлемәни чөзмели: $a^2 - \frac{a^2-b^2}{2x-x^2} = \frac{b^2(2+x)}{x-2}$.

124. Системаны чөзмели: $\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5 \\ |x+1| = 4y - 4. \end{cases}$

125. Гой, $[a]$ сан a-дан улы болмадык иң улы битин сан болсун. Деңлемәни чөзмели:

$$\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}.$$

Деңлемелери чөзмели:

126. $(x+4) \cdot (x+5) \cdot (x+7) \cdot (x+8) = 4.$

127. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.

128. $x^3 - y^3 = 91$ деңлемәниң битин көклерини тапмалы.

129. $xy^{100} - x = 1963$ ве $x^{100}y - y = 13$ болар ялы, битин x ве y санларың ёкдугыны субут этмели.

130. $x^8 - y^7z = x^5$ деңлемәни битин санларда чөзмели, бу ерде y ве z йөнекей санлардыр.

131. $3x^2 + 1 = 5y$ деңлемәни канагатландырян x ве y битин санларың ёкдугыны субут этмели.

132. Берлен $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ деңлемәни битин санларда чөзмели.

Деңлеме системаларыны чөзмели:

133.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{9}{20} \end{cases}.$$

134.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \end{cases}$$

135. n-иң хайсы бахаларында

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 3 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 3 \end{cases}$$

деңликлери канагатландырян $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ положител санлар бардыр?

136. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$ деңлемәниң битин санларда нәче чөзүви бар?

137. Ики шәхериң арасындакы узаклыгы автомобиль 60 *км/сағ* тизлик билен гечип, ызына гайданында 40 *км/сағ* тизлик билен гайдыпдыр. Автомобилиң орта тизлигини тапмалы.

138. Эгер 9 саны бирмеңзеш китабың бахасы 11 манат хем-де бирнәче көпүк болса ве эдил шолар ялы 13 китабың бахасы 15 манат хем-де бирнәче көпүк болса, онда бир китабың takык бахасыны тапмалы.

139. Дөртбелгили сан 400 саның ызындан языланда алнан еднбелгили сан takык квадрат болса, шол дөртбелгили саны тапмалы.

140. $x = 19$ боланда $ax^3 + bx^2 + ck + p$ аңлатманың бахасы 1-е дең болар ялы ве $x=63$ боланда шол аңлатманың бахасы 2-ә деп болар ялы, битин a, b, c, p санларың ёкдугыны субут этмели. (Бүтин руссия математики олимпиадасының меселелеринден.)

141. Тарапы 1-е дең болан квадратың ичинде 51 нокат бар. Шол нокатларың иң болманда үчүсиниң радиусы $\frac{1}{7}$-е деп болан тевереғиң ичинде ятяндыгыны субут этмели.

142. Футбол ойны боюнча биринжи орны эелемәге 30 команда гатнашяр. Хер ики команда өз араларында бир оюн ойнамалы. Ярышың исләндик вагтында бирмеңзеш санда оюн ойнан ики саны команданың тапылжакдыгыны субут этмели.

143. Клас тагтасында 1, 2, 3, ..., 1966 санлар язылыпдыр. Исләндик ики саны бозуп, оларың дерегине шол санларың тапавудыны язмак мүмкиндир. Шейле операциялары довам этмек билен, тагтада диңе нуль галар ялы этмегиң мүмкин дәлдигини субут этмели.

144. Шәхерде 10000 телефон бар. Оларың номерлери дөрт цифр билен белленилйәр. Шәхериң меркези районындакы телефонларың саны әхли телефонларың санының ярысындан көп. Шәхериң меркези районында иң болманда бир телефоның номери эдил шол райондакы башга ики телефоның номерлериниң жемине деңдигини субут этмели.

145. Эгер $x + y \geqslant 0$ болса, онда ашакдакы деңсизлиги субут этмели:

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^5 \geqslant 0.$$

146. Эгер $a > 0$ ве $b > 0$ болса, онда $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$ деңсизлиги субут этмели.

Ашакдакы деңсизликлери субут этмели:

147. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} > \frac{1}{15}$.

148. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1968}} > \sqrt{1968}$.

149. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

150. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$.

151. Ики саны положител саның жеми үйтгемейән сан болса, онда оларың көпелтмек хасылының иң улы бахасы көпелдижилер бири-бирине дең боланда алыняр. Оны субут этмели.

152. Ислендик натурал $n > 1$ сан үчин ашакдакы деңсизлиги субут этмели:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

153. Дөрт саны положител санын жеми үйтгемейән хемишелик сан болса, онда оларың көпелтмек хасылының иң улы бахасы көпелдижилер бири-бирине дең боланда алыняр. Оны субут этмели.

154. Үч саны положител санын жеми үйтгемейән сан болса, онда оларың көпелтмек хасылының иң улы бахасы көпелдижилер бири-бирине дең боланда алыняр. Оны субут этмели.

155. Берлен $2p$ периметрли үчбурчлукларың иң улы мейданлысыны тапмалы.

156. $\sqrt{3}$ санын иррационал сандыгыны субут этмели.

157. $\sqrt{6}$ саның иррационал сандыгыны субут этмели.

158. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ саның иррационал сандыгыны субут этмели.

159. a тарапы, $b-c$ кесими ве B бурчы боюнча үчбурчлук гурмалы.

160. Йити бурчы ве диагоналларының жеми боюнча ромб гурмалы.

161. Гөнүбурчлы үчбурчлукда гипотенузаның кубуның катетлериниң кубларының жеминден улудыгыны субут этмели.

162. Секизбурчлугың бурчларының хеммеси бири-бирине дең, тарапларының узынлыгы болса битин санлар билен аңладыляр. Секизбурчлугың гаршылыклы тарапларының деңдиклерини субут этмели.

163. Берлен үчбурчлугың депесинден гөни чызык гечирмели, шунлукда үчбурчлугың бейлеки ики депесинден шол гөни чызыга ченли болан узаклык иң улы баха эе болмалы.

164. Эгер $ABCD$ дөртбурчлукда диагоналларың бири бейлеки диагоналы ики дең бөлеге бөлйән болса, онда ABO, BCO, CDO ве ADO үчбурчлукларың дең мейданлары болар ялы эдип, дөртбурчлугың ичинден шейле бир O нокады тапмак мүмкиндигини субут этмели.

165. b, c таралары ве $C-B$ бурч боюнча үчбурчлук гурмалы.

166. Гипотенузасы ве катетлериниң бирине гечирилен медианасы боюнча гөнүбурчлы үчбурчлук гурмалы.

167. Квадратың таралары берлен A, B, C, D дөрт нокат аркалы гечер ялы эдип, квадрат гурмалы.

168. Берлен AB, AD, AC кесимлер ве BAD, BCD бурчлар боюнча дөртбурчлук гурмалы.

169. Гөнүбурчлы үчбурчлукда гипотенуза гечирилен бейиклигиң терс бахасының квадраты катетлериң терс бахаларының квадратларының жемине деңдир. Оны субут этмели.

170. Үчбурчлук үчин ашакдакы багланышыгы субут этмели:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{a}{2}, \text{ бу ерде } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

171. Йити бурчлы үчбурчлугың ики бейиклигиниң эсасыны бирлешдирйән гөни чызыгың берлен үчбурчлукдан шоңа меңзеш үчбурчлугы кесйәндигини субут этмели.

172. Эгер a, b, c үчбурчлугың тараплары болса ве m_b хем-де m_c медианалар өзара перпендикуляр болса, онда $5a^2 = b^2 + c^2$ боляндыгыны субут этмели.

173. Ислендик үчбурчлук үчин ашакдакы деңлиги субут этмели: $S^2 = \frac{1}{2} h_a h_b h_c R$, бу ерде h_a, h_b, h_c үчбурчлугың бейикликлери ве R үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусыдыр.

174. Үчбурчлугың h_a, h_b, h_c бейикликлери билен шол үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң r радиусының арасында ашакдакы багланышыгың барлыгыны субут этмели:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

175. Үчбурчлугың эдил шол бир депесинден чыкян бейиклиги билен медианасы шол депедәки бурчы дең бөлеге бөлйән болса, үчбурчлугың бурчларыны хасапламалы.

176. Үчбурчлугың берлен үч медианасы боюнча онуң тарапларыны тапмалы.

177. Үчбурчлугың h_a, h_b, h_c үч бейиклиги боюнча онуң мейданыны хасапламалы.

178. a эсасы ве h_b, h_c ики бейиклиги боюнча үчбурчлук гурмалы.

179. a тарапы, m_b медианасы ве h_a бейиклиги боюнча үчбурчлук гурмалы.

180. A бурчы, A бурчуң биссектрисасы ве A depeден гечирилен бейиклик боюнча үчбурчлук гурмалы.

181. a тарапы, B бурчы ве m_b медианасы боюнча үчбурчлук гурмалы.

182. Гүберчек дөртбурчлугың үч дең тарапларының ортасы берлен болса, шол дөртбурчлугы гурмалы.

183. Үчбурчлугың a тарапы, h_a бейиклиги ве ABC хем ACB бурчларың $B-C$ тапавуды боюнча үчбурчлук гурмалы.

184. Үчбурчлугың ики тарапының ортасы ве шол тарапларың бирине гечирилен биссектрисаның ятан гөни чызыгы боюнча үчбурчлук гурмалы.

185. Бурчуң ичинде K нокат берлен. Шол K нокат аркалы гөни чызык гечирмели, шунлукда, бурчуң тарапларының кесилмеги нетижесинде алнан үчбурчлугың мейданы иң кичи баха эе болмалыдыр.

186. Бурчуң ичинде берлен N нокат аркалы гөни чызык гечирмели, шуңлукда, бурчуң тарапларының кесилмеги нетижесинде алнан үчбурчлугың периметри иң кичи баха эе болмалыдыр.

187. Эркин дөртбурчлугың тараплары диаметр эдилип гурлан тегелеклериң шол дөртбурчлугы бүтинлей япяндыгыны субут этмели.

188. ABC үчбурчлугың CC_1 медианасы CA ве CB тарапларың кичиси билен улы бурч эмеле гетирйәнлигини субут этмели.

8-нжи клас үчин мысал ве меселелер

186. Садалашдырмалы:

$$\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt[3]{18}}.$$

190. Субут этмели:

$$\sqrt{26+15\sqrt{3}}+\sqrt{26-15\sqrt{3}}=4.$$

Деңлемелери чөзмели:

191. $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5(2x^2+3x+2)$.

192. $(3x^2+2x+2)(3-4x-6x^2)=6$.

193. $(x^3+6x^2+11x+6)(x+4)=120$.

194. $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+16=0$.

195. $x^4-2x^3+x+\frac{1}{4}=0$.

196. $8x^3-20\sqrt{2}x^2+22x+3\sqrt{2}=0$.

197. $(x^2+a^2)(x-3a)^2=8a$, $a\neq 0$.

198. $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$ деңлемәниң көклериниң квадратларының жемини тапмалы.

Деңлемелери чөзмели:

199. $(1+x+x^2)(b-x-x^2)=0$.

200. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

201. $\sqrt{3x^2-10x+8}-\sqrt{6x^2+16x-32}=\sqrt{18x^2-24x}$.

202. $\sqrt{x^2-x-6}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}=\sqrt{x^2-9x+18}$.

203. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$.

204. $[a]$ сан a-дан улы болмадык иң улы битин сан болса, деңлемәни чөзмели:

$$\left[\frac{1-3x}{2}\right]=x^2-2x.$$

Деңлеме системаларыны чөзмели:

205. $$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-\ldots-x_n=2a \\ -x_1+3x_2-x_3-\ldots-x_n=4a \\ -x_1-x_2+7x_3-\ldots-x_n=8a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1-x_2-x_3-\ldots+(2^n-1)x_n=2^na. \end{cases}$$

206. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n=a_1 \\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)x_n=a_2 \\ (n-1)x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)x_n=a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+x_n=a_n. \end{cases}$$

207. $\begin{cases} x^2+y=5 \\ x^6+y^3=65. \end{cases}$

208. $\begin{cases} x^2+xy=210 \\ y^2+xy=231. \end{cases}$

208. Системаны чөзмели:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{y+7}=4 \\ x+y=6. \end{cases}$$

Деңлемелери чөзмели:

210. $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

211. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

212. Деңлеме системаларыны чөзмели:

$$\begin{cases} x(y+z)=a^2 \\ y(x+z)=b^2 \\ z(x+y)=c^2. \end{cases}$$

213. $\begin{cases} 2(x+y-2)=y(x-y+2) \\ x^2(y-1)+y^2(x-1)=xy-1. \end{cases}$

214. $x^y+1=z$ деңлемәни йөнекей санларда чөзмели.

215. Икибелгили саны тапмалы, шуңлукда онуң онлукларының кубы билен бирликлериниң квадратының жеми шол сана дең болмалы.

216. Эгер $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ көпчлениң коэффициентлери битин сан болса ве $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$ хем-де a_n санлар 2-э бөлүнмейән болса, онда шол көпчлениң битин көклериниң ёкдугыны субут этмели.

217. Садалашдырмалы:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

218. a_1, a_2, a_3, a_4 дөрт саны положител сан үчин ашакдакы багланышыгы субут этмели:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

219. Үч саны a_1, a_2, a_3 отрицател болмадык санлар үчин ашакдакы багланышыгы субут этмели:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

220. Эгер $a>0,\ b>0,\ c>0$ ве $a+b+c=1$ болса, онда $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$ деңсизлиги субут этмели.

221. Эгер a, b, c санлар положител сан болсалар, онда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$ деңсизлиги субут этмели.

222. Эгер

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$$
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=1$$

болса, онда $-1 \leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n \leqslant 1$ деңсизлиги субут этмели.

223. Эгер $a \geqslant b \geqslant 0$ болса, онда $a^4+b^4 \geqslant 2ab^3$ деңсизлиги субут этмели.

224. Эгер $a>b>0$ ве $a^2+b^2=6ab$ болса, онда $\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}$ деңлиги субут этмели.

225. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1969}$ санларың положителдиклери белли ве оларың көпелтмек хасылы 1-е деңдир.

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)+\ldots+(1+x_{1969}) \geqslant 2^{1969}$$

багланышыгы субут этмели.

226. Ашакдакы деңсизлиги субут этмели:
$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc.$

227. x ве y натурал санлар, шунлукда $y>x^2$. $\frac{\sqrt{y}}{x+y}<\frac{1}{x+1}$ деңсизлиги субут этмели.

Ашакдакы жемлери хасапламалы:

228. $1+3+6+10+15+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$.

229. $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

230. $\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{x}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{n-1}{x}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{x-2}{x}\right)+\ldots+$
$+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right).$

231. $S=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$.

232. Ашакдакы хатарың n члениниң жемини тапмалы:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\frac{16}{x^{10}+1}+\ldots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1};\quad x>2.$$

Ашакдакы жемлери хасапламалы:

233. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2.$

234. $\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2}+\frac{2\cdot2+1}{2^2\cdot3^2}+\frac{2\cdot3+1}{3^2\cdot4^2}+\ldots+\frac{2\cdot1968+1}{1968^2\cdot1962^2}.$

235. Ашакдакы көпелтмек хасылыны тапмалы:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\ldots\left(x^{256}+\frac{1}{x^{256}}\right).$$

Бу ерде $x \neq 1$.

236. 81 саны бирлик билен язылан саның 81-е бөлүнйәндигини субут этмели.

237. Дөртбелгили сан 400 санын ызындан языланда такык квадрат алыняи болса, онда шейле дөртбелгили санларың хеммесини тапмалы.

238. 523... саның ызындан үч цифр язмалы, шунлукда алнан алтыбелгили сан 7-ә, 8-е ве 9-а бөлүнмели.

239. Үчбелгили саның ахыркы ики цифри бири-бирине деӊ. Хасапламаның икилик системасында шол саның бирмеңзеш цифрлер билен аңладыляныны билип, оны тапмалы.

240. $a+a^2+\ldots+a^{100}$ аңлатманың $a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-100}$ аңлатма бөлүнендәки пайы тапмалы.

241. $x^{128}-y^{128}$ аңлатманы $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\times$ $\times(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64})$ аңлатма бөлмели.

242. $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ көпчлениң $x^4+x^3+x^2+x+1$ көпчлене бөлүнйәндигини субут этмели.

243. Эгер

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)$$

көпелтмек хасылындакы көпелдижилериң хер бириндәки дробь гошулыжылар ташланылса, онда көпелтмек хасылының бахасының үйтгемейәнлигини субут этмели.

244. $19^{19}+69^{69}$ саның 44-е бөлүнйәндигини субут этмели.

245. 9^{9^9} сан нәхили цифр билен гутаряр?

246. Дине 3 манатлыклар ве 5 манатлыклар билен 7-ден улы болан эркин битин санлары аңладян пулы гайтаргысыз төләп болжакдыгыны субут этмели.

247. Алтыбелгили сан 7-ә бөлүнйәр. Эгер онуң ахыркы цифрини өңе гечирилсе, онда алнан сан 7-ә бөлүнерми?

248. Эгер $a+b+c<0$ болса, онда

$$\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^3 - xz = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$$

системаның хакыкы көклериниң ёкдугыны субут этмели.

249. Эгер $\frac{1}{2}$ дробдан улы болан догры дробуң санавҗысына кәбир сан гошулса ве майдалавҗысы шол сана көпелдилсе, онда дробуң улулыгы үйтгемейәр. Шол догры дробы тапмалы.

250. m-иң ислендик битин бахасында $\frac{3m-5}{12}\cdot m(m-1)\times$ $\times(m-2)$ саның битин сандыгыны субут этмели.

251. Бирнәче төверек илки квадрат гөрнүшинде, соңра догры үчбурчлук гөрнүшинде текизликде догры хатарлар боюнча ерлешдирилен, шунлукда не биринҗи гезек, не-де икинҗи гезек төверек артык галмандыр. Квадратың тарапындакы төверeклериң саны үчбурчлугың тарапындакы төверeклериң санындан икиси аз болупдыр. Төверeклериң саны нәче?

252. Күшт ойнуна уссатлар ве гроссмейстерлер гатнашярлар. Уссатларың саны гроссмейстерлериң санындан үч эссе көп болуп, оларың топлан очколары гроссмейстерлериңкиден 12 эссе артык болупдыр. Ойна нәче уссат ве нәче гроссмейстер гатнашыпдыр?

253. $ABCD$ трапецияның BC тарапының ортасындакы M нокат онуң A ве D депелери билен бирлешдирилипдир. MDA үчбурчлугың мейданының трапецияның мейданының ярысына деңдигини субут этмели.

254. Үчбурчлугың эсасы 6, эсасындакы бурчлар 40° ве 30°. Шу үчбурчлугы $R=3{,}14$ төверeгиң ичинде ерлешдирип болҗакдыгыны субут этмели.

255. AB кесим C ве D нокатлардан дүрли бурч астында гөрүнйәр. A, B, C, D нокатлар хайсы халда бир төверeгиң үстүнде ятарлар?

256. Эгер ABC үчбурчлугың тараплары a, b, c болса, онда онуң ичинден чызылан төверeгиң O меркези AA_1 биссектрисаны нәхили гатнашыкда бөлйәр?

257. Эгер ABC үчбурчлукда BB_1 онуң B бурчунуң биссектрисасы болса, онда $b:2p=B_1O:B_1B$ деңлиги субут этмели, бу ерде O үчбурчлугың ичинден чызылан төверeгиң меркези, $2p$ онуң периметри ве $b=AC$

258. Трапецияның диагоналлары 113 *см* ве 17 *см*, бейиклиги 15 *см* болса, онуң мейданыны тапмалы.

259. Трапеция диагоналлары билен дөрт саны үчбурчлуга бөлүнйәр. Эгер трапецияның эсасларына сепленйән үчбурчлукларың мейданлары p^2 ве q^2 болса, онда трапецияның мейданыны тапмалы.

260. $ABCD$ параллелограмың C депеси AB ве AD тарапларының орталары билен бирлешдирилен. Шунлукда BD диагоналың үч дең бөлеге бөлүнйәндигини субут этмели.

261. Төверeк дөрт нокат аркалы дөрт дуга бөлүнен. Шол дугаларың орталары a, b, c, e нокатлардыр. a, b, c, e нокатлары бирлешдирйән гөни чызыкларың ичинде өзара перпендикуляр боланларының тапылҗакдыгыны субут этмели.

262. Меркезлери O_1 ве O_2 нокат болан ики төверeк A ве B нокатларда кесишйәрлер. O_1A гөни чызык O_2 төверeги N нокатда кесйәр. O_1, O_2, B, N нокатларың бир төверeгиң үстүнде ятяндыкларыны субут этмели.

263. Төверeгиң ичинден чызылан $ABCD$ дөртбурчлук берлен. $AB=BC$. $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(DA+CD)h_b$ деңлиги субут этмели, бу ерде h_b — ABD үчбурчлугың бейиклигидир.

264. Ити бурчлы үчбурчлугың ики бейиклигиниң эсасларыны бирлешдирйән гөни чызыгың шол үчбурчлукдан оңа меңзеш үчбурчлугы кесйәндигини субут этмели.

265. O_1 ве O_2 төверeклер A ве B нокатларда кесишйәрлер. MN гөни чызык O_1 төверeге M нокатда ве O_2 төверeге N нокатда галташяр. Гой, A нокат кесишме нокатларың MN гөни чызыкдан хас узакда ятаны болсун.

$\angle O_1AO_2 \quad 2\angle MAN$ деңлиги субут этмели.

266. Гөнүбурчлы үчбурчлугың катетлериниң җеминиң онуң дашындан ве ичинден чызылан төверeклериң диаметрлериниң җемине деңдигини субут этмели.

267. Тараплары 13, 14, 15 болан үчбурчлугың агырлык меркези онуң депелери билен бирлешдирилип, үч саны үчбурчлук алныпдыр. Шол үчбурчлукларың хер бириниң мейданыны тапмалы.

268. Эгер a, b, c үчбурчлугың тараплары ве h_a, h_b, h_c онуң бейикликлери болса, онда

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

деңлиги субут этмели.

269. Үчбурчлугың m_a, m_b, m_c үч медианасы берлен болса, онуң мейданыны хасапламалы.

270. Үчбурчлугың берлен m_a, m_b, m_c медианалары боюнча онуң тарапларыны тапмалы.

271. Үчбурчлугың h_a, h_b, h_c үч бейиклиги белли болса, онуң мейданыны хасапламалы.

272. Тараплары 3, 4 ве 5 болан гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасының үстүнде дашкы квадрат гурлан ве онуң диагоналларының кесишме нокатлары гөни бурчуң депеси билен гөни чызык аркалы бирлешдирилен. Шу гөни чызыгың гипотенуза билен кесишмеги аркалы гипотенузада алнан кесимлериң гатнашыгыны тапмалы.

273. Үчбурчлугуң депесинден онуң a эсасыны m ве n кесимлере бөлйән гөни чызык гечирилен. Эгер үчбурчлугың m кесиме сеплешйән тарапы c болуп, n кесиме сеплешйән тарапы b болса, онда депеден чыкян кесимиң узынлыгыны тапмалы.

274. Трапецияның a, b, c, d дөрт тарапы боюнча онуң диагоналларыны хасапламалы (b ве d параллел тараплар; $b > d$).

275. a, b, c, d дөрт тарапы боюнча трапецияның мейданыны тапмалы (b ве d параллел-тараплар, $b > d$).

276. a, b, c, d дөрт тарапы боюнча төверегиң ичинден чызылан дөртбурчлугың мейданыны тапмалы.

277. Эгер тараплары a, b, c, d болан дөртбурчлугың дашындан ве ичинден төверек чызып болян болса, онда шол дөртбурчлугың мейданыны тапмалы.

278. Йити α бурч үчин $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ формуланың геометрики гелип чыкышыны гөркезмели.

279. a, $c-b$ ве B белли болса, үчбурчлук гурмалы.

280. $a=\sqrt{5}+1$ кесим берлен. Циркуль ве чызгыч аркалы узынлыгы бирлиге дең болан кесим гурмалы.

281. Гүберчек дөртбурчлугың үч дең тарапының ортасы берлен. Дөртбурчлугы гурмалы.

282. Медианаларың кесишме нокады ве үчбурчлугың ики орта чызыкларының ортасы боюнча үчбурчлук гурмалы.

283. ABC үчбурчлук берлен. $BD=DE=EC$ болар ялы эдип, D ве E нокатлары дегишлиликде AB ве BC тарапларың үстүнде ятар ялы DE кесими гурмалы.

284. Берлен ANB деңянлы үчбурчлугың AB эсасында CD тарапы үчбурчлугың AN ве BN тарапларыны дегишлиликде E ве K нокатларда кесйән $ABCD$ гөнүбурчлук гурмалы, шунлукда ADE, ENK, BCK үчбурчлукларың мейданларының жеми иң кичи баха эе болмалы.

285. Islендик үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң диаметриниң шол үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусындан улы дәлдигини субут этмели.

286. ABD ве BCD үчбурчлукларың ичинден чызылан төвереклер дең болар ялы, ABC үчбурчлугың AC тарапында D нокады тапмалы.

287. ABC үчбурчлугың C депесинден гечирилен CD бейиклик, CE биссектриса, CO медиана шол депедәки C бурчы дең дөрт бөлеге бөлйәр. Үчбурчлугың бурчларыны хасапламалы.

288. ABC үчбурчлугың тарапларының узынлыклары

$$AB\cdot BC\cdot CA < 60$$

багланышыгы канагатландыряр.

AB, BC ве CA тарапларың үстүнде дегишлиликде C', A', B' нокатлар сайланып алнан.

$AC'\cdot C'B\cdot BA'\cdot A'C\cdot CB'\cdot B'A < AB\cdot BC\cdot CA$ деңсизлиги субут этмели?

9-нжы клас үчин мысал ве меселелер

289. A, B, C үч нокат берлен. ABM ве BMC үчбурчлукларың дашындан чызылан төвереклериң радиусларының жеми иң кичи баха эе болар ялы, M нокады AC гөни чызыгың үстүнде ниреде сайлап алмалы?

Садалашдырмалы:

290. $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

291. $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$.

292. $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$.

293. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+$
$+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}+\frac{1}{(x-5)(x-6)}$.

294. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$.

295. Тождествоны субут этмели:

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})=\frac{x^{32}-y^{32}}{x-y}.$$

296. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ болса, онда $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ тождествоны субут этмели.

297. Эгер $a+b+c=0$ болса, онда $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$ тождествоны субут этмели.

Көпелдижилере дагытмалы:

298. x^3+5x^2+3x-9.

299. $6x^2+11x+5$.

300. $10x^2+19x-15$.

301. $15x^2+7x-2$.

302. $6x^2+11x+3$.

303. x^3-7x-6.

304. $25x^2 + 5x - 12$.

305. $(x^2 - x)(x^2 - x - 8) + 12$.

306. $x^5 + x + 1$.

307. $x^5 + x^3 + x$.

308. $x^4 + x^3 + x^2 + 2$.

309. $x^4 + 324$.

310. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$.

311. $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$.

312. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

313. $x + a = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32} + \frac{x}{64} + \frac{x}{128}$.

314. $\frac{a + b - x}{c} + \frac{a + c - x}{b} + \frac{b + c - x}{a} + \frac{4x}{a + b + c} = 1$.

315. $\frac{x - ab}{a + b} + \frac{x - ac}{a + c} + \frac{x - bc}{b + c} = a + b + c$.

316. $-b^2x + x - \frac{a}{x - a} - b = \frac{x}{a - x}$.

Деңлеме системаларыны чөзмели:

317. $\begin{cases} \frac{x - 4}{3} = \frac{y - 7}{5} = \frac{z - 11}{2}, \\ x + y + z = 72. \end{cases}$

318. $\begin{cases} \frac{xy}{x + y} = \frac{10}{7} \\ \frac{xz}{x + z} = \frac{8}{5} \\ \frac{yz}{y + z} = \frac{40}{13}. \end{cases}$

319. $\begin{cases} 5(y + z) - x = -1 \\ 4(x + z) - 2y = 2 \\ 3(x + y) - 3z = -1. \end{cases}$

320. Эгер

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_9 + x_{10} + x_1 = 0 \\ x_{10} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

болса, онда $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{10} = 0$ субут этмели.

Деңлеме системаларыны чөзмели:

321. $\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} \\ \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} \\ \frac{x_3}{a_3} = \frac{x_4}{a_4} \\ \cdots \\ \frac{x_{19}}{a_{19}} = \frac{x_{20}}{a_{20}} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{20} = A. \end{cases}$

322. $\begin{cases} \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{y + 2} + \frac{1}{z} = 4 \\ \frac{1}{x - 1} + \frac{6}{y + 2} - \frac{3}{z} = 0 \\ \frac{2}{x - 1} - \frac{4}{y + 2} + \frac{7}{z} = \frac{23}{3}. \end{cases}$

323. Ики санын тапавуды, көпелтмек хасылы ве оларың биринжиси 5:28:7 ялы гатнашярлар. Шол санлары тапмалы.

324. Жеми 14, көпелтмек хасылы 64 болан геометрик прогрессияны эмеле гетирйән үч саны тапмалы.

325. Едә бөлүнйән 1968 бирликлерден ве 1968-ден аз болмадык нуллардан дүзүлен санларың бардыгыны субут этмели.

326. Диңе бәшликлер билен язылан 27 белгили саның 27-ә бөлүнйәндигини субут этмели.

327. Бәш саны нәбелли саны ики-икиден бири-бирине гошуп, 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15 санлары алыпдырлар. Шол бәш саны тапмалы.

328. Хасапламагың секизлик системасында язылан саның 7-ә бөлүнмек нышаныны тапмалы.

329. Үчбелгили сан билен эдил шол цифрлериң терс тертипде язылмагы аркалы алнан саның арасындакы тапавудың натурал саның квадраты болуп билмежекдигини субут этмели.

330. Эгер 1968-нжи йылда адамларың яшы доглан йылының цифрлериниң жемине дең болса, онда олар нәченжи йылда доглупдыр?

331. Икибелгили саның цифрлериниң жеми 13-е дең, гөзленилйән сан билен шол цифрлериң терс тертибинде язылып алнан саның тапавуды 7 билен гутаряр. Шол саны тапмалы.

332. Китабың сахыпаларыны нумерлемек үчин 450 цифр герек болупдыр. Китабың нәче сахыпасы бар?

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

333. Битин санлар хатары берлен. Биринжи сан 2, икинжиси 3, соңкы санларың хер бири өң янындакы сандан онуң өң янындакы саны айырмак аркалы алыняр. Шол хатарың 1969-нжысыны тапмалы.

334. $x^2-3y^2=17$ деңлемәни канагатландырян битин x ве y санларың ёкдугыны субут этмели.

335. $x^2-y^2=1966$ деңлемәни канагатландырян битин x ве y санларың ёкдугыны субут этмели.

336. Эгер $x+y=a$ ве $xy=b$ болса, онда x^4+y^4 тапмалы.

337. Дөрт саны ызыгидерли санын көпелтмек хасылы 1 сан артдырылса, онда алнан жемиң такык квадрат болляндыгыны субут этмели.

338. Хасапламалы:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{32}}\right)+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}.$$

339. Ашакдакыны хасапламалы:

$$2\cdot 1024^8-(1+2+2^2)(1+2^3+2^6)(1+2^9+2^{18})(1+2^{27}+2^{54}).$$

340. n-иң islendik битин бахасында n^5-5n^3+4n саның 120-ә бөлүнйәндигини субут этмели.

341. n^4-1 саның 5-е бөлүнйәндигини субут этмели, бу ерде n сан 5-е бөлүнмейәр.

342. $n\geqslant 1$ боланда $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ саның 19-а галындысыз бөлүнйәндигини субут этмели.

343. m-иң исленди битин бахасында

$$\frac{1}{24}m^4+\frac{1}{4}m^3+\frac{11}{24}m^2+\frac{1}{4}m$$

саның битин сан болляндыгыны субут этмели.

344. $\dfrac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}$ дробы гысгалтмалы.

345. $\dfrac{3n^2-3n+20}{n-1}$ дробь битин бахалара эе болар ялы, n-иң әхли битин положител бахаларыны тапмалы.

346. n^2+2 саның 5-е бөлүнмейәндигини субут этмели.

347. n-иң исленди битин бахасында $n(n+1)(2n+1)$ саның 6 бөлүнйәндигини субут этмели.

348. Эгер n — натурал сан болса, онда $n(n^2+5)$ саның 6 бөлүнйәндигини субут этмели.

349. $7^{777}+1$ сан 5-е бөлүнйәр диен тассыкламаның догрудыгыны я-да нәдогрудыгыны субут этмели.

350. Бәш саны ызыгидерли положител саның квадратларының жеминиң битин саның квадраты болуп билмежекдигини субут этмели.

351. Гысгалмаян дробуң санавжысына 21, майдалавжысына 28 гошуланда дробуң улулыгы үйтгемейәр. Шол дробы тапмалы.

352. Икибелгили сан билен шоны аңладян цифрлериң терс тертипде язылан саның жеми долы квадратдыр. Шейле санларың хеммесини тапмалы.

353. $3^{1965}-1965$ саның иң ахыркы цифрини тапмалы.

354. Тәк саның квадраты 8-е бөлүненде галындыда 1 галяндыгыны субут этмели.

355. Исленди хакыкы x сан үчин ($a>0$ боланда)

$$a^{2x}\leqslant\frac{1}{3}(1+2a^{3x})$$

деңсизлиги субут этмели.

356. Деңсизлиги субут этмели: $(a+b)^4\leqslant 8a^4+8b^4$.

357. Эгер a ве b положител санлар болса (n — натурал сан), онда $(a+b)^n<2^n(a^n+b^n)$ деңсизлиги субут этмели.

358. k-ның хайсы бахаларында

$$k^{k+1}+(k+1)^k$$

аңлатма 3-е бөлүнйәр?

359. p ве $8p^2+1$ санлар йөнекей санлардыр. p саны тапмалы.

360. Эгер $a+b+c$ сан 6 бөлүнйән болса, $a^3+b^3+c^3$ саның-да 6 бөлүнйәндигини субут этмели.

361. Дүрли бурчлы гүберчек дөртбурчлугың иң болманда бир бурчуның күтекдигини субут этмели.

362. Берлен төверегиң диаметриниң ахырларындан ики саны параллел хорда гечирилен. Шол хордаларың деңдигини ве оларың бейлеки ики ахыркы нокатларының төверегиң меркези билен бир гөни чызыгың үстүнде ятяндыгыны субут этмели.

363. Үчбурчлугың үч медианасының жеминиң периметриниң $\frac{3}{4}$-ден улудыгыны ве периметриден кичидигини субут этмели.

364. Берлен a тарапы, m_a медианасы ве h_a бейиклиги боюнча үчбурчлук гурмалы.

365. Дөрт тарапы ве ики гаршылыклы тарапының арасында эмеле гелйән бурчы боюнча дөртбурчлук гурмалы.

366. Ярым тегелек ве онуң ичинде бир нокат берлен. Диңе бир чызгыч аркалы шол нокатдан диаметре перпендикуляр индермели.

367. Берлен b ве c таraплары хем-де m_a медианасы боюнча үчбурчлук гурмалы.

368. Диагоналы билен тарапының жеми боюнча квадрат гурмалы.

369. Гипотенузасы ве ики катетиниң жеми боюнча гөнүбурчлы үчбурчлук гурмалы.

370. *C* депеси чызгыда ерлешмейән *ABC* үчбурчлук берлен. Шу үчбурчлугын *A* ве *B* депелеринден чыкян медианалары гечирмели.

371. Берлен тегелегиң ичинде ерлешен *A* нокат аркалы узынлыгы берлен *a* кесиме дең болан хорда гечирмели.

372. *ABCD* дөртбурчлукда $\angle A = \angle B$, $\angle D > \angle C$, $AD < BC$ деңсизлиги субут этмели.

373. Деңянлы гөнүбурчлы үчбурчлугың катетлери *a* дең. Гөни бурчуң депесинден бейиклик, йити бурчларың депелериниң бирinden медиана, бейлекисинден биссектриса гечирилйәр. Бейиклигин, медиананың ве биссектрисаның кесишмегинден эмеле гелен үчбурчлугын мейданыны тапмалы.

374. *ABCD* параллелограмда *A* ве *B* бурчларың биссектрисалары *K* нокатда, *B* ве *C* бурчларың биссектрисалары *L* нокатда, *C* ве *D* нокатларың биссектрисалары *M* нокатда, *D* ве *A* бурчларың биссектрисалары *N* нокатда кесишйәрлер. *KLMN* дөртбурчлугың диагоналларының деңдигини субут этмели.

375. Гүберчек көпбурчлугың кәбир тараплары гызыл, галанлары болса гөк. Гызыл тарапларының узынлыкларының жеми периметриниң ярысындан кичи, хич бир ики саны гөк тарап бири-бириниң янында дәл. Көпбурчлугың ичинден төверек чызып болмажакдыгыны субут этмели.

376. Деңянлы *ABC* үчбурчлугың *B* депесиндәки бурчы 20° дендир. *C* депеден *CD* ве *CE* ики саны гөни чызык гечирилек, шунлукда *CD* гөни чызык *AC* эсас билен 50° ве *CE* гөни чызык шол эсас билен 60° эмеле гетирйәрлер. (*D* ве *E* нокатлар *AB* тарапың үстүнде ятярлар). *CE* кесимиң үстүнде $CK = AD$ болар ялы эдип, *CK* кесим өлчелип гоюляр. *AKC* бурчы кесгитлемели.

377. Трапецияның параллел болмадык тарапының бирине сепleшйән бурчларың биссектрисалары гөни бурч асты билен кесишйәрлер ве шол кесишме нокат трапецияның орта чызыгының үстүнде ятар. Оны субут этмели

378. Квадратдан тапавутлы ромбуң дашындан төверек чызып болмаянлыгыны субут этмели.

379. Трапецияның эсаслары *a* ве *b* болуп, онуң улы эсасындакы бурчларың жеми 90° деңдир. Трапецияның эсасларының орталарыны бирлешдирйән кесимиң узынлыгыны кесгитлемели.

380. Үчбурчлугың медианаларының онуң мейданыны алты саны дең улулыкдакы үчбурчлуклара бөлйәндигини субут этмели.

381. Дүрли тараплы үчбурчлукда биссектрисаның медиана билен бейиклигиң арасында ятяндыгыны субут этмели.

382. Дөртбурчлугың мейданы 3 $см^2$ дең болуп, онуң диагоналлары 6 *см* ве 2 *см* дендирлер. Диагоналларың арасындакы бурчы тапмалы.

383. *ABC* үчбурчлугың h_a бейиклиги шу үчбурчлугың *A* депесиниң янындакы дашкы бурчуң биссектрисасының узынлыгының ярысына дендир. *B* ве *C* бурчларың тапавудыны тапмалы.

384. Трапецияның гапдал тарапларының ортасы билен диагоналларының орталарының бир гөни чызыгың үстүнде ятяндыкларыны субут этмели.

385. Гөнүбурчлы үчбурчлугың гөни бурчундан чыкян биссектрисаның медиана билен бейиклигиң арасындакы бурчы ики дең бөлеге бөлйәндигини субут этмели.

386. Эгер гүберчек дөртбурчлукда гаршылыклы тарапларының орталарыны бирлешдирйән кесимлер дең болса, онда онуң диагоналларының перпендикулярдыкларыны субут этмели.

387. Мейданы *S* дең болан *ABC* үчбурчлукда *AK* ве *BE* медианалар *O* нокатда кесишйәрлер. *CKOE* дөртбурчлугың мейданыны тапмалы.

388. Берлен тегелегиң ичинде ятан *A* нокат аркалы хорда гечирмели, шунлукда шол хорда башга берлен хорда билен ики дең бөлеге бөлүнмели.

10-нжы клас үчин мысал ве меселелер

389. Ашакдакы деңлемәниң хакыкы көклерини тапмалы:

$$(x-2{,}5)^4+(x-1{,}5)^4=1.$$

Деңлемелери чөзмели:

390. $x^4+4x-1=0.$

391. $x^4-4x^3-1=0.$

392. $7x^4+2x^3+3x^2+4x+5=0.$

393. $x^4-8x+63=0.$

394. $4x^4-8x^3+4x+1=0.$

395. $(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=2$ деңлемәниң хакыкы көклерини тапмалы.

396. Деңлемәни чөзмели:

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}.$$

397. Деңлемәниң хакыкы көклерини тапмалы:

$$\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}=\frac{a^2}{x^2}.$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Деңлемелери чөзмели:

398. $(x^2-16)\cdot(x-3)^2+9x^2=0$.

399. $(x-5)^3(x-4)^3+2(x-5)^3+(x-4)^3=0$.

400. $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}$.

401. $x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$.

402. $(\sqrt[3]{2})^{x^2-6x-4}=\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^x$.

403. $x^{\log_2 2x}=4$.

404. Ашакдакы деңлиги субут этмели:

$$\lg 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\ldots\log_{10} 9.$$

Деңлемелери чөзмели:

405. $9\cdot 5^{2x-4}+4\cdot 5^{8-2x}=325$.

406. $2^x+2^{-x}=2\cos 2x$.

407. $x^2-2y^2=1$ деңлемәни йөнекей санларда чөзмели.

408. $x+y+z=xyz$ деңлемәниң битин положител көклерини тапмалы.

409. Эгер a, b, c кәбир үчбурчлугың тараплары болса, онда

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

деңлемәниң хакыкы көклери ёкдур. Оны субут этмели.

Деңлеме системаларыны чөзмели:

410. $\begin{cases} x^{y+1}=27 \\ x^{2y-5}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

411. $\begin{cases} (x^3+1)(y^3+1)=18 \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

412. $\begin{cases} \frac{xyz}{y+z}=a \\ \frac{xyz}{x+z}=b \\ \frac{xyz}{x+y}=c. \end{cases}$

413. x ве y-иң хайсы хакыкы бахаларында ашакдакы деңлик ерликлидир:

$$x^2-2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{y}+3=0.$$

414. Члеплериниң ичинде 1, $\sqrt{2}$ ве 3 санлар душ гелйән арифметики прогрессия болуп билерми?

415. Арифметики прогрессияда $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ берлен. Субут этмели: $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

416. Арифметики прогрессияның ислендик n члеплериниң S_n жеми шол алнан члеплериң саныныи квадратындан 3 эссе көпдүр. Шол прогрессияны тапмалы.

417. Эгер a_1, a_2, $a_3,\ldots$ арифметики прогрессия болса ве $a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{31}=784$ болса, онда $a_1+a_6+a_{11}+\ldots+a_{31}$ жеми тапмалы.

418. Эгер илкинжи үч члениниң жеми 39 ве оларың көпелтмек хасылы 729 болса, онда шол геометрики прогрессияны тапмалы.

419. $5\sqrt{x^2-25}+12\sqrt{x^2-144}-13\sqrt{x^2-169}\leqslant\frac{600}{x-8}$ деңсизлиги чөзмели.

420. Эгер $a+b=1$ болса, онда $a^8+b^8\geqslant\frac{1}{128}$ деңсизлиги субут этмели.

421. $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geqslant 0$ деңсизлиги субут этмели.

422. Эгер $ab\geqslant 0$; $cd\geqslant 0$ болса, онда $2(a^2+b^2)+c^2+d^2\geqslant\geqslant 2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$ деңсизлиги субут этмели.

423. Эгер $a+b\geqslant 0$ болса, онда $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$ деңсизлиги субут этмели.

424. Деңсизлиги субут этмели:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab(a+b)^2,$$

бу ерде a ве b положител санлардыр.

425. Ашакдакы көпелтмек хасылыны тапмалы:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

426. Жеми тапмалы:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

427. Эгер $A_k=7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}$ сан k саны единикден дүзүлен болса ве n хем p санлар 2-ден кичи болмасалар, онда A_p-A_n тапавудың 34300 сана бөлүнйәндигини субут этмели.

428. Жеми тапмалы:

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2\cdot 1968+1}{1968^2\cdot 1969^2}.$$

429. Ашакдакы хатарың n члениниң жемини тапмалы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

430. n-иң ислендик битин положител бахасында $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ аңлатманың 11-е бөлүнйәндигини субут этмели.

431. n-иң ислендик битин положител бахасында $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ аңлатманың 11-е бөлүнйәндигини субут этмели.

432. n-иң ислендик битин положител бахасында $11^{6n+3}+1$ аңлатманың 148-е бөлүнйәндигини субут этмели.

433. n-иң ислендик натурал бахасында $4^{2n+2}-15n-16$ аңлатманың 225-е бөлүнйәндигини субут этмели.

434. n^2+3n+5 сан n-иң хич бир бахасында 121-е бөлүнмейәр. Оны субут этмели.

435. n-иң хайсы бахасында

$$7^{2n+1}-25\cdot 2^{2n+1}+2^{2n+2}$$

аңлатма 53-е бөлүнйәр.

436. Тәк санын квадратыны арифметики прогрессияның ызлы-ызындан гелйән дөрт члениниң жеми хөкмүнде гөркезип болмажакдыгыны субут этмели.

437. Эгер $\sqrt{2}>\frac{m}{n}$ болса, онда $\sqrt{2}-\frac{m}{n}>\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^2}$ деңсизлиги субут этмели, бу ерде m ве n санлар битин ве положител санлардыр.

438. Эгер n натурал сан болса, онда $n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ерликлидир. Оны субут этмели.

439. $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ көпчлениң $x^4+x^3+x^2+x+1$ көпчлене бөлүнйәндигини субут этмели.

440. $f(x)=1+x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ көпчлени x^2+1 көпчлене бөлмекден галан галындыны Горнериң схемасыны уланман тапмалы.

441. Эгер $a^{100}-2$ ве $a^{101}-69$ санларың хер бири 73-е бөлүнйән болса, онда a натурал сан 73-е бөлүнендәки галындыны тапмалы.

442. a-ның хайсы битин бахаларында $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ дробы гысгалтмак болар?

443. Эгер 16, 1156, 111556, 11115556, ... санларың хер бири өзүниң өң янындакы санын ортасында 15 язмак аркалы алынян болса, онда шейле санларың такык квадратдыгыны субут этмели.

444. 1968 1968 санын ызындан үчбелгили сан язмалы, шунлукда алнан онбирбелгили сан 7-э, 8-е ве 9-а бөлүнмели.

445. Бирмеңзеш цифрлерден дүзүлен алтыбелгили сан бирмеңзеш цифрлерден дүзүлен дөртбелгили сана бөлүненде пайда 233 алыняр ве кәбир галынды галяр. Эгер бөлүжиде

ве бөлүнижиде бир цифр тапланылса, онда пай үйтгемейәр, галынды болса 1000 азаляр. Бөлүнижини ве бөлүжини тапмалы.

446. Бир манады 2 ве 5 көпүклик монеталар билен овнутмак усулының санының 3 ве 5 көпүклик монеталар билен овнутмаклык усулының санындан көпдүгини субут этмели.

447. Эгер $\frac{1}{3}$-ден улы догры дроблар санавжысына кәбир сан гошуланда ве майдалавжысы шол сана көпелдиленде үйтгемейән болсалар, онда шейле дробларың хеммесини тапмалы.

448. Окувчы бир йылың довамында хер гүнде бир меселеден аз меселе чөзмәндир ве хер хепдеде 12 меселеден көп меселе чөзмәндир. Йылың довамында лайык 20 меселе чөзүлен бири-бириниң ызындан гелйән бирнәче гүнүң бардыгыны субут этмели.

449. 6 билен гутарян иң кичи натурал сан тапмалы, шунлукда онуң иң ахыркы цифри иң өңе гечириленде тәзе алнан сан шол гөзленилйән сандан 4 эссе улы болмалы.

450. Эгер икибелгили сан шол саны дүзйән цифрлериң көпелтмек хасылының ики эссесине дең болса, онда шол саны тапмалы.

451. 1967-нжи йылда бир адамың яшы онуң доглан йылының цифрлериниң жемине деңдир. Шол адамың яшы нәче?

452. Ящикде 30 саны гызыл, 30 саны гөк, 30 саны яшыл ве галанлары ак хем гара, жеми 100 саны шар бар. Шоларың хайсы хем болса бир реңклисинден 20-ден аз болмадык шар чыкармак үчин иң азындан жеми нәче шар чыкармалы болар?

453. A ве B пунктлардан бир вагтда бирмеңзеш тизликлери болан ики автомобиль бир-бириниң гаршысына уграярлар ве 5 сагат 30 минут гечениден соң C пунктда душушярлар. Эгер шол автомобиллериң бириниң тизлиги сагатда 12 *км* көп болан болса, онда олар C пунктдан 30 *км* узаклыкда ерлешен пунктда душушардылар. A ве B пунктларың арасындакы узаклыгы кесгитлемели.

454. A ве B пунктлардан чыкып, ики ёлагчы бир-бириниң гаршысына уграяр. A пунктдан уграи биринжи ёлагчы B пунктдан угран икинжи ёлагчыдан 6 сагат гич уграяр ве душушанларында биринжи ёлагчының икинжи ёлагчыдан 12 *км* аз ёл гечендиги белли боляр. Душушыкдан соң эдил шол бир тизликлери билен ёлы довам эдип, биринжи ёлагчы B пункта 8 сагат гечениден соңра, икинжи болса A пункта 9 сагат гечениден соңра гелйәр. A ве B пунктларың арасындакы узаклыгы ве ёлагчыларың тизликлерини кесгитлемели.

455. Тагтада $x^3+\ldots+x^2+\ldots x+\ldots=0$ деңлеме язылан. Ики окувчы шейле оюн ойнаяр: оларың биринжиси ислендик бош ере нулдан үйтгешик (положител я-да отрицател) битин сан язяр. Соңра оларың икинжиси галан бош ерлериң бирине битин сан язяр. Иң соңунда биринжи ахыркы бош галан ере битин сан язяр. Икинжиниң нәхили сан язанына баглы болман эмеле гелен деңлемәниң көклериниң хеммеси битин болар ялы эдип, биринжиниң сан язып билжекдигини субут этмели. (III бүтинсоюз математики олимпиададa теклип эдилен меселелерден.)

456. Эгер k-ның ислендик бахасында узынлыклары a^k, b^k, c^k болан кесимлерден үчбурчлук гуруп болян болса, онда положител a, b, c санларың ичинде икисиниң бири-бирине деңдигини субут этмели.

457. A, B, C үч нокат берлен. ABN ве CBN үчбурчлукларың дашындан чызылан төвереклериң радиусларының жеми иң кичи баха эе болар ялы эдип, N нокады AC гөни чызыгың үстүнде ниреде сайлап алмалы?

458. Тарапы 1-е дең болан квадратың ичинде 126 нокат эркин ерлешдирилен. Шолардан хайсысы хем болса 6 санысының радиусы $\frac{1}{7}$ болан төверегиң ичинде хөкман ерлешйәндигини субут этмели.

459. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ кесими гурмалы.

460. Катетлери a ве b болан гөнүбурчлы үчбурчлугың йити бурчларының бириниң биссектрисасы гечирилен. Шу биссектриса гөни бурчуң депесинден индерилен перпендикулярың узынлыгыны тапмалы.

461. Төверегиң дашындан чызылан трапецияның ики бурчы гөнүдир. Эгер трапецияның эсаслары a ве b дең болса, онда онуң галан тарапларыны тапмалы.

462. Гөнүбурчлы үчбурчлугуң ичинден чызылан төверегиң радиусының гипотенуза индерилен бейиклигиң 0,4 бөлегинден улудыгыны субут этмели.

463. ABC үчбурчлукда A бурч B бурчдан ики эссе улудыр. Берлен b ве c таraплары боюнча a тарапы тапмалы.

464. Гөнүбурчлы үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң радиусының гипотенуза индерилен бейиклигиң 0,5 бөлегинден кичидигини субут этмели.

465. ABC үчбурчлукда h_c, h_b ики бейиклик оларың индерилен дегишли тарапларындан кичи дәл. Шейле үчбурчлук нәхили үчбурчлукдыр?

466. E ве F нокатлар гүберчек $ABCD$ дөртбурчлугың AB ве CD тарапларының ортасы. K нокат AF ве DE кесимлериң кесишме нокады. L нокат EC ве BF кесимлериң кесишме нокады болса, $EKFL$ дөртбурчлугың мейданының AKD ве BLC үчбурчлукларың мейданларының жемине деңдигини субут этмели.

467. Эгер $x^3 + y^2 = 1$ болса, онда $x^6 + y^6$ аңлатманың иң улы ве иң кичи бахаларыны тапмалы.

468. Эгер $x > 0$ болса, онда $y = \frac{x^3 + 16}{x}$ функцияның иң кичи бахасыны тапмалы.

469. $y = \frac{5 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}}$ функцияның иң кичи бахасыны тапмалы.

470. k-ның хайсы бахаларында $x + ky = 3$, $kx + 4y = 6$ системаның чөзүви $x > 1$, $y > 0$ деңсизликлери канагатландыряр?

471. $f(x) = (5 - 7x + x^3)^{1965} \cdot (6 - 10x + 13x^2 - 9x^3)^{1961}$ көпчлениң коэффициентлериниң жемини тапмалы.

Беллик. $f(x)$ көпчлениң коэффициентлери дийип, гөркезилен амаллар гечирилип, меңзеш члeнлер топланыландан соңра алнан аңлатма дүшүнмелидир.

472. Эгер $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1968}$ положител санлар болуп, оларың көпелтмек хасылы 1-е дең болса, онда $(1 + x_1)(1 + x_2) \times \times (1 + x_3) \ldots (1 + x_{1968}) \geqslant 2^{1968}$ деңсизлиги субут этмели.

473. Эгер $\log_7 2 = a$ ве $\log_2 10 = b$ болса, онда $\log_4 39{,}2$ хасапламалы.

474. Эгер $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{(\log_x 2)^3} + \ldots = 1$ болса, онда x-и тапмалы.

475. $\log_3 2 \cdot \log_2 (2^{2x-3} + 1) - \log_3 2^x = 1 - \log_3 4$.

476. $9^{x-1} - 3^{x + \frac{3}{\log_2 3} - 2} = 1$.

Деңлеме системаларыны чөзмели:

477. $\begin{cases} \dfrac{\log_x 0{,}5}{\log_x 0{,}5 + \log_y 0{,}5} = \dfrac{1}{\log_y 0{,}125} \\ x + y = 1. \end{cases}$

473. $\begin{cases} 3^{\log_4 x} - 2^{\log_4 y} = 77 \\ 3^{\log_4 \sqrt{x}} - 2^{\log_4 \sqrt{y}} = 7. \end{cases}$

479. Эгер $\sin x = \frac{4}{5}$ болса, онда $\operatorname{tg} 2x$ тапмалы.

480. Эгер $\sin x - \cos x = a$ болса, онда $\sin^3 x - \cos^3 x$ аңлатманы хасапламалы.

481. Эгер $\cos\alpha + \cos\beta = a$; $\sin\alpha + \sin\beta = b$ болса, онда $\sin(\alpha + \beta)$ тапмалы, бу ерде $a^2 + b^2 \neq 0$.

482. Эгер $\cos\alpha + \cos\beta = a$ ве $\sin\alpha + \sin\beta = b$ болса, онда $\cos(\alpha + \beta)$ хасапламалы, бу ерде $a^2 + b^2 \neq 0$.

483. Тождествоны субут этмели:

$$\left(\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

484. Ашакдакы деңлиги субут этмели:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

(Шу ердәки дугалар O ве $\frac{\pi}{2}$ арасындадыр.)

485. Эгер $n \geqslant 2$ болса, онда ислендик $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ үчин $|\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_3\ldots\sin\alpha_n+\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n| \leqslant 1$ деңсизлиги субут этмели.

Деңлемелери чөзмели:

486. $\cos 4x = -2\cos^2 x.$

487. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$

488. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}.$

489. Садалашдырмалы:

$$\sin 70^\circ + 8\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ.$$

490. Ашакдакы аңлатманың иң кичи бахасыны тапмалы:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

491. Тождествоны субут этмели:

$$\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{tg} 63^\circ+\operatorname{tg} 81^\circ=4.$$

492. Логарифмирлемек үчин онайлы гөрнүше гетирмели:

$$\sin 40^\circ+2\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ-2\cos 30^\circ.$$

483. Тождествоны субут этмели:

$$\operatorname{tg} 3\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 3\alpha.$$

Деңлемелери чөзмели:

494. $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$

495. $\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}=1.$

496. $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}.$

497. $3(\sin x+\cos x)=2\sin 2x.$

496. $\sin^6 x+\cos^6 x=\sin^2 x\cos^2 x.$

Таблицаны уланман хасапламалы:

499. $\sin 85^\circ\cdot\sin 35^\circ\cdot\sin 25^\circ.$

500. $\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ.$

II. КОНКУРСДА ХӨДҮРЛЕНЙӘН МЕСЕЛЕЛЕР

АЛГЕБРА

1. Алгебраик аңлатмалары өвүрмек

Ашакдакы аңлатмалары садалашдырмалы:

501. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}.$

502. $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+b}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}}\cdot\dfrac{b-\sqrt{ab}+a}{2\sqrt{ab}}.$

503. $\dfrac{x^3+4x^2+10x+12}{x^3-x^2+2x+16}\cdot\dfrac{x^3-3x^2+8x}{x^2+2x+6}.$

504. $a\sqrt{2}\cdot\dfrac{8+\sqrt{16-a^2}}{\sqrt{4+\sqrt{16-a^2}}}-\sqrt{(4+a)^3}+\sqrt{(4-a)^3}.$

505. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}.$

506. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}.$

507. $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c(1+c)-a}{bc}.$

508. $\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3}:\dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4},\ a\neq 0.$

509. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right).$

510. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}}.$

2. Алгебраик деңлемелер ве алгебраик деңлемелериң системалары

Ашакдакы деңлемелери чөзмели:

511. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9.$

512. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

513. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

514. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2.$

515. $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$ (хакыкы көклерини тапмалы).

516. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}, \quad (a\neq 0).$

517. $\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1.$

518. $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3}.$

519. $\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1.$

520. $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right).$

521. $\begin{cases}x+xy+y=11\\ x^2y+xy^2=30.\end{cases}$

522. $\begin{cases}x^3-y^3=26\\ x^2y-xy^2=6.\end{cases}$

523. $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=29\\ 7x^2-8xy+7y^2=43.\end{cases}$

524. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\\ x^2+y^2=160.\end{cases}$

525. $\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$

526. $\begin{cases}x^2+3=2xy\\ 6x^2-11y^2=10.\end{cases}$

527. $\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=21\\ x^2+xy+y^2=3.\end{cases}$

528. $\begin{cases}y^2+xy=231\\ x(x+y)=210.\end{cases}$

529. $\begin{cases}x+y+\frac{x^2}{y^2}=7\\ \frac{(x+y)\,x^2}{y^2}=12.\end{cases}$

530. $\begin{cases}xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3}\\ xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}.\end{cases}$

531. $\begin{cases}\frac{x^3}{y}+xy=40\\ \frac{y^3}{x}+xy=10.\end{cases}$

532. $\begin{cases}x^6+y^6=65\\ x^4-x^2y^2+y^4=13.\end{cases}$

533. $\begin{cases}\sqrt{\frac{1+4x}{1+8x}}+1=\frac{2}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\\ x^2+y^2-6x=0.\end{cases}$

534. $\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4\\ x^2+y^2-6x+5=0.\end{cases}$

535. $\begin{cases}x+y=2\\ x^4+y^4=16.\end{cases}$

536. $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2\\ \frac{1}{xy}-xy=\frac{9}{20}.\end{cases}$

537. $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{10}{3}\\ 2x+2y-xy=-2.\end{cases}$

538. $\begin{cases}x^2+y=5\\ x^6+y^3=65.\end{cases}$

539. $\begin{cases}x+y+xy=5\\ x^3+y^3+x^3y^3=17\end{cases}$ (хакыкы көклерини тапмалы).

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

540. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 109. \end{cases}$

541. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

542. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2. \end{cases}$

543. $\begin{cases} y^4 + y^2x - 2x^2 = 0 \\ x + y = 6. \end{cases}$

544. $\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6. \end{cases}$

545. $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21 \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 10. \end{cases}$

546. $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = a \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{a}. \end{cases}$

547. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3a^3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15a^3 \end{cases}$ (a — хакыкы сан).

548. $\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = b. \end{cases}$ (хакыкы чөзүвини тапмалы).

549. $\begin{cases} x^2 - 2ay - a^2 = 0 \\ y^2 - 2bx - b^2 = 0. \end{cases}$

550. $\begin{cases} \sqrt{y - \sqrt{y - x}} = x \\ x + y = a. \end{cases}$

551. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x(y + z) = 5 \\ y(x + z) = 8. \end{cases}$

552. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xy + xz - yz = 7. \end{cases}$

553. $\begin{cases} x(x + y + z) = 20 \\ x + yz = 17 \\ (x + y)(x + z) = 35. \end{cases}$

554. $\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xy - xz + yz = k \\ x + y - z = 1. \end{cases}$

555. $\begin{cases} x^2 + xy + 4xz - 4z^2 = 0 \\ y^2 + xy + 4yz - 8z^2 = 0 \\ xyz = 8. \end{cases}$

556. $\begin{cases} yzx^2 = 8 \\ zx^2u = 24 \\ x^2uy = 12 \\ y + z + u = x + 4. \end{cases}$

557. $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$

558. $\begin{cases} y + z = (b + c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ x + z = (a + c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ x + y = (a + b)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right). \end{cases}$

559. $\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} = \frac{8}{15} \\ \frac{1}{y + z} + \frac{1}{x + z} = \frac{9}{20}. \end{cases}$

560. $\begin{cases} \frac{a + b}{x + y} + \frac{b + c}{y + z} - \frac{c + a}{z + x} = 1 \\ \frac{a + b}{x + y} - \frac{b + c}{y + z} + \frac{c + a}{z + x} = 1 \\ -\frac{a + b}{x + y} + \frac{b + c}{y + z} + \frac{c + a}{z + x} = 1. \end{cases}$

3. Деңлеме дүзмәге дегишли меселелер

561. Берлен үч дробуң санавжылары 1, 2 ве 3 санлара пропорционал, дегишли майдалавжыларың терс бахалары болса 1, $\frac{1}{3}$ ве 0,2 санлара пропорционалдырлар. Эгер оларын орта арифметики бахасы $\frac{136}{315}$ дең болса, онда шол дроблары тапмалы.

562. Ойлап тапыжылар үч адам болуп, 1410 манат сылаг алдылар, шунлукда оларың икинжиси биринжиниң аланының $\frac{1}{3}$-ни ве ене-де 60 манат, үчүнжи болса икинжиниң аланының $\frac{1}{3}$-ни ве ене-де 30 манат алды. Оларың хер бири нәче сылаг алды?

563. Москва билен Смоленскиниң аралыгы демир ёлы боюнча 415 *км*. Шол ёлда Можайск ве Вязьма шәхерлери бар. Москва билен Можайскиниң арасындакы узаклык Можайск билен Вязьманың арасындакы узаклыга 7:9 ялы гатнашяр. Можайск билен Вязьманың арасындакы узаклык болса Вязьма билен Смоленскиниң арасындакы узаклыгың $\frac{27}{35}$ бөлегидир. Ики гоңшы шәхерлериң хер бириниң арасындакы узаклыгы тапмалы.

564. Клубуң залында бирмеңзеш хатарларда ерлешдирилен 320 орун бар. Хер хатардакы орнуң саны 4 сан артдырыландан соңра ве ене-де бир хатар артдырыландан соң залда 420 орун болды. Залда нәче хатар болды?

565. Экзамен табшырыкларын 108-си дүзме яздылар. Олара 480 тагта кагыз пайланылды, шунлукда гызларың хер бири огланларың хер бириден бир тагта кагызы артык алды, гызларың хеммесиниң алан кагызларының саны болса огланларың хеммесиниң алан кагызларының санына деңди. Нәче гыз ве нәче оглан барды?

566. Меселе йыгындысының голязмасындакы мысалда саны 3-е көпелтмели ве алнан нетижеден 4-и айырмалы. Типографияда ялңышлык гойберлип, көпелтмек белгисиниң ерине бөлмек белгиси гойлупдыр, минусың ерине болса плюс гойлупдыр. Шуңа гарамаздан нетиже үйтгемәндир. Меселе йыгындысында нәхили мысал ерлешдирмек гөз өңүнде тутулыпдыр?

567. Окувчы 136 саның кәбир икибелгили сана көпелтмек хасылыны тапмалыды. Алжыраңңы боланы себәпли ол икибелгили саның цифрлериниң орунларыны чалшырыпдыр ве онуң үчин алнан көпелтмек хасылы хакыкы болмалы көпелтмек хасылындан 1224 сан артык болупдыр. Эгер икибелгили саның бирликлериндәки цифри онлукларындакы цифрден ики эссе улы болса, онда хакыкы көпелтмек хасылы нәче болмалы?

568. $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ квадрат деңлемәниң көклериниң квадратларының жеми 1,75 болса, a-ны тапмалы.

569. Дөрт ящикде чай бар. Хер ящикден 9 *кг* алнандан соңра, ящиклериң хеммесинде галан чай озалкы ящиклериң хер бириндәкисине дең болды. Хер ящикде нәче чай бар экен?

570. Мотоциклчи шлагбаумда 24 минут сакланды. Шондан соң ол тизлигини 10 *км/саг* артдырды ве гижә галан вагтыны 80 *км* узаклыкда алды. Мотоциклчиниң сакланмазындан озалкы тизлигини тапмалы.

571. Ики ишчи кәбир иши 12 гүнде ерине етирип билйәр 8 гүн ишләнлеринден соңра оларың бири ишини ташлаяр ве ишчилериң икинжиси галан иши 5 гүнде гутаряр. Оларың хер бири (айры ишләп) шол иши нәче гүнде гутарар?

572. Поезд 30 *км/саг* тизлик билен A станциядан уграяр. Бирнәче вагтдан соң шол станциядан онуң ызындан 40 *км/саг* тизлик билен икинжи поезд уграяр. Поездлериң икиси-де B станция эдил шол бир вагтда бармалыдылар. Эмма биринжи поезд станцияларың арасындакы узаклыгың $\frac{2}{3}$ бөлегини геченден соң, онуң тизлиги ики эссе азаляр, шонуң үчин икинжи поезд B станция 8 *км* галанда биринжи поездиң ызындан етйәр. A ве B станцияларың арасындакы узаклыгы кесгитлемели.

573. Колхоздан автобус станциясына угран ёлагчы биринжи сагатда 3 *км* ёл гечипдир. Эгер шол тизлик билен йөресе, онда ол автобуса етиңмән 40 минут гижә галяндыгыны хасаплапдыр. Шонуң үчин галан ёлы ол 4 *км/саг* тизлик билен йөрәп, автобусың уграмагына 45 минут галанда станция барыпдыр. Колхоздан автостанция ченли болан аралыгы тапмалы.

574. Икибелгили сан онуң цифрлериниң көпелтмек хасылына бөлүнендәки пай $2\frac{2}{3}$ дең. Гөзленилйән сан билен шол цифрлер аркалы, эмма терс тертипде язылан саның тапавуды 18-е дең болса, шол икибелгили саны тапмалы.

575. Биринжи гапдакы сув икинжи гапдакыдан 8 эссе көп. Биринжи гапдан икинжи габа a литр алып гуйдулар. Нетижеде икинжи гапдакы сувуң мукдары биринжи гапда галан сувуң мукдарының $\frac{1}{4}$ дең болупдыр. Хер гапда нәче сув барды?

576. Экскурсия гитмек үчин пул йыгнамалы. Эгер экскурсия гидйәнлериң хер бири 75 көпүкден төлесе, онда харчламак үчин гөз өңүнде тутулян пула 4,4 манат етмейәр. Эгер-де оларың хер бири 80 көпүкден төлесе, онда 4,4 манат артык боляр. Экскурсия нәче адам гатнашяр?

577. Мотоциклетчи бир шәхерден бейлеки шәхере сагатда a *км* тизлик билен барыпдыр. Ызына гайданда өңкүден сагатда b *км* тиз йөрәндир. Шейлеликде, гайдышыны үчин c сагат аз вагт сарп эдипдир. Шәхерлериң арасындакы узаклыгы тапмалы.

578. Ишчи белленилен мөхлете ченли кәбир мукдарда бирмеңзеш деталь тайярлапдыр. Эгер ол хер гүнде 10 деталь артык тайярлан болса, онда шол ишн $4\frac{1}{2}$ гүн ир гутарарды. Эгер-де ол хер гүнде 5 деталы аз ясан болса, онда вагтындан 3 гүн гижә галарды. Ол нәче деталь ве олары нәче гүнде ясапдыр?

579. Ашакдакы хәсиетлере эе болан ики саны икибелгили саны тапмалы: эгер гөзленилйән санларын улусының ызындан нуль язылса ве онуң ызындан кичи сан язылса, кичи санының ызындан болса улы сан язылса ве онуң ызындан нуль язылса, онда эмеле гелен ики саны бәшбелгили санларың биринжиси икинжисине бөлүненде пайда 2 алнып, галындыда 590 алыняр. Олардан башга-да, гөзленилйән санларың улусының ики эссеси билен кичисиниң үч эссесинден дүзүлен жем 72-ә дең.

580. Ики шәхериң арасындакы узаклыгы машын 3 гүнде гечйәр. Ол биринжи гүн әхли аралыгың $\frac{3}{8}$ бөлегини, икинжи гүн болса $\frac{5}{12}$ бөлегини гечйәр. Үчүнжи гүн ол әхли аралыгың алтыдан бир бөлегинден 40 *км* артык болан узаклыгы гечйәр. Шәхерлериң арасындакы узаклыгы тапмалы.

581. Ики битин саны оларың тапавудына бөлениңде деӊ галындының галяндыгыны, пайың болса бир бирлик тапавут эдйәндигини субут этмели.

582. 180 саны хайсы положител битин сана бөлениңде галынды пайың 25% болар.

583. Жеми, тапавуды ве көпелтмек хасыллары $5:1:18$ ялы гатнашыкда болан ики саны тапмалы.

584. Ики саны кердич өрүжиниң икинжиси биринжиден ишн $1\frac{1}{2}$ гүн гич башлап, олар дивары 7 гүнде салып гутаржаклар. Эгер шол иш олара айратынлыкда табшырылан болса, онда дивары салып гутармак үчин биринжи керпич өрүжә икинжи керпич өрүжә герек болан вагтдан 3 гүн көп герек болжакды. Оларың хер бири дивары нәче гүнде салып болар?

585. Ики саны пыяда адам бир вагтда бири-бириниң гаршысына чыкып уградылар ве 3 сагатдан соң душушыпдырлар. Эгер биринжи пыяда адам икинжи пыяда адамың угран ерине икинжи пыяда адамың биринжи пыяда адамың угран ерине гелендәкисинден $2\frac{1}{2}$ сагат гич гелен болса, оларың хер бири әхли аралыгы нәче вагтда гечер?

586. Ики велосипедчи A пунктдан бир вагтда чыкып, дүрли, эмма үйтгемейән тизлик билен B пункта барярлар ве B пункта барып, деррев ызларына гайдярлар. Биринжи велосипедчи икинжиниң ызындан етип гечип, ызына гайдып гелйәркә она B пунктдан a *км* узаклыкда душ гелйәр, соңра A пункта барып ене-де B пункта тарап угранда ол икинжи велосипедчә A пункт билен B пунктуң арасындакы узаклыгың k бөлегини геченде душ гелйәр. A пунктдан B пункта ченли узаклыгы тапмалы.

587. Дүрли системадакы ики мотоцикли сынагдан гечирмек үчин ики мотоциклчи A пунктдан B пункта ве B пунктдан A пункта бир вагтда уградылар. Оларың хер бири хемишелик тизлик билен сүрдүлер ве гелмели соңкы пунктларына гелип, шол бада хем ызларына өврүлдилер. Биринжи гезек олар B пунктдан P *км*-ликде душушдылар, икинжи гезек биринжи душушыкдан t сагат геченден соң A пунктдан q *км*-ликде душушдылар. A ве B пунктларың арасындакы узаклыгы ве мотоцикллериң икисиниң хем тизлигини тапмалы.

588. A ве B ишчи деӊ гүн ишледилер. Эгер-де A ишчи бир гүн аз, B ишчи болса 7 гүн аз ишлән болсалар, онда A ишчи 720 манат, B болса 648 манат газанарды. Эгер-де, терсине, A ишчи 7 гүн аз, B болса бир гүн аз ишлән болсалар, онда B ишчи A-дан 324 манат көп газанарды. Хакыкатда оларың хер бири нәче манат газаныпдыр?

589. Сагат өңе гидйән хем болса кәбир халатларда гөркезмелисинден 2 минут аз гөркезйәр. Эгер-де сагат гөркезмелисинден вагты 3 минут аз гөркезсе ве өңе гидйәнинден суткада $\frac{1}{2}$ минут артык өңе гидйән болайса, онда ол хакыкы вагты гөркезмелисинден бир сутка өң гөркезерди. Шол сагат бир суткада нәче минут өңе гидйәр?

590. A, B ве C үч сыяхатчы гиңлиги S *км* деӊ болан сув ховданының аңырсына гечйәрлер: A сыяхатчы сагатда v *км* тизлик билен йүзүп гечмеги, B билен C болса тизлиги сагатда v_1 *км* деӊ болан моторлы гайык билен гечмеги макул билйәрлер. Ховданың аңырсына гечип башланларындан бирнәче вагт геченден соң C сыяхатчы ёлуң галан бөлегини йүзүп гечейин диен карара гелйәр (мунуң хем йүзүши эдил A сыяхатчының йүзүш тизлиги ялы). B сыяхатчы болса шол вагт A сыяхатчыны яныма алайын дийип ызына доланяр, A сыяхатчы гайыга мүнүп, B сыяхатчы билен ёлларыны довам этдирйәрлер. Кенарың аңры тарапына үчүси хем бир вагтда барярлар. Кенарың аңырсына нәче вагтда гечилендигини кесгитлемели.

591. Ики самолёт A ве B пунктлардан бир вагтда бир-бириниң гаршысына учярлар ве AB ёлуң орталыгындан *a км*-ликде душушярлар. Эгер биринжи самолёт икинжиден *b* сагат гич учан болса, онда олар *AB* ёлуң орталыгында душушардылар. Эгер-де, терсине, икинжи самолёт биринжиден *b* сагат гич учан болса, онда олар ёлуң *B* пунктдан дөртден бир бөлегинде душушардылар. *AB* аралыгы ве самолётларың тизлигини тапмалы.

592. Шәхерлериң арасындакы узаклык *S км* дең. Шол шәхерлерден бир вагтда бири-бириниң гаршысына ики автомобиль чыкып уграяр ве *t* сагатдан соң душушярлар. Эгер оларың биринжиси бейлекисинден *p* километри *q* сагат көп вагтда гечйән болса, автомобиллериң хер бириниң тизлиги нәче?

593. Москва билен Ленинградың аралыгы 650 *км*. Шу аралыгы ёлагчы поезди йүк чекйән поездден 12 сагат тиз гечйәр, чүнки онуң сагатдакы тизлиги 24 *км* артык. Поездлериң хер бири сагатда нәче километр гечйәр?

594. Эгер ики саның орта арифметик бахасы шол санларың улусындан 16 сан кичи болса, орта геометрик бахасы болса оларың кичисинден 8 сан улы болса, онда шол санлары тапмалы.

595. Кәбир заказы ики заводың бири бейлекисинден 4 гүн тиз ерине етирип билйәр. Эгер ики завод билеликде ишләп, заказы 24 гүнде 5 эссе артык ерине етирйән болсалар, оларың хер бири шол заказы нәче гүнде ерине етирер?

596. Ики саны турба билеликде ховзы 2 сагат 55 минутда долдуряр. Эгер-де биринжи турба икинжиден ховзы 2 сагат чалт долдурян болса, онда хер турба айратынлыкда ховзы нәче вагтда долдурар?

597. *A* ве *B* пунктлардан бир вагтда дең тизликлери болан ики автомобиль бир-бирине гаршылыклы тарапа уграярлар ве угранларындан 5 сагат 30 минутдан соң *C* пунктда душушярлар. Эгер автомобиллериң бириниң тизлиги бейлекисиниңкиден 12 *км* көп болан болсады, онда *C* пунктдан 30 *км* узаклыкда душушардылар. *A* ве *B* пунктларың арасындакы узаклыгы кесгитлемели.

598. *A* пунктдан *B* пункта ченли узаклык 78 *км*. *A* пунктдан *B* пункта тарап кәбир тизлик билен велосипедчи уграяр. Мундан 1 сагат гечenden соң *B* пунктдан тизлиги биринжиниңкиден сагатда 4 *км* артык болан икинжи велосипедчи *A* пункта тарап уграяр. Булар *B* пунктдан 36 *км* узаклыкда душушярлар. Хер велосипедчи душушыга ченли нәче вагт сарп этди?

599. Токарь план боюнча кәбир мөхлетде 450 саны деталь ясамалыды. Эмма ол хер гүнде нормадан артык 10 деталь ясап, белленен мөхлетден 3 гүн өң жеми 480 деталь ясады. Токарь бир гүнде нәче деталь ясамалыды?

600. „Ракета“ теплоходы акымың угруна 36 *км*, акымың гаршысына болса 17 *км* гечип, әхли гечен ёлуна 45 минут сарп эдипдир. Эгер деряның акыш тизлиги 2 *км/сағ* болса, онда теплоходың ята сувдакы тизлигини кесгитлемели.

601. Бирликлериниң саны онлукларының санындан ики сан артык болан ве гөзленилйән саның шол саның цифрлериниң жемине көпелтмек хасылы 144 дең болан икибелгили саны тапмалы.

602. Квадратларының тапавуды 133-е дең болан ики битин положител сан тапмалы.

603. Окувчы хер гүнде дең сахыпа окап, 480 сахыпалы китабы окап гутарыпдыр. Эгер хер гүнде 16 сахыпа артык окан болса, онда ол китабы 5 гүн ир окап гутарарды. Окувчы китабы нәче гүн окапдыр?

604. Ики саның тапавуды 48-е дең, шол санларың орта арифметик бахасы билен орта геометрик бахасының арасындакы тапавут 18-е дең. Шол санлары тапмалы.

605. Эгер ики саның жеми, оларың көпелтмек хасылы ве квадратларының тапавуды бири-бирине дең болса, онда шол санлары тапмалы.

606. Сагат 9 сагат вагты гөркезенден сонра нәче вагтдан соң сагадың улы стрелкасы кичи стрелкасының ызындан етер?

607. Бирнәче бирмензеш шар бар. Олары квадрат гөрнүшинде я-да догры үчбурчлук гөрнүшинде ерлешдирмек мүмкиндир. Эгер шарлар үчбурчлук гөрнүшинде ерлешдириленде үчбурчлугың тарапындакы шарларың саны олар квадрат гөрнүшинде ерлешдириленде квадратың тарапындакы шарларың санындан ики шар артык болса, онда шол шарларың саныны тапмалы. Шарлар квадратың (үчбурчлугың) диңе контуры боюнча дәл-де, квадратың (үчбурчлугың) ички бөлегини-де долдурярлар дийип гүман эдилйәр.

608. Кинозалда ики гапы бар. Кино гутаранда томашачылар гапыларың икисинден $3\frac{3}{4}$ минутда чыкярлар. Эгер томашачылар гин гапыдан гойберилсе, онда олары дар гапыдан гойберенден 4 минут аз герек боляр. Томашачылар гапыларың хер бириндеn айратынлыкда гойберилсе, нәче вагт герек болар?

609. Үчбелгили саның цифрлериниң жеми 16 дең, онлукларың цифри йүзлүклериң цифринден 1 сан артык. Эгер шол сандан эдил шол цифрлер билен, эмма терс тертипде язылан сан айрылса, онда 594 галар. Шу саны тапмалы.

610. Мотоциклчи 1 *км* узаклыгы велосипедчиден 4 минут аз вагтда гечйәр. Эгер 5 сагатда мотоциклчиниң велосипедчиден 100 *км* артык гечйәндиги белли болса, онда оларың хер бири шол 5 сагатда нәче километр ёл гечер?

611. Үчбелгили сан 3 цифр билен гутаряр. Эгер шу цифр саның өңүне гечирилсе, онда тәзе алнан үчбелгили сан озалкы үчбелгили санын үч эссесинден бир сан артык болар. Шол саны тапмалы.

612. Одун йыгян ишчилер бригадасы план боюнча бирнәче гүнде 216 $м^3$ одун тайярламалыдылар. Бригада илкинжи үч гүни план боюнча ишләп, соңра хер гүнде пландан артык 8 $м^3$ одун тайярладылар ве шонуң үчин белленилен мөхлетинден бир гүн озал 232 $м^3$ одун тайярладылар. Бригада план боюнча хер гүнде нәче одун тайярламалыды?

4. Деңсизликлер

613. a саныӊ хайсы бахаларында $\frac{3a-8}{5-a}$ дробь положител болар?

Деңсизликлери чөзмели:

614. $2x^3 > x+1$.

615. $\frac{4x+3}{x-2} < 3$.

616. $\sqrt{\frac{5x-3}{4-x}} > 2$.

617. $\sqrt{5-x} > x-4$.

618. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2+x}{2-x}} > 256$.

619. $\frac{ax}{a-3} - \frac{x-2}{4} < \frac{3x+4}{5}$.

620. $\sqrt{x-1} > 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

621. $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x < 0$.

622. Эгер $a+b \geqslant 1$ болса, онда $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ деңсизлиги субут этмели.

5. Прогрессиялар

623. Эгер арифметик прогрессияның илкинжи үч члениниң жеми 27 болса, оларың квадратларының жеми 275 болса, онда шол прогрессияны тапмалы.

624. Эгер $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$ болса, онда $a_1, a_2, a_3, \ldots$ арифметик прогрессияның илкинжи ондокуз члениниң жемини тапмалы.

625. Арифметик прогрессияның 7 члени болуп, онуң четки членлери 11 ве 35. Эгер башга бир арифметик прогрессияның четки членлери 38 ве 13 болса ве прогрессияларың икисиниң-де дөрдүнжи членлери габат гелйән болса, онда икинжи прогрессияның нәче члени бар?

626. Эгер $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ве $a_1a_2a_3 = 15$ болса, онда арифметик прогрессияны тапмалы.

627. Арифметик прогрессияда $a_m = n$, $a_n = m$, тапмалы: a_p, $(m \neq n)$.

628. 7-ә бөлүнйән үчбелгили санларың хеммесиниң жемини тапмалы.

629. 5-ә бөлүненде галындыда 1 галян илкинжи йүз санын жемини тапмалы.

630. Эгер

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = 126$$
$$a_2 + a_{2n} = 42$$

болса, онда арифметик прогрессияның членлериниң саныны тапмалы.

631. Эгер арифметик прогрессияның n члениниң жеми $s_n = 3n^2 - 2n$ болса, онда шол прогрессияның онунжы членини тапмалы.

632. Арифметик прогрессияның үчүнжи ве докузынжы членлериниң жеми 6, оларың көпелтмек хасылы $8\frac{7}{16}$. Шу прогрессияның илкинжи онбәш члениниң жемини тапмалы.

633. Үчбурчлугың тараплары арифметик прогрессияны дүзйәр. Прогрессияның тапавуды 2 *см* болуп, үчбурчлугың мейданы 6 $см^2$ болса, онуң тарапларыны тапмалы.

634. Арифметик прогрессияның илкинжи дөрт члениниң жеми 124, ахыркы дөрт члениниң жеми 156. Әхли членлериниң жеми 210. Прогрессияны тапмалы.

635. Арифметик прогрессияның биринжи членинден башлап, ислендик членлериниң саныныӊ жеми членлериниң санының квадратындан дөрт эссе улы болса, шол прогрессияны тапмалы.

636. Геометрик прогрессияда $q = 2$, $n = 7$ ве $s = 635$ берлен. u_1 ве u_n тапмалы.

637. Ашакдакы санлар геометрик прогрессияның членлери болуп билерми.

10, 11, 12?

638. Эгер $u_3 - u_1 = 16$ ве $u_5 - u_3 = 144$ болса, онда геометрик прогрессияны тапмалы.

639. Геометрик прогрессияда

$$u_1 + u_5 = 51$$
$$u_2 + u_6 = 102$$

берлен. n-иң хайсы бахасында $s_n = 3069$ болар?

640. Эгер $q = -2$ ве $s_8 = 85$ болса, онда геометрик прогрессияны тапмалы.

21 болуп, оларың терс улулыкларының жеми $\frac{7}{12}$ болса, онда шол санлары тапмалы.

642. Биринжи члени a_1, майдалавжысы q болан геометрик прогрессияның n члениниң квадратларының жемини хасапламалы.

643. Геометрик прогрессияның членлериниң саны жүбүт. Онуң әхли члениниң жеми тәк ерде дуран членлериниң жеминден үч эссе улы. Прогрессияның майдалавжысыны тапмалы.

644. Түкениксиз кемелйән геометрик прогрессияның жеми 4, онуң членлериниң кубларының жеми 192. Прогрессияның биринжи члении ве майдалавжысыны тапмалы.

645. Хер бир члени өзүниң ызындан гелйән әхли членлериң жеминден 10 эссе улы болан түкениксиз кичелйән геометрик прогрессияны тапмалы.

646. Түкениксиз кичелйән геометрик прогрессияның тәк ерде дуран членлериниң жеми 36 болуп, жүбүт ерде дуран членлериниң жеми 12-ә деңдир.

Прогрессияны тапмалы.

647. Биринжи члени үчүнжи члениңден 120 сан аз болан геометрик прогрессия дүзүлер ялы эдип, 195 саны үч бөлеге бөлмели.

648. Геометрик прогрессияның илкинжи үч члениниң жеми 21 болуп, оларың квадратларының жеми 189-а деңдир. Шу прогрессияның биринжи члении ве майдалавжысыны тапмалы.

649. Икинжи члени 6 деқ болуп, членлериниң жеми членлериниң квадратларының жеминиң $\frac{1}{8}$ деқ болан түкениксиз кичелйән геометрик прогрессияны тапмалы.

650. Геометрик прогрессияның илкинжи үч члениниң жеми 91-е деқ. Эгер шу членлере дегишлиликде 25, 27 ве 1 гошулса, онда арифметик прогрессияны дүзйән үч сан алынар.

Геометрик прогрессияның единжи члении тапмалы.

651. Кәбир арифметик прогрессияның икинжи члени биринжи ве дөрдүнжи членлериниң арасында орта пропорционалдыр. Шу прогрессияның дөрдүнжи, алтынжы ве докузынжы членлериниң геометрик прогрессияны дүзйәнлигини гөркезмели. Прогрессияның майдалавжысыны тапмалы.

652. Арифметик прогрессияның 11 члени бар; биринжи, бәшинжи ве он биринжи членлери геометрик прогрессияны дүзйәрлер. Эгер арифметик прогрессияның биринжи члени 24-е деқ болса, онда онуң хемме членлерини язмалы.

653. Геометрик прогрессияның илкинжи үч члениниң жеми

$16\frac{4}{9}$. Шолара кәбир арифметик прогрессияның биринжи, дөрдүнжи ве секизинжи членлери хөкмүнде гарамак мүмкин. Геометрик прогрессияның илкинжи дөрт члениниң жемини тапмалы.

654. 3 ве 19683 санларың арасында геометрик прогрессияның 7 членини ерлешдирмели ве шу прогрессияның 5-нжи членини 4 ве 5 санлара пропорционал эдип, ики бөлеге бөлмели.

655. Докуз члени болан арифметик прогрессияның биринжи члени 1 деқ, жеми 369 деқ. Геометрик прогрессияның-да докуз члени бар, шунлукда онуң биринжи ве ахыркы члени берлен арифметик прогрессияның членлери билен габат гелйәр. Онуң единжи членини тапмалы.

656. Ашакдакы жеми тапмалы:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

657. Тарапы a деқ болан квадратың ичинден башга бир квадрат чызылан, онуң ичинден үчүнжи квадрат чызылан ве ш. м., шунлукда исләндик квадратың хер бир тарапының ортасы бейлеки квадратың депеси болуп хызмат эдйәр. Шу квадратларың хеммесиниң мейданының жемини тапмалы.

6. Гөркезижили ве логорифмик деңлемелер

Ашакдакы деңлемелери чөзмели:

658. $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$.

659. $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-1} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \left(\frac{9}{4}\right)^x$.

660. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1{,}25 = 0$.

661. $\frac{(0,5)^{x-3}}{(0,125)^{2-x}} = 128^x \sqrt[3]{(0,25)^{x-1}}$.

662. $27^x + 12^x = 2\cdot 8^x$.

663. $2\cdot 7^{x+1} - 7^{2x-3} = 679$.

664. $x^x + 139x^{-x} - 108\cdot x^{-2x} = 32$.

665. $25^x - 10^x = 2^{2x+1}$.

666. $4^{x+1} - 5^{x-\frac{3}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-4}$.

667. $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots$

668. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

669. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$ (битин көклерини тапмалы).

670. $6^{x+1}+3^{x+1}=3^{x+2}-6^{x}+3^{x}$.

671. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$.

672. $3^{1-x}-3^{1+x}+9^{x}+9^{-x}=6$.

673. $\begin{cases}5^{x}-3^{y}=544\\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=16\end{cases}$

674. $\begin{cases}8^{x}=10y\\ 2^{x}=5y\end{cases}$

675. $\begin{cases}x^{y}=y^{x}\\ x^{3}=y^{2}\end{cases}$

676. $\begin{cases}yx^{2}+7x+12=1\\ x+y=6\end{cases}$

677. $\begin{cases}x^{y+1}=27\\ x^{2y-5}=\frac{1}{3}\end{cases}$

678. $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}$.

679. $\log_3[2+\log_3(3+x)]=0$.

680. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2$.

681. $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}=3,\quad a>0$.

682. $3\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^3=27x^{20}$.

683. $\log_5 x+\log_x 5=2{,}5$.

684. $4^{x+1{,}5}+9^{x}=6^{x+1}$.

685. $\left[\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)\cdot\frac{2}{3}\right]^{\log_a x}-$

$-\left[\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots\right)\cdot 20\right]^{\log_x a}$.

686. $81^{x}-16^{x}-2\cdot 9^{x}(9^{x}-4^{x})+36^{x}=0$.

687. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$.

688. $2\log_x 3+\log_{3x}3+3\log_{9x}3=0$.

689. $\log_x 2\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

690. $\log_a x\cdot\log_b c\cdot(1+\log_c a)=\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_a c$.

691. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$.

692. $4^{\lg 10x}-3^{\lg x-\frac{1}{2}}=3^{\lg x+\frac{1}{2}}-2^{2\lg x-1}$.

693. $\lg\sqrt{7x+4}+\lg\sqrt{x-2}-1=\lg(2x-5)-\lg 2$.

694. $\log\left(\frac{1}{3}x^{4}\right)(\log_3 x)^2=\frac{1}{2}$.

695. $\log_2(2^{x}-3)+x=2$.

696. $\lg 3\cdot\log_3 10^{\sqrt{x-2}}=x-4$.

697. $x^{3-\lg\frac{200}{x}}=400$.

698. $\begin{cases}xy=40\\ x^{\lg y}=4\end{cases}$

699. $\begin{cases}\log_2\frac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2\\ \log_2\sqrt[3]{x\cdot\log_2(y+1)}=\frac{1}{3}\end{cases}$

700. $\begin{cases}(3x+y)^{x-y}=9\\ \sqrt[x-y]{324}=18x^2+12xy+2y^2\end{cases}$

701. $\begin{cases}x^{y}=y^{x}\\ x^{p}=y^{q}\end{cases}$

7. Комплекс санлар

702. Ашакдакы комплекс саны тригонометрик гөрнүше гетирмели.

$$1-\cos\alpha+i\sin\alpha,\text{ бу ерде } 0\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

703. Денлемәни чөзмели:

$$x^2-(3+i)x+3i=0.$$

704. Эгер $(x+y)^2+6+ix=5(x+y)+i(y+1)$ болса, онда x ве y тапмалы.

705. Ашакдакы аңлатманы садалашдырмалы:

$$\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{a-bi}{a+bi}.$$

706. x ве y-иң нәхили хакыкы бахаларында ашакдакы деңлик ерине етирилйәр:

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i?$$

707. $\frac{i}{x+1}-\frac{1}{(x+i)^2}-\frac{i}{x-1}-\frac{1}{(x-i)^2}$.

аңлатманы $a+bi$ гөрнүше гетирмели.

708. $a=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ боланда a^2+a+1 аңлатманы хасапламалы.

709. x ве y-иң хакыкы бахаларында ашакдакы деңлемәни чөзмели:

$$\frac{6x-iy}{5+2i}=\frac{15}{8x+3iy}.$$

710. Ашакдакы деңлиги субут этмели:

$$\left(yi+\frac{1}{xi}\right)^2-\left(xi+\frac{1}{yi}\right)^2=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{xy}-1\right)^2.$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ.

8. Тригонометрик аңлатмалары өврүмелер ве тригонометрик деңлемелер.

Ашакдакы аңлатмалары сadaлашдырмалы:

711. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}2\alpha}$.

712. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\cdot\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

713. $\frac{\sin^2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$.

714. $\operatorname{ctg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha-8\cos 4\alpha\operatorname{ctg}4\alpha$.

715. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Тождестволары субут этмели:

716. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha$.

717. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

718. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

719. $16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ=1$.

Деңлемелери чөзмели:

720. $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 6x$.

721. $\operatorname{tg}x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

722. $\sin 3x=\cos x-\sin x$.

723. $\cos x-\sin x=\frac{1}{\cos x}$.

724. $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$.

725. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2$.

726. $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=1$.

727. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

728. $3\sin 5x-\sqrt{3}\cos 5x=\sqrt{6}$.

729. $\sin x+\cos x+2\sin x\cos x=-1$.

730. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=4$.

ГЕОМЕТРИЯ.

9. Планиметрия.

731. Катетлери a ве b болан гөнүбурчлы үчбурчлугың ичинден үчбурчлук билен умумы гөни бурчы болан квадрат чызылан. Квадратын периметрини тапмалы.

732. Гөнүбурчлы үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң галташма нокады гипотенузаны узынлыклары 5 *см* ве 12 *см* болан ики кесиме бөлйәр.

Үчбурчлугың катетлерини тапмалы.

733. Трапецияның эсасларының тапавуды 14 *см* ве ики параллел дәл тарапларының бири 13 *см*, бейлекиси 15 *см*. Эгер трапецияның ичинден төверек чызып болядыгы белли болса, онда шол трапецияның мейданыны тапмалы.

734. Гөни бурчуң ичинде M нокат берлен, шунлукда шол нокатдан катетлере ченли болан узаклыклар 8 *см* ве 4 *см*. M нокат аркалы гечйән гөни чызык бурчдан мейданы 100 *см*^{2} болан үчбурчлугы кесип аляр. Үчбурчлугың катетлерини тапмалы.

735. Трапецияның эсаслары a ве b. Трапецияның диагоналларының ортасыны бирлешдирйән гөни чызыгың кесиминиң узынлыгыны тапмалы.

736. Деңянлы трапецияның диагоналлары өзара перпендикуляр. Эгер трапецияның мейданы a^2 болса, онда онуң бейиклигини кесгитлемели.

737. Трапецияның эсаслары 4 *см* ве 16 *см*. Эгер трапецияның ичинден ве дашындан төверек чызып болян болса, онда шол төвереклерин радиусларыны тапмалы.

738. Деңанлы трапецияның бейиклиги 14 *см*, эсаслары 16 *см* ве 12 *см*. Трапецияның дашындан чызылан төверегиң мейданыны тапмалы.

739. Радиусы 3-е дең болан төверегиң дашындан эсасындакы йити бурчы 30° дең болан деңанлы үчбурчлук чызылан. Үчбурчлугың тарапларыны тапмалы.

740. Деңанлы үчбурчлугың депесиндәки бурчы 36°. Эсасындакы бурчуң биссектрисасы $\sqrt{20}$. Үчбурчлугың тарапларыны тапмалы.

741. ABC үчбурчлукда A бурч B бурчдан ики эссе улы, шол бурчларың гаршысында ятан тараплар дегишлиликде 12 *см* ве 8 *см*. Үчбурчлугың үчүнжи тарапыны тапмалы.

742. Тараплары 6 *см*, 12 *см*, 10 *см* болан үчбурчлугың ичинден төверек чызылан. Үчбурчлугың ики улы тарапыны кесер ялы эдип, төвереге галташян чызык гечирилен. Кесилип алнан үчбурчлугың периметрини тапмалы.

743. Гөнүбурчлы үчбурчлугың мейданы 24 $см^2$, гипотенузасы 10 *см*. Үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң радиусыны тапмалы.

744. Диагоналлары 7 *см* ве 8 *см*, эсаслары 3 *см* ве 6 *см* болан трапецияның мейданыны тапмалы.

745. Эгер гөнүбурчлы үчбурчлугың дашындан ве ичинден чызылан төверeклериң радиуслары R ве r болса, онда шол үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

746. Деңанлы трапецияның диагоналы 10 *см*, мейданы 48 $см^2$ дең. Трапецияның бейиклигини тапмалы.

747. Үчбурчлугың эсасы 20 *см*, гапдал тарапларының медианалары 18 *см* ве 24 *см*. Үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

748. Тараплары a, b, c болан үчбурчлугың ичинден диаметри c тарапың үстүнде ятар ялы эдип, ярым тегелек чызылан. Шол ярым тегелегиң мейданыны тапмалы.

749. Эгер гөнүбурчлы үчбурчлугың периметри $2p$, мейданы m^2 болса, онда онуң тарапларыны тапмалы.

750. Гөнүбурчлы үчбурчлукда гөни бурчуң биссектрисасы гипотенузаны узынлыклары a ве b болан ики кесиме бөлйәр. Шол биссектриса квадратың тарапы болуп хызмат эдйән болса, онда квадратың мейданыны тапмалы.

751. Үчбурчлугың үч медианасының жеминиң онуң периметриниң $\frac{3}{4}$ бөлегинден улудыгыны, эмма периметринден кичидигини субут этмели.

752. $ABCD$ гөнүбурчлы трапецияның ADC йити бурчы 45° дең ве AD тарапы 30 *см* дең. CD тарапың E ортасындан оңа перпендикуляр галдырылан. Шол перпендикуляр BA тарапың довамыны F нокатда кесйәр. BF узынлыгыны кесгитлемели.

753. Трапецияның эсаслары a ве b. Гапдал тараплары довам эдиленде гөни бурч эмеле гетирйәрлер. Трапецияның эсасларының орталарыны бирлешдирйән кесимиң узынлыгыны кесгитлемели.

754. Трапецияның тараплары өзара 29 : 3 : 25 : 9 ялы гатнашярлар, шунлукда илкинжи ерде трапецияның гапдал тарапы дуряр. Эгер трапецияның мейданы 480 $см^2$ болса, онда онуң тарапларыны кесгитлемели.

755. Трапецияның бейиклиги 12 *см*, диагоналлары болса 20 *см* ве 15 *см*. Трапецияның мейданыны тапмалы.

756. Төверегиң дашындан чызылан деңанлы трапецияда төверегиң диаметриниң трапецияның эсасларының арасында орта пропорционалдыгыны субут этмели.

757. ABC үчбурчлугың A ве B депелеринден чыкян AA_1 ве BB_1 бейикликлериң A_1 ве B_1 эсасларыны бирлешдирйән A_1B_1 кесимиң берлен үчбурчлукдан оңа меңзеш үчбурчлугы кесип алянлыгыны субут этмели.

758. ABC үчбурчлугың медианалары башга бир үчбурчлугың тараплары болуп хызмат эдйәр. Шол ики үчбурчлугың мейданларының гатнашыгыны тапмалы.

759. Эгер үчбурчлугың бурчларының бири 120° дең болса ве онуң тараплары арифметик прогрессияны дүзйән болса, онда шол үчбурчлугың тарапларының гатнашыгыны тапмалы.

760. Үчбурчлугың a, b, c үч тарапы боюнча онуң медианаларыны хасапламалы.

761. Үчбурчлугың медианаларының квадратларының жеминиң онуң тарапларының квадратларының жемине болан гатнашыгыны тапмалы.

762. Үчбурчлугың ики тарапы a ве c берлен. Эгер шол тараплара гечирилен медианалар гөни бурч асты билен кесишйән болсалар, онда үчбурчлугың үчүнжи тарапыны тапмалы.

763. Йити бурчлы үчбурчлугың бейикликлериниң эсасларыны бирлешдирмек билен алнан үчбурчлугың бурчларының биссектрисасы болуп, берлен үчбурчлугың бейикликлери хызмат эдйәрлер. Оны субут этмели.

764. Эгер ромбуң бурчы 30° дең болса, онда онуң тарапының диагоналларының арасында орта пропорционалдыгыны субут этмели.

765. Гөнүбурчлы үчбурчлугың a ве b катетлери боюнча гөни бурчуң депесинден чыкян бейиклиги кесгитлемели.

766. Үчбурчлугың берлен a, b, c тараплары боюнча онуң дашындан чызылан төверегиң R радиусыны кесгитлемели.

767. Эгер гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасы c ве йити бурчы 150° болса, онда шол үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

768. ABC үчбурчлугың A бурчуның биссектрисасы a тарапыны m ве n кесимлере бөлйәр, шунлукда $m = \frac{ac}{b+c}$ ве $n = \frac{ab}{b+c}$ болянлыгыны субут этмели.

769. Догры кесик дөртбурчлы пирамиданың эсасларының мейданлары 16 *см*^{2} ве 324 *см*^{2}; диагональ кесигиң мейданы 88 *см*^{2}. Кесик пирамиданың гапдал үстүни тапмалы.

770. Догры дөртбурчлы пирамиданың чатык гапдал гранларының арасындакы ики гранлы бурч 120°; пирамиданың гапдал үсти $18\sqrt{2}$ *см*^{2}. Пирамиданың эсасының мейданыны кесгитлемели.

771. Догры алтыбурчлы пирамиданың бейиклиги H, гапдал граның мейданы эсасының мейданындан үч эссе аздыр. Пирамиданың долы үстүни тапмалы.

772. Параллел тарапларының бири 13 *см*, параллел дәл тараплары 25 *см* ве 40 *см* болан трапеция пирамиданың эсасыдыр. Пирамиданың эсасындакы ики гранлы бурчлар бири-бирине деңдир; пирамиданың бейиклигы 5 *см*. Пирамиданың долы үстүни тапмалы.

773. Параллелепипедиң гранларының хер бири диагоналлары 6 *см* ве 8 *см* болан ромбдур. Параллелепипедиң үч гранлы бурчларының бириниң текиз бурчларының хеммеси йити бурчдур. Параллелепипедиң гөврүмини тапмалы.

ӨЗБАШДАК ЧӨЗМӘГЕ ДЕГИШЛИ МЕСЕЛЕЛЕР

774. Студентлер каникул деврүнде Москваның этеклерине гезеленч этдилер. Олар илкинжи 30 *км* ёлы пыяда, ёлуң галан бөлегиниң 20%-ни деряда гайык билен йүзүп гечдилер, соңра болса деряда йүзүп гечеплериндеи 1,5 эссе көп аралыгы енеде пыяда гечдилер. Ёлуң галан бөлегини сагатда 40 *км* тизлик билен гидйән йүк машынында 1 саг. 30 минутда гечдилер. Оларың гечен умумы ёлуның узынлыгы нәче?

Җогабы. 150 *км*.

775. Бедентербиечилериң ярышының биринжи гүнүнде зачёт нормаларыны ерине етирмәндиклери себәпли соңкы ярышлара гойберилмедиклер огланлар командасының $\frac{1}{6}$ бөлеги, гызлар командасының болса $\frac{1}{7}$ бөлеги болды. Ярышың галан деврүнде командаларың икисинден-де дең мукдарда бедентербиечилер ярышдан чыкдылар. Ярышың ахырында зачёт нормаларыны ерине етирип билмедиклер огланлар командасындан 48 адам, гызлар командасындан 50 адам болды, эмма зачёт нормаларыны ерине етирен гызларың саны огланларың санындан ики эссе көп болды. Командаларың хер биринде илки башда нәче адам бар экен?

Җогабы. 72 адам ве 98 адам.

776. Тикин цехине жеми 5 000 *м* болан үч топ эк мата гетирдилер. Биринжи топдакы матаның мукдары икинжидәкиден 3 эссе аз, үчүнжи топдакы матаның мукдары болса эхли матаның 22%. Биринжи топдакы матадан 150 простын ве 240 саны яссыкдашы тикдилер. Бир простын тикмәге бир яссыкдашы тикмек үчин герек болан матадан 3,25 *м* мата көп герек боляр. Бир яссыкдашы тикмек үчин нәче метр мата герек болар?

Җогабы. 1,25 *м*.

777. Биринжи сыяхатчы велосипедде 1,5 сагатлап сагатда 16 *км* тизлик билен ёл гечип, 1,5 сагат дынч аляр, соңра болса шол тизлик билен ёлуны довам эдйәр. Биринжи сыяхатчы ёла чыканындан дөрт сагат гечениден соң, онуң ызындан тизлиги сагатда 56 *км* болан икинжи сыяхатчы мотоциклетде уграяр. Икинжи сыяхатчы биринжиниң ызындан етйәнчә, оларың хер бири нәче аралыгы гечер?

Җогабы. 56 *км*.

778. Шәхерден 60 *км* узаклыкда болан посёлокдан шу гүн *А* студентиң какасы гелмелиди. Ол душенбе гүнүндәки лекция гатнашмак ислэйди. Эмма лекцияны эртире гечирипдирлер. Лекцияның эртире гечирилендигини какасына хабар бермек үчин оглы онуң өңүнден чыкмага уграды. Душушанларындан соң какасынының, оглунының мопедли бир вагтда ёла уграндыклары мәлим болды, эмма оглуның мопедли орта тизлиги ики эссе көп болды. Душушанларындан соң, ызларына доланканларында оларың хер бири башлангыч тизликлерини сагатда 2 *км* артдырдылар ве оглы шәхере какасының посёлога баранындан 5 минут гич барды. Какасы ве оглы илки башда нәхили орта тизлик билен ёл гечипдирлер?

Җогабы. Сагатда 14 *км*, 28 *км*.

779. Араларындакы узаклык 120 *км* болан *А* ве *В* пунктлардан ики автобус бир вагтда чыкып бири-бириниң гаршысына уградылар. Ёлдакы дуралгада биринжи автобус 10 минут, икинжи болса 5 минут саклады. Биринжи автобус икинжи автобусың *А* пункта баранындан *В* пункта 25 минут тиз гелди. Автобусларың херекет тизликлерини мыдамалык дийип хасапламак болар, өзүнем биринжи автобусың тизлиги икинжи автобусың тизлигинден сагатда 20 *км* көп. Шол автобусларың ёлагчылары *А* ве *В* пунктларың арасында нәче вагтлап ёлда болупдырлар?

Җогабы. 1 сагат 40 минут ве 2 сагат 5 минут.

780. Ики доган велосипедлерини алып, 42 *км* аралыгы гечмек үчин бир вагтда ёла уградылар. Улы доганы ёлуң хемме еринде шол бир тизлик билен гитди, кичи доганы болса хер сагатда улы доганындан 4 *км* ыза галды. Улы доганы ёлда бир сагат, кичи доганы болса дине 20 минут дынч аланы үчин, олар пеллехана дең гелдилер. Олар аралыгы нәче вагтда гечипдирлер?

Җогабы. 3 сагат 20 минутда.

781. Араларындакы узаклык 40 *км* болан *А* ве *В* шәхерлерден пыяда ве велосипедли адам бир вагтда чыкып, бири-

-бириниң гаршысына уградылар ве угранларындан 2 сагат геченден соң душушярлар. Соңра олар ёлларыны довам эдип, велосипедли адам пыяда адамың B пункта баранындан A пункта 7 сагат 30 минут ир баряр. Оларың икиси хем мыдама шол бир тизлик билен гидипдирлер дийип хасап эдип, пыяданың ве велосипедлиниң тизлигини тапмалы.

Жогабы. Сагатда 4 *км* ве 16 *км*.

782. Пыяда A адам M обадан ве B пыяда адам N обадан бир вагтда чыкып, бири-бириниң гаршысына уграмалыдылар. Эмма A пыяда адам бираз гүйменип, ёла 6 сагат гич дүшди. Душушанларындан соң A пыяданың B пыяда адамдан 12 *км* аз ёл гечендиги мәлим болды. Дынч аланларындан соң, олар душушан ерлеринден бир вагтда эдип өңки тизликлери билен ёлларыны довам этдилер. Нетижеде A адам N оба душушанларындан 8 сагатдан соң, B адам болса M оба 9 сагатдан соң гелди. MN аралыгы ве пыядаларың икисиниң хем тизлигини кесгитлемели.

Жогабы. 84 *км*; сагатда 6 *км*; сагатда 4 *км*.

783. Ики бригада биделикде ишләп, шоссе ёлуң белли бир бөлегини 18 гүнде бежермелидилер. Хакыкатда болса, илки диңе биринжи бригада ишледи, ёлуң галан бөлегини болса икинжи бригада бежерип тамамлады, өзүнем икинжи бригаданың зәхмет өндүрижилиги биринжи бригаданыңкыдан хас ёкары. Нетижеде ёлуң берлен бөлегини бежермек 40 гүнләп довам этди ве биринжи бригада өз иш вагтында әхли ишиң $\frac{2}{3}$ бөлегини ерине етирди. Шоссе ёлуң берлен бөлегини бригадаларың хер бири аýратынлыкда нәче гүнде бежерип болардылар?

Жогабы. 45 гүнде ве 30 гүнде.

784. Араларындакы узаклык 390 *м* болан ики нокатдан ики жисим бири-бириниң гаршысына херекет эдйәрлер. Биринжи жисим биринжи секунтда 6 *м* ёл гечди, бейлеки секунтларының хер биринде болса өңкүсинден 6 *м* көп ёл гечди. Икинжи жисим болса секунтда 12 *м* тизлик билен деңөлчегли херекет эдип, биринжи жисим угранындан 5 секунт геченден соң ёла дүшди. Биринжи жисим херекет эдип башланындан нәче секунт геченден соң олар душушарлар?

Жогабы. 10 секунтдан соң.

785. Ики доганың өйлеринден 20 *км* узаклыкда болан стадиона билетлери барды. Стадиона бармак үчин олар велосипедли гидермен болдулар ве оларың бири велосипедли, бейлекиси болса пыяда бир вагтда уграмалы этдилер. Доганларың бири ёлуң белли бир бөлегини велосипедли гечип, ол ерде велосипеди гойяр ве ёлуны пыяда довам эдйәр, икинжиси болса велосипедиң гойлан ерине етип, велосипедли гидйәр ве стадионың гирелгесиниң агзында доганының ызын-

дан етйәр. Эгер доганларың хер бири пыяда сагатда 4 *км* тизлик билен деңөлчегли йөрәп, велосипедли болса 5 эссе тиз ёл гечселер, доганларың биринжиси велосипеди ёлуң хайсы аралыгында гоймалы ве ёлы гечмек үчин нәче вагт герек?

Жогабы. Ёлуң орталыгында; 3 сагат.

786. Вертолёт A пунктуң үстүнде 8 сагат 30 минутда болды. Гөни хова ёлы билен S *км* учуп, вертолёт B пункта барды. Вертолёт B пунктуң үстүнде ховада 5 минутлап болandan соң, эдил шол ёл билен ызына доланды. Ол A пункта 10 сагат 35 минутда доланып гелди. Ол A пунктдан B пункта ченли елиң угруна, ызына гайданда болса елиң гаршысына учды. Елиң тизлиги элмыдама хемишелик. Эгер вертолётың өз тизлиги хем элмыдама хемишелик ве елсиз ховадакы тизлиги сагатда v *км* дең болса, елиң тизлигини тапмалы. Берлен улулыкларың хайсы багланышыгында меселәниң чөзүви бар?

Жогабы. Сагатда $\sqrt{v(v-S)}$ *км*; $v>S$ боланда;

787. Дүрли системадакы үч машын кәбир хасаплайыш ишини ерине етирйәр. Эгер әхли иши диңе икинжи я-да биринжи машын ерине етирмели болса, онда әхли иши ерине етирмек үчин икинжи машын биринжи машына гаранда 2 минут вагты көп сарп эдер. Диңе үчүнжи машын әхли иши диңе биринжи машының әхли иши ерине етирип билжек вагтындан ики эссе көп вагтда ерине етирип билйәр. Ишиң бирнәче бөлегиниң бирмензеш боланы үчин, иши үч машына бөлүп бермек болжак. Шонда машынларың үчүси билеликде ишләп, иши бир вагтда тамамласалар, табшырылан иши олар 2 минут 40 секунтда ерине етирерлер. Эгер машынлар екеликде ишлеселер, шол иши нәче вагтда ерине етирип билерлер?

Жогабы. 6, 8 ве 12 минутда.

788. Ларёкда сатмак үчин 1-нжи сортлы алмадан 22 манат 80 көпүклик ве 2-нжи сортлы алмадан 18 манатлык алма гетирдилер. Гетирилен алмалар дүшүриленде төтәнликде гарышыпдыр. Эгер инди әхли алманың бир килограмы 1-нжи сорт алманың бир килограмының бахасындан 9 көпүк арзан сатылса, онда озалкы гөз өңүнде тутулян тирдежиниң гиржекдиги хасапланып гөрленден соң белли болды. Ларёга гетирилен 2-нжи сортлы алма 1-нжи сортлы алмадан 5 *кг* көп болса, ларёга жеми нәче *кг* алма гетирилипдир?

Жогабы. 85 *кг*.

789. Лаборатория кабинетлерини гошмача абзаллар билен энжамлашдырмак үчин институтың үч кафедрасындан заявка гелипдир. Биринжи кафедраның заявкасындакы абзалларың бахасының жеми икинжи кафедраның заявкасының 45%-ни дүзйәр, икинжи кафедраның заявкасындакы абзалларың бахасының жеми болса үчүнжи кафедраның заявкасының 80%-ни дүзйәр. Үчүнҗи кафедраның заявкасындакы абзалларың бахасының җеми биринҗи кафедраның заявкасындан 640 манат артык. Үч кафедраның заявкаларындакы абзалларың умумы бахасы нәче?

Җогабы. 2160 манат.

790. Дуз эргинли ики гап бугардып дуз алмак үчин гойлан. Гапларың хер бириңден бугардылып алынян дузуң хер гүндәки мукдары дең. Биринҗи гапдан 48 *кг* дуз, биринҗи гапдан 6 гүн аз дуран икинҗи гапдан 27 *кг* дуз алынды. Эгер-де биринҗи гап икинҗи гап нәче гүн бугардылмак үчин гоюланыча дуран болса, икинҗи гап болса биринҗи гап нәче гүн бугардылмак үчин гоюланыча дуран болса, онда эргинлериң икисинден-де шол бир мукдарда дуз алнарды. Эргинлериң хер бири нәче гүн бугартмаклык үчин дурупдыр?

Җогабы. 18 ве 24 гүн.

791. Умумы мейданы 110 *га* болан ики багчылыгы дең санда участоклара бөлдүлер. Хер бир багчылыгың участокларының мейданлары өзара дең, эмма бейлеки багчылыгың участокларындан тапавутлы. Эгер-де биринҗи багчылык икинҗи багчылыгың участокларының мейданы ялы участоклара бөлүнен болса, онда биринҗи багчылыгың 75 участогы боларды. эгер-де икинҗи багчылык биринҗи багчылыгың участокларының мейданы ялы участоклара бөлүнен болса, онда икинҗи багчылыгың 108 участогы боларды. Багчылыгың хер бириниң мейданыны хасапламалы.

Җогабы. 50 *га* ве 60 *га*.

792. Адатда кәбир иши ерине етирмек үчин бир вагтда ики механизм уланыляр. Шол механизмлериң өндүриҗилиги бирмеңзеш дәл ве олар биленликде ишләнлеринде иши 30 сагатда ерине етирйәрлер. Эмма бу гезек механизмлер биленликде 6 сагатлап ишлемели болдулар ве шондан соң ишиң галан бөлегиниң хеммесини икинҗи механизм 40 сагатда ерине етирди. Механизмлериң хер бири айратынлыкда өзлерине махсус болан өндүриҗиликде ишлеселер, оларың хер бири шейле иши нәче вагтда ерине етирип билер?

Җогабы. 50 сагатда ве 75 сагатда.

793. Шофёр фабрикден чыкып уграныдан ики сагат гечениден соң спидометрине середенде 112 *км* ёл гечендигини билди. Эгер-де сонра хем шейле тизлик билен сүрсе, онда йүки станция 30 минут гижә галып алып барҗакдыгыны чен билен хасаплады. Шона гөрә шофёр машының тизлигини артдырды ве ол станция гелмели мөхлетинден хем 30 минут ир гелди. Эгер спидометр боюнча фабрикден станция барянча узаклык 280 *км* дең болса, онда автомобилиң башлангыч ве соңкы тизликлерини кесгитлемели.

Җогабы. Сагатда 56 *км* ве 84 *км*.

794. Ики положител саны көпелтмекден алнан нетиҗе хасаплайҗы үчин шүбхели болуп гөрнүпдир. Ол барламак үчин көпелтмек хасылының җемини көпелдиҗилериң улусына бөлмеги макул билди. Пайда 17 ве галындыда 8 эмеле гелди. Шондан соң хасаплайҗы өз ялңышыны билди; онуң көпелтмек хасылында онлукларың өйүнде язан саны онлукларың болмалы хакыкы санындан 6 онлук көп экен. Эгер көпелдиҗилериң тапавуды 36-а дең болса, хасаплайҗы хайсы санлары бири-бирине көпелдипдир?

Җогабы. 16 ве 52.

795. *А* ве *В* станцияларың аралыгындакы узаклык 103 *км* дең. Поезд *А* пунктдан *В* пункта чыкып уграды ве кәбир узаклыгы гечендем соң сакланды. шона гөрә *В* пункта ченли галан ёлы өңкүсинден сагатда 4 *км* көп тизлик билен гечди. Эгер ёлуң *В* пункта ченли галан бөлеги поездиң сакланаиына ченли гечен ёлундан 23 *км* узак болса ве сакланандан соң ёлы гечмек үчин сакланмазындан озалкы гечен ёлуна сарп эден вагтындан 15 минут вагты көп сарп эден болса, поездиң илки бешдакы тизлигини тапмалы.

Җогабы. Сагатда 80 *км*.

796. Туристик базада илки билен *А* сыяхатчы оянды ве белленен маршрут боюнча ёла дүшди. Икинҗи *Б* сыяхатчы *А* сыяхатчының ызындан дине 45 минут гечениден соң уграды. *А* сыяхатчының ызындан етмекчи болуп ве онуң элмыдама сагатда v_1 *км* тизлик билен гидйәнлигини билип, *Б* сыяхатчы сагатда v_2 *км* тизлик билен гитди ($v_2 > v_1$). Эгер *В* сыяхатчы сагатда v_3 *км* тизлик билен гитсе ($v_3 > v_2$) ве *А* сыяхатчы билен *Б* сыяхатчының ызындан биленликде етмек үчин *А* сыяхатчының угран вагтындан нәче минутдан соң *В* сыяхатчы туристик базадан чыкып and awaited?

Җогабы. $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ минутдан соң.

797. Дуралгада автобусдан ики ёлагчы дүшди ве икисем посёлога тарап уградылар. Оларың бири ёлуң биринҗи бөлегини сагатда 5 *км* тизлик билен, ёлуң икинҗи бөлегини болса сагатда 4 *км* тизлик билен гечди. Икинҗиси вагтың биринҗи бөлегини сагатда 5 *км* тизлик билен, вагтың икинҗи бөлегини сагатда 4 *км* тизлик билен гечди ве посёлога биринҗи ёлагчыдан 1 минут өң гелди. Оларың хер бири әхли ёлы нәче вагтда гечипдир ве дуралгадан посёлога ченли узаклык нәче?

Җогабы. 1 сагат 21 мин.; 1 сагат 20 мин.; 6 *км*.

798. *А* шәхер билен *F* станцияның арасындакы узаклык демир ёл боюнча 185 *км* дең. Поезд *А* шәхерден илкинҗи 40 *км*-и япыёкарлыгына, сонракы 105 *км*-и текиз ёл боюнча ве галан 40 *км*-и ене-де япыёкарлыгына баряр. Поезд япыёкарлыгына гиденде текиз ёлдакыдан сагатда 10 *км* хаял гидйәр. Шол ёлда *А* шәхерден узаклыклары 20, 70, 100 ве 161 *км* болан B, C, D ве E станциялар бар, поезд шол станцияларын хер биринде 3 минутлап тогтаяр. Эгер поезд A шәхерден сагат 8-де чыкып, F станция шол гүн 10 сагат 22 минутда баран болса, поездиң B, C, D ве E станциялара гелйән вагтыны тапмалы.

Жогабы. 8 сагат 15 минутда; 8 сагат 53 минутда; 9 сагат 16 минутда; 10 сагат 01 минутда.

799. Стартда ики велосипедчи бар. Сигнал болandan соң велосипедчилериң икиси хем ярышып башладылар. 10 минутдан соң эдил шол стартдан оларың ызындан үчүнжи велосипедчи ёла уграды. Ол илки билен биринжи велосипедчиниң ызындан етип гечди, соңра икинжи велосипедчиниң ызындан етйәнчә ол ене-де 20 минутлап велосипед сүрмели болды. Стартдан тә соңуна ченли велосипедчилериң хер бири шол бир тизлик билен сүрдилер: биринжи велосипедчи сагатда a *км* ве икинжи велосипедчи сагатда b *км* тизлик билен сүрдилер. Үчүнжи велосипедчиниң тизлигини тапмалы.

Жогабы. Сагатда $\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+b^2}}{4}$ *км*.

800. Тегелегиң үстүндәки A ве B нокатларың арасындакы кичи дуга 150 *м* деӊ. Эгер нокатлар кичи дуга боюнча бир-бирине тарап херекет эдип башласалар, онда олар 10 секунтдан соң душушарлар, эгер улы дуга боюнча херекет эдип башласалар, онда олар 14 секунтдан соң душушарлар. Эгер B нокат төверек боюнча 90 *м* гечйәнчә A нокадың әхли төверегги айланып чыкяндыгы белли болса, онда нокатларың херекет эдиш тизлигини ве тегелегин узынлыгыны кесгитлемели.

Жогабы. Секунтда 12 *м*; секунтда 3 *м*; 360 *м*.

801. Поезд угранындан 2 сагат геченден соң $\frac{1}{2}$ сагатлап тогтады. Станция ченли ёлуң галан бөлегинде ремонт ишлери гечирилйәрди ве поезди башлангыч тизлигиниң $\frac{1}{3}$ бөлегине деӊ болан тизликде сүрмәге рүгсат бердилер, нетижеде поезд станция 1 сагат 10 минут гиҗә галып гелди. Икинжи гүни поезд ниң соңкы станция етмәге 14 *км* ёл галанда эдил шол себәбе гөрә тогтамалы болды ве поездиң гиҗә галып бармагы 50 минуда ченли азалды. Станцияларың арасындакы узаклыгы ве поездиң тизлигини кесгитлемели.

Жогабы. 196 *км*; сагатда 84 *км*.

802. 24 *л* сувуклык үч габа бөлүнип гуйлан. Биринжи гапдан бейлеки ики габа оларың хер бирinde нәче сувуклык бар болса шонча сувуклык гуйдулар. Соңра икинжи гапдан бейлеки ики габа биринжи гуйлушдан соң оларың хер биринде нәче бар болса шонча сувуклыгы гуйдулар. Соңра үчүнжи гапдан икинжи гезек гуйландан соңра бейлеки ики гапда нәче

сувуклык бар болса онуң үстүне ене-де шонча сувуклыгы гуйдулар. Нетижеде гапларың хеммесиндәки сувуклыгың мукдары деңлешди. Илки башда гапларың хер биринде нәче сувуклык бар экен?

Жогабы. 13 *л*, 7 *л*, 4 *л*.

803. Ишчилериң ики бригадасы демир ёлуң шпалларыны дүшейәрдилер. Биринжи бригада икинжи бригададан t гүн көп ишледи ве ишиң шол деврүнде ёлуң S *км*-не шпал дүшедилер. Икинжи бригада биринжи бригададан гүнде ёлуң m *км*-не көп шпал дүшейәрди ве өзүниң ишлән деврүнде биринжи бригададан ёлуң n *км*-иче ере аз шпал дүшеди. Бригадаларың хер бири бир гүнде нәче километр ёла шпал дүшәпдирлер?

Жогабы. Биринжи бригада ёлуң $\frac{(n-tm)+\sqrt{(n-tm)^2+4stm}}{2t}$ *км*-е, икинжи бригада ёлуң $\frac{(n+tm)+\sqrt{(n-tm)^2+4stm}}{2t}$ *км*-е шпал дүшәпдир.

804. Үч ишчи белли бир узынлыкдакы ябы газмалы. Эгер ябы үч деӊ бөлеге бөлсеӊ, онда ишчилериң биринжиси ишиң өзүне дүшйән бөлегини үчүнжи ишчиден 2 сагат өң, икинжи ишчи болса өзүне дүшйән бөлегини биринжи ишчиниң өзүне дүшйәниниң үчден ики бөлегини газып боланындан 30 минут өң газып боляр. Эгер-де биринжи ишчи өзүниң үчүнжи бөлегини газып болandan соң үчүнжи ишчә көмеклешсе, онда үчүнжи ишчи (биринжи ишчи билен билеликде ишләп) өзүне дүшен бөлеги икинжи ишчи билен бир вагтда газып болар. Ишчилериң үчүси хем билеликде ишлесселер, әхли иши нәче сагатда гутарарлар?

Жогабы. 1,5 сагатда.

805. Ики автомашын бир пунктдан бир вагтда чыкып, шол бир тарапа уградылар. Биринжи автомашын сагатда 40 *км* тизлик билен баряр, икинжи автомашыныӊ тизлиги болса биринжи автомашыныӊ тизлигиниң 125%-не деӊ. 30 минут гечендеn соң эдил шол пунктдан шоларың барян угруна үчүнжи автомашын уграды ве биринжи автомашыныӊ ызындан етип гечениндеn 1,5 сагатдан соң икинжи автомашыныӊ ызындан етди. Үчүнжи автомашыныӊ тизлиги нәче?

Жогабы. Сагатда 60 *км*.

806. A шәхерден B шәхере уграк поезд шол ере a сагатда бармалы. Шол поезд билен бир вагтда C шәхерден башга бир поезд уграяр. Биринжи поезд билен бир вагтда B шәхере барар ялы, икинжи поезд биринжи поезде гаранда хер бир километр аралыгы 1 минут тиз гечмели боляр. C шәхерден B шәхере ченли болан аралык A шәхерден B шәхере ченли болан аралыкдан b *км* узак. Шол аралыклары кесгитлемели.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Жогабы. $\frac{-b+\sqrt{b^2+240ab}}{2}$; $\frac{b+\sqrt{b^2+240ab}}{2}$.

807. Ики станциядан бир вагтда йүк поезди ве ёлагчы поезди чыкып, бири-бириниң гаршысына тарап уградылар. Душушянчалар йүк дашаян поезд ёлагчы поездине гараныңда d *км* аз ёл гечди. Ахыркы станция ченли болан ёлуң галан бөлегини ёлагчы поезди m сагатда, йүк поезди болса n сагатда гечди. Станцияларың арасындакы узаклыгы ве поездлериң хер бириниң тизлигини тапмалы. Поездлериң херекети деңөлчегли дийлип гүман эдилйәр.

Жогабы. Станцияларың арасындакы узаклык $2x+d=d\times\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$ *км*; ёлагчы поездиниң тизлиги $\frac{x}{m}=\frac{d}{\sqrt{mn}-m}$ *км/сагт*, йүк поездиниң тизлиги $\frac{x+d}{n}=\frac{d}{n-\sqrt{mn}}$ *км/сагт*.

808. Үч автомобил бир вагтда A шәхерден чыкып, B шәхере тарап уграяр. Шәхерлериң арасындакы узаклык S *км* дең. Икинжи автомобилиң тизлиги биринжи автомобилиң тизлигинден сагатда a *км* көп, үчүнжи автомобилиң тизлиги болса биринжиниңкиден сагатда $2a$ *км* көп.

Үчүнжи автомобил A шәхерден уграныңдан t секунт геченден соң ызына доланяр ве B шәхере етмәнкә биринжи автомобил билен душушып, ене-де B шәхере тарап $\frac{5}{4}$ эссе артдырылан тизлик билен уграяр ве шол шәхере икинжи автомобил билен бир вагтда баряр. Биринжи автомобилиң тизлигини кесгитлемели.

Жогабы. $\frac{S-12at+\sqrt{S^2+64a^2t^2}}{2t}$.

809. Машын гурлушык заводларының икиси сув электрик станциясының гурлушыгы үчин заказ алдылар: заводларың биринжиси 120 саны моторы, икинжиси болса 80 моторы ясап бермеклиги боюн алдылар, өзүнем биринжи завод заказы икинжиден 2 гүн гич ерине етирмелиди. Табшырыгы чалт ерине етирмек үчин заводларың хер бири гөз өңүнде тутуландакысындан хер гүнде 2 двигатели көп өндүрип башлады ве шоңа гөрә-де заказ гөз өңүнде тутулан мөхлетинден 2 гүн өң ерине етирилди. Заводларың хер бири заказы нәче гүнде ерине етирмели экен?

Жогабы. 12; 10 гүнде.

810. A-дан B бака бир вагтың өзүнде „Победа" автомашыны ве велосипедчи чыкып уграяр, B-ден A бака болса эдил шол вагтың өзүнде „Москвич" автомашыны чыкып уграяр. Автомашынлар 2,4 сагатдан соң душушярлар, велосипедчи билен „Москвич" болса A-дан 48 *км* узаклыкда душушярлар. Эгер велосипедчи „Победа" гараныңда 30 *км* ёлда 2,5 сагат

вагты көп йитирйән болса хем-де онуң тизлиги „Москвичиңкиден" 4 эссе аз болса, автомашынларың ве велосипедчиниң тизлигини тапмалы.

Жогабы. $60\frac{км}{сагт}$; $40\frac{км}{сагт}$; $10\frac{км}{сагт}$.

811. Үчбурчлугың ортасында эркин алнан нокадың үсти билен үчбурчлугың тарапларына параллел эдип үч саны гөни чызык гечирилен. Шол гөни чызыклар үчбурчлугың мейданыны алты бөлеге бөлйәрлер. Оларың үчүси мейданлары дегишлиликде S_1, S_2, S_3 деӊ болан үчбурчлуклардыр. Берлен үчбурчлугың мейданыны тапмалы.

Жогабы. $S_{ABC}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

812. Радиусы 64 *см* деӊ болан төверек деӊ алты бөлеге бөлүнен ве бөлүнме нокатлары меркез билен бирлешдирилен. Радиусларың бири якынындакы бейлеки радиуса проектирленен, үчүнжи радиусың үстүнде биринжи проекцияның проекциясы гурлан, дөрдүнжи радиусың үстүнде икинжи проекцияның проекциясы гурлан ве ш. м. Иң соңкы (алтынжы) проекцияның биринжи радиуса болан проекциясының улулыгыны кесгитлемели.

Жогабы. Гөзленилйән проекция $0Q=a_7=a_1q^{7-1}=64\left(\frac{1}{2}\right)^6=$ $=1$ *см*.

813. Гөни параллелепипедиң эсасы болуп ромб хызмат эдйәр. Ашакы эсасының тарапларының бириниң ве ёкаркы эсасының гаршылыклы тарапларының бириниң үсти билен гечирилен текизлик эсасының текизлиги билен 45° бурч эмеле гетирйәр. Эмеле гелен кесигиң мейданы Q деӊ. Параллелепипедиң гапдал үстүни кесгитлемели.

Жогабы. $2Q\sqrt{2}$.

814. Ягтыт параллелепипедиң гапдал гапыргасының онуң эсасының текизлигине болан проекциясы 5 *дм* деӊ, бейиклиги болса 12 *дм* деӊ. Гапдал гапыргасына перпендикуляр болан кесик мейданы 24 *дм*^{2} ве диагоналы 8 *дм* деӊ болан ромбдур. Параллелепипедиң гапдал үстүни ве гөврүмини тапмалы.

Жогабы. 260 *дм*^{2}; 312 *дм*^{3}.

815. Гөни призманың эсасы болуп, гипотенузасы c ве йити бурчы 30° деӊ болан гөнүбурчлы үчбурчлук хызмат эдйәр. Ашакы эсасының гипотенузасының ве ёкары эсасының гөни бурчунуң депесиниң үсти билен, эсасының текизлиги билен 45° бурч эмеле гетирйән текизлик гечирилен. Текизлигиң призмадан кесип алан үчбурчлы пирамидасының гөврүмини кесгитлемели.

Жогабы. $\frac{c^3}{32}$.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

816. Гөнүбурчлы үчбурчлук пирамиданың эсасы болуп хызмат эдйәр. Пирамиданың гапдал гапыргасы өзара деӊ, катетлериң үсти билен гечйән гапдал гранлары болса эсасының текизлиги билен 30° ве 60° деӊ болан бурчлары эмеле гетирйәрлер. Эгер пирамиданың бейиклиги h деӊ болса, онда пирамиданың даш янында чызылан конусың гөврүмини тапмалы.

Жогабы. $\frac{10\pi h^3}{9}$.

817. Гапыргасы a деӊ болан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубуң B, D, A_1 ве C_1 депелеринден чыкян үч гапыргасының учларының үстүнден текизликлер гечирилен. Алнан жисимиң догры тетраэдрдигини субут этмели ве онуң долы үстүни ве гөврүмини хасапламалы.

Жогабы. $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3}{3}$.

818. Догры дөртбурчлы пирамиданың эсасының дашындан чызылан төверегиң радиусы r деӊ, депесиндәки текиз бурч болса α деӊ. Янашык дуран гапдал гранларың арасындакы ики гранлы бурчы кесгитлемели.

Жогабы. $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$.

819. Жисим, тараплары a, b ве a_1, b_1 деӊ болан ики гөнүбурчлук билен ёкарсындан ве ашагындан чәклендирилен. Гөнүбурчлукларың тараплары дегишлиликде параллелдирлер. Жисим гапдалларындан трапециялар билен чәклендирилен. Гөнүбурчлы эсасларың параллел текизликлериниң арасындакы узаклык h деӊ. Жисимиң гөврүмини тапмалы.

Жогабы. $v = \frac{h}{6}(2ab + 2a_1b_1 + ab_1 + a_1b)$.

820. Шарың дашындан кесик конус чызылан, конусың ашакы эсасының мейданы онуң ёкаркы эсасының мейданындан a эссе улы. Кесик конусың гөврүми шарың гөврүминден нәче эссе улы?

Жогабы. $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

МЫСАЛ ВЕ МЕСЕЛЕЛЕРИӉ ЧӨЗҮЛИШИ ХЕМ-ДЕ ГӨРКЕЗМЕЛЕР

1. $$\frac{374\cdot299 - 127 + 299 - 299}{172 + 299\cdot373} = \frac{(374\cdot299 - 299) + (299 - 127)}{172 + 299\cdot373} =$$
$$= \frac{299\cdot373 + 172}{172 + 299\cdot373} = 1.$$

2. $$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$
$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$

3. $$168\cdot\left(\frac{13 - \frac{13}{9} - \frac{13}{371} - \frac{13}{93}}{48 - \frac{48}{9} - \frac{48}{371} - \frac{48}{93}} : \frac{7 + \frac{7}{15} + \frac{7}{225} + \frac{7}{115}}{11 + \frac{11}{15} + \frac{11}{225} + \frac{11}{115}}\right)\cdot\frac{168168168}{143143143} =$$
$$= 168\cdot\left[\frac{13\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{371} - \frac{1}{93}\right)}{48\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{371} - \frac{1}{93}\right)} : \frac{7\left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{225} + \frac{1}{115}\right)}{11\left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{225} + \frac{1}{115}\right)}\right]\cdot\frac{168}{143} =$$
$$= 168\cdot\frac{13}{48}\cdot\frac{11}{7}\cdot\frac{168}{143} = 84.$$

4. $$3^{11}\cdot3^{19} - 5\cdot3^{15}\cdot3^{13} + 4\cdot9^8\cdot3^8 = 3^{30} - 5\cdot3^{28} + 4\cdot3^{16}\cdot3^8 = 3^{24}(3^6 - 5\cdot3^4 + 4) =$$
$$= 3^{24}[3^4(3^2 - 5) + 4] = 3^{24}[3^4\cdot4 + 4] = 3^{24}[4(3^4 + 1)] = 3^{24}\cdot4\cdot82$$

Диймек, $\frac{3^{24}\cdot4\cdot82}{41\cdot3^{24}} = 8$.

5. Шу ердәки гошуҗыларың хер бирини ики дробуң тапавуды гөрнүшинде язарыс, ягны

$$\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{17}\right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) =$$

меселәниң шертини канагатландырмаяр, чүнки иң ахыркы нетиҗеде 7 билен башланылян сан алыныдыр. Шейлеликде, бириңҗи хусусы көпелтмек хасылы бәшбелгили сан болман, алтыбелгили сан болмалыдыр, ягны

```
 × .1245
    237
  ------
  ..8715
+ .3735
  .2490
 -------
 7..5065
```

Шу ерден гөрүнши ялы, үчүнҗи хусусы көпелтмек хасылындакы нәбелли цифр 6 болмалы:

```
 × .1245
    237
  ------
  ..8715
+ .3735
  62490
 -------
 7..5065
```

Шейлеликде, көпелиҗидәки нәбелли цифр 3 болмалыдыр.

Җогабы: $31245 \times 237 = 7405065$.

б) Шу ерде хусусы көпелтмек хасылларының бириңҗиси дөртбелгили сан болуп, икинҗиси үчбелгили сандыр. Эгер көпелиҗи 8-е көпелдиленде үчбелгили сан алнып, нәбелли сана көпелдиленде дөртбелгили сан алынян болса, онда шол нәбелли сан (цифр) 9 болмалыдыр, ягны

```
 × .89
  ----
  ....
+ ...
  .0.
 -----
 ....0
```

Көпелтмек хасылының нетиҗесинде алнан сандан гөрүнши ялы, бириңҗи хусусы көпелтмек хасылы нуль билен гутармалы, онда көпелиҗи-де нуль билен гутармалыдыр, ягны

```
    ..0
 ×  .89
  -----
   ...0
+  ...
   .0..
 ------
  ....0
```

Икинҗи ве үчүнҗи хусусы көпелтмек хасылларының-да нуль билен гутаряндыгы айдыңдыр, ягны

```
    ..0
 ×  .89
  -----
   ...0
+  ..0
   .00
 ------
  ....0
```

Көпелиҗи үчбелгили сан болуп, 8-е көпелдиленде үчбелгили сан алыныдыр, диймек, шол көпелиҗи 125-ден аз болмалы, чүнки $125 \cdot 8 = 1000$ дөртбелгили сан алыняр. Шейлеликде, көпелиҗиниң икинҗи цифри я 1 я-да 2

болмалыдыр. Эгер шол цифр [illegible] ... икиҗиниң үчүнҗи өйдәки нәбелли цифрине көпелдиленде нуль алынмазды, диймек, гөзленилйән цифр 2 болмалыдыр, ягны

```
   120
 ×  .89
  -----
   ...0
+  ..0
   .00
 ------
  ....0
```

Инди үчүнҗи хусусы көпелтмек хасылындан гөрүнши ялы, көпелдиҗидәки нәбелли цифр 5 болмалыдыр, ягны

```
    120
 ×  589
  -----
   1080
+  960
   600
 ------
  70680
```

в) Дөртбелгили көпелиҗи 8-е көпелдиленде дөртбелгили сан алыныдыр, эмма нәбелли сана (икинҗи өйдәки цифре) көпелдиленде бәшбелгили сан алыныдыр, диймек, шол нәбелли цифр 9 болмалыдыр, ондан башга-да шол көпелиҗи 12 0 сандан кичидир.

Инди ашакдакыны аларыс:

```
    1...
 ×   890
  ------
    4...
+ ...3
  ....
 -------
 ......0
```

Бириңҗи хусусы көпелтмек хасылының нуль билен гутарянлыгы айдыңдыр, ягны

```
    1...
 ×   890
  ------
    4..0
+ ...3.
  ....
 -------
 ......0
```

Бириңҗи хусусы көпелтмек хасылындакы иң улы разрядакы цифр 4-е дендир, диймек, көпелиҗиниң нәбелли цифри 4 болмалыдыр, ягны

```
    1...
 ×   894
  ------
    4..0
+ ...3.
  ....
 -------
 ......0
```

Биринжи хусусы көпелтмек хасылындан гөрнүши ялы, көпелиҗи я нуль я-да бәшлик билен гутармалыдыр. Нуль билен гутаряр дийип гүман этсек, ашакдакыны аларыс:

$$\begin{array}{r} \times\ 1..0 \\ 894 \\ \hline 4..0 \\ +\ ...3. \\ .... \\ \hline ......0 \end{array}$$

Икинҗи хусусы көпелтмек хасылындан гөрнүши ялы, көпелиҗиниң икинҗи нәбелли цифри 7 болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 1.70 \\ 894 \\ \hline 4..0 \\ +\ ...3. \\ .... \\ \hline ......0 \end{array}$$

Озалкы беллән гечишимизе гөрә көпелиҗиниң нәбелли цифри 1 болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 1170 \\ 894 \\ \hline 4680 \\ +\ 10530 \\ 9360 \\ \hline 1045980 \end{array}$$

Эгер көпелиҗи 5-лик билен гутаряр дийип гүман эдилсе, онда шол көпелиҗи 1215 болуп, онуң үчбелгили 894 сана көпелтмек хасылы меселәниң шертиндәки ялы едибелгили сан болман, алтыбелгили сан боларды.

г) Үчүнҗи хусусы көпелтмек хасылында нуль алныпдыр, диймек, көпелиҗиниң үчүнҗи цифри нуль болмалы, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ ..9. \\ .0.9 \\ \hline .... \\ +\ ..3.. \\ ..5. \\ \hline .8..... \end{array}$$

Дөртбелгили көпелиҗи 9-а көпелдиленде дөртбелгили сан алныпдыр, диймек, шол көпелиҗи 1111-ден улы дәлдир, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 1.9. \\ .0.9 \\ \hline .... \\ +\ .3.. \\ ..5. \\ \hline .8..... \end{array}$$

Инди биринҗи хусусы көпелтмек хасылының иң ёкары разрядының цифриниң 9 болҗаклыгы айдындыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 1.9. \\ .0.9 \\ \hline 9.. \\ +\ .3.. \\ ..5. \\ \hline .8..... \end{array}$$

Шол хусусы көпелтмек хасылының ене-де бир нәбелли цифрини тапмак мүмкин. Хакыкатдан-да, докуз докуза көпелдиленде ятда секиз галяр, диймек, гөзленилйән цифр 8 болҗак, чүнки озалкы белленилишине гөрә көпелиҗиниң үчүнҗи ерде дуран цифри 0 болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 109. \\ .0.9 \\ \hline 98.. \\ +\ .3.. \\ ..5. \\ \hline .8..... \end{array}$$

Икинҗи хусусы көпелтмек хасылындан гөрнүши ялы, көпелдиҗиниң икинҗи нәбелли цифри 4 болмалыдыр, чүнки $4 \cdot 9 = 36$ боланы себәпли ятда 3 галяр, диймек

$$\begin{array}{r} \times\ 109. \\ .049 \\ \hline 98.. \\ +\ 43.. \\ ..5. \\ \hline .8.... \end{array}$$

Көпелтмек хасылындакы едибелгили санын диңе бир цифри беллидир. Шол цифре гарап дөрдүнҗи хусусы көпелтмек хасылының үчүнҗи ерде дуран цифриниң 7-ә деңлигини тапярыс, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 109. \\ .049 \\ \hline 98.. \\ +\ 43.. \\ .75. \\ \hline .8.... \end{array}$$

Яңкы тапылан цифре (7-ә) гарап, көпелдиҗидәки нәбелли цифриң 8 болҗаклыгыны тапярыс, чүнки $8 \cdot 9 = 72$ боланы себәпли $0 \cdot 8 + 7 = 7$ аларыс. Шейлеликде, көпелдиҗиниң әхли цифрлери тапылды, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 109. \\ 8049 \\ \hline .8..... \end{array}$$

Көпелиҗиниң нәбелли цифрини тапмак үчин дөрдүнҗи хусусы көпелтмек хасылын 5-лик цифрине үнс берйәрис. Шу ерде $8 \cdot 9 = 72$ болуп, 5 цифри алмак үчин ятдакы 3-и гошмалы боляр. Диймек, 8 сан хайсы хем болса бирбелгили нәбелли сана көпелдиленде ятда 3 галян болса, онда шол нәбелли сан 4 болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ 1094 \\ 8049 \\ \hline 9846 \\ +\ 4376 \\ 8752 \\ \hline 8805606 \end{array}$$

д) Пайда алнан биринжи нәбелли цифр бөлүжә көпелдиленде көпелтмек хасылында үчбелгили сан алыняр ве шол сан биринжи хусусы бөлүнижиден айрыланда нуль галяр. Диймек, пайың икинжи цифры нуль болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{l|l} -\ \cdots\cdots & .. \\ \quad \cdots & \overline{.08..} \\ \quad \overline{000..} & \\ \qquad \cdots & \\ \qquad \overline{0\ldots} & \\ \qquad\ \ \cdots & \\ \qquad\ \ \overline{000} & \end{array}$$

Шу ерден гөрнүши ялы, пайың дөрдүнжи цифри-де нуль болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{l|l} \cdots\cdots & .. \\ \cdots & \overline{.080.} \\ \overline{000..} & \\ \quad \cdots & \\ \quad \overline{0\ldots} & \\ \qquad \cdots & \\ \qquad \overline{000} & \end{array}$$

Инди бөлүжи 8-е көпелдиленде икибелгили санын алнандыгыны ве шол икибелгили бөлүжи биринжи хусусы нәә көпелдиленде үчбелгили санын алынандыгыны беллесек, онда шол нәбелли хусусы пайын 9 болжакдыгы айдындыр, ягны

$$\begin{array}{l|l} -\ \cdots\cdots & .. \\ \quad \cdots & \overline{9080.} \\ \quad \overline{000..} & \\ \qquad \cdots & \\ \qquad \overline{0\ldots} & \\ \qquad\ \ \cdots & \\ \qquad\ \ \overline{000} & \end{array}$$

Эдил шонуң ялы, пайың иң ахыркы нәбелли цифри-де 9 болмалыдыр. Инди бөлүжиниң цифрлерини гөзлэлиң. Икибелгили бөлүжи 9-а көпелдиленде үчбелгили сан алнып, шол бөлүжи 8-е көпелдиленде икибелгили сан алыняр. Диймек, шол бөлүжи диңе 12 болмалыдыр.

Шейлеликде, ашакдакыны аларыс: $90\,809 \times 12 = 1\,089\,708$

10. Жогабы: а) $3125 : 125 = 25$; б) $3125 : 25 = 125$.

11. Жогабы: $10\,000 - 9999 = 1$.

12. Жогабы: $a = 2$; $b = 8$; $c = 6$.

13. Жогабы: а) $772\,344 : 72 = 10\,727$; б) $1035 : 9 = 115$.

14. Жогабы: $12 \cdot 12 = 144$.

15. Меселәниң шертине гөрә

$$\begin{array}{r} abcde\,5 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 5\ abcde \end{array}$$

Шу ерден гөрнүши ялы, $l = 0$

Диймек,
$$\begin{array}{r} abcd\,05 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 5\,abcd\,0 \end{array}$$

Инди $d = 2$ болмалыдыр, чүнки $4 \cdot 5 = 20$ боланы себәпли 0 язылып, икиси ятда сакланыляр, сонра $4 \cdot 0 = 0$ үстүне шол ики гошулып, $0 + 2 = 2$ алыняр.

Диймек,
$$\begin{array}{r} abc\,2\,5 \\ \times\ 4 \\ \hline 5\,abc\,20 \end{array}$$

Мундан гөрнүши ялы, $c = 8$ болмалы

Диймек,
$$\begin{array}{r} ab\,8205 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 5\,ab\,820 \end{array}$$

Инди $4 \cdot 8 = 32$ боланы себәпли $b = 2$ болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ a\,28205 \\ 4 \\ \hline 5a\,2820 \end{array}$$

Шу ердәки көпелтмек хасылындакы $a = 1$ болмалыдыр, ягны

$$\begin{array}{r} \times\ a\,28\,205 \\ 4 \\ \hline 512\,820 \end{array}$$

Шейлеликде, илки башдакы алтыбелгили сан 512 820 болмалыдыр.

16. Жогабы: 2 358 315.

17. Илки билен 10 101 саны көпелдижилере даргадып язарыс:

$$10\,101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37.$$

Инди

$$10\,101 \cdot \left(\frac{5}{111\,111} + \frac{5}{222\,222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} +$$

$$+ \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{5}{11} + \frac{5}{2 \cdot 11} - \frac{4}{11} = \frac{10 + 5 - 8}{2 \cdot 11} = \frac{7}{22}.$$

18. Биринжи дробы икинжи, үчүнжи ве дөрдүнжи дроблар билен деңешдирип гөрсек, оларың санавжыларының ве майдалавжыларының шол биринжи дробуң санавжысыны ве майдалавжысыны ызлы-ызына гайталап язмак аркалы алнандыкларыны гөрәрис. Эмма икибелгили саны ызлы-ызына ики гезек гайталап язмак диймек, шол саны 101-е көпелтмек диймекдир. Шу ердәки мысалда $43 \cdot 101 = 4343$ ве $99 \cdot 101 = 9999$. Шейлеликде, икинжи дробы алмак үчин биринжи дробуң санавжысы ве майдалавжысы 101 сана көпелдилипдир, ягны дробуң улулыгы үйтгеменлир. Үчүнжи дробы алмак үчин биринжи дробуң санавжысыны ве майдалавжысыны 10101 сана көпелтмелидир ве ш. м.

Шейлеликде, берлен дөрт дроб улулыклары боюнча бири-биринден тапавутланмаярлар.

19.

10 л	7 л	3 л
10	0	0
3	7	0
3	4	3
6	4	0
6	1	3
9	1	0
9	0	1
2	7	1
2	5	3
5	5	0

20.

4 л	9 л
0	9
4	5
0	5
4	1
0	1
1	0
1	9
4	6

21. Пай: $1\cdot 2 \ldots 8\cdot 10+1$, галындьі 1.

22. Жогабы: 4000.

23. Жогабы: 60.

24. Жогабы: болмаз.

25. Жогабы: 0; 2; 6.

26. Жогабы: болувер.

27. Чөзүлиши: болмаз, чүнки дөрт саны нызыгдерли натурал саның жеми жүбүтдир.

28. Чөзүлиши: 2-ден башлап, 101-е ченли йөнекей санларын көпелтмек хасылыны n билен белләлин, онда $n+2$; $n+3$; ...; $n+100$; $n+101$ санларың хер бири дүзме сандыр ве оларың саны 100-е дендир, ш. с. т. э. (шуны-да субут этмек талап эдилйәрди.)

29. Чөзүлиши: $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1=2311$.

30. Чөзүлиши: Докуз саны тәк саның жеми жүбүт (120-э дең) болмаз. Диймек, 120 хозы меселәниң шертинде гөркезилиши ялы бөлүп болмаз.

31. Шол гөзленилйән ики саның улусы кичисине бөлүненде галынды галмазлыгы үчин, оларың бири бейлекисинден $513-78=435$ сан артык болмалыдыр. Инди санлар бөлүненде пайда 4 алынан болса, онда бир сан бейлеки сандан дөрт эссе улудыр. Диймек, аз санда бир бөлек болса, онда улы санда дөрт бөлек болмалы. Оларың тапавуды 4 бөл. — 1 бөл. = 3 бөл болуп, шол үч бөлеге 435 дүшйән болса, хер бөлеге $435:3=145$ дүшер. Диймек, кичи сан 145 болуп, улы сан $145\cdot 4+78=658$ болмалыдыр. Гөзленилйән санлар: 658 ве 145.

32. Жогабы: 19, 3.

33. Жогабы: $11+9=20$.

34. Ене-де 13 йылдан соңкы ашы билен ики йыл мундан озалкы яшың арасы 15 йыл. Инди, ики йыл мундан озалкы яшыны бир бөлек диййип кабул этсек, онда 13 йылдан соңкусы дөрт бөлек болар. Он бәш йыла 4 бөлек — 1 бөлек = 3 бөлек дүшйәр, онда бир бөлеге 5 йыл дүшер. Диймек,

оғланжыгың ики йыл мундан озал 5 яшы бар экен. Онда хәзирки вагтда ол 7 яшындадыр.

35. Эгер нуль билен гутарян сандакы нуль ташланыланда икинжи сан алынян болса, онда биринжи сан икинжи сандан 10 эссе улы болмалы. Диймек, икинжи саны бир бөлек хөкмүнде кабул этсек, онда биринжи санда шолар ялы он бөлек болар ве оларың жеми 11 бөлек болар. Бир бөлекде нәче сан барлыгыны билмек үчин 495 саны 11 бөлмели болар, ягны $495:11=45$. Шейлеликде, биринжи сан $10\cdot 45=450$ ве икинжи сан $1\cdot 45=45$ болмалыдыр.

36. Меселәниң шертине гөрә биринжи саның $\frac{2}{5}$ бөлеги икинжи саның $\frac{3}{5}$ бөлегине дендир. Эгер биринжи саның $\frac{2}{5}$ бөлегини бирлик хөкмүнде кабул этсек, онда шол сан $\frac{5}{2}$ болуп, икинжи сан $\frac{5}{3}$ болар. Шу бөлеклерин жеми $\frac{5}{2}+\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$ болар. Инди $\frac{25}{6}$ бөлек 120-ни дүзйән болса, онда биринжи санда $\frac{5}{2}$ боланы себәпли, шол сан $\left(120:\frac{25}{6}\right)\cdot\frac{5}{2}=\frac{120\cdot 6}{25}\cdot\frac{5}{2}=72$ ве икинжи сан $\frac{120\cdot 6}{25}\cdot\frac{5}{3}=48$ болмалы.

Жогабы: 72; 48.

37. Инди билен биринжи саның $\frac{5}{8}$ бөлегини бирлик хөкмүнде кабул эделиң, онда шол сан $\frac{8}{5}$ болуп, икинжи сан $\frac{4}{3}$ болар. Инди шу бөлеклериң тапавудыны тапалың:

$$\frac{8}{5}-\frac{4}{3}=\frac{4}{15}.$$

Шу тапавутда, ягны $\frac{4}{15}$ бөлеге 12 дүшйәр, онда бир бөлеге $12:\frac{4}{15}=45$ дүшер. Биринжи санда $\frac{8}{5}$ бөлек бар, диймек, биринжи сан $45\cdot\frac{8}{5}=72$ дендир. Икинжи санда $\frac{4}{3}$ бөлек бар, диймек, икинжи сан $45\cdot\frac{4}{3}=60$ дендир.

Жогабы: 72 ве 60.

38. Ховза гелйән сувуң мукдары 20% азалыпдыр, диймек, инди ховза өңки гелйән сувуң 0,8 бөлеги гелйәр. Эгер 0,8 бөлек 100% дүзйән болса, онда 1 битиниң нәче процент дүзйәндигини тапарыс, ягны $\frac{100}{0,8}=125\%$. Диймек, ховзы доздурмак үчин герек болан вагт 25% артыпдыр.

39. Меселәниң шертинден ашакдакылар гелип чыкяр: биринжи районда яшаянларың $\frac{1}{3}$ бөлеги икинжи районда яшаянларың $\frac{1}{4}$ бөлегине, үчүнжи районда яшаянларың болса $\frac{1}{5}$ бөлегине дең боляр. Диймек, биринжи районда яшаянлар үч бөлеги дүзйән болса, икинжи райондакылар дөрт бөлеги ве үчүнжи районда яшаянлар бәш бөлеги дүзйәрлер. Шейлеликде, жеми $3+4+5=12$ (бөлек) боляр. 12 бөлекде 120 000 адам болса, онда 1 бөлекде $120\,000:12=10\,000$ адам болар.

Диймек, биринжи районда $3\cdot 10\,000=30\,000$ адам, икинжи районда $4\cdot 10\,000=40\,000$ адам ве үчүнжи районда $5\cdot 10\,000=50\,000$ адам яшаяр.

40. Кубуң гапыргасы 1 дийип кабул эделин, онда онуң долы үсти 6 *кв.* бирлик болар. Кубуң гапыргасы 20% артдырылан болса, онда онуң узынлыгы $1+\frac{1}{5}=1\frac{1}{5}$ бирлик болар. Кубуң долы үсти $\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot 6=\frac{216}{25}$ *кв* бирлик болар.

Инди кубуң долы үстүниң нәче эссе артандыгыны тапалың, ягны $\frac{216}{25}:6=\frac{36}{25}=1\frac{11}{25}$ эссе.

Эгер өзалкы үсти 100% хөкмүнде кабул этсек, онда тәзе кубуң үсти $100\cdot 1\frac{11}{25}=144\%$ болар.

Шейлеликде, кубуң долы үсти 44% артыпдыр.

41. Илки билен әдимлериң узынлыгының тапавудыны тапалың, ягны $0{,}72-0{,}54=0{,}18$. Диймек, какасы үч әдим эденде оглы дөрт әдим эдйәр. Шейлеликде, оглуның хер дөрт ызына какасының ики ызы артыкмач гошуляр. Илки башдакы ызы айырсак, онда 60 ыз галар. Диймек, шол 60 ызың 40-ы оглуныңкыдыр, ягны $[(60:6)\cdot 4=40]$. Диймек, ховлының узынлыгы оглуның әдими боюнча 40 әдим, какасының әдими боюнча 30 әдимдир. Шейлеликде $40\cdot 0{,}54=21{,}6$ *м*.

42. Эгер пионерлериң аляң открыткаларының эсасы үлши кем-кемден 1 сан артян болса, онда оларың аляң гошмача үлүшлерине дүшйән открыткаларың саны азалмалыдыр. Открыткалар гутаринча процесс довам эдийәр, диймек, иң соңкы пионере диңе эсасы үлүш етип, оңа гошмача үлүш галмаяр. Шейлеликде, иң соңкы пионере, онуң өң янындакының гошмача үлүшден алан открыткаларының $\frac{9}{10}$ бөлеги етипдир. Башга геркезилиши алы, эсасы үлше дүшйән открыткаларың саны ызыгидерли 1 сан артяр ве гошмача үлше дүшйәнлериң саны шонча азаляр. Диймек, иң соңкы пионериң өң янындака гошмача үлүшден дүшен открытканың саны биринжи пионере эсасы үлүшден дүшен открытканың санына деңболмалы, ягны 1 открытка болмалы.

Шейлеликде, санын $\frac{1}{10}$-си 1-е дең болса, онда $\frac{9}{10}$ бөлеги 9-а деңдир.

Диймек, иң соңкы пионер 9 открытка алыпдыр. Шу пионере гошмача үлүшден хич бир открытка етмеди, ягны галынды ёкды, диймек, пионерлериң саны 9-дыр, чүнки 9-нжы пионере 9 открытка дүшйәр ве галындыда хич бир открытка галмаяр.

Жогабы: 9 (пионер).

43. Меселәниң шертине гөрә үч көпүклик монеталарың саны икә бөлүнйәр, бәш көпүкликлериң саны болса үче бөлүнйәр. Диймек, үч көпүкликлериң ики бөлегиндәки билен бәш көпүкликлериң үч бөлегиндәки монеталарың саны 50 болуп, үч көпүкликлериң бир бөлегиндәки билен бәш көпүкликлериң бир бөлегиндәки монеталарың саны 19-дыр. Шулары гысгача шейле язарыс:

2 бөл.	3 бөл.	50 монета
1 бөл.	1 бөл.	19 монета.

Эгер үч көпүкликлерден ики бөлек ве бәш көпүкликлерден ики бөлек алсак, онда шолардакы монеталарың саны 38 болар:

2 бөл.	3 бөл.	50 монета
2 бөл.	2 бөл.	38 монета

Шу ики сетри деңешдирип, бир бөлекдәки бәш көпүкликлериң санының 12-дигини $(50-38)$ гөрйәрис. Онда бәш көпүкликлериң үч бөлегинде $3\cdot 12=36$ монета болар. Инди үч көпүклик монеталарың санына тапмак аңсатдыр, ягны $50-36=14$ (монета).

Шейлеликде, гапжыкдакы пул $14\cdot 3+36\cdot 5=2$ манат 22 көпүк болар.

44. Илки билен, берлен 1680 саны йөнекей көпелдижилере дагыдярыс, ягны $1680=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7$. Инди шу секиз саны көпелдижиден дөрт көпелдижи дүзмели. Эгер шол көпелдижилери 5 ве 7 цифрлери 2-ә я-да 3-е көпелтмек аркалы дүзсек, онда көпелтмек хасылы 1680 болман, хас көп сан боларды. Ондан башга-да 5 билен 7-ниң арасындакы көпелдижи 6 болмалыдыр. Шонуң үчин илки билен $2\cdot 3=6$ көпелдижини аларыс. Инди ашакдакы үч көпелдижи бәр: $5\cdot 6\cdot 7$. Галан $2\cdot 2\cdot 2$ көпелдижилерден-де дөрдүнжи көпелдижини аларыс, ягны $2\cdot 2\cdot 2=8$.

Шейлеликде, $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=1680$ аларыс.

Жогабы: гөзленилйән көпелдижилер 5, 6, 7 ве 8.

45. 1) Пароход акымың терсине бир сагатда әхли ёлуң $1:4\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$ бөлегини гечер.

2) Пароход акымың угруна бир сагатда әхли ёлуң $1:3=\frac{1}{3}$ бөлегини гечер.

3) Пароходың бир сагатда акымың угруна гечйән ёлы онуң бир сагатда терсине гечйән ёлундан $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ бөлек артыкдыр.

4) Диймек, бир сагатда шол ёлуң $\frac{1}{9}:2=\frac{1}{18}$ бөлеги гечилжек.

5) Шол аралыгы деря ташланылаң чөлек $1:\frac{1}{18}=18$ сагатда гечер.

Жогабы: 18 сагатда.

46. Меселәниң шертине гөрә сагатларың бири (мысал үчин, биринжиси) хер сагатда 1,5 минут өңе гидйәр. Диймек, биринжи сагат 40 сагатдан соң бир сагат өңе гитжек $\left(\frac{60}{1{,}5}=40\right)$.

Диймек, 12 сагат өңе гитмек үчин (12 сагат өңе гиденде сагатларың икиси-де ене шол бир вагты гөркезжек) $12\times 40=480$ сагат я-да 20 гиже-гүндиз герек.

Шейлеликде, 20 гиже-гүндизден соң ир сагат 9-да сагатлар ене шол бир вагты гөркезерлер.

47. Эгер пароход биринжи пристандан чыкан дессине тизлигини сагатда 0,25 *км* артдыран болса, онда ол бейлеки бармалы пристанына вагтындан бир сагат ир барарды. Диймек, тизлигиң $\frac{1}{4}$ бөлегине 1 сагат дегишли болса, онда онуң $\frac{5}{4}$ бөлегине $\left(1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\right)$ бәш сагат дегишли болар. Башгача айданымызда, пароход тизлигини үйтгетмән йөрән болса, онда шол ики пристаның аралыгыны гечмек үчин оңа 5 сагат герек боларды. Шол араның ярысыны 2,5 сагатда гечип, соңра тизлигини артдыраны себәпли, ёлуң ярысыны 2 сагатда гечйәр. Шейлеликде, пароход ики пристаның аралыгыны 4,5 сагатда гечйәр.

48. Колхоздан атлы чыкып, доланып гайдып гелйәнчә 5 сагат 20 минут гечйәр (12 сагат 20 минут — 7 сагат = 5 сагат 20 минут).

Диймек, шәхерден чыкан колхозчы билен душушянча 2 сагат 40 минут $\left(2\frac{2}{3}\text{ сагат}\right)$ гечйәр. Шу вагтда колхозчы $2\frac{2}{3}\cdot 4{,}5=12$ *км* ёл йөрейәр.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Ол озал хем бир сагатлап ёл йөрәни үчин, жеми $12 + 4{,}5 = 16{,}5$ *км* ёл йөрейәр. Шейлеликде, эта мүнүп гечмели ёл $40{,}5 - 16{,}5 = 24$ *км* боляр. Эмма 24 *км* ёлы ат $2\frac{2}{3}$ сагатда гечипди. Диймек, онуң тизлиги $24 : 2\frac{2}{3} = 9$ *км/саг* болмалыдыр.

49. Меселәниң шертине гөрә автобусдан дүшен адамың тизлиги автобусың тизлигинден 5 эссе аз. Диймек, автобусың 10 секунтда гечен ёлуны ол $5 \cdot 10 = 50$ секунтда гечмели. Эгер шол адам өз достуны гөрен вагтында ол *A* пунктда болан болса, онда автобусдан дүшен вагтында, эййәм онуң досты *B* пункта барар. Диймек, шол аралыгы гечмек үчин, оңа диңе 50 секунт дәл-де, ене-де $10 : 2 = 5$ секунт, ягны жеми 55 секунт герек. Оларың бириниң тизлигиниң бейлекисиниң тизлигинден ики эссе артыкдыгыны гөз өңүнде тутсак, онда ызкы баряның тизлиги ики бөлек болуп, өңдәки баряның тизлиги шолар ялы бөлегиң бири болар. Шейлеликде, ызкы баряның бир бөлеги өңки баряның тизлиги билен дең боляр дийсек, онда ызкы барян 55 секунтда гечмели ёлы $55 \cdot 2 = 110$ секунтда гечер.

Шейлеликде, автобусдан дүшен адам достуның ызындан 110 секунтда етйәр.

50. Меселәниң шертине гөрә ёлагчы поезди йүк дашаян поездден хер сагатда $57 - 38 = 19$ *км* артык гечйәр. 7 сагатда йүк дашаян поезд $7 \cdot 38 = 266$ *км* ёл гечер. Инди сагатда 19 *км* артык гечйән болса шол 266 *км* ёлы гечмек үчин $266 : 19 = 14$ сагат герек болар. Диймек, икинжи поезд биринжи поездиң ызындан 14 сагатда етжек. Инди ёлагчы поезди *B* станция 2 сагат өң гелйән болса, онда шол ики сагадың ичинде йүк дашаян поезд $2 \cdot 38 = 76$ *км* ёл гечер. Диймек, икинжи поезд биринжи поездден 76 *км* өңе дүшүпдир. Шол аралыгың нәче сагатда гечилендигини билмек үчин 76-ны 19-а бөлмелидир, ягны $76 : 19 = 4$ (сагат). Шейлеликде, ёлагчы поезди йүк дашаян поездиң ызындан етип гечөнден соңра 4 сагат ёл йөрәпдир. Диймек, ёлагчы поезди жеми $14 + 4 = 18$ сагат ёл йөрәпдир. Онда гөзленилйән узаклык $18 \cdot 57 = 1026$ *км* болар.

Инди йүк дашаян поездиң гечен ёлуны хасаплалың. Дүшүшыкдан озал шу поезд $7 + 14 = 21$ сагат ёл йөреди. Дүшүшыкдан соңра болса $4 \cdot 57 : 38 = 6$ сагат ёл йөрейәр. Диймек, ол жеми $21 + 6 = 27$ сагат ёл йөрәпдир. Онда гөзленилйән узаклык $27 \cdot 38 = 1026$ *км* болар. Диймек, *A* ве *B* станцияларың арасындакы узаклык 1026 *км*-дир.

51. Гой, машынларың хеммеси үч тонналык болсун. Онда оларың хер бирине 2,8 тонна йүк йүклененде бәш тонналыклара йүкленендәкиден $5 - 2{,}8 = 2{,}2$ тонна тапавут болар ве үч тонналыкларың хер бирине $3 - 2{,}8 = 0{,}2$ *т* йүк етмез. Эмма үч тонналык машынларың саны бәш тонналык машынларың санындан ики эссе көп боланы себәпли, бәш тонналыклара саранда $0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ *т* йүк кем йүкленилйәр диймек мүмкиндир. Шейлеликде хер машына жеми $2{,}2 + 0{,}4 = 2{,}6$ *т* йүк кем йүкленилйәр. Инди бир ярым тонналык машынлар долы (1,5 тоннадан) йүкленилендиклери себәпли, хер машындан $2{,}8 - 1{,}5 = 1{,}3$ *т* йүк галяр. Озал хер машына 2,6 *т* йүкүң кем йүкленилйәнини гөз өңүнде тутсак, хер машына йүкленилмән $2{,}6 - 1{,}3 = 1{,}3$ *т* йүк галар. Йүкленилмән галан шейле машынларың саны бәш тонналык машынларың санына деңдир. Шулары шол галан 6 машына йүкләмеди. Диймек, бәш тонналык машынларың саны 6. Онда меселәниң шертине гөрә үч тонналык машынларың саны $6 \cdot 2 = 12$ ве бир ярым тонналык машынларың саны $6 + 6 = 12$.

Барлагы: жеми $12 + 6 + 12 = 30$ машын бар. Эгер оларың хер бирине 2,8 тонна йүкленилсе, онда жеми $2{,}8 \cdot 30 = 84$ *т* йүк йүкленилйәр. Эгер-де оларың хер бирине өзүне дегишлиси йүкленилсе, онда жеми $6 \cdot 5 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 1{,}5 = 84$ *т* йүк йүкленилйәр.

52. Ики билен колхозчының 7 сагатда гечжек ёлуны тапалың:

$$7 \cdot 7\frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 38}{5} = 53\frac{1}{5}\ км.$$

Инди автобусың колхозчыдан хер сагатда нәче *км* артык гечйәндигини тапалың:

$$25\frac{1}{3} - 7\frac{3}{5} = 17\frac{11}{15}\ км.$$

Колхозчының ызындан етмек үчин $53\frac{1}{5} : 17\frac{11}{15} = 3$ сагат герек.

Диймек, автобус колхозчының ызындан етйәнчә колхозчы 10 сагат $(7 + 3 = 10)$ ёл йөрәпдир. Инди 38 *км* ёлы гечмек үчин колхозчының нәче вагт сарп эдендигини тапалың:

$$38 : 7\frac{3}{5} = 5\ сагат.$$

Шу 5 сагадың ичинде автобусың гечен ёлы

$$5 \cdot 25\frac{1}{3} = 126\frac{2}{3}\ км\ боляр.$$

Шу аралыкдан колхозчының гечен 38 *км* ёлуны айырсак, онда колхозчының оба ченли гечмели ёлуның ики эссесини аларыс.

$$126\frac{2}{3} - 38 = 88\frac{2}{3}\ км\ аларыс.$$

Шу аралыгы 2-ә бөлүп, колхозчының оба ченли гечмели ёлуның узаклыгыны тапарыс.

$$88\frac{2}{3} : 2 = 44\frac{1}{3}\ км.$$

Шейлеликде, шәхерден оба ченли гөзленилйән узаклык:

$$7\frac{3}{5} : 10 + 44\frac{1}{3} + 38 = 158\frac{1}{3}\ км.$$

53. 1) Эгер колхозчы сагатда 3,5 *км* гечсе, онда ол $\frac{1}{2}$ сагатда $3{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}75$ *км* ёл гечер.

Диймек, станция ченли 1,75 *км* галанда поезд гитжекдир.

2) Эгер-де колхозчы сагатда 4,2 *км* ёл гечсе, онда ол 20 минутда $4{,}2 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}4$ *км* ёл гечерди. Диймек, шу тизлик билен гечиленде 1,4 *км* артык ёл гечилжекдир.

3) Шу ики аралык $1{,}75 + 1{,}4 = 3{,}15$ *км* болар.

4) Тизликлериң тапавутлары $4{,}2 - 3{,}5 = 0{,}7$ *км/саг*.

5) Шол аралыгың тапавутларыны артыкмач тизлиге бөлсек, вагт аларыс.

$$3{,}15 : 0{,}7 = 4{,}5\ сагат.$$

6) Шу вагтың үстүне меселәниң шертиндәки $\frac{1}{2}$ сагады гошсак, колхозчының 3,5 *км* тизлик билен нәче сагат йөрежекдигини тапарыс: $4{,}5 + 0{,}5 = 5$ сагат.

7) Иңки гөзленилйән аралык $5\cdot3{,}5 = 17{,}5$ *км* болар.
Беллик: Эгер 4,5 сагатдан 20 минуты айрып, шол тапавуды 4,2-ә көпелтсек, онда гөзленилйән аралыгы тапарыс:

$$\left(4{,}5 - \frac{1}{3}\right)\cdot 4{,}2 = 4{,}5\cdot4{,}2 - 1{,}4 = 18{,}9 - 1{,}4 = 17{,}5\ км.$$

54. Дөртбелгили санын илкинжи ики цифринден дүзүлен санларың икибелгили ве бирбелгили болмагы мүмкин, чүнки соңкы ягдайда 0 санын өңде гелип, 01, 02 ве ш. м. санлары дүзмеги мүмкиндир. Соңкы ики цифрден дүзүлен санлар барада эдил шонуң ялы айтмак мүмкиндир. Инди эгер ахыркы ики цифрден дүзүлен санларың илкинжи ики цифрден дүзүлен санлары 100 долдурандыгыны гөз өңүнде тутсак, онда оларың 99-а деңдиги гелип чыкар.

Хакыкатдан-да, илкинжи ики цифрден дүзүлен әхли мүмкин болан икибелгили ве бирбелгили санларың хеммеси 1-ден 99-а ченли болуп, оларың саны 99-а деңдир. Диймек, олары, 100 долдурян санларың хеммеси 99-дыр.

Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян номерлериң саны 99, диймек, шейле номерли машынларың саны-да 99 болар.

55. Эгер оларың икинжиси догручылардан диййп гүман этсек, онда биринжи ялаңчылардан болмалы ве берлен сорага ялан (надогры) жогап бермели, ягны ол мен догручылардан диймели. Диймек, оларың икинжиси догручылардан болуп биләжек дәл, онда ол ялаңчылардан болмалы. Шейлеликде, икинжи ялаңчылардан болмалы.

56. Сатыжы надогры хасапландыр. Себәби пероның саны 9, оңа төленен пул 3-е бөлүнмелидир. Дептерлериң бахасы 30 көпүк, онда нәче дептер алынса-да олара төленен пул хем үче бөлүнмелидир. Диймек, окувчының төлемели пулуның жеми 3-е галындысыз бөлүнмелидир. Эмма 2 манат 60 көпүк 3-е галындысыз бөлүнмейәр.

57. Автобусларың биринжиси сагатда ёлуң $\frac{1}{12}$ бөлегини, икинжиси сагатда ёлуң $\frac{1}{10}$ бөлегини гечйәр. Еди сагатда олар биле ликде ёлуң $\frac{7}{12}+\frac{7}{10}=\frac{77}{60}$ бөлегини гечерлер. Диймек, 7 сагат гечмәнкә автобуслар бир-бирлериниң деңинден гечйәрлер. Онда 7 сагат геченден соң автобусларың гечен ёлуның умумы бөлеги (135 *км*) әхли ёлуң $\frac{77}{60}-1=\frac{17}{60}$ бөлегини дүзйәр. Диймек, A ве B пунктларың аралыгы $136:\frac{17}{60}=480$ *км* болар.

58. Жогабы: хер яшикде 100 алма бар.
59. Жогабы: 400 *км* ве 40 *км/сағ.*
60. Жогабы: 35 367.
61. Гөзленилйән санлар 10-дан кичидир, себәби 10-ны өз-өзүне 4 гезек көпелтсек, 3024-ден улы болар. Онда олар бирбелгили санлардыр. 5 гөзленилйән санлара гирмейәр. Себәби көпелтмек хасылында соңы нуль болар. Онда гөзленилйән санлар $6\cdot7\cdot8\cdot9$ болар.
62. Жогабы: 1994.
63. Ёлагчылар $32\cdot5$ көпүк төледилер. Онуң үчин олар касса иң азындан $\frac{32\cdot5}{20}$ саны монета ташламалыдырлар (себәби оларда 20 көпүкден улы монета ёк). 5 көпүклик моноталарың ёкдугы зерарлы ёл кирейи төлененден соң ёлагчыларың хер бирине иң болманда бир монета бардыр. Диймек, ёлагчыларда илки башда иң азындан $32+\frac{32\cdot5}{20}=40$ монета болмалыдыр. Илки башда автобусда 4 ёлагчы болуп, оларың биринжисинде 20 көпүк, икинжи

үчүнжисиниң хер биринде 15 көпүк, дөрдүнжисинде ики саны 10 көпүклик моноталар бар диелиң. Төләп гайтаргыларыны аланларындан соң биринжисинде 15 көпүк, икинжисиниң ве үчүнжисиниң хер биринде 10 көпүк, дөрдүнжисинде болса 15 көпүклик моноталар болар.

64. Берлен санын цифрлериниң саны 1967 боланы үчин A сан бәшбелгили $7\cdot1967=17703$-ден улы дәлдир. Шонуң үчин хем B сан икибелгили $9\cdot5=45$-ден улы дәлдир. Берлен санын 9-а бөлүнйәндиги үчин A ве B санлар хем 9-а бөлүнмелидирлер. Онда B сан 9, 18, 27, 36, 45 санларың бирине деңдир. Бу санларың хайсысына дең болса-да B санын цифрлериниң жеми 9 болар.

65. Белли болшы ялы, язылан санын цифрлериниң жеми 3-е ве 9-а бөлүнйән болса, онда ол санын өзи хем 3-е ве 9-а бөлүнер. Меселеде гөркезилен саны язсак, онуң цифрлериниң жеми 300 болар. Эмма 300 үче бөлүнип 9-а бөлүнмейәр. Онда язылан сан хем 3-е бөлүнип 9-а бөлүнмейәр. Булар ялы сан долы квадрат дәлдир.

66. Берлен 111 ... 1 (бирлик сегсен бир гезек гайталаняр) саны 9-а бөлсек, пай 1 234 567 90 123 ... 790 ... болар. Пайда 1 234 567 9 цифрлериң ызыгидерлилиги 9 гезек гайталанар ве оларың арасында нуль болар. Эмеле гелен пай 9-а бөлүнер, себәби онуң цифрлериниң жеми $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot9=333$ докуза бөлүнйәр. Диймек, берлен сан 81-е бөлүнер.

67. Ат кушт тагтасының 64 өйүниң хер биринде диңе бир гезек болжак болса, 63 гөчүм этмели. Ол хер бир гөчүмде ак өйден гара я-да терсине гөчүп билйәр. Шонуң үчин хем 1, 3, 5, ... тәк номерли гөчүмлерде атың баран өйлериниң реңки илки дураныныӊ реңки билен габат гелмейәр. Жүбүт номерли 2, 4, 6 ... гөчүмлерде болса атың баран өйлериниң реңки илки дуранындакы ялыдыр. Диймек, ат иң соңкы 63-нжи гөчүмде ёкаркы сагдакы өе барып билмез. Себәби ашакы чепдәки ве ёкаркы сагдакы өйлериң реңки бирмензешдир.

68. Берлен 77 телефоның хер бирини оларың гөни 15-си билен бирлешдирип болар дийип гүман эделиң. Бу телефонлары шейле бирлешдирмек үчин нәче сим бөлежиклериниң герек болжакдыгыны хасаплалың. Ики телефоны ики гаты болан бир сим билен бирлешдирмели. Хер бир телефондан 15 сим чыкяр. Диймек, $(77\cdot15):2$ саны сим герек болжак. Эмма бу битин сан дәлдир. Онда бизиң эден гүманымыз ялңышдыр. Берлен телефонлары меселеде гөркезилиши ялы бирлешдирмек мүмкин дәлдир.

69. Биринжи оюнчы илкинжи гөчүмде гаплардакы чөплериң саныны деңлешдирмели, ягны биринжи гапдан $73-56=17$ чөп алмалы, шонда хер гапда 56 чөп галяр. Инди икинжи оюнчы гөчүп, гапларың бириндеп ислендигиче чөп аляр. Биринжи оюнчы икинжи гезек гөчендe, икинжи оюнчының чөп алмалык габындан чөп алып, гаплардакы чөплериң саныны деңлешдирмели. Диймек, биринжи оюнчы хер гөчүмде гаплардакы чөплериң саныны деңлешдирмелидир. Шейле принцип билен ойнаса, биринжи оюнчы утар.

70. Илкинжи болуп 66 саны язан утяр, онда 65, 64, 63 ... 58, 57 санлары язан утыляр. Бу ерден 56 саны язан оюнчының утяндыгыны, бейлеки санлары язанларың болса утулянлыгыны гөрерис. Диймек 55, 54, 53 ... 48, 47 санлары язан утыляр. Шулар ялы пикир эдип 66, 56, 46, 36, 26, 16, 6 санлары язаның утяндыгы, бейлеки санлары язаның болса утулянлыгыны гөрерис. Бу ерден илкинжи башлан оюнчының утмагы үчин 6 саны язмалыдыгы ве икинжиниң нәме язанлыгына гарамаздан, онуң икинжи гөчүмде 16, үчүнжиде 26 ве шуңа мензеш санлары язмалыдыгы гөрүнйәр.

71. Кушт пыядасы a 1 клеткада диелиң. Онда меселәниң шертине гөрә иң соңкы гөчен $h8$ клетка баранда утяр. Бу клетканы „батлы“ дийип атландыралың. Онда $h7$, $g7$, $g8$ клеткалар „батсыз“ болар, себәби булара гөчен оюнчы утуляр. Бу деңширмәни довам эдип, $h6$, $f6$, $f8$, $h4$, $d6$, $d8$, $f2$, $d2$, $b2$, $b4$, $b6$, $b8$ клеткаларың „батлыдыгыны“, ягны шу клеткалара гөчениң утяндыгыны гөрерис. Диймек, биринжи оюнчы утмак үчин илкинжи гечүмде 62 клетка гечмелидир ве соңкы гечүмлерде диңе „багтлы" клеткалара гечмелидир.

72. Илкинҗи гечен оюнчы утяр дийип гуман эделиң. Онда ол столуң үстүнден иң соңкы чөплери алар. Икинҗи оюнчының иң соңкы гечүминиң өң якында столуң үстүнде нәче чөп бар болса, биринҗи оюнчы утуп билер? Диңе 11 чөп бар болса утуп билер. Себәби 11-ден аз болса, онда оларың хеммесини икинҗи аларды ве утарды. Биринҗи икинҗә гаранда бир гечүм көп гечйәр. Шонуң үчин хем ёкаркы ягдая ашакдакы ялы гетирмек болар: биринҗи оюнчы илкинҗи гезек 9 чөп алмалы (1967 саны 11-е бөлмекден галан галыңды), бейлеки гечүмлерде икинҗи нәче чөп алса, онуң саныны 11-е долдурмалы: (меселем: икинҗи 8 чөп алса, биринҗи 3 чөп алмалы).

73. Столуң үсти гөнүбурчлук боланы үчин онуң симметрия меркези бардыр (диагоналларың кесишме O нокады). O нокатдан башга столуң үстүнден эркин A нокат алалың. O меркезе гөрә A нокада симметрик A_1 нокат хем столуң үстүнде ятандыр. Шонуң үчин X монета столуң үстүнде болса, онда оңа симметрик ерлешен X_1 монета хем столуң үстүнде ерлешмелидир. Бу ерден, ойны башлан оюнчының утмагы үчин илкинҗи монетаны столуң симметрик меркезине гоймалыдыгы ве соңкы гечүмлерде икинҗи оюнчы монетаны нирә гойса-да биринҗи оюнчының монетаны оңа симметрик ерлешер ялы гоймалыдыгы гөрүнйәр.

74. Биринҗи чекүвде терезиниң хер тарапына 3 монета гоймалы. Эгер олар деӊ болсалар, онда галп монета чекилмән галан үч монетаның ичинделир. Деӊ болмасалар, онда галп монета еңил болан үч монетаның ичинде болар. Диймек, икинҗи чекүвде үч монетаның арасындан еңил монетаны тапмалы болар. Онуң үчин үч монетадан алып терезиниң хер окарасына бирини гоялың. Эгер олар деӊ болсалар, онда үчүнҗи монета галпдыр. Деӊ болмасалар, онда терезиниң еңил тарапындакы монета галпдыр.

75. Монеталары A, B, C ве D харплар билен белләлиң. Терезиниң бир окарасына A, B монеталары, бейлекисине C монета билен 5 г дашы гоялың. Оларың аграмларының деӊ болмагы я-да бириниң бейлекисинден еңил болмагы мүмкин.

1. Гой, A ве B монеталарың аграмы C монета билен 5 г дашың аграмына деӊ болсун. Онда D монета галпдыр. Икинҗи чекүвде D монетаны 5 г даш билен деңешдирип, онуң хакыкыдан еңилдигини я-да агырдыгыны билерис.

2. Гой, A ве B монеталарың аграмы C монета билен 5 г дашың аграмындан көп болсун. Бу ягдайда галп монетаның терезиниң хайсы окарасындадыгы белли дәл. Эмма галп монета A ве B монеталарың бири болса, онда ол хакыкыларындан агыр, эгер C галп монета болса, онда онуң хакыкыдан еңил болжагы гөрүнип дур.

Икинҗи чекүвде A ве B монетаның хер бирини терезиниң бир окарасына гоймалы. Олар деӊ болсалар, онда C галп монетадыр ве бейлекилерден еңил болар. A монета B монетадан агыр болса, A галпдыр ве хакыкыдан агыр болар.

3. Гой, A ве B монеталарың аграмы C билен 5 г дашың аграмындан аз болсун. Онда галп монета A ве B монеталарың бири болса, онда ол хакыкыдан еңилдир. Эгер C монета галп болса, онда ол хакыкыдан агыр болар. Бу ягдайда икинҗи чекүв эдил 2-нҗи пунктдакы ялыдыр.

76. Предметлериң 3 саныны x, y, z харплар билен белләлиң.

1) x предмети y билен деңешдирелиң. Гой x-иң аграмы y-ден аз болсун.

2) z предмети x билен деңешдирелиң. Эгер z еңил гелсе, онда предметлер аграмы боюнча z, x, y тертипде ерлешер. Эгер z предмет x-ден агыр гелсе, үчүнҗи чекүвде оны y предмет билен деңешдирмели.

3) Эгер z ве y деңешдирилende z еңил гелсе, онда предметлер x, z, y тертипде ерлешер. z предмет y-ден агыр гелсе, онда x, y, z тертипде ерлешер. Диймек, үч предмети үч чекүвде аграмларының өсүш тертибинде

ерлешдирмек болар. Дөрдүнҗи чекүвн дүшүндирмек үчин биринҗи үч предметиң тертиби x, y, z болар дийип гуман эделиң.

4) Дөрдүнҗи u предмети ортада дуран y предмет билен деңешдирелиң.

5) Эгер u предмет y-ден еңил гелсе, онда оны x билен (агыр гелсе, онда z предмет билен) деңешдирмели. Жеми бәш гезек өлчелди. Дөрт гезек чекмек билен, булар ялы ерлешдирмек мүмкин дәл. Себәби 4 предмети 24 дүрли ерлешдирмек мүмкиндир. Биринҗи чекүвден соң оларың 12-си, икинҗи чекүвден соң оларың 6-сы, үчүнҗи чекүвден соң 3-си, дөрдүнҗи чекүвден соң 2-си галар.

77. Монеталары биринҗи ве икинҗисинде 27 монетадан ве үчүнҗисинде 26 монета болар ялы эдип, үч бөлеге бөлмели.

78. Җогабы: 21 эллик.

79. Чая гошулан сүйдүң мукдары билен сүйде гошулан чайың мукдары деңдир, чүнки биринҗи стаканда чай нәче кемелеп болса, шонча-да сүйт гошуландыр.

80. Эгер B саның дөрдүнҗи гошулыжысыны улалдып,

$$\frac{8}{8^3}=\frac{1}{8^2}$$

эдип язсак, онда B саның үчүнҗи ве дөрдүнҗи гошулыжыларының җеми A саның үчүнҗи гошулыжысына деӊ болар. A саның иң соңкы гошулыжысы B саның иң соңкы гошулыжысындан улудыр. Диймек, B сан улалдыланда-да A кичидир, ягны $A > B$.

81. Күшт тагтасының гырасындан бир реңкли ики клеткасыны кесип айырсак, галанларыны шертде гөркезилен фигуралар билен япып болмаз, чүнки бу ягдайда гара реңкли клеткалардан 32 санысы галса, аклардан 30 санысы галар (я-да терсине). Берлен фигураның бири дүрли реңкли ики клетканы япяр, ягны шол фигуралар билен япылан клеткаларың акларының саны гараларының санына деӊ болмалыдыр. Диймек, берлен фигуралар билен күшт тагтасының галан клеткаларының хеммесини долы япмак үчин тагтаның гырасындан кесилип айрылан клеткалар дүрли реңкли болмалыдырлар.

82. Ашакдакы деңсизликлери дүзелиң:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

Шу деңсизликлери члеме-член көпелделиң, онда:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{100}{101}$$ аларыс.

Иң ахырки деңсизлигиң ики бөлегини-де

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}$$

аңлатма көпелделиң, онда:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{100}{101}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}$$

я-да $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$ аларыс.

Бу ерден $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$, ш. с. т. э.

83. Положител члеилериң жемини A билен, отрицател члеилериң жемини B билен белләлиң:

$$A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{199},\ B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{200}.$$

Онда субут этмели деңлигиң чеп тарапы $A-B$ болар. Бу тапавуды ашакдакы ялы өзгерделиң:

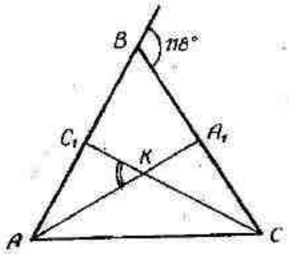
$$A-B=A+B-2B=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{199}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{200}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{200}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}.$$

84. Шу аңлатмадакы иң ахыркы скобкаларың ичиндәки a^2-b тапавудың бахасы $6^2-36=0$ болany себәпли, илки башда берлен аңлатманың сан бахасы нула деңдир.

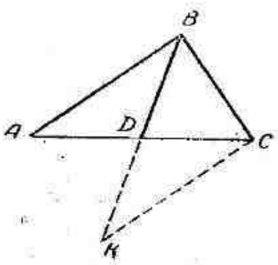
85. Меселәниң шертине гөрә бейикликлери кичи бурчларың депелеринден гечирмели, диймек, кичи бурчлар үчбурчлугың эсасының янындакы бурчлар болмалы (1-нжи чызгы). $\angle AA_1B=90°$. Диймек, $\angle BAA_1=90°-62°=18°$. $\angle AC_1C=90°$. Диймек, $\angle AKC_1=90°-18°=62°$.

Шейлеликде, гөзленилйән бурч $62°$ деңдир.

86. Гой, BD медиана болсун (2-нжи чызгы). Онда $BD<\frac{AB+BC}{2}$ деңсизлиги субут этмели.



1-нжи чызгы.

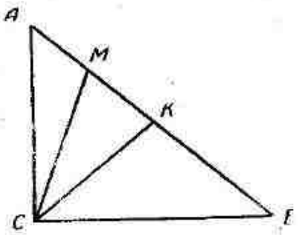


2-нжи чызгы.

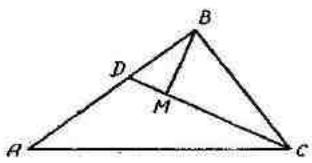
Шу деңсизлиги субут этмек үчин BD кесими довам эдип, эдил шол кесиме деӊ кесими өлчәп гойярыс, нетиҗеде кәбир K нокады аларыс. K нокады C нокат билен бирлешдирйәрис. Онда эмеле гелен DKC үчбурчлук билен ABD үчбурчлук деңдирлер, чүнки $AD=DC$, $BD=DK$ ве $\angle ADB=\angle KDC$. Инди BCK үчбурчлугың ики тарапының жеми үчүнжи тарапындан улы боланы себәпли

$BC+CK>BK$ я-да $BC+AB>2BD$, бу ерден $BD<\frac{BC+AB}{2}$, ш. с. т. э.

87. Инди билен ACK үчбурчлуга гаралың (3-нжи чызгы). Шол үчбурчлукда $\angle ACK+\angle AKC+\angle A=180°$ я-да $\angle ACK=\frac{180°-A}{2}$.



3-нжи чызгы.



4-нжи чызгы.

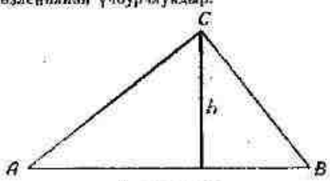
BMC үчбурчлукдан $\angle BMC+\angle BCM+\angle B=180°$

я-да $<BCM=\frac{180°-B}{2}$.

Инди $\angle KCM=\angle ACK+\angle MCB-90°$. Бу ерден $\angle KCM=\frac{180°-A}{2}+$
$+\frac{180°-B}{2}-90°=90°-\frac{A}{2}+90°-\frac{B}{2}-90°=90°-\frac{A+B}{2}$. Эмма $A+$
$+B=90°$, диймек, $\angle KCM=90°-45°=45°$.

88. Чызгыдан гөрнүши ялы (4-нжи чызгы), $\angle BDC>\angle BAC$. Эмма $\angle BMC>\angle BDC$. Диймек, $\angle BMC>\angle BAC$, ш. с. т. э.

89. Өзара ики перпендикуляр чызык гечирип, оларың бириниң үстүнде h бейиклиги өлчәп гойярыс (5-нжи чызгы). Сонра C нокады меркез эдип, a радиуслы дуга чызярыс ве кәбир A нокады аларыс. Инди AC кесиме C нокатда CB перпендикуляр гечирйәрис ве кәбир B нокады аларыс. ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлукдыр.



5-нжи чызгы.

90. Илки билен $x^2+x=y$ билен белләлиң, онда
$$(x^2+x)(x^2+x-14)+24=y^2-14y+24=(y-12)(y-2)$$
аларыс. Диймек,
$$(x^2+x)(x^2+x-14)=(y-12)(y-2)=(x^2+x-12)(x^2+x-2)=$$
$$=(x-3)(x+4)(x-1)(x+2).$$

91. $x^7+x^5+1=x^7+x^6+x^5-x^6+1=(x^7+x^6+x^5)-(x^6+1)=$
$$=x^5(x^2+x+1)-(x^3+1)(x^3-1)=x^5(x^2+x+1)-$$
$$-(x^3+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x^2+x+1)[x^5-(x^3+1)(x-1)]=$$
$$=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1).$$

92. $$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1},$$
$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2},$$
. . . .
$$\frac{20}{x^2-100}=\frac{20}{(x-10)(x+10)}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}.$$
Диймек,
$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+$$
$$+\ldots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right].$$

93. $(a+b)^3+c^3=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)$.
Диймек,
$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=$$
$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b)=-3ab(a+b).$$
Эмма $a+b+c=0$ деңликден $a+b=-c$.
Диймек, $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc$, ш. с. т. э.

94. $31^{11}<32^{11}=(2^5)^{11}=2^{55}$, $17^{14}>16^{14}=(2^4)^{14}=2^{56}$.
Диймек, $31^{11}<2^{55}$ ве $17^{14}>2^{56}$. Шу ики деңсизлиги деңешдирип, $31^{11}<17^{14}$ аларыс.

95. Виетиң теоремасына гөрә $x_1+x_2=k$ ве $x_1\cdot x_2=7$. Меселәниң шертине гөрә $x_1-x_2=1$.
Инди $\begin{cases}x_1+x_2=k\\ x_1-x_2=1\end{cases}$ системадан $x_1=\frac{k+1}{2}$, $x_2=\frac{k-1}{2}$.
x_1-иң ве x_2-иң шу бахаларыны $x_1\cdot x_2=7$ деңликде гоюп, $k^2-28=0$ я-да $k_{1,2}=\pm\sqrt{28}$ аларыс.

96. Меселәниң шертине гөрә $x_1=-x_2$. Диймек,
$$x_1^9=-x_2^9 \text{ я-да } x_1^9+x_2^9=0.$$

97. Берлен дробь гысгалян диййип гүман эделиң. Онда $(14a+3)$ ве $(21a+4)$ аңлатмаларың умумы бөлүжиси болмалыдыр. Гой, шол умумы бөлүжи d болсун, онда $14a+3=dk_1$ ве $21a+4=dk_2$ болар, бу ерде k_1 ве k_2 битин санлардыр. Бу деңликлериң биринжисини 3-е, икинжисини 2-ә көпелдип, бири-биринден айырсак, $1=d(3k_1-2k_2)$ аңлатманы аларыс. Шу ерден гөрнүши ялы $d=1$ болмалыдыр. Берлен дробуң санаважысы билен майдалавжысының умумы бөлүжиси 1-е дең боланы себәпли, шол дробь гысгалмаяр.

98. Терсине гүман эделиң. Гой, n саның кәбир k бахасында биринжи дробь битин a сана ве икинжи дробь битин b сана дең болсун. Онда $k-16=15a$ ве $k-15=24b$ деңликлери аларыс. Икинжи деңликден биринжи деңлиги члениме-член айрып, $1=24b-15a$ аларыс. Инди $3(8b-5a)=1$ деңликден гөрнүши ялы, битин a ве b санларың ёклугы айдыңдыр, чүнки a ве b битин сан боланы себәпли $8b-5a$ сан-да битин сан болмалы ве шол $(8b-5a)$ битин сан 3-е көпелдиленде битин сан алынмалы. Шол алнан битин саның бирден үйтгешиклиги айдыңдыр. Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян n саның хич бир битин бахасы ёкдур.

99. 1-нжи чөзүлиши. $\frac{2a+3}{5a+7}$ дробы гысгалтмак меселесини $\frac{5a+7}{2a+3}$ дробы гысгалтмак меселеси билен чалышмак мүмкиндир. Эмма $\frac{5a+7}{2a+3}=2+\frac{a+1}{2a+3}$ боланы себәпли, меселе $\frac{a+1}{2a+3}$ дробы гысгалтма гетирилйәр. Шу меселәни $\frac{2a+3}{a+1}$ дробы гысгалтмак меселеси билен чалышарыс, ягны $\frac{2a+3}{a+1}=2+\frac{1}{a+1}$. Шейлеликде, берлен меселе $\frac{1}{a+1}$ дробы гысгалтмак меселесине гетирилди. Эмма $\frac{1}{a+1}$ дробь a саның хич бир битин сан бахасында гысгалмаяр. Шейлеликде, берлен дробь a саның хич бир битин бахасында гысгалмаяр.

2-нжи чөзүлиши. Берлен дробь гысгалян болса, онда онуң санавжысының ве майдалавжысының умумы бөлүжиси болмалыдыр. Гой, шол умумы бөлүжи d болсун. Онда $2a+3=dk_1$ ве $5a+7=dk_2$ деңликлери аларыс. Инди биринжи деңлигиң ики бөлегини-де 2-ә көпелдип, $4a+6=2dk_1$ аларыс. Шу деңлиги $5a+7=dk_2$ деңликден члениме-член айрып, $a+1=d(k_2-2k_1)$ деңлиги аларыс. Инди $2a+3=dk_1$ ве $a+1=d(k_2-2k_1)$ деңликлерден $1=dk_1-2d(k_2-2k_1)$ я-да $1=5dk_1-2dk_2=d(5k_1-2k_2)$ аларыс. $1=d(5k_1-2k_2)$ деңликден гөрнүши ялы, $d=1$ болмалыдыр. Диймек, берлен дробуң санавжысының ве майдалавжысының умумы бөлүжиси 1-е деңдир. Шейлеликде, дробь a-ның хич бир битин бахасында гысгалмаяр.

100. Эгер сан 3-е бөлүнйән болса, онда шол саны $3n$ гөрнүшде язмак мүмкиндир. Шу халда онуң квадраты $(3n)^2=9n^2=3\cdot(3n^2)$ болуп, 3-е бөлүнйәндиги айдыңдыр. Диймек, сан 3-е бөлүнйән болса, онда онуң квадраты-да 3-е бөлүнйәр. Инди 3-е бөлүнмейән санлара гаралың. Шейле санлары $3n+1$ я-да $3n+2$ гөрнүшде язмак мүмкиндир. Биринжи халда $(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1$ ве икинжи халда $(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1$.

Ахыркы ики деңликден гөрнүши ялы 3-е бөлүнмейән санларың квадраты-да 3-е бөлүнмейәр.

101. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)[(a^2-2ab+b^2)+3ab]=$
$=(a-b)(a-b)^2+(a-b)3ab.$
Диймек,
$$a^3-b^3=(a-b)^3+(a-b)3ab.$$

Иң ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжыларың хер бири 9-а бөлүнйәр, чүнки меселәниң шертине гөрә $a - b$ сан 3-е бөлүнйәр. Диймек, биринжи гошулыжы 3^3 бөлүнйәр. Икинжи гошулыжы, ягны $(a-b)\,3ab$ сан 9-а бөлүнйәр. Шейлеликде, $a^3 - b^3$ сан 9-а бөлүнйәр.

102. Үчбурчлугың үчүнжи тарапыны $2n+1$ билен белләлиң. Онда

$$2n+1>11-5 \text{ ве } 2n+1<11+5,$$

я-да $2n+1>6$ ве $2n+1<16$. Диймек, $2n+1$ сан 7, 9, 11, 13, 15 бахалара ве болуп билжекдир.

Шейлеликде, гөзленилйән үчбурчлукларың тараплары ашакдакылар ялыдыр:

5, 7, 11,
5, 9, 11,
5, 11, 11,
5, 13, 11,
5, 15, 11.

103. Илки билен n^3+3n^2-n-3 аңлатманы ашакдакы ялы язалың.

$$n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=$$
$$=(n-1)(n+1)(n+3).$$

Меселәниң шертине гөрә n тәк сан болмалы, онда $n=2k+1$ гөрнүшде алсак, $(n-1)(n+1)(n+3)=(2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1+3)=$ $=2k(2k+2)(2k+4)=2k\cdot2(k+1)\,2(k+2)=8k(k+1)(k+2)$ аларыс.

Эмма $8k(k+1)(k+2)$ аңлатма 48-е бөлүнйәр, чүнки үч саны $k(k+1)\times$ $\times(k+2)$ ызыгидерли санының бири хөкман 3-е бөлүнйәр ве иң болманда ене бири 2-ә бөлүнйәр. Шейлеликде, әхли аңлатма $2\cdot3\cdot8=48$-е бөлүнйәр.

104. $p^2-1=(p+1)(p-1)$. Белли болшы ялы, үч саны $(p-1)$, p, $(p+1)$ ызыгидерли санының көпелтмек хасылы $(p-1)\,p\,(p+1)$ мыдама 3-е бөлүнйәр. Меселәниң шертине гөрә p сан 3-ден үйтгешик йөнекей сандыр. Диймек, $(p-1)\cdot(p+1)$ көпелтмек хасылы 3-е бөлүнмели. Инди p санының тәк болмагы себәпли $(p-1)$ ве $(p+1)$ санлар жүбүт болмалы ве оларың бири 2-ә, бейлекиси 4-е бөлүнйән сан болмалы. Шейлеликде, $(p-1)\cdot(p+1)$ көпелтмек хасылы 2-ә, 3-е ве 4-е бөлүнйәр, диймек, p^2-1 сан 24-е бөлүнйәр.

105. Берлен сан 7-ә бөлүненде галыңды-да 1, 2, 3, 4, 5, 6 галмагы мүмкиндир. Шонуң үчин берлен N_1 саны ашакдакы ялы язмак болар: $N_1=7n\pm1$; $N_1=7n\pm2$; $N_1=7n\pm3$. Инди $N_1^2=(7n\pm1)^2=7a+1$; $N_1^2=(7n\pm2)^2=$ $=7b+4$, $N_1^2=(7n\pm3)^2=7c+9$. Эдил шонуң ялы:

$$N_2^2=7k+1;\ N_2^2=7b+4;\ N_2^2=7d+9$$

болмагы мүмкиндир.

Ёкардакы деңликлерден гөрнүши ялы, хич бир $N_1^2+N_2^2$ жем 7-ә бөлүнмейәр. Эгер N_1 ве N_2 санларың хер бири 7-ә бөлүнйән болса, онда $N_1^2+N_2^2=49k^2+49d^2$ гөрнүшде деңлик аларды. Шу жемиң 7-ә бөлүнйәндиги айдыңдыр. Диймек, тассыклама субут эдилди.

106. $43^{23}+23^{43}=43^{23}+43^{43}-43^{43}+23^{43}=(43^{43}+23^{43})-43^{23}(43^{20}-1)$. Диймек, $43^{23}+23^{43}=(43^{43}+23^{43})-43^{23}(43^{20}-1)$.

Ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжыларың биринжиси 66-а бөлүнйәр, чүнки

$$43^{43}+23^{43}=(43+23)(43^{42}-43^{41}\cdot23+43^{40}\cdot23-\ldots+23^{42}).$$

Шол деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси-де 66-а бөлүнйәр, чүнки ики саны бирмензеш жүбүт дережәниң тапавуды шол дережелериң эсасларының биринжи дережесиниң хем жемине, хем-де тапавудына бөлүнйәр, ягны $43^{20}-1$ аңлатма хем $(43+1)$-е, хем-де $(43-1)$-е бөлүнйәр. Диймек, $43^{20}-1$ аңлатма хем 44-е, хем-де 42-ә бөлүнйәр, башгача айданымызда $43^{20}-1$ аңлатма $14\cdot3$ ве $22\cdot2$ я-да $66\cdot28$ сана бөлүнйәр.

107. а) Илки билен 43-иң биринжи, икинжи, үчүнжи, дөрдүнжи, бәшинжи дережелериниң нәхили цифрлер билен гутарындыгына үнс берелиң:

$43^1=43$
$43^2=\ldots9$
$43^3=\ldots7$
$43^4=\ldots1$
. . . . .
. . . . .

Шу ерде 43 санының дүрли дережелериниң иң ахыркы цифрини язарыс. 43-иң бәшинжи дережесиниң иң ахыркы цифриниң 3 билен гутарҗаклыгы айдыңдыр. Инди $43^{43}=43^{40}\cdot43^3$. Шу ердәки 43^{40} санының иң ахыркы цифри 1 болуп, 43^3 санының иң ахыркы цифри 7-дир. Диймек, $43^{40}\cdot43^3=43^{43}$ санының иң ахыркы цифри 7 болмалыдыр. Эдил шонуң ялы

$17^1=17$
$17^2=\ldots9$
$17^3=\ldots3$
$17^4=\ldots1$

Инди $17^{17}=17^{16}\cdot17$. Шу ердәки 17^{16} санының иң ахыркы цифри 1 билен гутарыр. Диймек, $17^{16}\cdot17=17^{17}$ санының иң ахыркы цифри 7 билен гутармалы.

Шейлеликде, $43^{43}-17^{17}$ тапавутда хем кемелижи, хем-де кемелдижи 7 билен гутарар, онда шол тапавут нуль билен гутарар. Эмма нуль билен гутарян санларың хеммеси 10-а бөлүнйәр, диймек, $43^{43}-17^{17}$ сан хем 10-а бөлүнмелидир, ю. с. т. э.

б) Илки билен 7-иң дүрли дережелериниң нәхили цифрлер билен гутарындыгыны тапыкалың:

$$7^1=7;\ 7^2=\ldots9;\ 7^3=\ldots3;\ 7^4=\ldots1.$$

Инди 7^7 санының 3 билен гутарындыгы айдыңдыр. Берлен 7^{7^7} саны 7^{7^7} гөрнүшде язып, 7^{7^7} санының нәхили цифр билен гутарындыгыны тапыкалың: 7^7 сан 3 билен гутаряр. Эмма $3^1=3$; $3^2=9$; $3^3=27$; $3^4=81$; $3^5=243$; $3^6=\ldots9$; $3^7=\ldots7$. Диймек, 7^{7^7} сан 7 билен гутаряр. Инди 7^{7^7} санының 3 билен гутарындыгы айдыңдыр. Онда $7^{7^{7^7}}$ сан 7 билен гутарар. Шейлеликде, берлен тапавут 10-а бөлүнер, чүнки шол ерде хем кемелижи, хем-де кемелдижи 7 билен гутарыр.

108. Берлен саны $11^{10}-1=(11^5+1)(11^5-1)$ гөрнүшде язалың. Инди 11-иң дүрли дережесине гарап, онуң ахыркы ики цифрини тапарыс. 11^2 сан 21 билен гутаряр, $11^3=121\cdot11$ сан 31 билен гутаряр. $11^4=(11^2)^2$ сан 41 билен гутаряр, $11^5=11\cdot11^4$ сан 51 билен гутаряр. Инди 11^5+1 жүбүт сандыр, диймек, ол сан 2-ә бөлүнйәр. 11^5-1 сан 50 билен гутаряр. Шейлеликде, $(11^5+1)(11^5-1)$ сан ики нуль билен гутаряр.

Диймек, $11^{10}-1$ сан 100-е бөлүнйәр.

109. $5555^{2222}+2222^{5555}+4^{5555}-4^{5555}+4^{2222}-4^{2222}=(2222^{5555}+4^{5555})+$ $+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})=(2222+4)\cdot A+(5555-4)\cdot B-$ $-4^{2222}(4^{3333}-1)=7\cdot318\cdot A+7\cdot793B-63C=7(318A+793B-9C)$.

Диймек, берлен жем 7-ә бөлүнйәр. Шу ерде

$$4^{3333}-1=(4^3)^{1111}-1=(4^3-1)\cdot C=63C.$$

110. Гой, x мениң яшым, y сениң яшың болсун. Мен y яшымдакам сен $y-(x-y)$ яшындадың. Диймек, $2[y-(x-y)]=x$ я-да $2(2y-x)=x$, я-да $4y=3x$ болмалы. Сениң яшың x боланда мениң яшым $[x+(x-y)]$ болар. Онда $x+[x+(x-y)]=72$ я-да $3x-y=72$ болар.

Инди $\begin{cases}4y=3x\\3x-y=72\end{cases}$ системаны чөзүп, $y=24$ ве $x=32$ тапарыс.

111. $\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\ldots=\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+$
$+\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\ldots=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{1}{2^2}.$

Диймек, берлен хатарың жеми $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ деңдир.

112. Шу меселәни a-ның хич бир бахасында $\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$ дробуң гысгалмаяндыгыны субут этмели диен меселе билен чалшырмак мүмкиндир. Эмма $\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}=a^2+4+\frac{-1}{a^2+3}$ меселәниң шертине гөрә ахыркы деңлигиң саг тарапы битин сан болмалы, ягны $\frac{-1}{a^2+3}$ сан битин сан болмалы. Эмма a-ның хич бир бахасында $\frac{-1}{a^2+3}$ дробь битин баха ве болуп билмез. Диймек, башда берлен дробь a-ның хич бир бахасында гысгалмаяр.

113. Илки билен 7^6 сана гаралың, ягны шу санын жүбүт я-да тәклигини айдыңлашдыралың. 7^6 сан тәк сандыр, чүнки 7-ниң ислендик дережеси тәк сандыр. Инди 5^{6^7} сана гаралың. 6^7 сан жүбүт сандыр, чүнки 6-ның ислендик дережеси 6-лык билен гутаряр.

Шейлеликде, 5^{7^6} сан 5-иң тәк дережеси боляр. Эмма 5-иң тәк дережеси 5-иң такык квадраты болуп билмез. Инди 5^{6^7} сана гаралың. Шу сан 5-иң жүбүт дережеси, диймек, 5^{6^7} сан такык квадратдыр.

114. Натурал саның бирликлер өйүндәки цифри a билен беллэп, шол саны $10b+a$ гөрнүшде язалың. Инди шол саның квадраты шейле боляр: $(10b+a)^2=100b^2+20ba+a^2=10(10b^2+2ba)+a^2$.

Эмма $10b^2+2ba$ сан жүбүт сандыр, диймек, меселәниң шертине гөрә, a^2 сан тәк санлы онлуклары сакламалы. a сан бирбелгили сандыр. Бирбелгили санларың квадратлары 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 санлар билен аңладыляр. Шуларың ичинде онлуклары тәк болан санлар 16 ве 36-дыр.

Диймек, меселәниң шерти боюнча диңе 16 ве 36 алынмалы. Бу санларың бирликлери 6 билен гутаряр, ш. с. т. э.

115. Гой $2^n+1=a^2$ болсун. Шу деңликден гөрнүши ялы, a^2 тәк сандыр, диймек, a-да тәк сандыр. Онда $a=2k+1$ билен беллэп, $2^n+1=(2k+1)^2$ аларыс. Шу деңлиги $2^n+1=4k^2+4k+1$ я-да $2^n=4k^2+4k$, я-да $2^n=4k(k+1)$ гөрнүшде язарыс. Иң ахыркы деңликден гөрнүши ялы, $k(k+1)$ сан 2-ниң дережеси болмалы. Бу ягдай диңе $k=1$ боланда мүмкиндир.

Инди $2^n+1=(2\cdot 1+1)^2$ деңликден $2^n+1=9$ я-да $2^n=8$, я-да $2^n=2^3$ аларыс. Бу ерден $n=3$. Шейлеликде, $n=3$ боланда 2^n+1 сан такык квадратдыр.

116. $\frac{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}{abc}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+$
$+\frac{c}{a}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$

Эмма $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$ болмалы. Хакыкатдан-да $(a-b)^2\geqslant 0$ я-да $a^2+b^2\geqslant 2ab$, я-да $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

Диймек, $\frac{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}{abc}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+$
$+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 2+2+2=6.$

117. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ деңликден я-ха $abc+a^2c+a^2b+b^2c+$ $+abc+ab^2+bc^2+ac^2=0$, я-да $a(cb+ac+b^2+bc)+c(ab+ac+b^2+bc)=0$, я-да $(ab+ac+b^2+bc)(a+c)$ аларыс. Инди $(ab+ac+b^2+bc)(a+c)=$ $=[a(b+c)+b(b+c)](a+c)=[(b+c)(a+b)](a+c)=(a+b)(a+c)\times$ $\times(b+c)=0$.

Диймек, меселәниң шертинден $(a+b)(a+c)(b+c)=0$ аларыс.

Шу ерден гөрнүши ялы, $a=-b$ я-да $a=-c$, я-да $b=-c$.

Гой, $a=-b$ болсун, онда $\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{(-b)^{2n+1}}+$
$+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=-\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$ ве
$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$; $a=-c$ ве $b=-c$ боланда-да шейле дегишмелери гечирмек мүмкиндир.

118. $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1+\frac{a^2+c^2+b^2}{2ac}+1=0.$

Меселәниң шертиндәки деңлигиң саг бөлегиндәки 1-и чепе гечирип, алнан аңлатма 1 гошдук ве 1 айырдык. Инди

$$\frac{a^2+b^2-2ab-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-2bc-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2+2ac-b^2}{2ac}=$$
$$=\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}+\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2ab}+$$
$$+\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2bc}+\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2ac}=$$
$$=\frac{(a+c-b)[c(a-b-c)-a(a+b-c)+b(a+b+c)]}{2abc}=$$
$$=\frac{(a+c-b)(ac-bc-c^2-a^2-ab+ac+ab+b^2+bc)}{2abc}=$$
$$=\frac{(a+c-b)[b(b+c-a)+a(b+c-a)-c(b+c-a)]}{2abc}=$$
$$=\frac{(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)}{2abc}=0;$$
$$\frac{(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)}{2abc}=0.$$

Иң ахыркы деңликден гөрнүши ялы, шол ердәки дробуң нула деңболмагы үчин санавжыдакы аңлатмаларың бири нула деңболмалыдыр; ягны я $a+c-b=0$, я-да $b+c-a=0$, я-да $a+b-c=0$ болмалыдыр.

Эгер $a-b=-c$ болса, онда $\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}=\frac{(a-b)^2+2ab-c^2}{2ab}=$
$=\frac{(-c)^2+2ab-c^2}{2ab}=1.$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Эгер-де $b + c = a$ болса, онда $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc} =$
$= \frac{a^2-2bc-a^2}{2bc} = -1.$

Эгер-де $a - c = -b$ болса, онда
$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(a-c)^2+2ac-b^2}{2ac} = \frac{(-b)^2+2ac-b^2}{2ac} = \frac{2ac}{2ac} = 1$ аларыс.

119.

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Шу деңликлери члонме-член гошуп, ашакдакыны аларыс:
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Диймек, берлен жем $\frac{n}{2n+1}$ деңдир.

120. Виетиң теоремасы боюнча $x_1 + x_2 = -p$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x_1^2 + 2x_1x_2 + x^2 = p^2$ аларыс. Эмма $x_1x_2 = q$. Шонуң үчин $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$. Инди $x_1^3 + x_2^3$ аңлатманы хасаплалың.
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2).$$
Эмма $x_1 + x_2 = -p$; $-x_1x_2 = -q$ ве $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

Диймек, $x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q)$.

121. Гой, берлен деңлемәниң көклери x_1 ве x_2 болсун, онда биз $x_1^2 + x_2^2$ жемиң иң кичи бахасы болар ялы эдип, a-ны гөзлейәрис.
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$
Виетиң теоремасына гөрә
$$x_1 + x_2 = a - 2; \quad x_1x_2 = -a - 3.$$
Диймек,
$$x_1^2 + x_2^2 = (a-2)^2 + (a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9.$$
Шейлеликде, $x_1^2 + x_2^2 = (a-1)^2 + 9$. Эмма $(a-1)^2 + 9$ аңлатманың иң кичи бахасы $a = 1$ боланда алыняр ве шол иң кичи баха 9 деңдир.

122. $(x-4)(x-6) + 3 = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2$.
Диймек, $(x-4)(x-6) + 3 = (x-5)^2 + 2$.
Инди $(x-5)^2 + 2$ аңлатма x-иң ислендик бахасында положител баха бердир, ш. с. т. э.

123. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язалың:
$$a^2 + \frac{a^2-b^2}{x(x-2)} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}.$$
Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де $x(x-2)$ аңлатма көпелдип, $a^2x(x-2) + a^2 - b^2 = b^2x(x+2)$ аларыс.

Инди $a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - b^2 - b^2x^2 - 2b^2x = 0$ я-да $x^2(a^2 - b^2) - 2x(a^2 + b^2) + a^2 - b^2 = 0$ деңлемәни чөзйәрис.
$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}}{a^2 - b^2};$$
$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm 2|a||b|}{a^2 - b^2}.$$
$$x_1 = \frac{a+b}{a-b}; \quad x_2 = \frac{a-b}{a+b}.$$

124. Системаның 2-нжи деңлемесинден гөрнүши ялы, $4y - 4 > 0$ я-да $y > 1$ болмалы. Шонуң үчин системаны ашакдакы ялы язмак мүмкиндир.
$\begin{cases} (x+1) + (y-1) = 5 \\ x + 1 = 4y - 4 \end{cases}$ я-да $\begin{cases} -(x+1) + (y-1) = 5 \\ -(x+1) = 4y - 4 \end{cases}$ эгер $x \leqslant -1$ болса.
Эгер $x > -1$ болса.

Шу ахыркы системаны чөзмек хич хили кынчылык döретмез.

125. Берлен деңлемәниң сағ бөлегини A билен белләлиң. A битин сандыр. $\frac{x-1}{2} = A$, бу ерден $x = 2A + 1$.

Инди $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \left[\frac{2A+2}{3}\right] = A$.

Кесгитлемә гөрә $A \leqslant \frac{2A+2}{3} < A + 1$ я-да
$$3A \leqslant 2A + 2 < 3A + 3; \quad A \leqslant 2 \leqslant A + 3.$$
Диймек, $A = 0, 1, 2$. Онда $x = 2A + 1$ деңликден $x = 1, 3, 5$ аларыс.

126. Берлен деңлемәниң чеп бөлегини шейле язарыс:
$$[(x+4)(x+8)][(x+5)(x+7)] = (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35).$$
Инди $x^2 + 12x + 32 = y$ билен белләп, ашакдакы деңлемәни аларыс:
$$y(y+3) = 4 \text{ я-да } y^2 + 3y - 4 = 0,$$
бу деңлемәни чөзүп, $y_1 = 1$ ве $y_2 = -4$ бахалары тапярыс. Инди $x^2 + 12x + 32 = 1$ ве $x^2 + 12x + 32 = -4$ я-да $x^2 + 12x + 31 = 0$ ве $x^2 + 12x + 36 = 0$ деңлемелери чөзүп, $x_1 = -6 + \sqrt{5}$; $x_2 = -6 - \sqrt{5}$; $x_3 = -6$; $x_4 = -6$ көклери тапарыс.

127. Эгер $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = y$ аркалы белләсек, онда $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3} = y^2$ аларыс. Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де 3-е көпелдип, $\frac{x^2}{9} + \frac{48}{x^2} - 8 = 3y^2$ аларыс. Инди берлен деңлемәниң дерегине $3y^2 + 8 = 10y$ я-да $3y^2 - 10y + 8 = 0$ аларыс. Шу ерден $y_1 = \frac{4}{3}$ ве $y_2 = 2$ аларыс. Инди $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$ ве $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2$ деңлемелерден $x^2 - 4x - 12 = 0$ ве $x^2 - 6x - 12 = 0$ аларыс.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Диймек $x_1 = 6$; $x_2 = -2$ ве $x_3 = 3 + \sqrt{21}$; $x_4 = 3 - \sqrt{21}$ аларыс.

128. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ боланы себәпли берлен деңлемәниң дерегине $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91$ деңлемәни аларыс. Шу ерден я $x - y = 1$ ве $x^2 + xy + y^2 = 91$, я-да $x - y = 91$ ве $x^2 + xy + y^2 = 1$, я-да $x - y = 13$ ве $x^2 + xy + y^2 = 7$, я-да $x - y = 7$ ве $x^2 + xy + y^2 = 13$.

Шу халларың хеммесине айратын гаралын.

1. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 91. \end{cases}$

Шу системаның биринжи деңлемесиниң ики бөлегини квадрата гетерип, алнан нетижеден икинжи деңлемәни члениме-член айырсак, ашакдакыны аларыс: $xy = 30$.

Инди $\begin{cases} x + (-y) = 1 \\ x \cdot (-y) = -30 \end{cases}$

системаны чөзүп, $x_1 = 6$ ве $y_1 = 5$ я-да $x_2 = -5$ ве $y_2 = -6$ аларыс.

2. Эгер $\begin{cases} x - y = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

болса, онда өзалкы ялы эдип, $xy = 8\,280$ аларыс.

Инди $\begin{cases} x + (-y) = 91 \\ x \cdot (-y) = 8\,280 \end{cases}$

системадан хыялы көклериниң барадыгыны гөрйәрис.

3. $\begin{cases} x - y = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

Шу системаны-да ёкардакы ялы чөзүп, онуң хыялы көклериниң барадыгыны гөрйәрис.

4. $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$

Шу системаны чөзүп, $x_1 = 4$; $y_1 = -3$ ве $x_2 = 3$; $y_2 = -4$ аларыс. Шейлеликде $x = 6, 5, 4, 3$, ве $y = 5, -6, -3, -4$ бахалара эедирлер.

129. Берлен деңликлери $x(y^{100} - 1) = 1963$ ве $-y(x^{100} - 1) = 13$ гөрнүшде язалың. Эгер x-и тәк сан дийип гүман этсек, онда $x^{100} - 1$ сан жүбүт болар, шонлукда $y(x^{100} - 1)$ сан-да жүбүт болар. Бу гүман эдиш меселәниң шертини канагатландырмаяр, чүнки $y(x^{100} - 1) = 13$ деңликден гөрнүши ялы, $y(x^{100} - 1)$ сан тәк болмалыдыр. Эгер x-и жүбүт сан дийип гүман этсек, онда $x(y^{100} - 1)$ сан жүбүт болар. Бу хем меселәниң шертини канагатландырмаяр. y сан барада-да эдил шонуң ялы нетиже аларыс. Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян битин x ве y санларың ёкдугы субут эдилди.

130. Илки билен берлен деңлемәни $x^3(x^3 - 1) = y^5 z$ гөрнүшде язярыс. z ве y санларың йөнекей сан боланы себәпли $x^3(x^3 - 1)$ сан тәк сан болмалы ($z \neq 2$; $y \neq 2$ дийип гүман эдйәрис). Эмма x-и тәк сан дийип гүман этсек, $x^3 - 1$ сан жүбүт болар ве $x^3(x^3 - 1)$ сан-да жүбүт болар. Эгер-де x-и жүбүт сан дийип гүман этсек, онда $x^3(x^3 - 1)$ сан-да жүбүт болар. Диймек, ёкарда гетирилен деңлигиң болмагы үчин диңе $y^5 z$ сан жүбүт болмалы ве $x^3(x^3 - 1) = y^5 z$ деңликден $x^3 = y^2$ ве $x^3 - 1 = z$ алынмалы. Эгер $y^5 z$ сан жүбүт болжак болса, онда жүбүт йөнекей сан диңе 2-дир. Диймек, $x = y = 2$ ве $z = 7$.

131. Эгер x тәк сан болса, онда $5y$ сан жүбүт болмалы ве $3x^2$ саны аңладян $5y - 1$ саның иң ахыркы цифри 9 болмалы (чүнки $5y$ саның жүбүт боланы үчин ол сан 0 билен гутармалы). Онда x^2 саны аңладян саның иң ахыркы цифри $\frac{9}{3} = 3$ болмалы. Эмма квадраты 3 билен гутарян битин сан ёкдур. Эгер x жүбүт сан болса, онда $5y$ сан тәк болмалы ве шу халда $5y$ сан 5 билен гутармалы. Онда $3x^2$ саны аңладян $5y - 1$ сан 4 билен гутармалы. Диймек, шу халда x^2-и аңладян саны тапмак үчин 4 билен гутарян саны 3-е бөлмелидир. Меселәниң шертине гөрә x битин сандыр. Онда 4 билен гутарян саны 3-е бөлүп, битин сан алмак үчин шол $5y - 1$ саның ахыркы ики цифри 24 болмалыдыр. Эмма $24 : 3 = 8$. Белли болшы

ялы, квадраты 8 билен гутарян битин сан ёкдур. Шейлеликде, берлен кесгитсиз деңлемәниң битин чөзүви ёкдур.

132. $1 + x + x^2 + x^3 = (1 + x) + x^2(1 + x) = (1 + x)(1 + x^2)$.

Диймек, $(1 + x)(1 + x^2) = 2^y$.

Шу деңлемәниң битин чөзүви болмак үчин $1 + x$ сан 2-ниң хайсы хем болса бир дережеси болмалы, ягны $1 + x = 2^t$ болмалыдыр. Бу ерден $x = 2^t - 1$.

Инди $1 + x^2 = 1 + (2^t - 1)^2 = 1 + 2^{2t} - 2^{t+1} + 1 = 2 + 2^{2t} - 2^{t+1} = 2(2^{2t-1} - 2^t + 1)$.

Иң ахыркы скобкалардакы аңлатма, ягны $2^{2t-1} - 2^t + 1$ сан тәк сандыр. Эгер шейле болса, онда $1 + x^2$ сан хайсы хем болса 2-ниң белли бир дережеси болмагы үчин $2^{2t-1} - 2^t = 0$ я-да $2t - 1 = t$, я-да $t = 1$ болмалыдыр. Эгер $t = 1$ болса, онда $1 + x = 2^t$ деңликден $1 + x = 2$ я-да $x = 1$ аларыс.

Инди $(1 + x) \cdot (1 + x^2) = 2^y$ деңликден $x = 1$ боланда $2 \cdot 2 = 2^y$ я-да $2^2 = 2^y$, я-да $y = 2$ аларыс. Эгер $t = 0$ болса, онда $(1 + x) = 2^t$ деңликден $1 + x = 2^0$; $x = 0$ аларыс. Инди $(1 + x)(1 + x^2) = 2^y$ деңликден $1 = 2^y$ аларыс, бу ерден $y = 0$ аларыс.

Жогабы: $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = 2$.

133. Берлен үч деңлемәниң хеммесини члениме-член гошуп, $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{47}{60}$ аларыс. Инди иң ахыркы деңликден берлен системаның үчинжи, икинжи, биринжи деңлемелерини айрып, дегишлиликде $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x+z} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{y+z} = \frac{1}{5}$ аларыс. Шу деңликлерден

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

системаны аларыс. Шу ерден $x + y + z = 6$. Иң ахыркы деңлемеден ве онуң өң яныңдакы системаны гөз өңүнде тутуп, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ аларыс.

134. Деңлемелериң хеммесини члениме-член гошуп, ашакдакыны аларыс: $5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 40$ я-да $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$. Иң ахыркы деңликден берлен системаның икинжи деңлемесини айрып, $x_1 = 5$ аларыс. Соңра шол системаның биринжи деңлемесини айрып, $x_2 = 3$ аларыс. Инди шол системаның үчүнжи, дөрдүнжи, бәшинжи ве алтынжы деңлемелерини члениме-член айрып, дегишлиликде $x_3 = 4$; $x_4 = 1$; $x_5 = -3$; $x_6 = -2$ аларыс.

135. Берлен деңликлери члениме-член гошалың, онда

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6 \text{ аларыс.}$$

Эгер $x > 0$ болса, онда $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (деңлик диңе $x = 1$ боланда алыняр).

Меселәниң шертине гөрә иксериң хеммеси положител сан, онда $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6$ деңлигиң чеп бөлегиндәки хер бир гошулыжының бахасы 2-ден кичи дәлдир. Шейлеликде, шол деңлиги канагатландырмак үчин n-иң бахасы 3-ден улы болмалы дәлдир.

Эгер $n = 3$ болса, онда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3 \end{cases}$$

системадан $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ бахаңы аларыс. Эгер-де $n = 2$ болса, онда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3 \end{cases}$$

системадан $x_1 + x_2 = 3$ ве $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3$ я-да $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$ системаны аларыс.

Инди $z^2 - 3z + 1 = 0$ квадрат деңлемәни чөзүп, $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ аларыс. Диймек, $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Эгер $n = 1$ болса, онда $\begin{cases} x_1 = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} = 3 \end{cases}$ системаны аларыс.

Шейле болуп билмез. Шу халда чөзүви ёкдур.

136. Илки билен берлен деңлемәни $\sqrt{x} = \sqrt{1960} - \sqrt{y}$ гөрнүшде язарыс. Инди ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x = 1960 - 2\sqrt{1960y} + y$ аларыс. Ахыркы деңлиги $28\sqrt{10y} = 1960 + y - x$ гөрнүшде язарыс. Меселәниң шертине гөрә x ве y битин санлардыр, онда ахыркы деңлигиң сағ бөлеги битин сан боланы себәпли, онуң чеп бөлеги-де битин сан болмалы, яғны $28\sqrt{10y}$ битин сан болмалы. Шейле дийилдиги $\sqrt{10y}$ сан битин сан болмалы дийилдигидир. Диймек, $\sqrt{10y} = \sqrt{10 \cdot 10k^2}$ болмалыдыр, яғны $y = 10k^2$ болмалыдыр. Эдил шонуң ялы, $x = 10l^2$ болмалыдыр. Инди $\sqrt{x} = l\sqrt{10}$ ве $\sqrt{y} = k\sqrt{10}$ бахалары берлен деңликде гоюп, $l\sqrt{10} + k\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$ я-да $l + k = 14$ аларыс. Шу деңликдәки l ве k-ның бахалары битин положител сан болмалыдыр. Ондан башга-да $0 \leqslant l \leqslant 14$ боланы себәпли, ашакдакы бахалары аларыс:

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14.$$
$$k = 14,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Шейлеликде, берлен деңлемәниң меселәниң шертини канагатландырян 15 чөзүви бардыр. $x = 10l^2$ ве $y = 10k^2$ деңликлере l-ни ве k-ның дегишли бахаларыны гоюп, $x = 0,\ 10, \ldots, 1960$, $y = 1960, \ldots, 0$ бахалары аларыс.

137. Гой, шәхерлериң арасындакы узаклык x *км* болсун. Онда бир тарапа гечмек үчин $\dfrac{x}{60}$ сагат вагт сарп этсе, ызына гайтмак үчин $\dfrac{x}{40}$ сагат вагт сарп эдер. Шейлеликде, жеми $\dfrac{x}{60} + \dfrac{x}{40} = \dfrac{5x}{120}$ сагат вагт сарп эдер. Орта тизлиги тапмак үчин $2x$ узаклыгы $\dfrac{5x}{120}$ сагат вагта бөлмели. Шейлеликде, $2x : \dfrac{5x}{120} = \dfrac{120 \cdot 2x}{5x} = 48 \dfrac{км}{сағ}$ аларыс. Диймек, автомобилиң орта тизлиги 48 *км/сағ*.

Б е л л и к. Эгер ики шәхериң арасындакы узаклыгы 1 хөкмүнде кабул этсек, онда шу меселе арифметики усул билен чөзүлерди.

138. Гой, китабың такык бахасы 1 манат x көпүк болсун. Онда меселәниң биринжи шертине гөрә 9 китап алнанда шол x көпүк докуз гезек гайталанып, 2 манат хем-де бирнәче көпүк болар, яғны

$$200 < 9x < 300.$$

Баштада айданымызда $9x$-иң сан бахасы ики манатдан улы, эмма үч манатдан кичидир. Шу деңсизликден

$$23 \leqslant x \leqslant 33$$

деңсизлиги аларыс.

Меселәниң икинжи шертине гөрә 13 китап алнанда x көпүк он үч гезек гайталанып, ики манат хем-де бирнәче көпүк болар. Диймек,

$$200 < 13x < 300$$

я-да

$$16 \leqslant x \leqslant 23.$$

Инди шуның ахыркы деңсизлиги $23 \leqslant x \leqslant 33$ деңсизлик билен деңешдирсек, онда $23 \leqslant x \leqslant 23$ аларыс. Диймек, $x = 23$.

Шейлеликде, бир китабың бахасы 1 манат 23 көпүк болар.

139. Гөзленилйән дөртбелгили саны $abcd = x$ аркалы белләлиң. Шол сан 400 санының ызындан язылanda $4000000 + abcd = 4000000 + x$ сан аларыс. Шу сан такык квадратдыр: $4000000 + x = y^2$, бу ерден $x = y^2 - 4 \cdot 10^6$. Инди $x = (y + 2 \cdot 10^3)(y - 2 \cdot 10^3)$.

Ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки көпелдижилериң хер бири битин сандыр, шонуң үчин $y - 2 \cdot 10^3 = 1$ дийип гүман этсек, $y = 2001$ аларыс. Инди $y - 2 \cdot 10^3 = 2$ дийип гүман этсек, онда $y = 2002$ аларыс. Инди $x = (y + 2 \cdot 10^3)(y - 2 \cdot 10^3)$ деңликде y-иң бахаларыны гоюп, $x = 4001$ ве $x = 8004$ бахалары аларыс. Эгер $y - 2 \cdot 10^3 = 3$ дийип гүман этсек, онда $x = (y + 2 \cdot 10^3)(y - 2 \cdot 10^3)$ деңликден $x = 4003 \cdot 3 = 12009$. Меселәниң шертине гөрә x дөртбелгили сандыр, алнан сан болса бәшбелгилидир. Шейлеликде, гөзленилйән дөртбелгили сан 4001 ве 8004 болмалыдыр. Эгер барлап гөрсек, онда 4004001 ве 4008004 санлардан квадрат көк алмалы. 2001 ве 2002 санлары аларыс, яғны $4004001 = 2001^2$ ве $4008004 = 2002^2$ аларыс.

140. Тассыкламаның терсине гүман эделиң. Гой, шейле битин бахалар бар болсун. Онда

$$a \cdot 19^3 + b \cdot 19^2 + c \cdot 19 + p = 1$$

ве

$$a \cdot 63^3 + b \cdot 63^2 + c \cdot 63 + p = 2$$

аларыс.

Икинжи деңликден биринжи деңлиги члемме-член айралың, онда $a(63^3 - 19^3) + b(63^2 - 19^2) + c(63 - 19) = 1$ аларыс. Шу деңлигиң чеп бөлегиндәки гошулыжыларың хер бири $(63 - 19)$ сана бөлүнйәр, диймек, шол деңлигиң сағ бөлеги-де $(63 - 19)$ сана бөлүнмелидир, эмма деңлигиң сағ бөлеги шол сана бөлүнмейәр. Шейле болуп билмез. Диймек, меселәниң шертини канагатландырян битин a, b, c, p санлар бар дийип гүман этмек нәдогры. Шу хем тассыкламаны субут эдйәр.

141. Берлен квадратың тарапларыны бәше бөлүп, соңра шол бөлеклер аркалы квадратың тарапларына параллел гөни чызыклары гечирсек, 25 саны кичижик квадрат аларыс. Шол квадратларың таraplары $\dfrac{1}{5}$ болар. Инди шол кичижик квадратларың хер бириниң ичине дүшен нокатларың саны икиден көп дәлдир дийип гүман этсек, онда бир нокат артык галар, чүнки $2 \cdot 25 = 50$, эмма нокатларың саны 51 болмалы. Шонуң үчин ин болманда бир кичижик квадратың ичине үч нокат дүшмелидир.

Инди кичижик квадратларың дашындан $R^2 = \dfrac{1}{50}$ я-да $R = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ радиуслы төверек чызалың. Шу төверегиң радиусы $\dfrac{1}{7}$-ден кичидир, яғны $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} < \dfrac{1}{7}$ квадратың дашындан чызылан төверегиң радиусыны шейле

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

алмаклык $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = (2R)^2$ я-да $\frac{2}{25} = 4R^2$ деңликден гелип чыкяр. Шу ерден $R^2 = \frac{1}{50}$ я-да $R = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Ёкарда гөркезилиши ялы, тарапы $\frac{1}{5}$ дең болан квадратжыкларың ичинде, иң болманда бириниң ичинде үч нокат ятыр. Диймек, радиусы $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ дең болан төвереклериң ичинде, иң болманда бириниң ичинде үч нокат ятмалы. Эмма өзалкы гөркезишимиз ялы, $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$.

Диймек, $\frac{1}{7}$ радиуслы төверeклериң ичинде, иң болманда бириниң ичинде үч нокат ятмалыдыр, ш. с. т. э.

142. Командаларың хер бири бейлеки команда билен диңе бир гезек ойнаяр, диймек, хер бир команданың ойнан ойны 29-дан көп дәлдир. Шейлеликде, команданың саны 30, ягны хер бир команданың ойнажак ойнуның санындан бир сан артык. Шонуң үчин ислендик вагтда бирмеңзеш санда оюн ойнан ики команда тапылар.

143. Тагтада жеми 1966 сан язылан, оларың ярысы, ягны 983 санысы тәкдир, галан 983 саңысы жүбүтдир. Шол жүбүт санларың жеми-де жүбүтдир. Эмма 983 саны тәк санның жеми тәкдир. Диймек, тагтада язылан санларың хеммесиниң жеми тәкдир. Биз хер гезек ики саны a ве b санларың дерегине оларың тапавуды болан $a - b$ саны язмалыдырыс. Хер гезек a ве b санларың дерегине $a - b$ язанымызда шол a ве b санларың жеми $2b$ сан азалар, ягны $a + b - (a - b) = 2b$ жүбүт сан азалар. Илки башдакы санларың әхлисиниң жеми тәкди, диймек, тагтада хер гезек галан санларың жеми-де тәкдир. Башгача айданымызда нуль дәлдир.

144. Меселәниң шертине гөрә шәхериң меркези районындакы телефонларың саны 5001-ден аз дәлдир. Шол райондакы телефонларың ичинден иң кичи номерлисини алалың. Гой, ол A болсун. Инди шол телефонуң номерини бейлеки галан телефонларың номерлеринден айралың. Онда 5000-ден аз болмадык тапавут аларыс. Шу тапавутларың хеммеси бири-биринден үйтгешикдир. Инди дөрт цифрден дүзүлен номерли телефонларың саны 10 000 боланы себәпли, 5000 (я-да шондан көп) тапавудың ичинде ве 5001 (я-да шондан көп) номерли телефонларың ичинде шәхериң меркези районында иң болманда 2 меңзеш санлысы тапылар. Инди хайсы хем болса бир y телефон билен x телефонын номерлериниң тапавуды z болса, онда $y = x + z$ аларыс.

145. Ахыркы дeңсизлигиң чеп бөлегиниң көпелдижилере дагыдалың:

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = x^4(x - y) - y^4(x - y) = (x - y)(x^4 - y^4) =$$
$$= (x - y)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)^2(x + y)(x^2 + y^2).$$

Диймек, $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = (x - y)^2(x^2 + y^2)(x + y)$. x ве y-иң ислендик хакыкы бахасында $x^2 + y^2$ аңлатма нулдан кичи дәлдир, шонуң ялы ислендик хакыкы санын квадраты-да, ягны $(x - y)^2$ нулдан кичи дәлдир. Иң ахырда $(x + y)$ аңлатма меселәниң шертине гөрә нулдан кичи дәлдир.

Диймек $(x - y)^2(x^2 + y^2)(x + y) \geqslant 0$.

Башгача айданымызда,

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geqslant 0; \text{ ш. с. т. э.}$$

146. Деңсизлигиң чеп бөлегине гаралың:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a + b)^2}{ab},$$

Диймек, субут этмеклиг талап эдилйән деңсизлигиң ерине

$$\frac{(a + b)^2}{ab} \geqslant 4$$

деңсизлиги субут этмек етерликдир. Ахыркы деңсизлиги $(a + b)^2 \geqslant 4ab$ я-да $(a - b)^2 \geqslant 0$ гөрнүше гетирйәрис.

Иң ахыркы деңсизлик айдыңдыр. Диймек, $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$ болмалыдыр.

Б е л л и к. Эгер $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ деңсизлик белли дийип гүман этсек, онда $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$ деңсизлик гөс-гөни гелип чыкяр.

147. Ашакдакы айдың деңсизликлери алалың:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3},$$
$$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$$
$$\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\frac{99}{100} > \frac{98}{99}$$

Шу деңсизликлери члеңме-член көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100} > \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99} \text{ я-да}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100} > \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}.$$

Иң соңкы деңсизлигиң ики бөлегини-де

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} \text{ аңлатма}$$

көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\right)^2 > \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$$
$$\text{я-да } \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\right)^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225},$$
$$\text{я-да } \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} > \frac{1}{15}.$$

148. k саны ашакдакы деңсизлиги канагатландырар ялы эдип алалың: $1 \leqslant k \leqslant 1968$. Шу ерден $\sqrt{\frac{1968}{k}} > 1$ аларыс.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Инди k сана 1, 2, 3, ..., 1968 бахалары берип, ашакдакылары аларыс:

$$\sqrt{\frac{1968}{1}} > 1$$
$$\sqrt{\frac{1968}{2}} > 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt{\frac{1968}{1967}} > 1$$
$$\sqrt{\frac{1968}{1968}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{1968}{1}} + \sqrt{\frac{1968}{2}} + \ldots + \sqrt{\frac{1968}{1967}} + \sqrt{\frac{1968}{1968}} > 1968.$$

Иң ахыркы деңсизлигиң ики бөлегини-де 1968-е гысгалдып,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1967}} + \frac{1}{\sqrt{1968}} > \sqrt{1968} \text{ аларыс.}$$

149. Эгер $n > k$ деңсизлик алсак, онда $\sqrt{n} > \sqrt{k}$ болар. Бу ерден $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} > 1$ аларыс. Гой, k сан 1, 2, 3, ..., $n-1$ бахалара эе болсун, онда

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} > 1$$
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} > 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} > 1$$
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$$

аларыс. Шу багланышыклары членме-член гошуп,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > n \text{ аларыс.}$$

Шу ахыркы деңсизлигиң ики бөлегини-де $\sqrt{n}$ сана бөлүп,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \text{ аларыс.}$$

Шейлеликде, тассыклама субут эдилди.

150. Илки билен $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ деңсизлиги белләлиң. Онда

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

деңсизликлери аларыс.

Шу деңсизликлери членме-член гошуп,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

я-да $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ аларыс.

151. Ики саны үйтгейән положител саны алалың ве оларың жемини $2a$ аркалы белләлиң, ягны $x + y = 2a$ болсун. Эгер $x = y$ болса, онда $xy = a^2$ болар. Эгер-де $x \neq y$ болса, онда $xy < a^2$ деңсизлиги субут этмели. Гой, $x = a + b$ болсун, онда $y = a - b$ болар. Шу ялда $xy = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 < a^2$ болар.

Шейлеликде, $x \neq y$ боланда $xy < a^2$ болар, ш. с. т. э.

152. Илки билен ашакдакы айдың деңсизликлери язалың:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n} \qquad \frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n} \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}$$

Шу деңсизликлери членме-член гошуп, аларыс:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Шу деңсизлигиң саг бөлегиндәки гошулыжыларының жеми $\frac{1}{2n}\cdot n$ болар, чүнки гошулыжыларың саны n-е деңдир.

Диймек, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ деңсизлиги аларыс, ш. с. т. э.

153. Дөрт саны үйтгейән положител сан алалың ве оларың жемини $4a$ билен белләлиң, ягны $x + y + z + t = 4a$ болсун. Эгер $x = y = z = t$ болса, онда $xyzt = a^4$ болар.

Эгер-де олар бири-бирине дең болмаса, онда $xyzt < a^4$ деңсизлиги субут этмели.

Гой $x+y=2a+2b$ болсун, онда $x+y+z+t=4a$ деңликден гөрнүши ялы, $z+t=2a-2b$ болар.

Инди, жеми $2a+2b$ дең болан x ве y ики положител санын көпелтмек хасылының иң улы баха эе болмагы үчин, шол көпелдижилер, ягны x ве y бири-бирине дең болмалыдыр. Башгача айданымызда, $x=y=a+b$. Шу халда көпелтмек хасылы $xy=(a+b)^2$ болар.

Инди, эдил шонуң ялы жеми $2a-2b$ дең болан z ве t ики положител санын көпелтмек хасылының улы бахасы $(a-b)^2$ болар.

Диймек, $xyzt$ көпелтмек хасылының иң улы бахасы $(a+b)^2(a-b)^2$ я-да $(a^2-b^2)^2$ болмалыдыр. Шейлеликде, эгер $x+y=2a+2b$ ве $z+t=$ $=2a-2b$ болса, онда $xyzt=(a^2-b^2)^2$ болар. Иң ахыркы деңлигиң саг бөлеги a^4-ден кичидир, ягны $xyzt=(a^2-b^2)^2<a^4$ я-да $xyzt<a^4$, ш. с. т. э.

154. Гой, x, y, z үч саны положител сан берлен болсун. Меселәниң шертине гөрә $x+y+z=3a$ болмалы ве шу халда $xyz\leqslant a^3$ багланышыгы субут этмели. $x+y+z=3a$ деңлигиң ики бөлегине-де a саны гошуп, $x+y+z+a=4a$ аларыс. Озалкы меселәниң нетижеси эсасында $xyza\leqslant a^4$ багланышыгы аларыс. Шу ерден $xyz\leqslant a^3$ гелип чыкар.

Шейлеликде шу халда $x=y=z=a$ болса, онда $xyz=a^3$ болар, шол көпелдижилер бири бирине дең болмаса, онда $xyz<a^3$ болар, ш. с. т. э.

155. Белли болшы ялы, үчбурчлугын мейданыны Геронуң формуласы боюнча хасапламак мүмкиндир:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Шу деңлигиң саг бөлегиндәки аңлатмадакы биринжи көпелдижи P үйтгемейән сан, диймек, гөзленилйән мейданың иң улы бахасы $p-a$, $p-b$, $p-c$ үч көпелдижиниң иң улы бахасында болар.

Инди көпелдижилериң жемини тапалың: $(p-a)+(p-b)+(p-c)=$ $=3p-(a+b+c)=3p-2p=P$. Көпелдижилериң жеми үйтгемейән p сандыр, диймек, $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ көпелтмек хасылының иң улы бахасы, озалкы меселәниң нетижесине гөрә, көпелдижилер бири-бирине дең боланда алыныр, ягны $p-a=p-b=p-c$ я-да $a=b=c$ болмалыдыр.

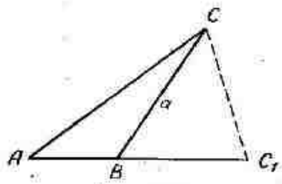
Шейлеликде, берлен $2p$ периметрли үчбурчлукларың ичинде иң улы мейданлысы деңтараплы үчбурчлукдыр.

156. $\sqrt{3}$ сан рационал сан дийип гүман эделиң, ягны $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ болсун, бу ерде a ве b санлар битин ве өзара йөнекей санлардыр. Деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерелиң, онда $3=\frac{a^2}{b^2}$ я-да $a^2=3b^2$ аларыс. Ахыркы деңлигиң саг бөлеги 3-е бөлүнйәр, онда a^2 сан-да 3-е бөлүнмелидир. Озалкы меселеде субут эдилиши ялы, эгер a^2 сан 3-е бөлүнйән болса, онда a сан-да 3-е бөлүнмелидир. Гой, $a=3c$ болсун, онда $a^2=3b^2$ деңликде a^2 бахасыны гоюп, $9c^2=3b^2$ я-да $3c^2=b^2$ аларыс. Шу деңликден гөрнүши ялы, b^2 сан 3-е бөлүнйәр, онда белли болшы ялы, b сан-да 3-е бөлүнмелидир. Шейлеликде, хем a сан хем-де b сан 3-е бөлүнйәрлер, бу болса, бизиң башда гүман эдишимизе, ягны a ве b санлар өзара йөнекей санлар я-да башгача айданымызда $\frac{a}{b}$ дробь гысгалмаян дробь дийип гүман эдишимизе гаршыма-гаршыдыр. Шейле нетижәниң гелип чыкмагы башдакы тассыкламаны субут эдйәр.

157. $\sqrt{6}$ сан рационал сандыр дийип гүман эделиң. Гой, $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ болсун, бу ерде $\frac{a}{b}$ гысгалмаян дробдур. Инди деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $6=\frac{a^2}{b^2}$ я-да $a^2=6b^2$ аларыс. Шу иң ахыркы деңлигиң саг бөлеги жүбүт сандыр, диймек, онуң чеп бөлеги-де, ягны a^2 ве a жүбүт сан болмалыдыр. Онда $a=2n$ дийип гүман этмек мүмкиндир. Инди $(2n)^2=6b^2$ я-да $4n^2=6b^2$ я-да $3b^2=2n^2$. Шу деңлигиң саг бөлеги жүбүт сан, диймек, чеп бөлеги-де жүбүт сан болмалыдыр. Шейлеликде, b^2 жүбүтдир, шонуң билен биликде b хем жүбүт сандыр. Инди $\frac{a}{b}$ дробдакы a ве b санларың икиси-де жүбүтдир, диймек, шу дробь гысгалйандыр. Биз илки башда $\frac{a}{b}$ дробь гысгалмаян дробь дийип гүман эдипдик. Шейле гаршыма-гаршылык $\sqrt{6}$ санының иррационал сандыгыны субут эдйәр.

158. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ сан рационал сан дийип гүман эделиң. Гой, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$ болсун. Онда $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2$ я-да $5+2\sqrt{6}=r^2$, я-да $\frac{r^2-5}{2}=\sqrt{6}$ аларыс. Гүман эдилишине гөрә r — рационал сан, онда $\frac{r^2-5}{2}$ — рационал сандыр. Шейлеликде, $\frac{r^2-5}{2}$ рационал сан $\sqrt{6}$ иррационал сана деңдир диен нәдогры нетиже алдык, бу болса $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ сан рационал сандыр дийип гүман этмеклигиң нәдогрудыгыны субут эдйәр. Диймек, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ сан иррационал сандыр.

159. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң. Гой, ABC гөзленилйән (6-нжы чызгы) үчбурчлук болсун. AB тарапың довамында $AC_1=AC$ эдип C_1 нокады тапярыс.



6-нжы чызгы.

Инди алнан BCC_1 үчбурчлугы гурмак кынчылык дөретмез. Шол үчбурчлукда $BC_1=c-b$ (берлен кесим), $\angle CBC_1=180°-B$; $BC=a$. BCC_1 үчбурчлук гурландан соңра OC_1 кесимиң ортасындан перпендикуляр гечирип A нокады тапярыс. Шейлеликде, алнан ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлукдыр.

160. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве гөзленилйән ромб $ABCD$ болсун (7-нжи чызгы). Меселәниң шертине гөрә $AC+BD$ ве $\angle ABC$ берлен. Диймек, OBC үчбурчлукда $\angle OBC$ берлен ве $OB+OC$ жем берлеп. Илки билен OBC гөнүбурчлы үчбурчлугы гурярыс.

OBC гөнүбурчлы үчбурчлугың OC катетини өлчәп, BO кесимиң довамында гойярыс, ягны $OC=OC_1$. Диймек, BCC_1 үчбурчлугы (8-нжи чызгы) гурмак мүмкиндир, чүнки $\angle BC_1C=45°$; $\angle CBC_1$ берлен бурчуң ярысы ве BC_1 кесим берлен кесимиң ярысыдыр. Шол BCC_1 үчбурчлугы гуруп, CC_1 кесимиң ортасындан перпендикуляр чызык гечирйәрис. Шол перпендикуляр BC_1 тарапы кәбир O нокатда кесер. Шейлеликде, OBC гөнүбурчлы үчбурчлугы аларыс. Соңра ромбы гурмага гечмек аңсатдыр.

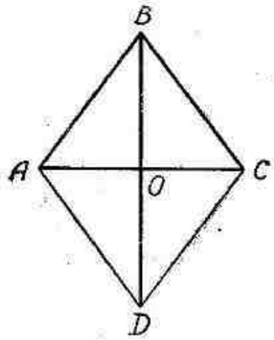
161. Гой, ABC берлен гөнүбурчлы үчбурчлук болсун (9-нжы чызгы). c тарапы гипотенуза боланы себәпли ашакдакы деңсизликлери язып билйәрис. $c>b$ ве $c>a$.

Шу деңсизликлериң биринжисиниң ики бөлегини-де b^2, икинжисини болса a^2 көпелдип, $b^2\cdot c>b^3$ ве $a^2\cdot c>a^3$ аларыс.

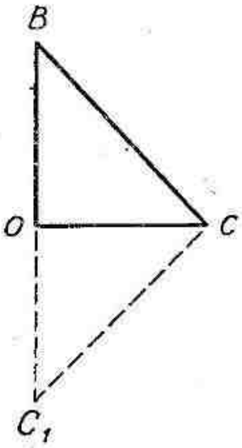
Шу деңсизликлери члеме-член гошуп, $c(b^2+a^2)>b^3+a^3$ аларыс. Эмма $a^2+b^2=c^2$ боланы себәпли, $c^3>a^3+b^3$ аларыс, ш. с. т. э.

162. Гой, $ABCDEFLK$ берлен секизбурчлук болсун (10-нжы чызгы). C депеден AB тарапың довамына перпендикуляр гечирйәрис, ягны $CM\perp AB$. Инди K депеден AB тарапың довамына перпендикуляр гечирйәрис, ягны

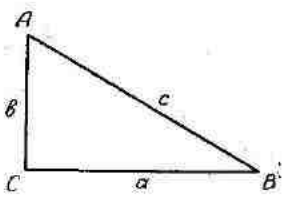
ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com



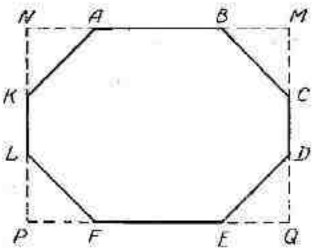
7-нжи чызгы.



8-нжи чызгы.



9-нжы чызгы.

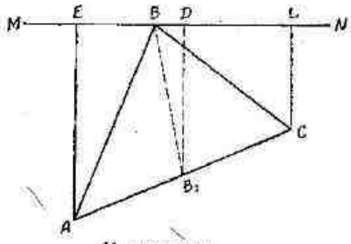


10-нжы чызгы.

$KN \perp AB$. Секизбурчлугың хер бурчы 135°-а деңдир. Диймек, $\angle MBC = 45°$, ягны $MB = MC$. Гой, $MB = MC = x$ болсун. Эдил шонун ялы эдип, $DQ = QE = y$ аларыс. Сонра $EP = LP = z$ ве $AN = KN = u$ аларыс. Инди BMC үчбурчлукдан $BM^2 + MC^2 = BC^2$ я-да $x^2 + x^2 = a^2$, бу ерде a битин сандыр. Диймек, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Эдил шонун ялы эдип, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $z = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $u = \frac{d}{\sqrt{2}}$ аларыс. Бу ерде b, c, d санлар битин сандардыр.

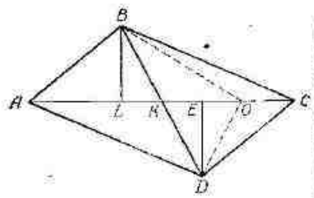
Инди $MB + BA + AN = QE + EP + FP$ деңликден $\frac{a}{\sqrt{2}} + AB + \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} + EF + \frac{c}{\sqrt{2}}$ я-да $a + d + \sqrt{2}AB = b + c + \sqrt{2}EF$, я-да $a + d - b - c = (EF - AB)\sqrt{2}$. Меселәниң шертине гөрә a, b, c, d санлар битин санлардыр. Онда шол санларың алгебраик жеми-де битин сан болмалыдыр. Эмма иң ахыркы деңлигиң саг бөлеги иррационал сандыр. Шейле деңлик диңе $EF - AB = 0$ я-да $EF = AB$ боланда мүмкиндир. Ш. с. т. э.

163. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве ABC үчбурчлугың B депесинден гечирилен гөни чызык MN болсун (11-нжи чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, $AE + CL = 2B_1D$, бу ерде $AE \perp MN$; $CL \perp MN$ ве $B_1D \perp MN$, B_1 нокат AC кесимиң ортасыдыр, диймек дөртбурчлук $AELC$ трапециядыр. $AE + CL$ жемиң иң улы бахасыны гөзлемек меселесини B_1D кесимиң иң улы бахасыны гөзлемек меселеси билен чалшырмак мүмкиндир. B_1D кесимиң меселәни канагатландырмагы үчин шол кесим үчбурчлугың медианасы болмалыдыр. Шейлеликде, B депеден гечйән, гөзленилйән MN гөни чызыгы шол депеден чыкан медиана перпендикуляр эдип гечирмелидир.



11-нжи чызгы.

164. Гой, $ABCD$ берлен дөртбурчлук болсун (12-нжи чызгы). Меселәниң шертине гөрә $BK = KD$. Инди гөзленилйән O нокат хөкмүнде AC диагоналың ортасыны алмак етерликлидир. Хакыкатдан-да ABO ве ADO үчбурчлукларың мейданлары деңдир, чүнки оларың BL ве DE бейикликлери дең ве AO тарап умумыдыр. Ондан башга-да ABO үчбурчлугың мейданы OBC үчбурчлугың мейданына деңдир, чүнки оларың бейикликлери BL умумы ве эсаслары болан AO ве OC кесимлер деңдирлер. Эдил шонуң ялы ADO ве ODC үчбурчлукларың мейданлары деңдирлер.

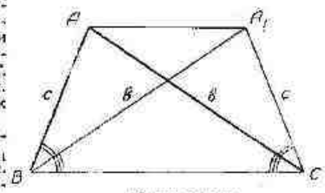


12-нжи чызгы.

Шейлеликде, гөзленилйән O нокат хөкмүнде AC диагоналың ортасы алынса етерликлидир.

165. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлук болсун (13-нжи чызгы). ABC үчбурчлугы A_1BC ягдайда ерлешдирсек, онда $AB = C$, $A_1B = b$, $\angle ABA_1 = C - B$ аларыс. Диймек, BAA_1 үчбурчлугы гурмак мүмкиндир.

Инди гөзленилйән ABC үчбурчлугы гурмак үчин B депеден $BC \parallel AA_1$ эдип, BC гөни чызыгы гечирйәрис. Сонра A нокады меркез эдип, b радиуслы дуга чызярыс ве C нокады

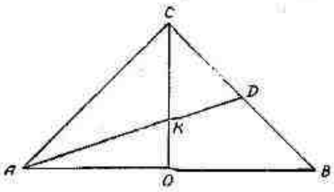


13-нжи чызгы.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

кесгитлейәрис. Эмеле гелен ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлукдыр. Шу тассыкламаны субут этмек үчин BAA_1C деңанлы трапеция гарамак етерликдир.

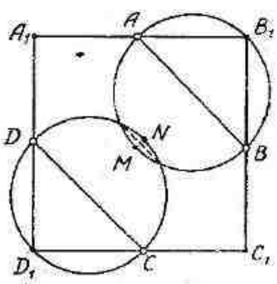
166. Гой, ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун. Меселәниң шертине гөрә $AB=c$ ве $AD=m_a$ болмалыдыр (14-нжи чызгы). Эгер CO медиананы гечирсек, онда $OK=\frac{1}{3}OC$ ве $AK=\frac{2}{3}m_a$ аларыс.



14-нжи чызгы.

Шейлеликде, меселәниң ашакдакы чөзүлиши гелип чыкяр. AB кесими диаметр эдип, ярым төверек чызярыс. Соңра шол төверегиң O меркезинден $\frac{1}{3}R$ радиуслы дуга чызярыс (бу ерде R яңкы гурлан төверегиң радиусы), ягны $R=AO=OB$. Инди A нокады меркез эдип, $AK=\frac{2}{3}m_a$ радиуслы дуга чызярыс ве кәбир K нокады кесгитлейәрис. Гурлушың галаны чызгыдан гөрүвйәр.

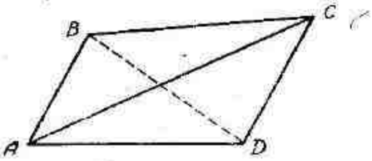
167. Меселе чөзүлен дийип гуман эделиң ве A_1, B_1, C_1, D_1 гөзленилйән квадрат болсун (15-нжи чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, гөзленилйән квадратың B_1, D_1 депелери AB ве CD кесимлери диаметр эдилип чызылан төвереклериң үстүнде ятмалыдыр. Инди шол төвереклериң AB ве CD дугаларыны ики бөлеге бөлүп, M ве N нокатлары аларыс. M нокады B_1 ве N нокады D_1 нокатлар билен бирлешдирип, MB_1C_1 ве ND_1C_1 бурчларың хер бириниң $45°$ деңдигини гөрйәрис. Диймек, M ве N нокатлар гөзленилйән квадратың B_1D_1 диагоналының үстүнде ятмалыдыр.



15-нжи чызгы.

Шейлеликде, M ве N нокатлар аркалы гени чызык гечирип, онуң төвереклер билен кесишен еринде квадратың депелери болан B_1 ве D_1 нокатлары тапарыс. Ызы айдыңдыр.

168. Меселе чөзүлен дийип гуман эделиң ве $ABCD$ гөзленилйән дөртбурчлук болсун (16-нжы чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, ABD үчбурчлугы ики тарапы ве оларың арасындакы бурчы боюнча гурмак мүмкиндир. Соңра BD кесимиң үстүнде BCD бурчы өз ичине алян сегмент гуруляр. A нокады меркез эдип, AC радиуслы дуга чызярыс ве гөзленилйән дөртбурчлугың дөрдүнжи депеси болан C нокады аларыс.



16-нжы чызгы.

169. Гой, ABC үчбурчлукда CC_1 гипотенуза гечирилен бейиклик болсун (17-нжи чызгы). ACC_1 ве ABC үчбурчлуклар гөнүбурчлы ве оларың A бурчы

умумы, диймек, шол үчбурчлуклар меңзешдирлер. Онда $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CC_1}$ аларыс.

Бу ерден $CC_1=\frac{AC\cdot BC}{AB}$ я-да $\frac{1}{CC_1^2}=\frac{AB^2}{AC^2\cdot BC^2}$ аларыс.

Инди

$$\frac{1}{CC_1^2}=\frac{AC^2+BC^2}{AC^2\cdot BC^2}=\frac{AC^2}{AC^2\cdot BC^2}+\frac{BC^2}{AC^2\cdot BC^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{AC^2}.$$

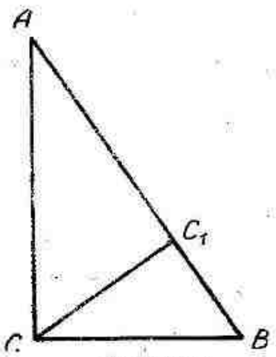
Шейлеликде, $\frac{1}{CC_1^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{AC^2}$. Ш. с. т. э.

170. $2\sqrt{(p-b)(p-c)}=\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}=$
$=\sqrt{[a+(b-c)][a-(b-c)]}=\sqrt{a^2-(b-c)^2}.$

Эгер $b\neq c$ болса, онда $\sqrt{a^2-(b-c)^2}<a$. Эгер-де $b=c$ болса, онда $\sqrt{a^2-(b-c)^2}=a$.

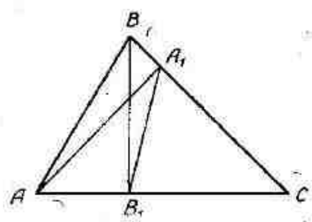
Диймек, $2\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant a$; я-да $\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{a}{2}$. Ш. с. т. э.

171. AA_1C ве BB_1C ики үчбурчлук меңзешдир, чүнки олар үчин C бурч умумыдыр (18-нжи чызгы). Диймек, $\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C}{A_1C}$.



17-нжи чызгы.

Шейлеликде, ABC үчбурчлугың BC ве AC ики тарапы A_1B_1C үчбурчлугың B_1C ве A_1C ики тарапына пропорционал ве шол үчбурчлуклар үчин C бурч умумыдыр. Онда ABC ве A_1B_1C үчбурчлуклар меңзешдирлер. Ш. с. т. э.



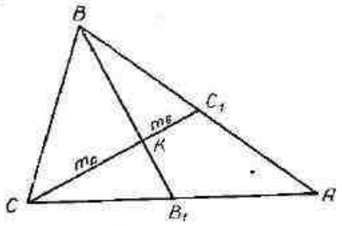
18-нжи чызгы.

172. Меселәниң шертине гөрә $BB_1\perp CC_1$, бу ерде BB_1 ве CC_1 — медианалар (19-нжы чызгы). Белли болшы ялы,

$$KB_1=\frac{1}{3}m_b,\quad CK=\frac{2}{3}m_c,$$
$$C_1K=\frac{1}{3}m_c,\quad BK=\frac{2}{3}m_b.$$

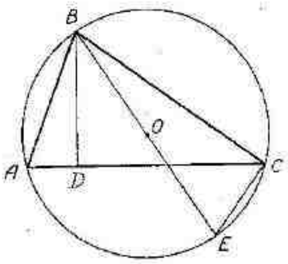
Инди CKB_1, BKC_1 ве BKC үчбурчлуклардан Пифагорың теоремасының эсасында ашакдакылары аларыс:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_b\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}m_c\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2=a^2 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} \frac{4}{9}m_c^2+\frac{1}{9}m_b^2=\frac{b^2}{4} \\ \frac{1}{9}m_c^2+\frac{4}{9}m_b^2=\frac{c^2}{4} \\ \frac{4}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_c^2=a^2. \end{cases} \qquad (A)$$



19-нжы чызгы.

Инди биринжи ве икинжи деңликлери члениме-член гошуп, $\frac{5}{9}m_c^2+\frac{5}{9}m_b^2=\frac{b^2+c^2}{4}$ аларыс. Иң ахырки деңлигиң ики бөлегини-де $\frac{4}{5}$ сана көпелдип, $\frac{4}{9}m_c^2+\frac{4}{9}m_b^2=(b^2+c^2)\cdot\frac{1}{5}$. Инди (A) системаның үчүнжи деңлиги билен шу иң ахыркы деңлиги деңешдирип, $\frac{b^2+c^2}{5}=a^2$ я-да $5a^2=b^2+c^2$ аларыс. Ш. с. т. э.



20-нжи чызгы.

173. ABC үчбурчлугың BD бейиклигини ве дашындан чызылан төверегиң BE диаметрини гечирелиң (20-нжи чызгы). ABD ве BEC үчбурчлукларың меңзешлигинден $\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{BE}$ я-да $\frac{h_b}{a}=\frac{c}{2R}$, я-да $h_b=\frac{ac}{2R}$ аларыс.

Инди ABC үчбурчлугың мейданы $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ я-да $S=\frac{1}{2}b\cdot\frac{ac}{2R}=\frac{abc}{4R}$. Диймек, $S=\frac{abc}{4R}$.

Белли болшы ялы: $2S=a\cdot h_a$,
$2S=b\cdot h_b$,
$2S=c\cdot h_c$.

Шу деңликлери члениме-член көпелдип, ашакдакыны аларыс. $8S^3=abch_ah_bh_c$. Инди $S=\frac{abc}{4R}$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда $8S^3=S\cdot 4R\times\times h_ah_bh_c$ я-да $S^2=\frac{1}{2}h_ah_bh_c\cdot R$ аларыс.

174. Белли болшы ялы, үчбурчлугың мейданыны ашакдакы ялы аңлатмак мүмкиндир:

$$S=\frac{1}{2}ah_a,$$

$$S=\frac{1}{2}bh_b,$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c,$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

Иккинжи деңликден ашакдакылары аларыс:

$$\frac{1}{2}a=\frac{S}{h_a},$$

$$\frac{1}{2}b=\frac{S}{h_b},$$

$$\frac{1}{2}c=\frac{S}{h_c}.$$

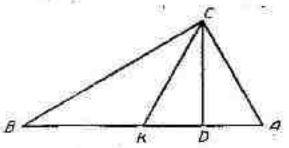
Ахыркы үч деңлиги члениме-член гошуп, $\frac{1}{2}(a+b+c)=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$ аларыс. Шу деңлиги $\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{S}{r}$ деңлик билен деңешдирип, ашакдакыны аларыс: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$. Ш. с. т. э.

175. Меселәниң шертине гөрә $\angle ACD=\angle DCK$ (21-нжи чызгы). Диймек, $AD=DK$. Ондан башга-да $\angle DCK=\angle KCB$. Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хәсиетине гөрә $\frac{DK}{KB}=\frac{CD}{BC}$, эмма $DK=\frac{1}{2}BK$, диймек, $\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$. Шейлеликде, BCD гөнүбурчлы үчбурчлугың CD катети BC гипотенузасының ярысына деңдир диен нетижәни алдык. Диймек, $\angle CBD=30°$ болмалыдыр. Онда шол үчбурчлукдан $\angle BCD=60°$ аларыс. Диймек, $\angle BCK=\angle KCD=\angle DCA=30°$.

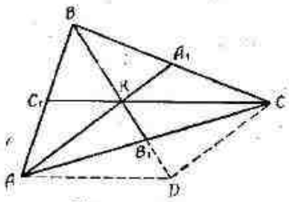
Шейлеликде, ABC үчбурчлугың бурчлары 30°, 60° ве 90° болмалыдыр.

176. Гой, үчбурчлугың тараплары a, b, c болуп, AA_1, CC_1, BB_1 үчбурчлугың берлен медианалары болсун (22-нжи чызгы). BB_1 медиананы довам эдип, $B_1D=KB_1$ кесими еңлап гоялың, онда KDC үчбурчлугың

$$CK=\frac{1}{3}m_c,\ KD=\frac{2}{3}m_b \text{ ве } CD=AK=\frac{2}{3}m_a \text{ болар.}$$



21-нжи чызгы.



22-нжи чызгы.

$AKCD$ параллелограмдан $AK^2 + KC^2 + CD^2 + DA^2 = KD^2 + AC^2$ я-да

$$\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + AC^2 \text{ аларыс.}$$

Бу ерден, $AC^2 = \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_b^2$ аларыс.

Диймек, $AC = b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}$ аларыс. Эдил шонуң ялы,

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$ ве $c = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}$ аларыс.

177. Эгер үчбурчлугың тарапларыны a, b, c билен ве мейданыны S билен беллесек, онда ашакдакы деңликлери аларыс:

$$a \cdot h_a = 2S;\ b \cdot h_b = 2S;\ c \cdot h_c = 2S.$$

Шу деңликлерден

$$a = \frac{2S}{h_a};\ b = \frac{2S}{h_b};\ c = \frac{2S}{h_c}.$$

Инди $a + b + c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} = 2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$.

Эмма $a + b + c = 2p$, бу ерде $2p$ билен үчбурчлугың периметри белленилйэр.

Героның формуласы боюнча $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Шу ерде $2p = 2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$ я-да $p = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$.

$$p - a = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) - \frac{2S}{h_a} = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{2}{h_a}\right),$$

я-да $p - a = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)$. Эдил шонуң ялы.

$$p - b = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \text{ ве } p - c = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Инди $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \times}$

$$\overline{\times S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \cdot S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \cdot S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)} =$$

$$= S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

я-да

$$1 = S\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}.$$

Эгер $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2H$ билен беллесек, онда $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = 2H - \frac{2}{h_a}$ я-да $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = 2\left(H - \frac{1}{h_a}\right)$ аларыс. Эдил шонуң ялы.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} = 2\left(H - \frac{1}{h_b}\right) \text{ ве } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = 2\left(H - \frac{1}{h_c}\right) \text{ аларыс.}$$

Инди $1 = S\sqrt{2H \cdot 2\left(H - \frac{1}{h_a}\right) \cdot 2\left(H - \frac{1}{h_b}\right) \cdot 2\left(H - \frac{1}{h_c}\right)}$ я-да

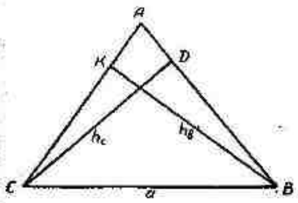
$$1 = S4\sqrt{H(H - h_a^{-1})(H - h_b^{-1})(H - h_c^{-1})}, \text{ я-да}$$

$$S = \frac{1}{4\sqrt{H(H - h_a^{-1})(H - h_b^{-1})(H - h_c^{-1})}} \text{ аларыс.}$$

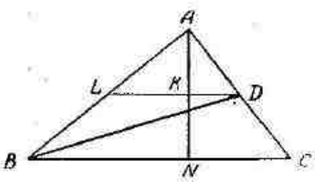
178. Меселәниң шертине гөрә $BC = a$; $CD = h_c$; $BK = h_b$ (23-нжи чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, $\angle BKC = \angle {}'AB = 90^\circ$. Диймек, $BC = a$ кесими диаметр эдип, шол кесимиң үстүнде төверек гурсак, онда D ве K нокатлар шол төверегиң үстүнде ятмалыдырлар. Бу ерден меселәниң чөзүлиши гелип чыкар. Илки билен $BC = a$ кесими өлчәп гурярыс, соңра шол кесими диаметр эдип, ярым төверек чызярыс, соңра B нокады меркез эдип, h_b радиуслы дуга чызярыс ве кәбир K нокады тапярыс. Эдил шонуң ялы C нокады меркез эдип, h_c радиуслы дуга чызярыс ве D нокады тапярыс. Инди C ве K хем B ве D нокатлар аркалы гөни чызыклары гечирип, A нокады тапярыс. Алнан ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлукдыр.

179. Меселе чөзүлен диййп гүман эдели ве ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (24-нжи чызгы).

Меселәниң шертине гөрә $AD = DC$. Эгер D нокатдан $DL \parallel BC$ эдип, DL кесими гечирсек, онда $NK = AK$ аларыс. Шейлеликде, меселәниң ашакдакы чөзүлиши алнар. Илки билен a кесими өлчәп гойярыс. Соңра шол кесимиң ислендик нокадындан PQ перпендикуляр галдырып, он н үстүнде h_a кесими өлчәп гойярыс. PQ кесимиң ортасындан BC кесиме параллел гөни



23-нжи чызгы.

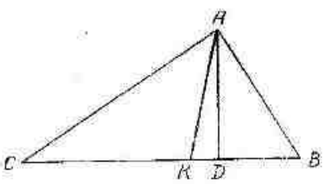


24-нжи чызгы.

чызык гечирйәрис. Соңра B нокады меркез эдип, m_b радиуслы дуга чызярыс. Шол дуга ықкы гечирилен гөни чызык билен кесишип, D нокады кесгитләр. C ве D нокатлар аркалы гөни чызык гечирип, гөзленилйән ABC үчбурчлугы аларыс.

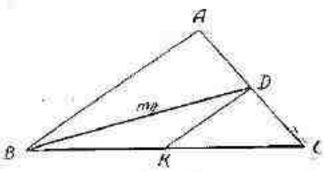
180. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (25-нжи чызгы).

Чызгыдан гөрнүши ялы, ADK гөнүбурчлы үчбурчлугы гурмак мүмкин, чүнки онуң $AD = h_a$ катети ве $AK = b_A$ гипотенузасы беллидир. (Бу ерде b_A кесим A бурчуң биссектрисасы.) Шол ADK үчбурчлук гурландан соңра AK кесимиң янында $\angle KAC = \frac{\angle A}{2}$ бурчы гурярыс, соңра шол кесимиң бейлеки тарапында $\angle KAB = \frac{\angle A}{2}$ бурчы гурярыс. Нетижеде гөзленилйән ABC үчбурчлугы аларыс.



25-нжи чызгы.

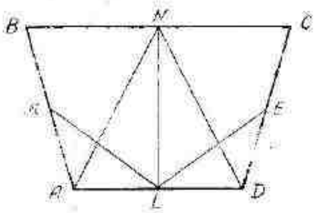
181. Меселе чөзүлен дийип гүман эдйәрис ве гой, ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (26-нжы чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, $AD = DC$. Онда AB тарапа параллел эдип, D нокат аркалы гөни чызык гечирсек, BC тарап ярпа бөлүнер, ягны $BK = KC$ болар. Шейлеликде, меселәниң ашакдакы чөзүви гелип чыкяр. Илки билен B бурчы гурярыс, соңра шол бурчуң бир тарапында $BC = a$ кесими өлчәп гойярыс, соңра $BC = a$ кесими ики дең бөлеге бөлүп, гурлан B бурчуң тарапына параллел эдип, K нокат аркалы гөни чызык гечирйәрис. Соңра B нокады меркез эдип, m_b радиуслы төверек чызярыс ве кәбир D нокады аларыс. CD гөни чызык гечирип, гөзленилйән BCA үчбурчлугы аларыс.



26-нжы чызгы.

182. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве гөзленилйән дөртбурчлук $ABCD$ болсун (27-нжи чызгы).

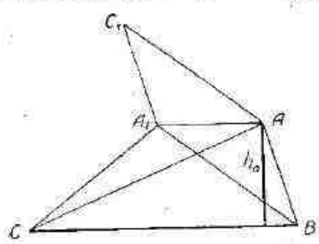
Меселәниң шертине гөрә $BK = KA = AL = LD = DE = EC$ болмалыдыр. Илки билен K нокады L нокат билен ве L нокады E нокат билен бирлешдирйәрис. Соңра алнан KL ве LE кесимлериң орталарындан перпендикуляр галдырып, кәбир N нокады аларыс. N нокады L нокат билен бирлешдирип, NL кесиме L нокатда перпендикуляр галдырярыс, ягны $LD \perp NL$, нетижеде A ве D нокатлары аларыс. Соңра D нокады E нокат билен бирлешдирип, $DE = EC$ кесими өлчәп гойярыс. Эдил шонуң ялы эдип, A



27-нжи чызгы.

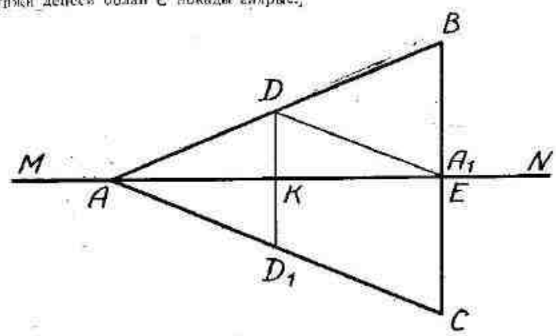
нокады K нокат билен бирлешдирип, $AK = KB$ кесими өлчәп гойярыс ве нетижеде B нокады аларыс. Шейлеликде, гөзленилйән дөртбурчлугың дөрт депеси болан B, C, D, A нокатлар тапылар.

183. Гой, ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлук болсун (28-нжи чызгы). Шол үчбурчлугы BC тарапың ортасындан гечйән оқуң дашында айлап ACA_1 үчбурчлугы аларыс. Шол үчбурчлукда $\angle ACA_1 = B - C$ болар. ACA_1 үчбурчлугы AA_1 тарапың дашында айлап, AC_1A_1B параллелограмы аларыс. Параллелограмың B депеси фиксирленен ве $\angle ABA_1 = \angle AC_1A_1 = B - C$ боланы себәпли, оны гурмак мүмкиндир. Соңы аңсатдыр.



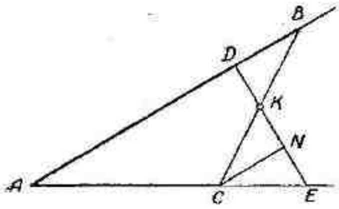
28-нжи чызгы.

184. ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (29-нжы чызгы). Онда $AD = DB$ ве $BE = EC$ болмалыдыр. Илки билен AA_1 биссектриса гарапда D нокада симметрик болан нокады гурмалы. Гой, шол нокат D_1 болсун. Меселәниң шертине гөрә DE гөзленилйән ABC үчбурчлугың орта чызыгы болмалы, диймек, $DE \parallel AC$ болмалыдыр. Шейлеликде, ашакдакы гурлушы аларыс. Илки билен D_1 нокады гурярыс. Шол максат билен D нокатдан MN гөни чызыга перпендикуляр индерип, $DK = KD_1$ кесими өлчәп гойярыс. Соңра DE кесими гурярыс. Инди D_1 нокат аркалы DE кесиме параллел гөни чызык гечирйәрис, ягны $D_1C \parallel DE$. Нетижеде A нокады тапярыс. Соңра AD гөни чызыгы гечирип, $AD = DB$ кесимлери өлчәп гойярыс ве B нокады аларыс. Иң ахырда BE гөни чызыгы гечирип, гөзленилйән үчбурчлугың үчүнжи депеси болан C нокады аларыс.

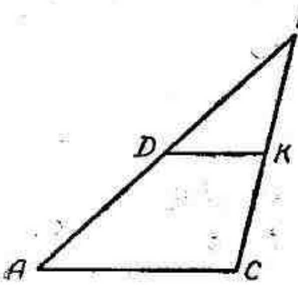


29-нжы чызгы.

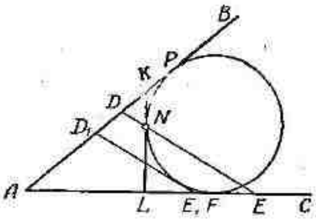
185. Меселәниң шертини канагатландырян үчбурчлугы алмак үчин K нокатда ярпа бөлүнер ялы эдип, BC гөни чызыгы гечирмели. (30-нжы чызгы). Шу халда алнан ABC үчбурчлугың мейданы иң кичи баха эелер. Хакыкатдан-да, шу тассыкламаны субут этмек үчин меселәниң шертини канагатландырян ADE үчбурчлук бар дийип гүман эделиң. Биздиң гүман эдишимизе



30-нжы чызгы.



31-нжи чызгы.



32-нжи чызгы.

гөрә ADE үчбурчлугын мейданы ABC үчбурчлугың мейданындан кичи болмалыдыр. Эмма бизиң тассыкламамыза гөрә терсинедир, ягны $S_{ABC} < S_{ADE}$ болмалыдыр.

Илки билен C нокат аркалы AB тарапа параллел гөни чызык гечирелиң. Онда BDK ве CKN үчбурчлуклар дендирлер, чүнки $BK = KC$, $\angle BKD = \angle CKN$ ве $\angle DBK = \angle KCN$.

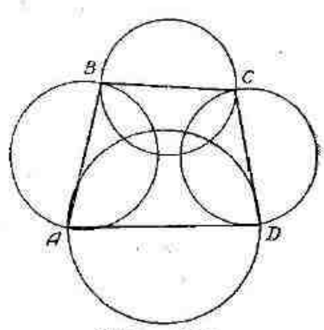
Диймек, ADE үчбурчлугын мейданы ABC үчбурчлугың мейданындан улудыр. Шейлеликде, тассыклама субут эдилди.

Б е л л и к. Бурчуң ичинде берлен кәбир K нокатда ярпа бөлүнер ялы эдип, BC кесими нәхили гечирмели диен сорагын гелип чыкмагы мүмкиндир. Бу өз башына меселе болуп, онуң чөзүлиши ашакдакы ялыдыр. Берлен K нокат аркалы бурчуң бир тарапына, меселем AC тарапына, параллел эдип, DK кесими гечирйәрис (31-нжи чызгы). Сонра алнан AD кесими өлчәп, шол кесимиң довамында гойярыс, ягны $AD = DB$. Алнан B ве берлен K нокатлар аркалы гөни чызык гечирип, гөзленилйән BC кесими тапярыс.

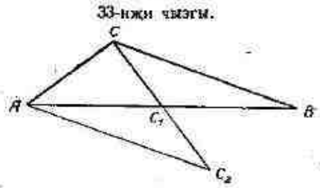
186. Илки билен BAC бурчуң тарапларына галташян ве берлен N нокат аркалы гечйән төверек гурярыс (32-нжи чызгы). Шейле төвереклериң икисини гечирмек мүмкиндир. Шолардан чызгыдакы ялысыны сайлап аларыс. Сонра шол төвереге берлен нокатда галташян KNL гөни чызык гечирйәрис. Алнан AKL үчбурчлугың периметри иң кичи баха эедир. Башгача айданымызда, AKL үчбурчлук меселәниң шертини канагатландырян үчбурчлукдыр.

Шу тассыкламаны субут этмек үчин N нокат аркалы ислендик башга бир DNE гөни чызык гечирелиң. Инди биз ADE үчбурчлугың периметрини AKL үчбурчлугың периметринден улудыгыны субут этмели. Шол максат билен DE кесиме параллел эдип, төверege галташян D_1E_1 гөни чызыгы гечирелиң. Эмеле гелен AD_1E_1 үчбурчлугын периметри ADE үчбурчлугың периметринден кичидир. Эмма AKL ве AD_1E_1 үчбурчлукларын периметрлери дендир.

Хакыкатдан-да, AKL үчбурчлугың периметри $2AP$ я-да $2AF$ дендир. Эдил шонуң ялы, AD_1E_1 үчбурчлугын периметри-де $2AP$ я-да $2AF$ дендир (шу тассыкламалары өзбашдак субут этмеги маслахат берйәрис).



33-нжи чызгы.



34-нжи чызгы.

Б е л л и к. Берлен бурчуң тарапларына галташян ве шол бурчуң ичинде берлен нокат аркалы гечйән төвереги нәхили гурмалы диен сорагың гелип чыкмагы мүмкиндир. Бу өзбашдак меселедир.

187. Берлен $ABCD$ дөртбурчлугын тарапларыны диаметр эдип, төверекleri чызярыс (33-нжи чызгы). Кәбир K нокат шол тегелеклериң хич бирине гирмейәр диййип гүман эделиң. Онда шол K нокат тегелеклериң дашында ятаны себәпли, дөртбурчлугың тараплары шол K нокатдан йити бурч асты билен гөрүнмели. Башгача айданымызда, эгер K нокады дөртбурчлугын депелери билен бирлешдирсек, онда эмеле гелен BKC, BKA, CKO ве AKD бурчларың хер бири йити бурч болмалыдыр, чүнки оларың депелери төверeклериң дашында ятырлар. Эмма K нокадың янындакы бурчларын жеми 360° болмалыдыр. Шу гаршылыклы нетижәниң гелип чыкышы тассыкламаны субут эдйәр, ягны чызылан тегелеклериң хич бирининиң ичине гирмейән кәбир K нокат бар диййип гүман этмек нәдогрудыр.

188. ABC үчбурчлугын CC_1 медианасыны довам эдип, онуң үстүнде $C_1C_2 = CC_1$ кесими өлчәп гоялын (34-нжи чызгы). C_2 нокады A нокат билен бирлешдирип, алнан AC_2C үчбурчлуга гаралын. Эгер $CБ > AC$ болса, онда $AC_2 > AC_1$, чүнки $CB = AC_2$. Шу халда $\angle ACC_2 > \angle AC_2C$. Инди $\angle AC_2C = \angle BCC_1$.

Диймек, $\angle ACC_1 > \angle BCC_1$. Ш. с. т. э.

189. Эгер көк ашагындакы аңлатмадан куб көк алынян болса, онда шол аңлатма кәбир башга аңлатманың кубы болмалыдыр. Берлен аңлатмада минус аламатлы член бар. диймек, биз шол аңлатманы хайсы хем болса ики санын тапавудының кубы гөрнүшине гетирмәге сынанышмалыдырыс.

Гой, $3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt[3]{18} = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3$ болсун.

Инди $3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt[3]{18} = a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b$ я-да $3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt{18} = (a - b) + 3\sqrt[3]{ab^2} - 3\sqrt[3]{a^2b}$.

Шу денликден

$$3 = a - b$$

$$9\sqrt[3]{12} = 3\sqrt[3]{ab^2}$$

$$9\sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{a^2b}$$

аларыс.

Шу денликлери ашакдакы ялы язалың:

$$a - b = 3$$
$$\sqrt[3]{ab^2} = 3\sqrt[3]{12}$$
$$\sqrt{a^2b} = 3\sqrt[3]{18}$$

я-да

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ ab^2 = 27 \cdot 12 \\ a^2b = 27 \cdot 18 \end{cases}$$

Ахыркы системаның соңкы ики деңлемесини бири-бирине члeнме-члeн бөлүп, $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ аларыс. Инди $a - b = 3$ ве $a = \frac{3}{2}b$ деңликлерден $b = 6$ ве $a = 9$ тапарыс.

Шейлеликде, $\sqrt[3]{3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})} = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}$.

190. $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} = \sqrt{2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3}} =$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Эдил шонуң ялы,

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2(\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3}} =$$
$$= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^3} = 2 - \sqrt{3}.$$

Диймек,

$$\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

Шейлеликде, $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 4$. Ш. с. т. э.

191. $(2x^2 + 3x - 2)(5 - 6x - 4x^2) =$
$= (2x^2 + 3x - 2)[-2(2x^2 + 3x - 2) + 1]$.

Диймек,

$$(2x^2 + 3x - 2)[-2(2x^2 + 3x - 2) + 1] = -5(2x^2 + 3x + 2)$$

я-да

$$-2(2x^2 + 3x - 2)^2 + (2x^2 + 3x - 2) + 5(2x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Шу деңликде $2x^2 + 3x - 2 = y$ билен беллесек, онда $-2y^2 + y + 5(y + 4) = 0$ я-да $2y^2 - 6y - 20 = 0$, я-да $y^2 - 3y - 10 = 0$ аларыс. Шу деңлемэни чөзүп, $y_1 = 5$ ве $y_2 = -2$ аларыс.

Инди $2x^2 + 3x - 2 = 5$ ве $2x^2 + 3x - 2 = -2$ деңлемелерден $2x^2 + 3x - 7 = 0$ ве $2x^2 + 3x = 0$ аларыс. Шу деңлемелери чөзүп, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$, $x_3 = 0$ ве $x_4 = -\frac{3}{2}$ аларыс.

192.

$$(3x^2 + 2x + 12)(3 - 4x - 6x^2) = (3x^2 + 2x + 2)(-6x^2 - 4x - 4 + 7) =$$
$$= (3x^2 + 2x + 2)[-2(3x^2 + 2x + 2) + 7] = -2(3x^2 + 2x + 2) +$$
$$+ 7(3x^2 + 2x + 2).$$

Диймек,

$$-2(3x^2 + 2x + 2)^2 + 7(3x^2 + 2x + 2) = 6$$

я-да

$$2(3x^2 + 2x + 2)^2 - 7(3x^2 + 2x + 2) + 6 = 0;$$

$$3x^2 + 2x + 2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4}; \quad 3x^2 + 2x + 2 = 2$$

я-да $3x^2 + 2x + 2 = \frac{3}{2}$. Буларың биринҗисинден $x(3x + 2) = 0$. Бу ерден $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{2}{3}$. Инди икинҗи деңлемеден $6x^2 + 4x + 1 = 0$. Бу ерден

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 6}}{12} = \frac{-2 \pm i\sqrt{2}}{12}.$$

193.

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 =$$
$$= x^2(x + 3) + 3x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 3x + 2).$$

Инди

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 = x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x + 1).$$

Диймек,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$ деңлемэни чөзмек үчин, шол деңлемэниң чеп бөлегини

$$[(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$$

гөрнүшде язып, соңра $x^2 + 5x + 4 = y$ билен беллэп, $y(y + 2) = 120$ я-да $y^2 + 2y - 120 = 0$ квадрат деңлеме аларыс. Шундан соңкулар айдыңдыр.

194. Берлен деңлемэни ашакдакы ялы язалың:

$$[x(x + 5)][(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] + 16 = 0$$

я-да

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 16 = 0.$$

Инди

$$x^2 + 5x = y$$

билен беллэп,

$$y(y + 4)(y + 6) + 16 = 0$$

я-да

$$y^3 + 10y^2 + 24y + 16 = 0$$

гөрнүшдэки деңлемэни аларыс. Шу деңлигиң чеп бөлегини көпелдиҗилере дагыдалың, онда:

$$y^3 + 8 + 10y^2 + 20y + 4y + 8 = 0$$

я-да

$$(y^3 + 8) + 10y(y + 2) + 4(y + 2) = 0,$$

я-да

$$(y + 2)(y^2 - 2y + 4) + 10y(y + 2) + 4(y + 2) = 0,$$

я-да

$$(y + 2)(y^2 - 2y + 4 + 10y + 4) = 0,$$

я-да

$$(y + 2)(y^2 + 8y + 8) = 0$$

аларыс. Бу ерден $y + 2 = 0$ я-да $y_1 = -2$. Инди $y^2 + 8y + 8 = 0$ деңлемэни чөзүп, $y_{2,3} = -4 \pm \sqrt{2}$ аларыс.

Диймек, $x^2 + 5x = -2$ ве $x^2 + 5x = -4 \pm 2\sqrt{2}$.

Шу ерде $x^2+5x+2=0$ квадрат деңлемәни, $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ ве $x^2+5x+4-2\sqrt{2}=0$ деңлемәни, $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{9+8\sqrt{2}}}{2}$ ве $x^2+5x+4+2\sqrt{2}=0$ деңлемәни чөзүп, $x_{5,6}=\frac{-5\pm\sqrt{9-8\sqrt{2}}}{2}$ аларыс.

195. Берлен деңлигиң чеп бөлегине x^2 гошалык ве айралың, онда $x^4-2x^3+x^2-x^2+x+\frac{1}{4}=0$ я-да $(x^4-2x^3+x^2)-(x^2-x)+\frac{1}{4}=0$, я-да $(x^2-x)^2-(x^2-x)+\frac{1}{4}=0$. Инди $x^2-x=y$ билен белләсек, $y^2-y+\frac{1}{4}=0$ деңлеме аларыс. Шу квадрат деңлемәни чөзүп, $y_{1,2}=\frac{1}{2}$ бахаңы аларыс.

$x^2-x=\frac{1}{2}$ я-да $x^2-x-\frac{1}{2}=0$ деңлемәни чөзүп, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+2}}{2}$, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ аларыс. $y_{1,2}=\frac{1}{2}$ болany себәпли

$$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ \text{ве}\quad x_4=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

бахалары аларыс.

196. $x=\frac{y}{\sqrt{2}}$ билен чалшыралың. Онда ашакдакыны аларыс.

$$8\cdot\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-20\sqrt{2}\cdot\frac{y^2}{2}+22\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}=0;\ 2y^3-10y^2+11y+3=0.$$

Шу деңлигиң чеп бөлегини көпелдижилере дагытып, ашакдакыны аларыс:

$$2y^3-6y^2-4y^2+12y-y+3=0$$

я-да

$$2y^2(y-3)-4y(y-3)-(y-3)=0,$$

я-да

$$(y-3)(2y^2-4y-1)=0.$$

Шу ерден $y_1=3$ ве $2y^2-4y-1=0$ деңлемеден

$$y_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}.$$

Инди $x=\frac{y}{\sqrt{2}}$ деңликден

$$x_1=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2},\quad x_{2,3}=\frac{\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{12}}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Шейлеликде,

$$x_1=\frac{3\sqrt{2}}{2};\quad x_2=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2};\quad x_3=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

197. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$(x^2+a^2)(x^2-6ax+9a^2)=8a^4$$

я-да

$$(x^2+a^2)(x^2+a^2+8a^2-6ax)-8a^4=0,$$

я-да

$$(x^2+a^2)^2+(x^2+a^2)(8a^2-6ax)-8a^4=0,$$

я-да

$$x^4+2a^2x^2+a^4+8a^2x^2-6ax^3+8a^4-6a^3x-8a^4=0,$$

я-да

$$x^4+a^4+10a^2x^2-6ax^3-6a^3x=0,$$

я-да

$$x^4-ax^3+a^4-a^3x+5a^2x^2-5a^3x+5a^2x^2-5ax^3=$$
$$=x^3(x-a)-a^3(x-a)+5a^2x(x-a)-5ax^2(x-a)=$$
$$=(x-a)(x^3-a^3+5a^2x-5ax^2)=(x-a)[(x-a)(x^2+ax+a^2)-$$
$$-5ax(x-a)]=(x-a)(x-a)(x^2+ax+a^2-5ax)=$$
$$=(x-a)(x-a)(x^2-4ax+a^2)=0.$$

Бу ерден

$$x_1=x_2=a;\quad x_{3,4}=2a\pm\sqrt{4a^2-a^2}=2a\pm a\sqrt{3}.$$

198. Берлен деңлемеден ашакдакыны аларыс:

$$x^2+2x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

я-да

$$(x_1^2+2x_1)=y_1$$

ве

$$(x^2+2x_2)=y_2$$

боляр.

Ахыркы ики деңлемәниң көклерини x_1, x_2, x_3 ве x_4 аркалы белләп, ашакдакыны аларыс:

$$x_1^2+2x_1=y_1$$
$$x_2^2+2x_2=y_1,$$
$$x_3^2+2x_3=y_2$$
$$x_4^2+2x_4=y_2$$

Шу деңликлери члениме-член гошуп,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1+x_2)+2(x_3+x_4)=2(y_1+y_2)$$

аларыс.

Инди

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2(y_1+y_2)-2(x_1+x_2)-2(x_3+x_4)$$

деңликде $y_1+y_2=5$ ве $x_1+x_2=-2$ хем-де $x_3+x_4=-2$ болandyгы гөз өңүнде тутулса (шу ерде Виетиң теоремасы уланыляр), онда

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2\cdot 5-2(-2)-2(-2)$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

я-да

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 18$$

аларыс.

199. Берлен деңлемени ашакдакы ялы язалың:

$$(1 + x + x^2)(b + 1 - 1 - x - x^2) = a,$$

я-да

$$(1 + x + x^2)[(b + 1) - (1 + x + x^2)] = a,$$

я-да

$$(b + 1)(1 + x + x^2) - (1 + x + x^2)^2 - a = 0,$$

я-да

$$(1 + x + x^2)^2 - (b + 1)(1 + x + x^2) + a = 0.$$

Инди $(1 + x + x^2)$ аңлатма гөрә алнан квадрат деңлемени чөзйөрис:

$$1 + x + x^2 = \frac{b + 1 \pm \sqrt{b^2 + 2b + 1 - 4a}}{2}.$$

Шу квадрат деңлемени чөзмек кынчылык дөретмез.

200. Берлен деңлеманиң ики белегини-де квадрата гетерип,

$$a - \sqrt{a + x} = x^2$$

аларыс.

Шу деңликден

$$a - x^2 = \sqrt{a + x}$$

я-да

$$a^2 - 2ax^2 + x^4 = a + x$$

алмак мүмкиндир.

$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0$ деңлиги a гөрә чөзүп,

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4x^4 + 4x}}{2}$$

я-да

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}$$

аларыс.

$$a_1 = x^2 + x + 1 \quad \text{ве} \quad a_2 = x^2 - x.$$

Инди $x^2 + x + 1 - a = 0$ ве $x^2 - x - a = 0$ квадрат деңлемелери чөзүп,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2};$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

аларыс.

201. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$\sqrt{3x^2 - 4x - 6x + 8} - \sqrt{6x^2 - 8x + 24x - 32} = \sqrt{6x(3x - 4)},$$

$$\sqrt{x(3x - 4) - 2(3x - 4)} - \sqrt{2x(3x - 4) + 8(3x - 4)} = \sqrt{6x(3x - 4)},$$

$$\sqrt{(3x - 4)(x - 2)} - \sqrt{(3x - 4)(8x + 8)} = \sqrt{6x(3x - 4)},$$

$$\sqrt{3x - 4}\,(\sqrt{x - 2} - \sqrt{2x + 8} - \sqrt{6x}) = 0.$$

Бу ерден

$$\sqrt{3x - 4} = 0 \cdot x_1 = \frac{4}{3},$$

я-да

$$\sqrt{x - 2} - \sqrt{2x + 8} - \sqrt{6x} = 0.$$

Бу ерден

$$(\sqrt{x - 2} - \sqrt{6x})^2 = (\sqrt{2x + 8})^2$$

я-да

$$x - 2 - 2\sqrt{(x - 2)6x} + 6x = 2x + 8,$$

я-да

$$5x - 10 = 2\sqrt{(x - 2)6x},$$

я-да

$$25x^2 - 100x + 100 = 24x^2 - 48x,$$

я-да

$$x^2 - 52x + 100 = 0; \quad x_2 = 50; \quad x_3 = 2.$$

Шу алнан көклери берлен деңлемә гоюп, $x_2 = 50$ ве $x_3 = 2$ көклериң шол деңлемәни канагатландырмаядыгыны гөрйәрис. Диймек, берлен деңлемәниң диңе $x = \frac{4}{3}$ көки бардыр.

202. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2x - 6} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x + 2}{x - 3}} = \sqrt{x^2 - 3x - 6x + 18},$$

я-да

$$\sqrt{x(x - 3) + 2(x - 3)} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x + 2}{x - 3}} = \sqrt{x(x - 3) - 6(x - 3)},$$

я-да

$$\sqrt{(x - 3)(x + 2)} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x + 2}{x - 3}} = \sqrt{(x - 3)(x - 6)},$$

я-да

$$3(x - 3)\sqrt{x + 2} - 8\sqrt{x + 2} = 3(x - 3)\sqrt{x - 6},$$

я-да

$$\sqrt{x + 2}\,(3x - 9 - 8) = 3(x - 3)\sqrt{x - 6},$$

я-да

$$\sqrt{x + 2}\,(3x - 17) = 3(x - 3)\sqrt{x - 6}.$$

Иң ахыркы деңлигиң ики белегини-де квадрата гетерип,

$$(x + 2)(3x - 17)^2 = 9(x - 3)^2(x - 6)$$

я-да

$$3x^2 - 40x + 133 = 0$$

аларыс. Бу ерден

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 399}}{3} = \frac{20 \pm 1}{3}; \quad x_1 = 7; \quad x_2 = \frac{19}{3}$$

аларыс.

203. Гой, $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} = y$ ве $\sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = z$ болсун. Онда

$$\left.\begin{aligned} y + z &= \sqrt[3]{b} \\ y^3 + z^3 &= 2a \end{aligned}\right\}$$

аларыс.

Шу системаның икинжи деңлемесини ашакдакы ялы язалың:

$$(y + z)(y^2 - yz + z^2) = 2a \quad \text{я-да} \quad y^2 - yz + z^2 = \frac{2a}{\sqrt[3]{b}}.$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Инди системаның биринжи деңлемесини шейле язалың:

$$y^2 + 2yz + z^2 = \sqrt[3]{b^2}.$$

Ахыркы ики деңликден

$$3yz = \sqrt[3]{b^2} - \frac{2a}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{я-да} \quad yz = \frac{b - 2a}{3\sqrt[3]{b}}$$

аларыс.

Диймек,

$$\left.\begin{aligned} y + z &= \sqrt[3]{b} \\ yz &= \frac{b - 2a}{3\sqrt[3]{b}} \end{aligned}\right\} \text{ системаны алдык.}$$

Шу системадан, Виетиң теоремасыны уланып,

$$u^2 - \sqrt[3]{b}\,u + \frac{b - 2a}{3\sqrt[3]{b}} = 0$$

квадрат деңлеме дүзйәрис.

Алнан квадрат деңлемәни чөзүп, y ве z-иң бахаларыны тапарыс.

204. Ёкарда белленилишине гөрә шу деңлемәниң сағ бөлеги битин сан болмалыдыр. Шол битин саны, ягны деңлемәниң сағ бөлегини N билен белләлиң, онда

$$x^2 - 2x = N \quad \text{я-да} \quad x^2 - 2x - N = 0$$

квадрат деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + N}$ көклери тапарыс. Меселәниң манысына гөрә x хакыкы сандыр. Диймек, $N \geqslant -1$.

Инди $\left[\frac{1 - 3x}{2}\right] = x^2 - 2x$ деңлиге гаралың. $[a]$ кесгитленилишиниң эсасында ашакдакылары аларыс:

$$x^2 - 2x \leqslant \frac{1 - 3x}{2} < x^2 - 2x + 1$$

я-да

$$2x^2 - 4x \leqslant 1 - 3x < 2x^2 - 4x + 2.$$

Инди болса $2x^2 - x - 1 \leqslant 0$ деңсизлиги чөзүп, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ аларыс. Биз öзаля $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + N}$ алыпдык. Эгер $x_1 = 1 + \sqrt{1 + N}$ болса, онда x-иң бахасы $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ деңсизлиги канагатландырмаяр. Диймек, x үчин $x_2 = 1 - \sqrt{1 + N}$ баханы алмалы. Инди $-\frac{1}{2} \leqslant 1 - \sqrt{1 + N} \leqslant 1$ деңсизликден $N = -1;\ 0;\ 1$ бахалары тапып, $x = 1;\ 0;\ 1 - \sqrt{2}$ аларыс.

Диймек, $x = 1;\ 0;\ 1 - \sqrt{2}$ бахалары бардыр.

205. Илки билен $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = N$ билен белләлиң. Онда системаның биринжи деңлемеси ашакдакы ялы болар.

$$2x_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = 2a.$$

Инди ёкарда гиризилен белгилемәни гөз өңүнде тутсак, онда

$$\begin{cases} 2x_1 - N = 2a \\ 4x_2 - N = 4a \\ 8x_3 - N = 8a \quad (A) \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2^n x_n - N = 2^n a \end{cases}$$

системаны аларыс.

Шу деңликлери члениме-член гошуп, $N = 2^n a \cdot n$ аларыс.

Хакыкатдан-да, (A) системаны ашакдакы ялы язалың:

$$\begin{cases} 2^n x_1 - 2^{n-1} N = 2^n a \\ 2^n x_2 - 2^{n-2} N = 2^n a \\ 2^n x_3 - 2^{n-3} N = 2^n a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^n x_n - \quad N \quad = 2^n a. \end{cases}$$

Инди бу деңликлери члениме-член гошалың, онда

$$2^n (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) - N(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1) = 2^n \cdot a \cdot n$$

аларыс.

Бу ерден

$$2^n \cdot N - N(2^{n-1}) = 2^n \cdot a \cdot n$$

я-да

$$2^n \cdot N - 2^n N + N = 2^n \cdot a \cdot n,$$

я-да

$$N = 2^n \cdot a \cdot n$$

аларыс.

Инди $2x_1 - N = 2a$ деңликден $2x_1 - 2^n \cdot a \cdot n = 2a$ я-да

$$x_1 = a(1 + 2^{n-1} \cdot n)$$

аларыс Соңра $4x_2 - N = 4a$ деңликден $x_2 = a(1 + 2^{n-2} \cdot n)$ аларыс. Иң ахырда $2^n x_n - N = 2^n \cdot a$ деңликден $x_n = a(1 + n)$ аларыс.

206. Берлен системадакы деңлемелериң хеммесини члениме-член гошуп, ашакдакыны аларыс:

$$x_1(1 + 2 + \cdots + n) + x_2(1 + 2 + \cdots + n) + \\ + x_3(1 + 2 + \cdots + n) + \cdots + x_n(1 + 2 + \cdots + n) = \\ = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

я-да

$$x_1 \cdot \frac{1 + n}{2} n + x_2 \frac{1 + n}{2} n + x_3 \frac{1 + n}{2} n + \cdots + x_n \frac{1 + n}{2} n = \\ = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Бу ерден

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \cdot 2}{n(n + 1)}.$$

Инди берлен системадакы икинжи деңлемеден биринжи деңлемәни члениме-член айрып,

$$n \cdot x_1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - \cdots - x_n = a_2 - a_1$$

я-да

$$nx_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = a_2 - a_1$$

аларыс.

Скобкаларың ичиндәки жеми онуң ёкарда тапылан бахасы билен чалшып, ашакдакыны аларыс:

$$nx_1 = a_2 - a_1 + \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\cdot 2}{n(n+1)}$$

я-да

$$x_1 = \frac{a_2 - a_1}{n} + \frac{2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)}{n^2(n+1)}.$$

Инди берлен системаның икинжи деңлемесинден үчүнжи деңлемәни айрып,

$$x_1 + (1-n)x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = a_2 - a_3$$

я-да

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n - nx_2 = a_2 - a_3,$$

я-да

$$\frac{2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)}{n(n+1)} - nx_2 = a_2 - a_3$$

аларыс.

Бу ерден

$$nx_2 = a_3 - a_2 + \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\cdot 2}{n(n+1)}$$

я-да

$$x_2 = \frac{a_3 - a_2}{n} + \frac{2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)}{n^2(n+1)}$$

ве ш. м.

207. Биринжи деңлемәни куба гөтерсек, $x^6 + y^3 + 3x^2y\cdot 5 = 125$ болар. Бу ерден икинжи деңлемәни гөз öңүнде тутсак $x^2y = 4$ деңлиги аларыс.

Инди шейле система гелдик:

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2y = 4 \end{cases}$$

Шу системадан $z^2 - 5z + 4 = 0$ алып, $z_1 = 4$ ве $z_2 = 1$ тапарыс. Диймек, $x^2 = 4$ ве $y = 1$ я-да $x^2 = 1$ ве $y = 4$.

Шейлеликде, $x_{1,2} = \pm 2$; $y_1 = 1$ ве $x_{3,4} = \pm 1$ ве $y_2 = 4$ аларыс.

208. Берлен деңлемелери члеме-член гошуп, $(x + y)^2 = 441$ я-да $x + y = \pm 21$ аларыс. Инди $x(x + y) = 210$ деңликде $x + y = \pm 21$ гоюп, $x = \pm 10$ аларыс. Эгер $x + y = \pm 21$ бахаңы $y(x + y) = 231$ деңлиге гойсак, онда $y = \pm 11$ аларыс.

Диймек,

$$x_1 = 10;\ y_1 = 11;\ x_2 = -10;\ y_2 = -11.$$

209. Гой, $\sqrt[3]{x + 3} = z$ ве $\sqrt[3]{y + 7} = v$ болсун. Онда $x = z^3 - 3$ ве $y = v^3 - 7$ аларыс.

Берлен системаны ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\begin{cases} z + v = 4 \\ z^3 + v^3 = 16 \end{cases}$$

Шу системаның икинжи деңлемесинден

$$(z + v)(z^2 - zv + v^2) = 16$$

я-да

$$4(z^2 - zv + v^2) = 16,$$

я-да

$$z^2 - zv + v^2 = 4$$

аларыс. $(z + v)^2 = 16$ деңликден $z^2 + 2zv + v^2 = 16$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} z^2 - zv + v^2 = 4 \\ z^2 + 2zv + v^2 = 16 \end{cases}$$

системаның икинжи деңлемесинден биринжи деңлемесини члеме-член айырсак, онда $zv = 4$ аларыс.

Инди болса

$$\begin{cases} z + v = 4 \\ zv = 4 \end{cases}$$

системаны чөзүп, $z = 2$; $v = 2$ бахалары тапарыс.

Сонра $\sqrt[3]{x + 3} = 2$ ве $\sqrt[3]{y + 7} = 2$ деңликлерден $x + 3 = 8$ ве $y + 7 = 8$ я-да $x = 5$ ве $y = 1$ бахалары аларыс.

210. $\sqrt[4]{8 - x} = y$ ве $\sqrt[4]{89 + x} = z$ билен белләп,

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

системаны аларыс. Шу системаның биринжи деңлемесинден

$$y^2 + z^2 = 25 - 2yz$$

аларыс. Иң ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип,

$$y^4 + z^4 = 625 - 100yz + 2y^2z^2$$

аларыс.

Инди ёкардакы системаның икинжи деңлемесини гөз өңүнде тутсак, онда:

$$2y^2z^2 - 100yz + 625 = 97$$

я-да

$$y^2z^2 - 50yz + 264 = 0 \text{ аларыс.}$$

Шу деңлемәни чөзүп, $(yz)_1 = 44$ ве $(yz)_2 = 6$ бахалары тапарыс.

211. $x = 89 + y$ орнуна гоймак формуласыны улансак, бу деңлеме 212-нжи меселедәки деңлемә гелер.

Диймек,

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases}$$

системалары алдык. Шу системалары чөзүп, $y = 3$; $z = 2$ ве $y = 2$; $z = 3$ көклери тапарыс. Иң ахыркы системаларың биринжисиниң хакыкы көклери ёкдур.

Инди $\sqrt[4]{97 - x} = 3$ ве $\sqrt[4]{x} = 2$. Бу ерден $x_1 = 16$ я-да $\sqrt[4]{97 - x} = 2$ ве $\sqrt[4]{x} = 3$. Бу ерден $x_2 = 81$.

212. Берлен системаны ашакдакы ялы язалың:

$$\begin{cases} xy + xz = a^2 \\ xy + yz = b^2 \\ xz + yz = c^2 \end{cases}$$

Шу деңликлериң хеммесини члеме-член гошалың, онда

$$xy + xz + yz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

аларыс.

Шу деңлемеден $xy = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - (xz+yz) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Эдил шоңуң ялы эдип, $xz = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$ ве $yz = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ аларыс. Шу ахыркы үч деңлиги члене-член көпелдип,

$$(xyz)^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8}$$

аларыс.

Эмма $yz = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}}$$

аларыс.

Эдил шоңуң ялы эдип,

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2+c^2-b^2)}}$$

ве

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2+b^2-c^2)}}$$

аларыс.

213. Берлен системаның биринжи деңлемесини ашакдакы ялы язмак болар:

$$2x + 2y - 4 = xy - y^2 + 2y \quad \text{я-да} \quad y^2 - xy + 2x - 4 = 0$$

Шу деңлемәни чөзүп,

$$y_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(2x-4)}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{(x-4)^2}}{2} = \frac{x \pm (x-4)}{2}$$

аларыс. Бу ерден, $y_1 = 2$; $y_2 = x - 2$ тапарыс. y-иң шу бахаларыны берлен системаның икинжи деңлемесине гоюп, $x^2(2-1) + 2^2(x-1) = x \cdot 2 - 1$ я-да $x^2 + 2x - 3 = 0$ аларыс. Шу ерден $x_1 = 1$; $x_2 = -3$ аларыс. Инди $y = x - 2$ бахаsucc берлен системаның икинжи деңлемесине гоюп,

$$x^2(x-2-1) + (x-2)^2(x-1) = x(x-2) - 1$$

я-да

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

аларыс. Шу деңлемәни ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 2x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 7x + 3x - 3 =$$
$$= 2x^2(x-1) + 7x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(2x^2 + 7x + 3) = 0.$$

Инди $(x-1)(2x^2+7x+3) = 0$ деңликден $x - 1 = 0$ ве $2x^2 + 7x + 3 = 0$ аларыс. Диймек, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ ве $x_5 = -3$.

214. y сан тәк болуп билмез, чүнки шу халда берлен деңлигиң чеп бөлеги көпелдижилере дагаяр ве z сан дүзме сан боляр. Диймек, y жүбүт сан болмалыдыр ве меселәниң шертини канагатландырмак үчин йөнекей сан болмалыдыр. Шейле сан 2-дир. Диймек, $y = 2$.

Инди $x^2 + 1 = z$ деңлемә гаралың. Эгер x йөнекей тәк сан диййп гүман этсек, онда $x^2 + 1$ сан жүбүт болар ве шу халда z сан 2-ә бөлүнер, эмма z йөнекей сан болмалы, шоңуң үчин x тәк сан диййп гүман этмек нәлогрудыр. Диймек, x жүбүт сан болмалыдыр. x сан хем жүбүт, хем-де йөнекей болмалы. Шейлеликде, $x = 2$ аларыс.

Инди $x^y + 1 = z$ деңликден ($x = 2$, $y = 2$ боланда) $2^2 + 1 = z$ я-да $z = 5$ аларыс. Жогабы: $x = 2$; $y = 2$; $z = 5$.

215. Гөзленилйән икибелгили саны $10x + y$ ялы белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлиги аларыс:

$$x^2 + y^2 = 10x + y.$$

Шу деңлемәни шейле язалың:

$$y^2 - y = 10x - x^2.$$

Инди $x(10 - x^2) = y(y-1)$ деңликден гөрнүши ялы, x-иң бахасы 1, 2, 3 болмагы мүмкин, чүнки меселәниң манысына гөрә x ве $10 - x^2$ санлар положител санлардыр. Эгер $x = 1$ баха гоюлса, онда $y(y-1) = 9$ аларыс, эмма 9 саны ики саны ызыгидерли санының көпелтмек хасылы гөрнүшинде язып болмаяр.

Инди $x = 2$ бахаңы барлап герелиң, онда $2(10 - 2^2) = (y-1)y$ я-да $(y-1)y = 12$ аларыс. Диймек, $y = 4$, чүнки $3 \cdot 4 = 12$. Шейлеликде, гөзленилйән сан 24 болмалыдыр. $x = 3$ бахаңың канагатландырмаяндыгыны барлап гөрмек кын дәлдир.

216. Гой, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ көпчлениң битин көки болуп, шол көк P болсун. Онда ашакдакы деңлиги аларыс.

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n = 0.$$

Инди $p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) = -a_n$ деңликден гөрнүши ялы, a_n сан p сана бөлүнмелидир. Меселәниң шертине гөрә a_n тәк сан, диймек, p сан-да тәк болмалыдыр. Шол тәк p санын ислендик дережеси-де, ягны p^{n-1}, p^{n-2}, ... p тәк сан болмалыдыр. Меселәниң шертинден гөрнүши ялы, $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ сан ве a_n сан тәкдир. Онда $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ сан жүбүтдир.

Инди болса шейле жеме гаралың: $a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-2}p + a_{n-1}$. Шу жем-де жүбүт сандыр, чүнки $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}$ гошулыжылар P саның дүрли дережеси болан тәк санлара көпелдиленде онуң жүбүтлиги үйтгемейәр.

Шейлеликде,

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + a_2p^{n-3} + \cdots + a_{n-2}p + a_{n-1}) = -a_n$$

деңлигиң чеп бөлеги жүбүт болуп, онуң саг бөлеги болса тәк сандыр. Шейле болмагы мүмкин дәлдир. Диймек, берлен көпчлениң битин көки бар диййп гүман этмек нәлогрудыр. Ш. с. т. э.

217. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язалың:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} +$$
$$+ \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|.$$

Эгер $x \geqslant 2$ болса, онда берлен аңлатма $2\sqrt{x-1}$ болар, эгер-де $1 \leqslant x \leqslant 2$ болса, онда берлен аңлатма 2-ә деңдир.

218. Белли болшы ялы, a_1 ве a_2 ики саны положител сан үчин $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$. Диймек, a_3 ве a_4 санлар үчин-де $\frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3a_4}$ баг-

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

ланышыгы язмак мүмкиндир. Шу ики багланышыгы члениме-член кепелдип, $\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2a_3a_4}$ аларыс. Эмма,

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}$$

я-да

$$\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}.$$

Инди

$$\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{a_1a_2a_3a_4} \text{ я-да } \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

219. a_1, a_2, a_3 ве $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ дерт сана гаралын.

Дерт сан үчин белли болшы ялы,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3\cdot\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}.$$

Шу ерден ашакдакыны аларыс:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^4 \geqslant a_1a_2a_3\cdot\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \text{ я-да } \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^3 \geqslant a_1a_2a_3.$$

Бу ерден $\frac{a_1+a_2+a_3}{2} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ аларыс. Ш. с. т. э.

220. Илки билен $\sqrt{4a+1} < 2a+1$ денсизлиге гаралын. Шу денсизлигиң ики белегини-де квадрата гетерип, $4a+1 < 4a^2+4a+1$ аларыс (бу ерде $a>0$). Диймек, $\sqrt{4a+1} < 2a+1$ догры.

Инди

$$\sqrt{4a+1} < 2a+1$$
$$\sqrt{4b+1} < 2b+1$$
$$\sqrt{4c+1} < 2c+1$$

денсизликлери члениме-член гошуп,

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 2(a+b+c)+3$$

аларыс.

Эгер $a+b+c=1$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда $\sqrt{4a+1}+$ $+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5$ аларыс. Ш. с. т. э.

221. Берлен багланышыкдан

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9,$$

я-да

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c} \geqslant 9,$$

я-да

$$1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+1+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geqslant 9.$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+2+$$
$$+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+2 \geqslant 6$$

я-да

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \geqslant 0.$$

Иң ахыркы багланышыгың догрудыгы айдыңдыр. Диймек, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+$ $+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$. Ш. с. т. э.

222. $\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \geqslant a_kb_k$ денсизликде $k=1, 2, 3, \ldots, n$ бахалары берип, ашакдакылары аларыс:

$$\frac{a_1^2+b_1^2}{2} \geqslant a_1b_1$$
$$\frac{a_2^2+b_2^1}{2} \geqslant a_2b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_n^2+b_n^2}{2} \geqslant a_nb_n$$

аларыс.

Шуларын җеммесини члениме-член гошуп,

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}{2} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

я-да

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \leqslant \frac{1+1}{2}=2$$

аларыс.

Диймек, шу халда $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \leqslant 1$ аларыс. Шу ерде $a_k > b_k$ дийип гүман эдилди, шонуң үчин субут этмеги талап эдилйән денсизлигиң бир белеги субут эдилди.

223. a^4 ве b^4 ики сан берлен болса, онда белли болшы ялы, $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{a^4b^4}$ я-да $a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2$. Меселәниң шертине гөрә, $a>b$, онда $a^4b^4 \geqslant 2ab^3$ аларыс. Ш. с. т. э.

224. $a^2+b^2=6ab$ деңлигиң ики белегине-де $2ab$ гошуп, $(a+b)^2=8ab$ я-да $a+b=\sqrt{8ab}$ аларыс.

Инди шол ятланылан деңлигиң ики бөлегинден-де $2ab$-ни айрып, $(a-b)^2=4ab$ я-да $a-b=\sqrt{4ab}$ аларыс.

Инди болса, $a+b=\sqrt{8ab}$ ве $a-b=\sqrt{4ab}$ деңликлери бири-бирине бөлүп, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt{8ab}}{\sqrt{4ab}}=\sqrt{2}$ аларыс. Ш. с. т. э.

225. Ики санын орта арифметики ве орта геометрики бахалары барадакы теореманы уланып, ашакдакылары аларыс:

$$\frac{1+x_1}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot x_1}$$

$$\frac{1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot x_2}$$

$$\frac{1+x_3}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1+x_{1969}}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot x_{1969}}$$

Шу баглanышыклары члениме-член көпелдип,

$$\frac{1+x_1}{2}\cdot\frac{1+x_2}{2}\cdot\frac{1+x_3}{2}\cdots\frac{1+x_{1969}}{2}\geqslant\sqrt{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_{1969}}$$

я-да

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_{1969})}{2^{1969}}\geqslant\sqrt{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_{1969}}$$

аларыс.

Эмма мeселәниң шертине гөрә $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_{1969}=1$.

Диймек, $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_{1969})\geqslant 2^{1969}$. Ш. с. т. э.

226. Берлен дeңсизлигиң ики бөлегини-де abc аңлатма бөлүп, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)}{abc}\geqslant 6.$$

Инди

$$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{abc}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Эмма

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2;\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2;\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2.$$

Диймек,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 6.$$

Шейлеликде, $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geqslant 6abc$. Ш. с. т. э.

227. Ашакдакы ики дробуң тапавудына гаралың:

$$\frac{\sqrt{y}}{x+y}-\frac{1}{x+1}=\frac{x\sqrt{y}+\sqrt{y}-x-y}{(x+y)(x+1)}=\frac{\sqrt{y}(x-\sqrt{y})-(x-\sqrt{y})}{(x+y)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-\sqrt{y})(\sqrt{y}-1)}{(x+y)(x+1)}.$$

Диймек,

$$\frac{\sqrt{y}}{x+y}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x-\sqrt{y})(\sqrt{y}-1)}{(x+y)(x+1)}.$$

Иң ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки дробуң майдалавжысы положител санларың көпелтмек хасылыдыр, чүнки мeселәниң шертине гөрә, x ве y санлар натурал санлардыр. Мeселәниң шертине гөрә y сан бирден улы болмалыдыр ($y>x^2$), диймек, $\sqrt{y}-x$ сан положител сандыр. Эмма, $x-\sqrt{y}$ отрицател сандыр, чүнки $x^2<y$.

Диймек, шол ятланылан дробь отрицател сандыр, ягны $\frac{\sqrt{y}}{x+y}-\frac{1}{x+1}<0$ болмалыдыр. Шу ерден $\frac{\sqrt{y}}{x+y}<\frac{1}{x+1}$. Ш. с. т. э.

228. Гой, $S=1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$ болсун. Инди $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ деңликде n-е 1, 2, 3, …, n баха берип жемлесек, озалкы берлен S-е дең болан, эмма башга гөрнүшде язылан хатар сан аларыс, ягны

$$S=\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\frac{3^2+3}{2}+\frac{4^2+4}{2}+\frac{5^2+5}{2}+\cdots+\frac{n^2+n}{2}$$

я-да

$$S=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+3+4+\cdots+n).$$

Эмма

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ве

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Диймек,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+n}{2}n$$

я-да

$$S=\frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+n);$$

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

229.

$$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+4^2-3^2+2^2-1^2=$$
$$=(100^2-99^2)+(98^2-97^2)+(96^2-95^2)+\cdots+(4^2-3^2)+(2^2-1^2)=$$
$$=199+195+191+\cdots+7+3=\frac{199+3}{2}\cdot 50=5050.$$

230.

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{x}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{n-1}{x}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{n-2}{x}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)=$$
$$=-\frac{n}{x}-\frac{n-1}{x}-\frac{n-2}{x}-\cdots-\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}=$$
$$=\frac{n}{a}-\frac{1}{x}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n}{a}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=$$
$$=\frac{2nx-an-an^2}{2ax}=\frac{n(2x-a-an)}{2ax}.$$

Жогабы:

$$\frac{n(2x-an-a)}{2ax}.$$

231. Берлен деңлигиң ики бөлегини-де x-е көпелделиң, онда $Sx=x^2+2x^3+3x^4+\cdots+nx^{n+1}$ аларыс.

Шу деңлиги берлен деңликден члеңме-член айралың, онда $s-sx=x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n-nx^{n-1}$ аларыс.

Инди

$$S(1-x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n-nx^{n+1}$$

деңликден

$$S(1-x)=\frac{x^n\cdot x-x}{x-1}-nx^{n+1}$$

я-да

$$S=\frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{nx^{n+1}}{1-x},$$

я-да

$$S=\frac{nx^{n-1}}{x-1}-\frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

аларыс.

232.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

Эдил шуңуң ялы

$$\frac{2}{x^2+1}=\frac{2}{x^2-1}-\frac{4}{x^4-1}$$
$$\frac{4}{x^4+1}=\frac{4}{x^4-1}-\frac{8}{x^8-1}$$
$$\frac{8}{x^8+1}=\frac{8}{x^8-1}-\frac{16}{x^{16}-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{2^n}{x^{2n}+1}=\frac{2^n}{x^{2n}-1}-\frac{2^n+1}{x^{2n}-1}.$$

Шу деңликлери члеңме-член гошуп ве гөзленилйән жеми S_n билен белләп, ашакдакыны аларыс:

$$S_n=\frac{1}{x-1}-\frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

233.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^4+2+\frac{1}{x^4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2=x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}.$$

Шу деңликлери члеңме-член гошуп,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+$$
$$+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}+2n$$

аларыс. Шу деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжылары шейле белләлиң:

$$x^2+x^4+\cdots+x^{2n}=S_1 \quad \text{ве} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}=S_2.$$

Шуларың хер бирини геометрик прогрессияның n члениниң жеми үчин болан формула аркалы хасаплалың:

$$S_1=\frac{x^{2n}\cdot x^2-x^2}{x^2-1} \quad \text{ве} \quad S_2=\frac{\frac{1}{x^{2n}}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-1}$$

я-да

$$S_1=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1} \quad \text{ве} \quad S_2=\frac{1-x^{2n}}{x^{2n}(1-x^2)}.$$

Инди гөзленилйән жеми

$$S=S_1+S_2+2n=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{1-x^{2n}}{(1-x^2)x^{2n}}+2n=\frac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}+$$
$$+\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+2n=\frac{x^2(x^{2n}-1)x^{2n}+x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+2n=$$
$$=\frac{(x^{2n}-1)(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(x^2-1)}+2n.$$

234. Гошулыжыларың хер бирини ашакдакы ялы эдип язалың:

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2};$$
$$\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2};$$

$$\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2\cdot 1967+1}{1967^2\cdot 1968^2}=\frac{1}{1967^2}-\frac{1}{1968^2};$$

$$\frac{2\cdot 1968+1}{1968^2\cdot 1969^2}=\frac{1}{1968^2}-\frac{1}{1969^2}.$$

Шу деңликлери члене-член гошуп, ашакдакыны аларыс.

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2\cdot 1968+1}{1968^2\cdot 1969^2}=$$

$$=1-\frac{1}{1969^2}=\frac{1970\cdot 1968}{1969^2}.$$

235. Берлен аңлатманы $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ ики члене көпелделин хем-де бөлелиң, онда

$$\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(x^{256}+\frac{1}{x^{256}}\right)}{x-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(x^{256}+\frac{1}{x^{256}}\right)}{x-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(x^{256}+\frac{1}{x^{256}}\right)}{x-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{x^{512}-\frac{1}{x^{512}}}{x-\frac{1}{x}}=\frac{x^{1024}-1}{x^{511}(x^2-1)}.$$

236. Гой, 111...1 сан берлен болсун. Шол саны ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\underbrace{111\ldots1}_{81\ \text{гезек}}=10^{80}+10^{79}+10^{78}+\cdots+10^2+10+1=$$

$$=(\underbrace{999\ldots9}_{80\ \text{гезек}}+1)+(\underbrace{999\ldots9}_{79\ \text{гезек}}+1)+(\underbrace{999\ldots9}_{78\ \text{гезек}}+1)+(99+1)+(9+1)+1=$$

$$=(\underbrace{999\ldots9}_{80\ \text{гезек}}+\underbrace{999\ldots9}_{79\ \text{гезек}}+\cdots+99+9)+81=9(\underbrace{111\ldots1}_{80\ \text{гезек}}+\underbrace{111\ldots1}_{79\ \text{гезек}}+1)+81.$$

Шу ердәки скобкаларың ичиндәки жемиң 9-а бөлүнйәндигини субут эделиң. Биринжи гошулыжының цифрлериниң жеми 80. Онда шол гошулыжыны 9-а бөленимизде алынян галынды 80 саны 9-а бөленимизде алынян галынды ялыдыр. Эдил шонуң ялы икинжи гошулыжыда-да шейле болмалыдыр. Шейлеликде, $80+79+78+\cdots+2+1$ жемиң 9-а бөлүнйәндигине гарамак етерликдир. Шу жем 9-а бөлүнмели, чүнки $80+79+78+\cdots+2+1=\frac{80+1}{2}\cdot 80=40\cdot 81.$

Диймек,

$$\underbrace{111\ldots1}_{81\ \text{гезек}}=9(111\ldots1+111\ldots1+\cdots+1)+81$$

деңлигиң саг бөлеги 81-е бөлүнйәр, онда чеп бөлеги-де, ягны 81 саны бирлик билен язылан сан хем 81-е бөлүнмелидир.

237. Гой, гөзленилйән дөртбелгили сан $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ болсун. Меселәниң шертине гөрә $\overline{400a_1a_2a_3a_4}$ сан takык квадратдыр, ягны $\overline{400a_1a_2a_3a_4}=k^2$ я-да $4000000+\overline{a_1a_2a_3a_4}=k^2$, я-да $4\cdot 10^6+\overline{a_1a_2a_3a_1}=k^2$, бу ерден $\overline{a_1a_2a_3a_4}=k^2-4\cdot 10^6=(k-2000)(K+2000)$.

Инди $k-2000$ сана гаралың. Ёкардакы деңликден гөрнүши ялы, k^2 едибелгили сандыр, шонуң үчин k дөртбелгили сандан улы болуп билжек дәлдир. Ондан башга-да $k-2000$ аңлатмадан гөрнүши ялы, k сан дөртбелгили сандан кичи-де болуп билжек дәлдир. Диймек, k дөртбелгили сандыр. Инди $(k-2000)(k+2000)=\overline{a_1a_2a_3a_4}$ деңликден гөрнүши ялы, $(k+2000)$ сан дөрт мүңден улы болан дөртбелгили сан болмалыдыр. Онда биринжи көпелижи $(k-2000)$ сан диңе 1 ве 2 бахалары алып билер. Диймек, $k=2001$ я-да $k=2002$. Шейлеликде, гөзленилйән дөртбелгили санлар $\overline{a_1a_2a_3a_4}=1\cdot 4001=4001$ ве $\overline{a_1a_2a_3a_4}=2\cdot 4002=8004$ болмалыдырлар.

238. Гөзленилйән алтыбелгили сан 7, 8, 9-а бөлүнйәр, диймек шол сан $7\cdot 8\cdot 9=504$-е бөлүнйәр диймекдир. Инди 523 000 саны 504 бөлүп гөрйәрис ве 352 саның галындыда галандыгыны гөрйәрис. Инди $523\,000+A$ саның 504-е бөлүнйәндигини гөз өңүнде тутсак, онда A саның $504-352=152$ я-да $2\cdot 504-352=656$ болжакдыгыны гөрерис. Хакыкатдан-да $523\,000+A=504k$ ве $523\,000=504(k-1)+352$. Диймек, $504k-A=504(k-1)+352$ я-да $A=504-352=152$. Шейлеликде, $A=152$ я-да $2\cdot 504-352=656$.

Эгер $A=3\cdot 504-352=1160$. Бу болса үчбелгили дәл-де, дөртбелгили сандыр. Гөзленилйән сан: 523 152 ве 523 656-дыр.

239. Хасапламаның иккилик системасында 0 ве 1 ики цифр уланылар, диймек, шол сан хасапламаның иккилик системасында ашакдакы ялы аңладылмалы:

$$\overline{111\ldots1}_2$$

я-да

$$\overline{111\ldots1}_2=2^{n-1}+2^{n+2}+\cdots+2^2+2+1=A.$$

Инди $A=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1$ деңлигиң ики бөлегини-де 2-ә көпелдип,

$$2A=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^2+2$$

я-да $2A=2^n+A-1$ сан аларыс. Бу ерден, $A=2^n-1$.

Инди иң ахыркы деңликде $n=10$ диййип гүман этсек, онда $A=2^{10}-1=1023$. Шу ягдай меселәниң шертини канагатландырмаяр. Инди $n=9$ болсун, онда $A=2^9-1=511$ аларыс. $n=8$ боланда $A=255$ болар. n-иң бейлеки бахалары меселәниң шертини канагатландырмаяр.

240. $\dfrac{a+a^2+\ldots+a^{100}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-100}}$ дробуң санавжысыны ве майдалавжысыны a^{101} аңлатма көпелделиң, онда

$$\frac{(a+a^2+\ldots+a^{100})\cdot a^{101}}{a^{101}(a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-100})}=\frac{a^{101}(a+a^2+\ldots+a^{100})}{a^{100}+a^{99}+\ldots+a^2+a}=a^{101}$$ аларыс.

Җогабы: a^{101}.

241. Бөлүҗиниң $(x-y)$ аңлатма көпелделиң ве бөлелиң, онда

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64})=$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64})}{x-y}=$$
$$=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64})}{x-y}=$$
$$=\frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64})}{x-y}=$$
$$=\frac{(x^{64}+y^{64})(x^{64}+y^{64})}{x-y}=\frac{x^{128}-y^{128}}{x-y}.$$

Инди $(x^{128}-y^{128}):\dfrac{x^{128}-y^{128}}{x-y}=x-y$.

Җогабы: Пай $(x-y)$.

242. $\dfrac{x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$ дробуң санавжысыны ве майдалавжысыны $(x-1)$ икичлене көпелделиң, онда ашакдакыны аларыс:

$$\frac{(x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1)(x-1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x^{45}+x^{34}+x^{23}+x^{12}+x-x^{44}-x^{33}-x^{22}-x^{11}-1}{x^5-1}=$$
$$=\frac{[(x^5)^9-1]-x^{34}(x^{10}-1)-x^{23}(x^{10}-1)-x^{12}(x^{10}-1)-x(x^{10}-1)}{x^5-1}=$$
$$=\frac{[(x^5)^9-1]-x^{34}(x^5-1)(x^5+1)-x^{23}(x^5-1)(x^5+1)-}{x^5-1}\times$$
$$\times\frac{-x^{12}(x^5-1)(x^5+1)-x(x^5-1)(x^5+1)}{x^5-1}.$$

Шу дробуң санавжысындакы гошулыжыларын хер бири x^5-1 икичлене бөлүнйәр, диймек, берлен көпчленлериң биринжиси икинжисине бөлүнйәр. Ш. с. т. э.

Беллик. $(x^5)^9-1=[(x^5)^3]^3-1=[(x^5)^3-1][(x^5)^6+(x^5)^3+1]=$
$=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{30}+x^{15}+1)$.

243. Гой, $x^4+x^3+x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}=A$ ве $x^4-x^3+x^2-x+1-$
$-\dfrac{2}{x+1}=B$ болсун. Онда $A=\dfrac{x^5-1+2}{x-1}=\dfrac{x^5+1}{x-1}$ ве $B=\dfrac{x^5+1-2}{x+1}=$
$=\dfrac{x^5-1}{x+1}$ аларыс.

Инди $AB=\dfrac{x^5+1}{x-1}\cdot\dfrac{x^5-1}{x+1}=\dfrac{x^5+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^5-1}{x-1}=(x^4-x^3+x^2-$
$-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Инди меселәниң шертинде берлен көпелтмек хасылындакы көпелдижилериң хер бириндәки дробь гошулыжылары ташлап язалың, онда $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ аларыс. Бу болса янкы хасапланылан $A\cdot B$ көпелтмек хасылына деңдир. Ш. с. т. э.

244. Берлен җеми ашакдакы ялы язалың:

$$19^{19}+69^{69}+25^{19}+25^{69}-25^{19}-25^{69}=(19^{19}+25^{19})+(69^{69}-25^{69})+$$
$$+(25^{69}-25^{19}).$$

Скобкаларың биринҗисиниң ичиндәки җем $(19+25)=44$ сана бөлүнйәр, оларың икинҗисиниң ичиндәки тапавут-да $69-25=44$ сана бөлүнйәр. Инди үчүнҗи скобкаларың ичиндәки тапавуда гаралы. Шол тапавуды шейле язалың:

$$25^{69}-25^{19}=25^{19}(25^{50}-1)=25^{19}(25^{25}-1)(25^{25}+1).$$

Инди $(25^{25}-1)$ тапавудың 44-е бөлүнйәндигини субут эделиң:

$$25^{25}-1=(25^5)^5-1=(25^5-1)\cdot[(25^5)^4+(25^5)^3+\ldots+1].$$

Инди 25^5-1 тапавуда гаралың:

$$25^5-1=(5^2)^5-1=(5^5)^2-1=(5^5-1)(5^5+1).$$

Инди болса (5^5-1) саның 44-е бөлүнйәндигини барламак кын дәл. Шейлеликде, $19^{19}+69^{69}$ санын 44-е бөлүнйәндиги субут эдилди.

245. $9^1=9$, $9^2=81$, $9^3=729$ ве ш. м. Диймек, эгер k тәк сан болса, онда 9^k сан докузлык билен гутаряр, эгер-де k сан җүбүт болса, онда 9^k сан бирлик билен гутаряр. 9^9 сан тәкдир.

Диймек, 9^{9^9} сан докузлык билен гутармалыдыр.

246. Илки билен 7-ден улы болан 8, 9 ве 10 санлара гаралың. Шу санлары диңе 3 манатлыклар ве 5 манатлыклар билен дүзмек болжаклыгы айдыңдыр. Хакыкатдан-да, $8=3+5$, $9=3\cdot3$, $10=5+5$. Инди 10-дан улы болан ислендик саны алмак үчин шу (8, 9, 10) санлара диңе 3-лүклери гошмак етерликдир. Меселем, $8+3=11$, $9+3=12$, $10+3=13$, $11+3=14$, ягны $8+2\cdot3=14$, $12+3=15$ ве ш. м.

247. Берлен алтыбелгили саны $\overline{abcdek}$ билен белләлиң. Шу саны ашакдакы ялы язмак мүмкиндир: $100\,000a+10\,000b+1000c+100d+10e+k=$
$=10(10\,000a+1000b+100c+10d+e)+k$ я-да гысгача $N=10p+k$. Инди иң ахыркы цифр иң өңе гечирилендөн соңра, ашакдакы ялы сан аларыс: $M=100\,000k+10\,000a+1000b+100c+10d+e$ я-да $M=100\,000k+p$.

Меселәниң шертине гөрә N сан 7-ә бөлүнйәр. Онда $N-7p=10p+$
$+k-7p=3p+k$ сан-да 7-ә бөлүнер. Эмма $3M=300\,000k+3p=3p+k+$
$+299\,999k$ боланы себәпли $3M$ сан 7-ә бөлүнйәр, чүнки ёкарда гөркезишимиз ялы, $3p+k$ сан 7-ә бөлүнйәр ве 299 999 сан-да 7-ә бөлүнйәр ($299\,999=7\cdot42\,857$). Шейлеликде, $3M$ сан 7-ә бөлүнйәр, диймек, M сан-да 7-ә бөлүнжекдир.

248. Белли болшы ялы, $(x-y)^2\geqslant0$; $(x-z)^2\geqslant0$; $(y-z)^2\geqslant0$. Диймек, $x^2+y^2\geqslant2xy$; $x^2+z^2\geqslant2xz$; $y^2+z^2\geqslant2yz$. Шу деңсизликлери члени-член гошуп, $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$ я-да $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\geqslant0$ аларыс. Иң соңкы деңсизликден гөрнүши ялы, онуң чеп бөлегиндәки аңлатма мыдама нулдан кичи дәлдир. Эмма меселәниң шертиндәки деңсизликлери члени-член гошсак, онда $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a+b+c<0$ аларыс.

Шейлеликде, иң соңкы деңсизлиги канагатландырян шейле бир x, y, z хакыкы санлары тапмак мүмкин дәлдир.

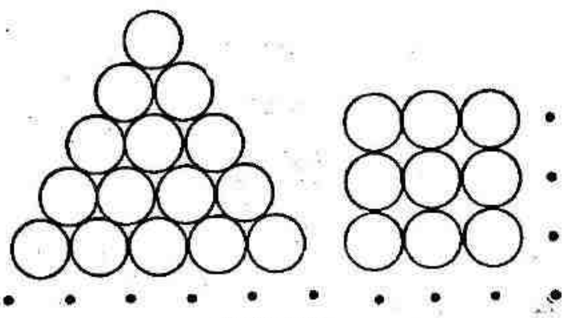
249. Гой, гөзленилйән дробь $\frac{a}{b}$ болсун. Меселәниң шертине гөрә $\frac{a+x}{bx}=\frac{a}{b}$ болмалыдыр. Шу ерден $ab+bx=abx$, я-да $a+x=ax$, я-да $a=\frac{x}{x-1}$ аларыс. Шу ерде a сан битин сандыр. Диймек, $x=2$ болмалыдыр. Эгер шейле болса, онда $a=2$ болмалыдыр. Инди $\frac{2}{b}$ дробун догры дробь ве $\frac{1}{2}$ дробдан улы болмагы үчин $b=3$ болмалыдыр. Шейлеликде, гөзленилйән дробь $\frac{2}{3}$ болмалыдыр.

250. $(m-2)(m-1)m$ аңлатма үч саны ызыгидерли санын көпелтмек хасылы боланы себәпли, шол көпелтмек хасылы хөкман 3-е бөлүнйәр. Үч саны ызыгидерли санын көпелтмек хас лы хөкман 2-ә бөлүнмели, чүнки шол ердәки көпелдижилериң иң болманда бири жүбүт сандыр.

Инди $(3m-5)$ сана гаралың. Эгер m тәк сан болса, онда $m=2k+1$ ве $3m-5=3(2k+1)-5=6k-2=2(3k-1)$ болар. Диймек, шу халда $3m-5$ сан 2-ә бөлүнйәр. Шейлеликде, $\frac{(3m-5)m(m-1)(m-2)}{12}$ сан 3-е ве ики гезек 2-ә, ягны 4-е бөлүнйәр. Диймек, $\frac{(3m-5)m(m-1)(m-2)}{12}$ сан битин сандыр. Эгер m сан жүбүт болса, онда $(m-2)(m-1)m$ көпелтмек хасылындакы көпелдижилериң икиси жүбүт болмалы ве бири 3-е бөлүнмели, диймек, шу халда $(m-2)(m-1)m$ сан 12-ә бөлүнмелидир.

251. Эгер әнчеме дең төверекден догры үчбурчлук дүзүлсе, онда ёкардан биринжи хатарда бир төверек, икинжи хатарда ики төверек, үчүнжи хатарда үч төверек ве ш. м. болар (35-нжи чызгы).

Үчбурчлугың тарапындакы төвереклериң саныны x билен беллесек, онда квадратың тарапындакы төверекериң саны $x-2$ болар. Инди үчбурчлукда ерлешен төверекериң саныны хасаплалың. Озалкы айдылышы ялы, биринжи хатарда 1 төверек, икинжи хатарда 2 төверек, үчүнжи хатарда 3 төверек ве ш. м. болуп, x-нжы хатарда x төверек болар. Онда оларың



35-нжи чызгы.

саны $1+2+3+...+x=\frac{1+x}{2}\cdot x$ болар. Квадратдакы төверереклериң саны $(x-2)(x-2)$ болар. Эмма меселәниң шертине гөрә $\frac{1+x}{2}\cdot x=(x-2)(x-2)$ боланы себәпли, $x^2-9x+8=0$ квадрат деңлеме аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $x=8$ аларыс. Инди $\frac{1+x}{2}\cdot x$ аңлатмада $x=8$ бахаңы гоюп, $\frac{1+8}{2}\cdot 8=36$ аларыс.

Диймек, үчбурчлукдакы төверекериң саны 36-дыр.

252. Гой, гроссмейстерлериң саны x болсун, онда уссатларың саны $3x$ болар. Эгер гроссмейстерлер y очко топлан болсалар, онда уссатлар $1,2y$ очко топларлар. Ойна гатнашанларың саны $x+3x=4x$ адам. $4x$ адамдан бирини алсак, шол оюнчы галан $(4x-1)$ адам билен ойнамалы болар. Инди икинжи оюнчыны алсак, $(4x-2)$ оюн ойнамалы болар. Үчүнжи оюнчы $(4x-3)$ оюн ойнар ве ш. м. Иң ахыркының өң янындакы иң соңкы галан оюнчы билен 1 оюн ойнар. Диймек, әхли ойналан ойнуң саны $(4x-1)(4x-2)(4x-3)$ ве ш. м. болар. Шу жеми хасапласак $\frac{(4x-1)+1}{2}(4x-1)$ я-да $2x(4x-1)$ аларыс. Жеми топланан очколарың саны-да $2x(4x-1)$ болар. Топланан очколарың саны $y+1,2y=2,2y$ болар. Диймек, $2x(4x-1)=2,2y$ деңлиги аларыс. Шу ерден $x=\frac{1,1y}{4x-1}$ аларыс.

Меселәниң шертине гөрә x битин сандыр. Диймек, $\frac{1,1y}{4x-1}$ сан-да битин сандыр. Шу дробуң битин сан болмагы үчин $1,1y$ битин болмалыдыр. Онда $y=10k$ билен белләп, $x=\frac{11k}{4x-1}$ деңлемәни аларыс.

Шу деңлемеден гөрнүши ялы (меселәниң шертине гөрә):

1) $4x-1=11$ болуп, $x=k$ болмалы я-да $x=3$ ве $k=3$ болмалыдыр.

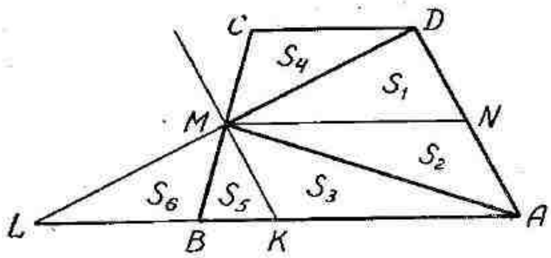
2) $4x-1=k$ болуп, $x=11$ болмалы я-да $x=\frac{k+1}{4}$ ве $x=11$ болмалыдыр.

Биринжи халда гроссмейстерлериң саны 3 болуп, оларың топлан очколарының саны 30 болмалы ве уссатларың саны 9 болуп, оларың топлан очколарының саны 36 болмалы. Икинжи халда, гроссмейстерлериң саны 11 болуп, уссатларың саны 33 болмалы. Шейле көп санлы гроссмейстерлер ве уссатлар ойна гатнашмаярлар. Шонуң үчин диңе биринжи хал галяр.

253. Икки билен трапецияның MN орта чызыгыны гечирелиң (36-нжы чызгы). Сонра M нокат аркалы DA тарапа параллел эдип, MK кесими гечирелиң. DMA үчбурчлугың DM тарапыны довам эдип, L нокады аларыс. Эмеле гелен үчбурчлукларың мейданларыны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 билен беллалиң. Трапецияның мейданыны S билен беллесек, онда $S=S_4+S_1+S_2+S_3+S_5$, эмма $S_4=S_6$, диймек, $S=S_6+S_5+S_1+S_2+S_3$.

Инди MDN ве MNA үчбурчлуклара гарасак, онда оларың эсаслары $DN=NA$ ве M депеден эсасларына гечирилен бейиклик бирменздир. $MN \parallel AD$. Диймек, $S_1=S_2$. Инди $MNAK$ дөртбурчлугың параллелограм боланы себәпли $S_3=S_2$. Инди $MN=AK$ ве $MN=\frac{1}{2}AL$. Диймек, $AK=KL$, онда LMK ве MKA үчбурчлуклар деңулулыклыдырлар, ягны $S_3=S_6+S_5$ болмалыдыр. Шейлеликде, $S_1=S_2=S_3=S_5+S_6$ я-да $S=S_1+S_2+S_3+$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com



36-нжы чызгы.

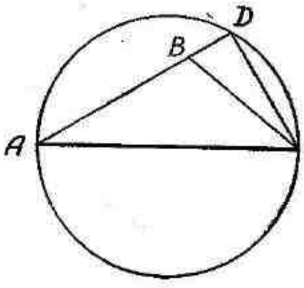
$+(S_5+S_4)$; $S=4S_1$; $S_1=\frac{S}{4}$; $S_1+S_2=\frac{S}{4}+\frac{S}{4}=\frac{S}{2}$. Диймек, $S_1+S_2=\frac{S}{2}$. Ш. с. т. э.

2-нжи чөзүви.

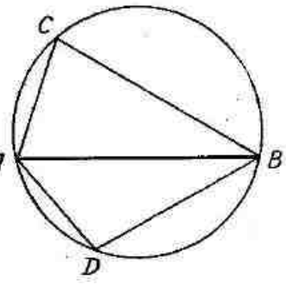
ADL үчбурчлукда MA кесим онуң медианасыдыр (36-нжы чызгы). Диймек. ADM ве LMA үчбурчлуклар деңулулыклыдырлар, ягны $S_{ADM}=S_{LMA}$. Эмма $S_{LMA}=S_{LMB}+S_{BMA}$. Инди LMB ве MCD үчбурчлукларың деңдигини гөз өңүнде тутсак, онда $S_{LMA}=S_{LMB}+S_{BMA}=S_{MDC}+S_{BMA}$ аларыс.

Диймек, $S_{ADM}=S_{MDC}+S_{BMA}$, ягны $S_{ADM}=\frac{1}{2}S_{ADCB}$. Ш. с. т. э.

254. Гой, ABC үчбурчлукда $AC=6$ ве $\angle BAC=30°$, $\angle BCA=40°$ болсун (37-нжи чызгы). ABC үчбурчлукда AC тарап иң улы тарапдыр. Инди AC кесими диаметр эдип, онуң үстүнде төверек гуралың. AB тарапы довам эдип, төверек билен кесишен ериңде кәбир D нокады тапарыс. D нокады C деңе билен бирлешдирип, $\angle ADC=90°$ бурч аларыс. $\angle ABC=110°$ күтек бурч боланы себәпли B деңе төверегиң ичинде ятмалыдыр.



37-нжи чызгы.

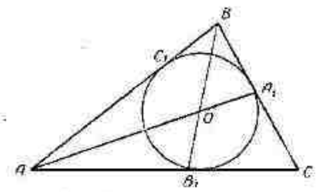


37-нжи a чызгы.

Шейлеликде, ABC үчбурчлук радиусы $R=3$ болан төверегиң ичинде ерлешйәр.

255. Эгер C ве D нокатлар AB кесимден бир тарапда ятяр диййип гүман этсек (37-нжи a чызгы), онда шу халда A, B, C, D нокатлар аркалы төверек гечйән болса, $\angle ACB=\angle ADB$ болардь, эмма меселәниң шертине гөрә шол бурчлар деңдирлер. Диймек, A, B, C, D нокатларың бир төверегиң үстүнде ятмагы үчин C ве D нокатлар AB кесимден дүрли тарапда ятмалыдырлар. Ондан башга-да $\angle ACB+\angle ADB=180°$ болмалыдыр. Эгер шу ики шерт ерине етирилйән болса, онда A, B, C, D нокатлар бир төверегиң үстүнде ятарлар.

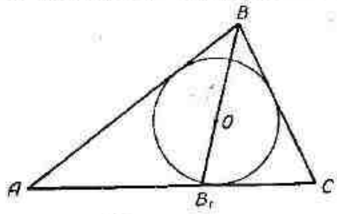
256. Гой, ABC үчбурчлукда AA_1 ве BB_1 онуң биссектрисалары болсун (38-нжи чызгы). Онда $\frac{AB}{AC}=\frac{BA_1}{A_1C}$ ве ABA_1 үчбурчлук үчин $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AO}{OA_1}$ аларыс. Шу деңликлери ашакдакы ялы язалың $\frac{c}{b}=\frac{BA_1}{A_1C}$ ве $\frac{c}{BA_1}=\frac{AO}{OA_1}$. Иң



38-нжи чызгы.

ахыркы деңлигиң өң янындакыны шейле язалың: $\frac{b}{c}=\frac{A_1C}{A_1B}$ я-да $\frac{b+c}{c}=\frac{A_1C+A_1B}{A_1B}$, я-да $\frac{b+c}{c}=\frac{a}{A_1B}$, я-да $\frac{b+c}{a}=\frac{c}{A_1B}$. Эмма $\frac{c}{BA_1}=\frac{AO}{OA_1}$, диймек, $\frac{OA}{OA_1}=\frac{b+c}{a}$.

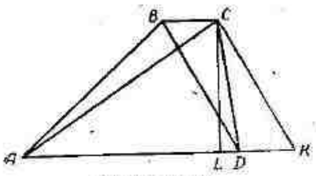
257. Гой, ABC үчбурчлукда BB_1 — биссектриса болсун (39-нжы чызгы).



39-нжы чызгы.

Ёкарда гаралан меселәниң эсасында $\frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b}$ деңлиги язарыс. Шу деңлигиң ики бөлегине-де 1 гошуп, $\frac{BO}{OB_1}+1=\frac{a+c}{b}+1$, я-да $\frac{BO+OB_1}{OB_1}=\frac{a+c+b}{b}$, я-да $\frac{BB_1}{OB_1}=\frac{2p}{b}$, я-да $\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{b}{2p}$ аларыс.

Шейлеликде, $\frac{b}{2p}=\frac{B_1O}{B_1B}$. Ш. с. т. э.



40-нжы чызгы.

258. Гой, $ABCD$ трапеция, $AC = 113$ *см* ве $BD = 17$ *см* болсун (40-нжы чызгы). C депеден BD диагонала параллел гөни чызык гечирип, AC тарапың довамында кәбир K нокады аларыс. Инди $DK = BC$ боланы себәпли ABC ве CDK үчбурчлукларың мейданлары дендирлер; чүнки шол үчбурчлукларың C ве A депелериңден гечирилен бейикликлери дендирлер. Диймек, $ABCD$ трапецияның мейданы ACK үчбурчлугың мейданына дендир. ACK үчбурчлугың мейданыны хасапламак үчин C депеден CL бейиклик гечирйәрис. Меселәниң шертине гөрә $CL = 15$ *см*. Инди $LK^2 = CK^2 - CL^2 = 17^2 - 15^2 = 2 \cdot 32$; $\angle K = 8$ *см*;

ACL үчбурчлукдан ашакдакыны аларыс: $AL^2 = AC^2 - CL^2 = 113^2 - 15^2 = 98 \cdot 128 = 196 \cdot 64$; $AL = 14 \cdot 8 = 112$; $AL = 112$ *см*.

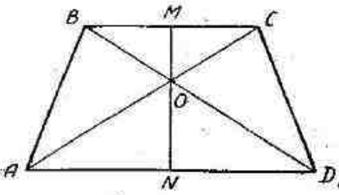
Диймек, $AK = AL + LK = 120$ *см*; ACK үчбурчлугың мейданы

$$S = \frac{1}{2} AK \cdot CL = \frac{1}{2} 120 \cdot 15; \; S = 900 \text{ см}^2.$$

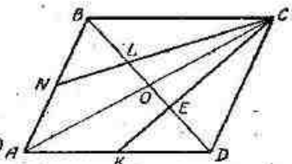
259. Гой, AOD үчбурчлугың мейданы p^2 ве BOC үчбурчлугың мейданы q^2 болсун (41-нжи чызгы). Онда $p^2 = \frac{1}{2} AD \cdot ON$ ве $q^2 = \frac{1}{2} BC \cdot OM$ аларыс. Шу дендиклерден $ON = \frac{2p^2}{AD}$ ве $OM = \frac{2q^2}{BC}$.

Трапецияның мейданы $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot MN = \frac{AD + BC}{2} \cdot (ON + OM) = \frac{AD + BC}{2}\left(\frac{2p^2}{AD} + \frac{2q^2}{BC}\right) = (AD + BC)\left(\frac{p^2}{AD} + \frac{q^2}{BC}\right) = p^2 + q^2 \cdot \frac{AD}{BC} + p^2 \frac{BC}{AD} + q^2$. Эмма меңзеш үчбурчлукларың мейданлары оларың дегишли тарапларының квадратлары ялы гатнашянлары себәпли $\frac{p^2}{q^2} = \frac{AD^2}{BC^2}$ аларыс, бу ерден $\frac{AD}{BC} = \frac{p}{q}$ болар. Инди $S_{ABCD} = p^2 + q^2 \cdot \frac{p}{q} + p^2 \cdot \frac{q}{p} + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$.

Диймек, трапецияның мейданы $S_{ABCD} = (p + q)^2$.



41-нжи чызгы.



42-нжи чызгы.

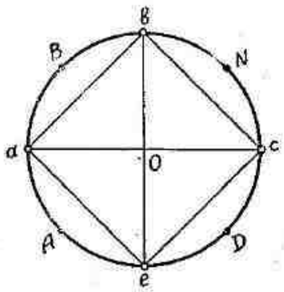
260. Гой, $ABCD$ берлен параллелограм болуп, K ве N нокатлар дегишлиликде AD ве AB тарапларың ортасы болсун (42-нжи чызгы). C нокады K ве N нокатлар билен бирлешдирип, соңра AC ве BD диагоналлары гечирип, алнан ABC ве ADC үчбурчлуклара гарайрыс. ABC үчбурчлукда BO ве CN медианалардыр. Диймек, олар L нокатда кесишйәрлер ве $OL = \frac{1}{2} BL$ боляр. Эдил шонуң ялы ADC үчбурчлугың CK ве DO медианалары E нокатда кесишйәрлер ве $OE = \frac{1}{2} DE$ боляр. Эмма $OD = OB$ боланы себәпли, $DE = EL = LB$ болар.

Хакыкатдан-да, $DE + OE = BL + OL$, я-да $DE + \frac{1}{2} DE = BL + \frac{1}{2} BL$, я-да $DE = BL$. Онда $EO + OL = \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} BL = DE = BL$.

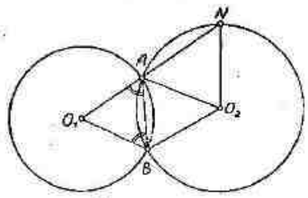
Диймек, $DE = EL = LB$.

261. Меселәниң шертине гөрә $\cup aA = \cup aB$; $\cup bB = \cup bN$; $\cup cN = \cup cD$; $\cup eD = \cup eA$ (43-нжи чызгы). Белли болшы ялы, eOc бурч eDc ве aBb дугаларың ярым жеми билен өлчелйәр, ягны $\angle eOc = \frac{1}{2}(\cup eDc + \cup aBb)$. Эмма $\cup eDc + \cup aBb = 180°$ боланы себәпли $\angle eOc = 90°$. Эгер $\cup aB = \cup Nc$ болса, онда $\angle eab = 90°$ болар.

262. Илки билен A ве B нокатлары бирлешдирйәрис (44-нжи чызгы). Инди O_1 нокады B нокат билен, O_2 нокады A ве N нокатлар билен бирлешдирип, үч саны дең янлы үчбурчлук аларыс. $O_1A = O_1B$ боланы себәпли $\angle O_1AB = \angle O_1BA$.



43-нжи чызгы.



44-нжи чызгы.

Инди $O_2A = O_2B$ боланы себәпли $\angle O_2AB = \angle O_2BA$. Диймек, $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$. Эмма $\angle O_1AO_2 + \angle O_2AN = 180°$. Онда $\angle O_1BO_2 + \angle O_2NA = 180°$, чүнки $\angle O_2AN = \angle O_2NA$. Шейлеликде, O_1NO_2B дөртбурчлугың ики гаршылыклы бурчларының жеми $180°$-а дендир. Диймек, шол дөртбурчлугың дашындан төверек чызмак мүмкиндир. Башгача айданымызда, O_1, O_2, B, N нокатлар бир төверегиң үстүнде ятярлар. Щ. с. т. э.

263. $ABCD$ дөртбурчлук (45-нжи чызгы) төверегиң ичинден чызылан дөртбурчлук боланы себәпли $\angle ABC + \angle ADC = 2d$. DC тарапа ве DA тарапың довамына B нокатдан перпендикуляр индерип, гаршылыклы бурчларының жеми $2d$ болан $LBED$ дөртбурчлугы аларыс. Хакыкатдан-да, $\angle BLD + \angle BED = 2d$, чүнки $BL \perp AD$ ве $BE \perp DC$, диймек, $\angle LBE + \angle ADC = 2d$ болмалыдыр. Ёкарда язылан дендиклерден $\angle LBE = \angle ABC$ аларыс. Иң ахыркы деңлигиң ики бөлегинден-де шол бир

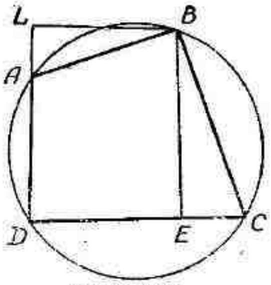
$\angle ABE$ бурчы айырсак, онда $\angle ABL = \angle EBC$ аларыс. Диймек, $\triangle ABL = \triangle BEC$, чүнки оларын хер бир гөнүбурчлы гипотенузалары деңдирлер. Ягны, $BL = BC$. Диймек, $AB = BE$. Инди ABD ве BDC үчбурчлукларын мейданлары дегишлиликде $S_{ABD} = \frac{1}{2} BL \cdot AD$. $S_{BDC} = \frac{1}{2} BE \cdot DC$.

Диймек, $ABCD$ дөртбурчлугың мейданы

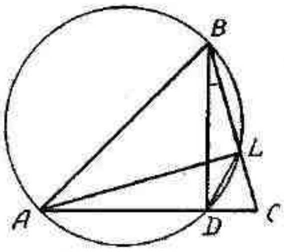
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BL \cdot AD + \frac{1}{2} BEDC.$$

Эмма $\angle BL = BE = L_b$ боланы себәпли

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} L_b (AD + DC).$$



45-нжи чызгы.



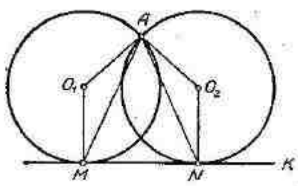
46-нжы чызгы.

264. Гой, ABC йити бурчлы үчбурчлукда BD ве AL онуң бийикликлери болсун (46-нжы чызгы). ABC ве DLC үчбурчлукларың меңзешликлерини субут этмели. AB кесими диаметр эдип, шол кесимиң үстүнде төверек гуралың. Онда шол төверек L ве D нокатларың үстүнден гечер, чүнки $\angle ALB = 90°$ ве $\angle ADB = 90°$. Инди $ABLD$ дөртбурчлукда $\angle BLD + \angle BAD = 180°$ ве $\angle BLD + \angle DLC = 180°$, диймек, $\angle BAD = \angle DLC$.
Шейлеликде, ABC ве DLD үчбурчлуклар меңзешдирлер, чүнки оларың бириниң ики бурчы бейлекисиниң ики бурчуна деңдир.

265. Илки билен $\angle O_2AN = \angle O_2NA$ ве $\angle O_1AM = \angle O_1MA$ белләниң (47-нжи чызгы). MNA үчбурчлуга гаранда ANK бурч дашкы бурчдур. Диймек, $\angle ANK = \angle MAN + \angle NMA$, я-да $\angle ANO_2 + 90° = \angle MAN + \angle NMA$. Эмма $\angle O_1MA + \angle NMA = 90°$, бу ерден $\angle MNA = 90° - \angle O_1MA$.

Диймек, $\angle ANO_2 + 90° = \angle MAN + 90° - \angle O_1MA$, я-да $\angle ANO_2 + \angle O_1MA = \angle MAN$, я-да $\angle NAO_2 + \angle O_1AM = MAN$.

Иң ахыркы деңлигиң ики бөлегине-де $\angle MAN$ гошуп, $\angle NAO_2 + \angle MAN + \angle O_1AM = 2 \angle MAN$ я-да $\angle O_1AO_2 = 2 \angle MAN$.



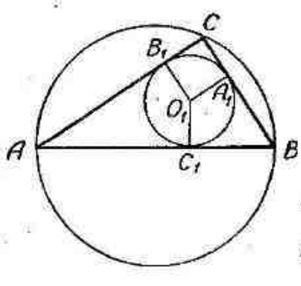
47-нжи чызгы.

266. ABC гөнүбурчлы үчбурчлугың ичинден чызылан төверегиң меркезини O билен, шол төверегиң галташма нокатларыны A_1, B_1 ве C_1 билен белләлиң (48-нжи чызгы). Эгер O_1 нокады A_1, B_1, C_1 галташма нокатлар билен бирлешдирсек A_1CB_1O дөртбурчлук квадрат болар ве $BA_1 = BC_1$, $AC_1 = AB_1$ болар. Диймек, $CA_1 = CB_1 = r$ ве $BC_1 + AC_1 = BA_1 + AB_1$.

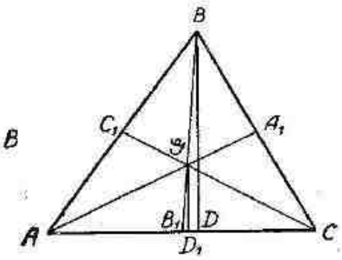
Шейлеликде, $CA_1 + A_1B + CB_1 + B_1A = r + (A_1B + B_1A) + r = 2r + AB = 2r + 2R$.

Диймек, $AC + BC = 2R + 2r$. Ш. с. т. э.

267. Берлен ABC үчбурчлугың AA_1, BB_1, CC_1 медианаларыны гечирип, оларың кесишме нокады болан G агырлык меркезини тапарыс (49-нжы чызгы).



48-нжи чызгы.



49-нжы чызгы.

Инди AGC, BGC, AGB үчбурчлукларың мейданларыны хасаплалың. Илки билен шол үчбурчлукларың хер бириниң мейданы берлен ABC үчбурчлугың S мейданының үчден бирине деңлигини белләлиң. Хакыкатдан-да $S_{AGC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, чүнки $GD_1 = \frac{1}{3} BD$, бу ерде GB_1 кесим AGC үчбурчлугың, BD кесим болса, ABC үчбурчлугың бейикликлеридир. Шол үчбурчлуклар AC умумы эсас болуп хызмат эдйәр.

Шейлеликде, $S_{AGC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Эдил шонуң ялы $S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$ ве $S_{AGB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.

ABC үчбурчлугың мейданыны үч тарапы боюнча хасаплаярыс.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Диймек, $S_{AGC} = \frac{84}{3} = 28$. Жогабы: $S_{AGC} = 28$.

268. $S = \frac{1}{2} ah_a$; $S = \frac{1}{2} bh_b$; $S = \frac{1}{2} ch_c$ деңликлерден $h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b =$

$= \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$ бахалары меселәниң шертинде берлен деңлигиң чеп бөлегинде гоюп,

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) =$$
$$= \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}\right)\left(\frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}\right) =$$
$$= 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\cdot\frac{1}{2S}(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$ аларыс. Ш. с. т. э.

269. Гой, ABC берлен үчбурчлугың AA_1, BB_1, CC_1 медианалары G нокатда кесишсинлер (50-нжи чызгы). BB_1 медианаы довам эдип, $B_1D = GB_1$ кесими өлчәп гоялың ве D хем C нокатлары бирлешдирелиң. Онда алнан GDC үчбурчлугың мейданы ABC үчбурчлугың мейданының үчден бирине дең болар. GDC үчбурчлугың мейданыны үч тарапы боюнча хасаплалың:

$$CG = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}m_c;\ GD = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}m_b;\quad CD = AG = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}m_a.$$

Диймек, $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c = 2p$ ве $\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c = p$.

Инди $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ формуланы уланып,

$$S = \sqrt{\frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c)\frac{1}{3}(m_b + m_c - m_a)\frac{1}{3}(m_a + m_c - m_b)\ \times}$$
$$\overline{\times\frac{1}{3}(m_a + m_b - m_c)} =$$
$$= \frac{1}{9}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

аларыс. Эгер $m_a + m_b + m_c = 2M$ билен беллесек, онда

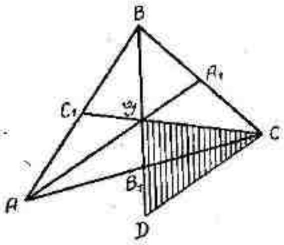
$$S = \frac{4}{9}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$ аларыс.

Биз шу ерде CDG үчбурчлугың мейданыны тапдык. Инди ABC үчбурчлугың мейданының шу мейдандан үч эссе артыкдыгыны билип,

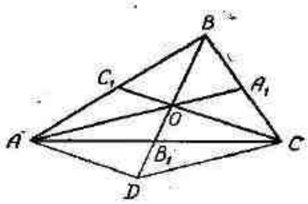
$$S_{ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$ аларыс.

270. Гой, ABC үчбурчлукда AA_1, BB_1, CC_1 медианалар берлен болсун (51-нжи чызгы). BB_1 медианаы довам эдип, $B_1D = OB_1$ кесими өлчәп гоярыс. Алнан D нокады A ве C нокатлар билен бирлешдирип, $AOCD$ параллелограмы аларыс. Онда $OD^2 + AC^2 = OC^2 + CD^2 + DA^2 + AO^2$ деңликден $AC^2 = OC^2 + CD^2 + DA^2 + AO^2 - OD^2$ аларыс. Эмма

$$OC = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}m_c,\quad CD = AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}m_a,\quad DA = CO = \frac{2}{3}m_c,$$
$$AO = CD = \frac{2}{3}m_a,\ OD = OB_1 + B_1D = 2\cdot OB_1 = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}m_b.$$



50-нжи чызгы.



51-нжи чызгы.

Диймек,

$$AC^2 = \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 =$$
$$= \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_b^2;\quad AC = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - 2m_b^2}.$$

Эдил шуның ялы эдип, бейлеки AB ве BC тараплары тапарыс. Шейделикде,

$$AB = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - 2m_c^2}$$ ве $$BC = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$ аларыс.

271. Белли болшы ялы, $S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}bh_b$; $S = \frac{1}{2}ch_c$; Шу деңликлерден $a = \frac{2S}{h_a}$; $b = \frac{2S}{h_b}$; $c = \frac{2S}{h_c}$ аларыс.

$$a + b + c = 2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

деңликден $p = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$ аларыс. Героның формуласы боюнча $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Инди

$$p - a = \frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c} - \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_a} = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right).$$

Шоның ялы

$$p - b = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)$$ ве $$p - c = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Диймек,

$$S = \sqrt{S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\times}$$
$$\times\sqrt{S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

я-да

$$S = S^2 \sqrt{2H\cdot 2(H-h_a^{-1})\cdot 2(H-h_b^{-1})\cdot 2(H-h_c^{-1})},$$

я-да

$$1 = S\cdot 4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})},$$

я-да

$$\frac{1}{S} = 4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})},$$

бу ерде

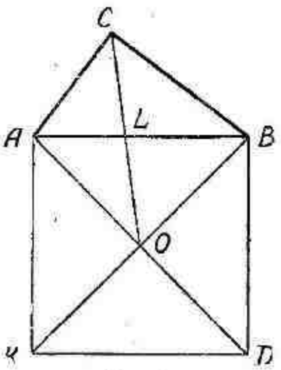
$$2H = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

272. Гой, ABC берлен гөнүбурчлы үчбурчлук болсун (52-нжи чызгы). Гой, $ABDK$ гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасының үстүнде гурлан квадрат болсун. Эгер O нокат квадратын AO ве BK диагоналларының кесишме нокады болса, онда $\frac{BL}{\angle A}$ гатнашыгы тапмак талап эдилйәр. A BO дөртбурчлуга гаралың. Шу дөртбурчлугың гаршылыклы ятан бурчларының жеми $180°$ дендир.

Хакыкатдан-да, $\angle ACB + \angle AOB = 90° + 90° = 180°$. Диймек, шол дөртбурчлугың дашындан төверек чызмак мүмкиндир. Инди шол төверегн чызылан дийип гүман этсек, AO ве OB хордаларын дең болмаклары себәпли олары дартян AO ве OB дугалар-да деңдирлер. Онда $A'O$ ве BCO дең дугалара даянян ве ичинден чызылан бурчлар болашы себәпли олар бири-бирине деңдирлер, ягны $\angle ACO = \angle B'O$. Башгача айданымызда, CL кесим ACB бурчуң биссектрисасының хәсиетине гөрә ашакдакы деңлиги язарыс:

$$\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC} \text{ я-да } \frac{BL}{LA} = \frac{3}{4}.$$

Шу гатнашыгы тапмак талап эдилйәрди.



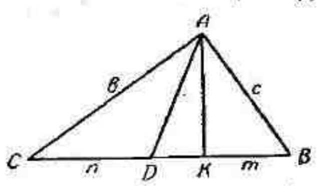
52-нжи чызгы.

273. Гой, ABC берлен үчбурчлук болсун (53-нжи чызгы). BC эсаса AK перпендикуляр гечирип, ADC үчбурчлук үчин ашакдакыны аларыс:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\cdot CD\cdot DK$$

я-да

$$b^2 = n^2 + AD^2 + 2nDK \qquad (1)$$



53-нжи чызгы.

Инди ABD үчбурчлукда:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD\cdot DK$$

я-да

$$C^2 = AD^2 + m^2 - 2m\cdot DK \qquad (2)$$

Инди (1) деңлигиң ики бөлегини-де m-е, (2) деңлигиң ики бөлегини-де n-е көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$$b^2m = mn^2 + AD^2\cdot m + 2mn\cdot DK;$$
$$c^2n = m^2n + AD^2n - 2mn\cdot DK.$$

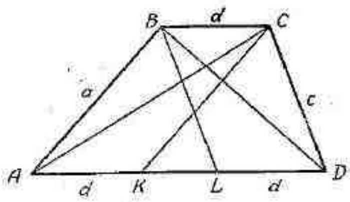
Шу деңликлери членме-член гошуп, ашакдакылары аларыс:

$b^2m + c^2n = mn(m+n) + AD^2(m+n)$ я-да $m+n=a$ боланы себәпли

$$AD^2\cdot a = b^2m + c^2n - mna.$$

Шу деңлиге Стюартың теоремасы дийилйәр. Шейлеликде, меселениң шертинде гөзлегилйән AD кесими Стюартың теоремасы боюнча тапмак мүмкиндир.

274. B депеден CD тарапа параллел гөни чызык гечирип, AD эсас билен кесишме нокады болан кәбир L нокады аларыс (54-нжи чызгы). Инди $\angle D = BC = d$ ве $AL = b - d$ болар. ABD үчбурчлук үчин Стюартың теоремасыны уланып, ашакдакыны аларыс:



54-нжи чызгы.

$$BL^2\cdot AD = BD^2\cdot AL + AB^2\cdot LD - AL\cdot LD\cdot AD;$$
$$c^2\cdot b = BD^2(b-d) + a^2\cdot d - (b-d)\cdot d\cdot b;$$
$$BD^2(b-d) = bc^2 - a^2d + b^2d - d^2b;$$

$$BD^2 = \frac{d(b^2-a^2) + b(c^2-d^2)}{b-d}; \quad BD = \sqrt{\frac{d(b^2-a^2) + b(c^2-d^2)}{b-d}}.$$

Инди AC диагоналы-да шонуң ялы эдип, ACD үчбурчлукдан тапарыс

$$AC = \sqrt{\frac{b(a^2-d^2) + d(b^2-c^2)}{b-d}}.$$

275. Берлен $ABCD$ трапецияның C депесинден AB тарапына параллел гөни чызык гечирип, онуң AD тарапы билен кесишме нокады болан кәбир K нокады аларыс (55-нжи чызгы). Алнан DCK үчбурчлугың үч тарапы белли, ягны:

$$CD = c,\ CK = a \text{ ве } DK = AD - AK = b - d.$$

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Шол үчбурчлугың бейиклигини үч тарапы боюнча хасапламак мүмкиндир. Иякн билен онуң периметрини хасаплаярыс: $2p = c + a + b - d$.

Инди

$$p - a = \frac{a + b + c - d}{2} - a = \frac{b + c - d - a}{2};$$

$$p - c = \frac{a + b + c - d}{2} - c = \frac{a + b - c - d}{2};$$

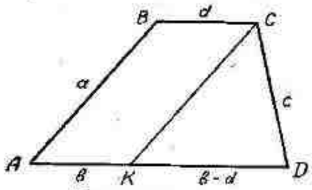
$$p - (b - d) = \frac{a + b + c - d}{2} - (b - d) = \frac{a + c + d - b}{2};$$

$$S_{CDK} = \frac{1}{2}(b - d)\cdot h_c =$$

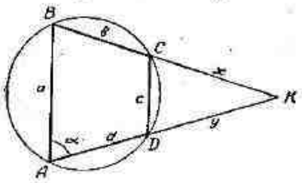
$$= \sqrt{\frac{a + c + b - d}{-2}\cdot\frac{b + c - d - a}{2}\cdot\frac{a + b + c - d}{2}\cdot\frac{a - b + c + d}{2}};$$

$$h_c = \frac{2}{2 - d}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a + b + c - d}{2}\cdot\frac{a + c + d - b}{2}\cdot\frac{a + b - c - d}{2}\cdot\frac{b + c - a - d}{2}}.$$



55-нжи чызгы.



56-нжы чызгы.

Шу бейиклик трапецияның-да бейиклиги боланы себәпли, трапецияның мейданы

$$S_{ABCD} = \frac{b + d}{2}\cdot\frac{1}{2(b - d)}\times$$

$$\times\sqrt{(a + b + c - d)(a + c + d - b)(a + b - c - d)(b + c - a - d)}$$

я-да

$$S_{ABCD} = \frac{b + d}{4(b - d)}\times$$

$$\times\sqrt{(a + b + c - d)(a - b + c + d)(a + b - c - d)(b - a - d + c)}$$

276. $ABCD$ дертбурчлугың AD ве BC тарапларыны довам эдип, кәбир K нокады аларыс (56-нжы чызгы).

$$\angle BAK = \angle KCD, \text{ чүнки } \angle BAK + \angle BCD = 180^\circ \text{ ве } \angle KCD + \angle BCD = 180^\circ$$

Диймек, $\triangle ABK \backsim \triangle CKD$.

Эгер ABK үчбурчлугың мейданыны S_1 ве CKD үчбурчлугың мейданыны S_2 аркалы белләсек, онда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{c^2}$ я-да $\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$ аларыс. Эмма $S_1 - S_2 = S$, бу ерде S билен $ABCD$ дертбурчлугың мейданы белленилди. Инди $CK = x$ ве $DK = y$ билен белләсек, онда $\frac{a}{c} = \frac{b + x}{y} = \frac{d + y}{x}$ аларыс. Шу деңликлерден

$$x = \frac{c(ad + bc)}{a^2 - c^2};\ y = \frac{c(ab + cd)}{a^2 - c^2}.$$

Инди CDK үчбурчлугың периметрини хасаплалың:

$$2p = x + y + c = \frac{acd + bc^2}{a^2 - c^2} + \frac{abc + c^2d}{a^2 - c^2} + c =$$

$$= \frac{acd + bc^2 + abc + c^2d + a^2c - c^3}{a^2 - c^2};$$

$$p = \frac{acd + bc^2 + c^2d + abc + a^2c - c^3}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a^2 - c^2) + bc(a + c) + cd(a + c)}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a + c)(a + b - c + d)}{2(a^2 - c^2)} = \frac{c(a + b + d + c)}{2(a - c)};$$

$$p - y = \frac{acd + bc^2 + a^2c - c^3 - abc - c^2d}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{cd(a - c) + c(a^2 - c^2) - bc(a - c)}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a - c)(a + c + d - b)}{2(a^2 - c^2)} = \frac{c(a - b + c + d)}{2(a + c)}.$$

$$p - x = \frac{c^2d + abc + a^2c - c^3 - acd - bc^2}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a^2 - c^2) - cd(a - c) + bc(a - \ )}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a - c)(a + c + b - d)}{2(a^2 - c^2)} = \frac{c(a + b + c - d)}{2(a + c)};$$

$$p - c = \frac{acd + bc^2 + c^2d + abc - a^2c + c^3}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{cd(a + c) + bc(a + c) - c(a^2 - c^2)}{2(a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{c(a + c)(b + c + d - a)}{2(a^2 - b^2)} = \frac{c(b + c + d - a)}{2(a - b)}.$$

Диймек, CDK үчбурчлугың мейданы дендир:

$$S_2=\sqrt{\frac{c(a+b+d-c)}{2(a-c)}\cdot\frac{c(a+b+c-d)}{2(a+c)}\cdot\frac{c(a+c+d-b)}{2(a+c)}\cdot\frac{c(b+c+d-a)}{2(a-c)}}=$$

$$=\frac{c^2}{4(a^2-c^2)}\times$$

$$\times\sqrt{(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)(b+c+d-a)}\ .$$

Шейлеликде, $ABCD$ дөртбурчлугың мейданы S дендир:

$$S=S_2\cdot\frac{a^2-c^2}{c^2};$$

$$S=\frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{4(a^2-c^2)}\times$$

$$\times\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}\ .$$

Эгер $a+b+c+d=2p$ билен беллесек, онда $b+c+d-a=2p-2a=2(p-a)$ болар. Эдил шонун ялы, $a+c+d-b=2(p-b)$ ве ш. м. Инди

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2(p-a)\cdot2(p-b)2(p-c)\cdot2(p-d)}=$$

$$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ .$$

Шейлеликде, тараплары a, b, c ве d болуп, тeверегин ичинден чызылан дөртбурчлугын мейданы ашакдакы формула аркалы аңладыляр:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

бу ерде $2p=a+b+c+d$.

277. Тeверегин ичинден чызылан дөртбурчлугын мейданы ашакдакы формула боюнча хасапланыляндыгы о алдан беллидир:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\quad \text{бу ерде}\quad 2p=a+b+c+d.$$

Эгер дөртбурчлук тeверегиң дашындан чызылан болса, онда $a+c=b+d$ болмалыдыр. Инди ёкардакы формуладакы $p-a$; $p-b$; $p-c$; $p-d$ аңлатмалары, $a+c=b+d$ деңлиги гөз өңүнде тутуп, хасаплалың:

$$p-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=\frac{2(a+c)}{2}-a=c;$$

$$p-b=\frac{a+b+c+d}{2}-b=\frac{2(b+d)}{2}-b=d;$$

$$p-c=\frac{a+b+c+d}{2}-c=\frac{2(a+c)}{2}-c=a;$$

$$p-d=\frac{a+b+c+d}{2}-d=\frac{2(b+d)}{2}-d=b.$$

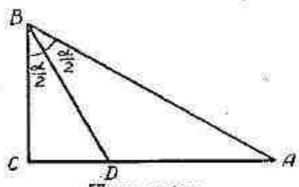
Диймек,

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=\sqrt{abcd};\ S=\sqrt{abcd}.$$

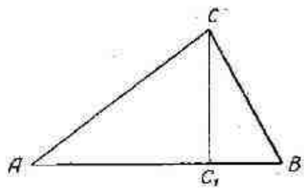
278. Йити α бурчлы гөнүбурчлы үчбурчлук алалың (57-нжи чызгы). α бурчуң биссектрисасыны гечирип, ашакдакылары аларыс:

$$\frac{CD}{BC}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\quad \frac{AC}{AB}=\sin\alpha\quad \text{ве}\quad \frac{BC}{AB}=\cos\alpha.$$

Инди $\frac{CD}{DA}=\frac{BC}{BA}$. Шу деңликден $\frac{CD+DA}{AD}=\frac{BC+AB}{AB}$ аларыс. Инди $\frac{BC}{AB}=\cos\alpha$ деңликден $\frac{BC+AB}{AB}=1+\cos\alpha$ аларыс. $\frac{CD+DA}{AD}=1+\cos\alpha$ я-да $\frac{AC}{AD}=1+\cos\alpha$.



57-нжи чызгы.



58-нжи чызгы.

Инди $\frac{AC}{AB}=\sin\alpha$ деңлиги $\frac{AC}{AD}=1+\cos\alpha$ деңлиге члeнме-член бөлүп, $\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ аларыс. Эмма $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{CB}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Диймек, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Ш. с. т. э.

279. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (58-нжи чызгы). $AC=b$ кесими $AB=c$ кесимиң үстүнде өлчәп гойсак, $BC_1=c-b$ аларыс.

Инди BCC_1 үчбурчлугы гурмак кын дәлдир. Шол үчбурчлугы $BC=a$; $BC_1=c-b$ ве $\angle ABC=B$ боюнча гурарыс. BCC_1 үчбурчлук гурландан соңра, онуң CC_1 тарапының ортасындан перпендикуляр гечирйәрис ве BC_1 тарапы довам эдип, үчүнжи A депәни тапарыс.

Шейлеликде, гөзленилйән ABC үчбурчлугы аларыс.

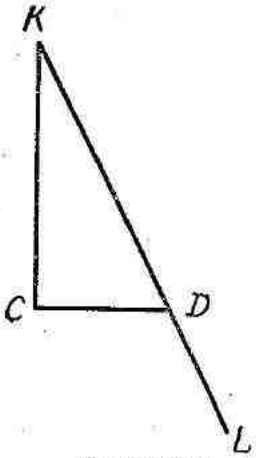
280. Гой, берлен кесим $AB=\sqrt{5}+1$ болсун (59-нжы чызгы). Ислендик CD кесим алып, гөнүбурчлы үчбурчлук гуралың (59-нжы a чызгы). Эгер шол гөнүбурчлы үчбурчлугың бир катети CD болуп, бейлеки катети $2CD$ болса ве $CD=a$ дийип кабул этсек, онда үчбурчлугың DK гипотенузасы $\sqrt{5}a$ болар. Инди DK гипотенуза бирлик хәкмүнде кабул эдилен CD кесими гошсак, онда

$$KD+DC=KD+DL=KL=(\sqrt{5}+1)a$$

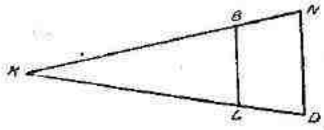
кесими аларыс.

59-нжы чызгы.

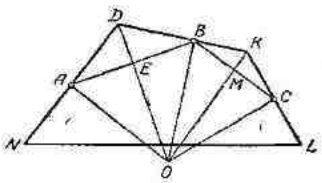
ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com



59-нжы *а* чызгы.



59-нжы *б* чызгы.



60-нжы чызгы.

Инди иселдик бурч алып, шол бурчуң бир тарапында $KL=(\sqrt{5}+1)a$ ве $LD=CD=a$ кесимлер өлчәп гойсак ве бейлеки тарапында $KB=AB$ кесими өлчәп гойсак, онда L, D, B нокатлары аларыс (59-нжы *б* чызгы). Инди L ве B нокатлары бирлешдирсек ве D нокат аркалы LB гөни чызыга параллел эдип DN гөни чызыгы гечирсек, онда BN кесими аларыс.

Шу BN кесим-де гөзленилйән узынлык бирлиги болар.

281. Гой, A, B, C нокатлар гөзленилйән дөртбурчлугың орталары болсун. (60-нжы чызгы) A ве B хем-де B ве C нокатлары бирлешдирйәрис. Инди AB ве BC кесимлерин орталарындан перпендикуляр гечирип, кәбир O нокады шол перпендикулярларың кесишме нокады хөкмүнде тапярыс.

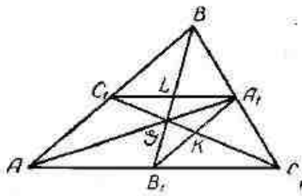
O нокады меркез эдип, OA радиуслы төверек чызалын, сонра шол төверете B нокатда галташян гечирйәрис, сонра шол төверете A нокатда галташян гечирип, $AD=DB$ аларыс. Эдил шонуң ялы эдип, $KB=KC$ аларыс. Инди $DA=AN$ ве $KC=CL$ өлчәп гойярыс ве гөзленилйән дөртбурчлугың галан үчүнжи ве дөрдүнжи депелерини тапярыс.

Шейлеликде, $NDKL$ гөзленилйән дөртбурчлукдыр.

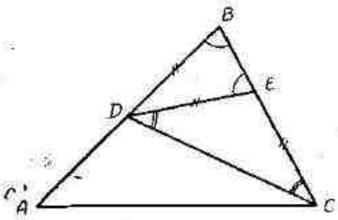
282. Гой, ABC гөзленилйән үчбурчлук болсун (61-нжи чызгы). Эгер AA_1; BB_1; CC_1 шол үчбурчлугың медианалары болса, онда A_1C_1 ве A_1B_1 үчбурчлугың орта чызыклары болар. Инди L нокадың A_1C_1 кесимиң ортасы ве K нокадың A_1B_1 кесимиң ортасы болжакдыгы айдыңдыр.

Хакыкатдан-да, ABC ве C_1BA_1 үчбурчлукларың меңзеш боландыклары ве B бурчуның умумы боланы себәпли B депеден чыкып, AC тарапы B_1 нокатда ики дең бөлеге бөлйән гөни чызык A_1C_1 кесими-де кәбир L нокатда ики дең бөлеге бөлер. Инди $A_1K=B_1K$ деңлиги-де эдил шонуң ялы субут этмек мүмкиндир.

Диймек, меселәниң шертинде берлен L ве K нокатлар медианаларың үстүнде ятып, медианалары ики дең бөлеге бөлйәрлер.



61-нжи чызгы.

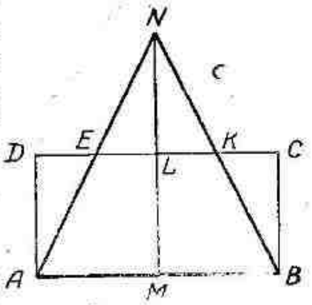


62-нжи чызгы.

283. Гой, ABC берлен үчбурчлук болсун (62-нжи чызгы). D ве C нокатлары бирлешдирелин, онда $\angle CDE=\angle ECD$. Эмма $\angle BED=\angle CDE+\angle ECD$ ве $\angle B=\angle BED$ боланы себәпли $\angle ECD=\frac{1}{2}\angle B$.

Шейлеликде, C депеде $\angle ECD=\frac{<B}{2}$ гуруп D нокады тапарыс. Инди D нокады меркез эдип, DB радиуслы дуга чызып, BC тарапда кәбир E нокады тапарыс.

284. Иlки билен берлен деңяnлы үчбурчлугың MN бейиклигини гечирйәрис (63-нжи чызгы). Онда меселәниң шертинде ятланылан үчбурчлукларың мейданларының жемине гарамалы меселәни ADE ве ENL үчбурчлукларың мейданларының жемине гарамалы меселе билен чалшырмак мүмкиндир.



63-нжи чызгы.

ANM, ENL ве ADE үчбурчлукларың меңзешликлеринден ашакдакылары аларыс; $\frac{S_1}{S}=\frac{NE^2}{AN^2}$ ве $\frac{S_2}{S}=\frac{AE^2}{AN^2}$ бу ерде ENL үчбурчлугың мейданы S_1, ANM үчбурчлугың мейданы S ве ADE үчбурчлугың мейданы S_2 билен белленилди. Инди $S_1=S\cdot\frac{NE^2}{AN^2}$ ве $S_2=S\cdot\frac{AE^2}{AN^2}$ я-да $S_1+S_2=S\frac{NE^2}{AN^2}+S\cdot\frac{AE^2}{AN^2}=\frac{S}{AN^2}(NE^2+AE^2)$. Шу деңлиги ашакдакы ялы язалың:

$$S_1+S_2=\frac{S}{AN^2}(NE^2+2NE\cdot AE+AE^2-2NE\cdot AE)=$$
$$=\frac{S}{AN^2}[(NE+AE)^2-2NE\cdot AE)];$$
$$S_1+S_2=\frac{S}{AN^2}[(NE+AE)^2-2NE\cdot AE].$$

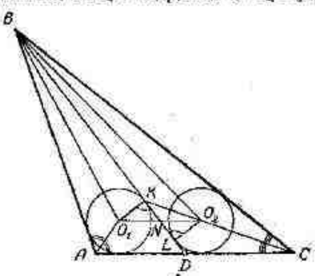
ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Иң ахыркы деңлигиң саг бөлегиндәки $\frac{S}{AN^2}$ үйтгемейән санлар, чүнки AN берлен деңянлы үчбурчлугын тарапы ве S шол үчбурчлугың мейданыдыр. Инди $NE + AE$ жем-де үйтгемейән сандыр, чүнки $NE + AE = AN$. Диймек, шол деңлигиң саг бөлегиндәки диңе $NE \cdot AE$ көпелтмек хасылы үйтгейән сандыр. $S_1 + S_2$ жемиң иң кичи баханы алмагы үчин $NE \cdot AE$ көпелтмек хасылы иң улы баха эе болмалыдыр. Белли болшы ялы ики саны үйтгейән улулыгын жеми үйтгемейән сан болса, онда оларың көпелтмек хасылының иң улы баха эе болмагы үчин шол улулыклар бири-бирине дең болмалыдырлар. Шу халда $NE = AE$ болмалыдыр.

Шейлеликде, гөзленилйән $ADCB$ гөнүбурчлугың CD тарапы берлен ANB деңянлы үчбурчлугың AN ве NB тарапларының ортасындан гечмелидир, ягны $AE = EN$ ве $BK = KN$ болмалыдыр.

285. Эгер a ве b ики положител сан берлен болса, онда белли болшы ялы, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Шу формуланы $p - a$ ве $p - b$ санлар үчин уланалың. Онда $\frac{(p-a)+(p-b)}{2} \geqslant \sqrt{(p-a)(p-b)}$ я-да $2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant 2p - a - b$, эмма $2p = a + b + c$. Диймек, $2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant c$. Эдил шонуң ялы-да $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant a$; $2\sqrt{(p-a)(p-c)} \leqslant b$.

Шу деңсизликлери члениме-член көпелдип, $8(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abc$ я-да $8p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abcp$ аларыс. Эмма $S = \frac{abc}{4R}$ ве $S = pr$. Диймек, $8S^2 \leqslant S \cdot 4R \cdot p$, я-да $8pr \leqslant 4Rp$, я-да $2r \leqslant R$. Ш. с. т. э.

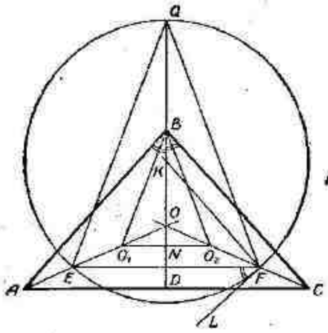


64-нжи чызгы.

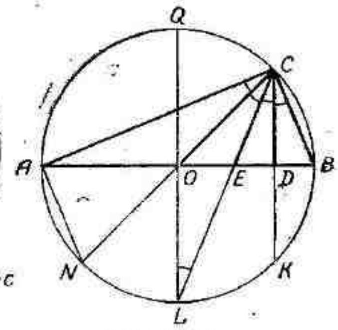
286. Гой, ABC берлен үчбурчлук болсун ве D гөзленилйән нокат болсун (64-нжи чызгы). O_1 нокат ABD ве BAD бурчларың биссектрисаларының кесишме нокады хөкмүнде тапылар. Эдил шонуң ялы O_2 нокат-да DBC ве BCD бурчларың биссектрисаларының кесишме нокады хөкмүнде тапылар.

Инди O_1BO_2 үчбурчлуга гаралың. Шол үчбурчлукда $\angle O_1BO_2 = \frac{\angle ABC}{2}$. Инди O_1KN ве O_2LN үчбурчлуклара гаралың. $O_1K = O_2L$ (дең төвереклериң радиуслары боланы себәпли), $\angle O_1KN = \angle O_2LN = 90°$; $\angle O_1NK = \angle O_2NL$. Диймек, $\triangle O_1KN = \triangle O_2LN$. Онда $O_1N = O_2N$, ягны O_1O_2 кесим N нокатда ярпа бөлүнйәр.

Шейлеликде, меселәниң ашакдакы гурлушы алынйәр. Илки билен берлен ABC үчбурчлугың ичинде AOC үчбурчлугы гурярыс (65-нжи чызгы). Шол үчбурчлугың AO тарапында исленди̇к E нокады алып, шол нокат аркалы AC тарапа параллел эдип, EF гөни чызыгы гечирйәрис. EF кесимиң үстүнде $\frac{\angle ABC}{2}$ бурчы өз ичине алян сегмент гурярыс. Сонра O ве B нокат аркалы гөни чызык гечирип, ыккы гурлан сегментиң дугасы билен кесишме нокады тапярыс. Гой, шол нокат Q болсун. Q нокады E ве F нокатлар билен бирлешдирйәрис. Сонра B нокат аркалы QE кесиме параллел эдип, BO_1 гөни чызык гечирйәрис. Эдил шонуң ялы, $BO_2 \parallel QF$ эдип, O_1 ве O_2 нокатлары алярыс ве олары бирлешдирип, O_1O_2 кесими алярыс. Инди O_1O_2 кесими ики



65-нжи чызгы.



66-нжы чызгы.

дең бөлеге бөлүп, N нокады аларыс. Иң ахырда B ве N нокатлар аркалы гөни чызык гечирип, ABC үчбурчлугың AC тарапында кәбир D нокады тапярыс. Шол D нокат болса гөзленилйән нокатдыр.

287. Меселәниң шертине гөрә $\angle BCD = \angle DCE = \angle ECO = \angle OCA$ (66-нжы чызгы). Гой, шол бурчлар α билен белленилсин. Онда, $\angle DBC = 90°$ болар.

Инди CD бейиклиги, CE биссектрисаны, CO медиананы довам эдип, ABC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң үстүнде K, L, N нокатлары аларыс. Инди L ве O нокатлар аркалы хорда гечирелиң. Онда $\smile AQC = 180° - 2\alpha$ ве $\smile AN = 2\alpha$ болар. Диймек, $\smile NA + \smile AQC = 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180°$. Шейлеликде, NC — диаметрдир. $LQ \perp AB$, чүнки $AO = OB$ (OC-медиана). Диймек, $LQ \parallel CD$. Онда $\angle QLC = \angle LCK = \alpha$, ягны $OC = OL$. Шейлеликде, $OA = OC = OL$. Диймек, O нокат ABC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң меркезидир, ягны AB диаметрдир. Онда $\angle ACB = 90°$; $\alpha = \frac{90°}{4}$; $\angle ABC = 90° - \frac{90°}{4} = \frac{270°}{4} = 62°30'$; $\angle CAB = \alpha = 22°30'$.

288. Берлен үчбурчлугың (67-нжи чызгы) тарапларында алнан A', B', C' нокатларың орунларының үйтгемеги билен $AC' \cdot C'B$, $BA' \cdot A'C$ ве $CB' \cdot B'A$ көпелтмек хасылларының улулыклары үйтгәр. Оларың хер бири иң улы баха эе боланында $AB \cdot BC \cdot CA < 60$ деңсизлигиң чеп бөлегиндәки көпелтмек хасылы-да иң улы баха эе болар.

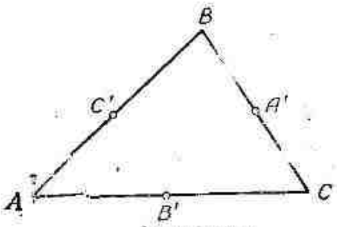
Инди ашакдакы тассыкламаны уланалың: x ве y ики үйтгейән улулыгың жеми хемишелик баха эе болса, онда оларың көпелтмек хасылы $x = y$ боланда иң улы баханы аляр. Шу ерде $AC' + C'B = AB$; $BA' + A'C = BC$ ве $CB' + B'A = AC$. Диймек, $AC' \cdot C'B$ көпелтмек хасылының иң улы баха эе болмагы үчин $AC' = C'B$, ягны $AC' = C'B = \frac{AB}{2}$ болмалыдыр. Эдил шонуң ялы $BA' \cdot A'C$ көпелтмек хасылының иң улы баха эе болмагы үчин $BA' = A'C = \frac{BC}{2}$ ве $CB' \cdot B'A$ көпелтмек хасылының иң улы баха эе болмагы үчин $CB' = B'A = \frac{CA}{2}$ болмалыдыр.

Шейлеликде, $AC'\cdot C'B\cdot BA'\cdot A'C\cdot CB'\cdot B'A$ көпелтмек хасылының иң улы бахасы $\left(\frac{AB}{2}\right)^2\left(\frac{BC}{2}\right)^2\left(\frac{CA}{2}\right)^2$ дендир. Диймек, шу халда

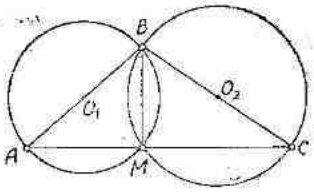
$$AC'\cdot C'B\cdot BA'\cdot A'C\cdot CB'\cdot B'A = \frac{AB^2}{4}\cdot\frac{BC^2}{4}\cdot\frac{CA^2}{4} = \frac{AB^2\cdot BC^2\cdot CA^2}{64}.$$

Меселәниң шертине гөрә $AB\cdot BC\cdot CA < 60$. Онда

$$AC'\cdot C'B\cdot BA'\cdot A'C\cdot CB'\cdot B'A < \frac{AB\cdot BC\cdot CA\cdot 60}{64}.$$



67-нжи чызгы.



68-нжи чызгы.

Диймек, $AC'\cdot C'B\cdot BA'\cdot A'C\cdot CB'\cdot B'A < AB\cdot BC\cdot CA$. Ш. с. т. э.

289. ABM үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусыны r_1 билен, BMC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусыны r_2 билен белләлиң (68-нжи чызгы). Инди $2r_1 \geqslant AB$ ве $2r_2 \geqslant BC$ аларыс, чүнки диаметр хорладан кичи дәлдир. Ёкардакы ики деңлиги членме-член гошуп, $2r_1 + 2r_2 \geqslant AB + BC$ аларыс. Иң ахыркы деңсизлигиң чеп бөлегиниң минимал баха ве болмагы үчин шол деңсизлик деңлиге өврүлмелидир, ягны $2r_1 + 2r_2 = AB + BC$ болмалыдыр, бу болса диңе AB ве BC хорлалар диаметр болан ягдайында мүмкиндир. Башгача айданымызда, $\angle BMA = \angle BMC = 90°$ (диаметре даянян ичинден чызылан бурчлар). Шейлеликде, M нокат AC теңи чызыга B нокатдан индерилен перпендикулярың эсасы хөкмүнде тапылар.

290. $$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}=$$

$$=\frac{[x^2+(x+1)][x^2-(x-1)]}{(x^2+1+x)(x^2+1-x)}+\frac{[x+(x^2-1)][x-(x^2-1)]}{[x(x+1)+1][x(x+1)-1]}+$$

$$+\frac{[x(x-1)+1][x(x-1)-1]}{[x^2+(x+1)][x^2-(x+1)]}=\frac{(x^2+x-1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}+$$

$$+\frac{(x^2+x-1)(x-x^2+1)}{(x^2+x+1)(x^2+x-1)}+\frac{(x^2-x+1)(x^2-x-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

291. Берлен дробуң сanawжысыны шейле язярыс: $x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2=(x^2+a^2)^2-a^2x^2=(x^2+a^2+ax)(x^2+a^2-ax)$.

Инди берлен дробы ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}=\frac{(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}=\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}.$$

292. $$\frac{b}{a(a+b)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b};\quad \frac{c}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c};$$

$$\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}.$$

Диймек,

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}=$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c+d}=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}.$$

Җогабы: $\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$.

293. $$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

. . . .

$$\frac{1}{(x-5)(x-6)}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}.$$

Инди

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-$$

$$-\frac{1}{x-2}+\ldots+\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-6}.$$

Җогабы: $\frac{1}{x-6}$.

294. $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}$$

$$\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1+x^8}$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

Жогабы: $\frac{32}{1-x^{32}}.$

295. Берлен деңлигиң чеп бөлегини $(x-y)$ көпелделиң ве бөлелиң, онда ашакдакыны аларыс:

$$\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})}{x-y}=$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})}{x-y}=$$

$$=\frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})}{x-y}=\frac{(x^8-y^8)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})}{x-y}=$$

$$=\frac{(x^{16}-y^{16})(x^{16}+y^{16})}{x-y}=\frac{x^{32}-y^{32}}{x-y}.$$

Шейлеликде, берлен тождествоның чеп бөлеги онуң сағ бөлегине деңдир. Ш. с. т. э.

296. Меселәниң шертине гөрә $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$, бу ерден $a=bk$ ве $b=ck$. Инди $a^2=b^2k^2$; $b^2=c^2k^2$, я-да $a^2+b^2=(b^2+c^2)k^2$, я-да $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=k^2$, эмма $k^2=\frac{a^2}{b^2}$ ве $b^2=ac$. Диймек, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2}{ac}=\frac{a}{c}$.

Шейлеликде: $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Ш. с. т. э.

297. Эгер $a+b+c=0$ болса, онда $c=-(a+b)$ болар.

Инди c-ниң бахасыны субут этмели болан деңлиге гоюп, ашакдакыны аларыс:

$$a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=a^3+a^2[-(a+b)]+ab(a+b)-b^2(a+b)+b^3=$$
$$=a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3=0.$$

Диймек, эгер $a+b+c=0$ болса, онда $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$ болар. Ш. с. т. э.

298. $x^3+5x^2+3x-9=x^3-1+5x^2-5+3x-3=(x-1)(x^2+x+1)+$
$+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=$
$=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2.$

299. $6x^2+11x+5=6x^2+6x+5x+5=6x(x+1)+5(x+1)=$
$=(x+1)(6x+5).$

300. $10x^2+19x-15=10x^2+25x-6x-15=5x(2x+5)-3(2x+5)=$
$=(2x+5)(5x-3).$

Диймек, $10x^2+19x-15=(2x+5)(5x-3).$

301. $15x^2+7x-2=15x^2+10x-3x-2=5x(3x+2)-(3x+2)=$
$=(3x+2)(5x-1).$

Диймек, $15x^2+7x-2=(3x+2)(5x-1).$

302. $6x^2+11x+3=6x^2+9x+2x+3=3x(2x+3)+(2x+3)=$
$=(2x+3)(3x+1).$

Диймек, $6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1).$

303. $x^3-7x-6=x^3-x-6x-6=x(x^2-1)-6(x+1)=$
$=x(x-1)(x+1)-6(x+1)=(x+1)(x^2-x-6).$

304. $25x^2+5x-12=25x^2+20x-15x-12=5x(5x+4)-3(5x+4)=$
$=(5x+4)(5x-3).$

305. $(x^2-x)(x^2-x-8)+12=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+16-4=$
$=(x^2-x-4)^2-2^2=(x^2-x-4+2)(x^2-x-4-2)=(x^2-x-2)(x^2-x-6).$

306. $x^5+x+1=x^5+x^2+x-x^2+1=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)=$
$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$
$=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

Диймек, $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$

307. $x^5+x^3+x=[x^4+x^2+1]x=(x^4+2x^2+1-x^2)=$
$=x[(x^2+1)^2-x^2]=x(x^2+1+x)(x^2+1-x).$

308. $x^4+x^3+x^2+x-x+1+1=(x^2-x+1)+(x^4+x^3+x+1)=$
$=(x^2-x+1)+[(x+1)x^3+(x+1)]=(x^2-x+1)+(x+1)(x^3+1)=$
$=(x^2-x+1)+(x+1)^2(x^2-x+1)=(x^2-x+1)[1+(x+1)^2]=$
$=(x^2-x+1)(x^2+2x+2).$

309. $x^4+324=x^4+18^2.$

Инди x^4+18^2 аңлатма $36x^2$ гошалың ве айралың, онда

$x^4+36x^2+18^2-36x^2=(x^2+18)^2-36x^2=(x^2+18+6x)(x^2+18-6x)$

аларыс.

Диймек, $x^4+324=(x^2+6x+18)(x^2-6x+18).$

310. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=[(b-c)^3+(c-a)^3]+(a-b)^3=$
$=[(b-c)+(c-a)][(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2]+(a-b)^3=$
$=(b-a)(b^2-2bc+c^2-bc+ab+c^2-ac+c^2-2ac+a^2)+(a-b)^3=$
$=(b-a)[b^2-3bc+3c^2+ab-3ac+a^2-(b-a)^2]=(b-a)(b^2-3bc+$
$+3c^2+ab-3ac+a^2-b^2+2ab-a^2)=(b-a)(3c^2-3bc-3ac+3ab)=$
$=(b-a)[3c(c-b)-3a(c-b)]=3(b-a)(c-b)(c-a).$

Диймек, $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$

311. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=(x^2+x)^2-2\cdot7(x^2+x)+49-25=$
$=[(x^2+x)-7]^2-5^2=[(x^2+x-7)+5][(x^2+x-7)-5]=$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12).$

312. $(x^2+x+1)(x^2+x+1+1)-12=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)+$
$+\frac{1}{4}-12-\frac{1}{4}=(x^2+x+1)^2+2\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=$
$=\left[(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\right]^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left[\left(x^2+x+1+\frac{1}{2}\right)+\right.$
$\left.+\frac{7}{2}\right]\left[\left(x^2+x+1+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{2}\right]=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).$

Беллик: $x^2+x-2=x^2+2x-x-2=x(x-1)+2(x-1)=$
$=(x-1)(x+2).$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

313. $\frac{x}{2}+a=\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{x}{32}+\frac{x}{64}+\frac{x}{128}$

Шу деңлигиң ики белегини-де 2-э көпелдип,

$$x+2a=\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{x}{32}+\frac{x}{64} \text{ аларыс.}$$

Илки башдакы деңликден шу деңлиги членме-член айрып, $-a=\frac{x}{128}$ я-да $x=-128\,a$ аларыс.

314. Берлен деңлиги ашакдакы ялы язарыс;

$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=4-\frac{4x}{a+b+c}.$$

Инди $\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}=\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}$

я-да $(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=(a+b+c-x)\cdot\frac{4}{a+b+c}.$

Инди $(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)(a+b+c-x)\cdot\frac{4}{a+b+c}=0$

я-да $(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$

Эгер $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{4}{a+b+c}$ болса, онда $a+b+c-x=0$ аларыс. Бу ерден $x=a+b+c$.

315. $\frac{x}{a+b}-\frac{ab}{a+b}+\frac{x}{a+c}-\frac{ac}{a+c}+\frac{x}{b+c}-\frac{bc}{b+c}=a+b+c,$

я-да $\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a+c}+\frac{x}{b+c}=a+b+c+\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c},$

я-да $x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\left(a+\frac{bc}{b+c}\right)+\left(b+\frac{ac}{a+c}\right)+\left(c+\frac{ab}{a+b}\right).$

я-да $x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\frac{ab+ac+bc}{b+c}+\frac{ab+bc+ac}{a+c}+\frac{ac+bc+ab}{a+}.$

я-да $x\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{a+b}\right)+$

$+\left(\frac{bc}{b+c}+\frac{bc}{a+c}+\frac{bc}{a+b}\right)+\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{a+c}+\frac{ac}{a+b}\right)$, я-да

$x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=ab\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+bc\left(\frac{1}{a+b}+\right.$

$\left.+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+ac\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right),$

я-да $x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)(ab+bc+ac)$

Эгер $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0$ болса, онда $x=ab+bc+ac$ аларыс.

316. Илки билен $x\neq a$ билен белләлиң. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{a}{a-x}-\frac{x}{a-x}=b+b^2x-x.$$

Инди $\frac{a-x}{a-x}=b+x(b^2-1)$; $1-b=x(b^2-1)$;

$$x=\frac{1-b}{b^2-1}=-\frac{b-1}{(b-1)(b+1)}=-\frac{1}{b+1};\ x=-\frac{1}{b+1};\ (b\neq -1).$$

317. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{5}=\frac{z-11}{2}=k$ билен белләйәрис. Онда $x=3k+4$, $y=5k+7$, $z=2k+11$. $x+y+z=10k+22$. Диймек, $10k+22=72$, $k=5$.

Шейлеликде, $\frac{x-4}{3}=5$, $x=19$.

$\frac{y-7}{5}=5$, $y=32$.

$\frac{z-11}{2}=5$, $z=21$.

318. Берлен системаны ашакдакы ялы язалың:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{xy}=\frac{7}{10}\\ \frac{x+z}{xz}=\frac{5}{8}\\ \frac{y+z}{yz}=\frac{13}{40}\end{cases}$$

Инди шу деңликлери шейле язмак мүмкиндир:

$$\begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{7}{10}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{5}{8}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{13}{40}\end{cases}$$

Ахыркы системадакы деңликлериң хеммесини членме-член гошуп, $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{7}{10}+\frac{5}{8}+\frac{13}{40}$ я-да $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{33}{40}$ аларыс. Эмма $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{13}{40}$ боланы себәпли $\frac{1}{x}=\frac{20}{40}$ я-да $x=2$ аларыс.

Эдил шонуң ялы эдип:

$$\frac{1}{y}=\frac{33}{40}-\frac{5}{8}=\frac{33-25}{40}=\frac{8}{40};\ y=5 \text{ ве}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{33}{40}-\frac{7}{10}=\frac{33-28}{40}=\frac{5}{40} \text{ я-да } z=8 \text{ тапарыс.}$$

319. Берлен системаны шейле язарыс:

$$\begin{cases}5y+5z-x=-1\\4x+4z-2y=2\\3x+3y-3z=-1\end{cases}$$

Шу деңликлериң үчүсини-де члеиме-член гошарыс, онда $6x+6y+6z=0$ аларыс. Бу ерден $x+y+z=0$.

Инди $y+z=-x$ системаның биринжи деңлемесине гоюп, $5(-x)-$ $-x=-1$ я-да $x=\frac{1}{6}$ аларыс.

$x+z=-y$ бахаиы системаның икинжи деңлемесине ве $x+y=-z$ бахаиы шол системаның үчүнжи деңлемесине гоюп, $y=-\frac{1}{3}$ ве $z=\frac{1}{6}$ аларыс.

320. Берлен деңликлериң хеммесини члеиме-член гошалың, онда ашакдакыны аларыс:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}=0.$$

Шу деңлиги ашакдакы ялы эдип язалың:

$$(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+(x_7+x_8+x_9)+x_{10}=0.$$

Инди илки башда берлен деңликлери гөз өңүнде тутсак, онда иң ахыркы деңлигиң чеп бөлегиндәки скобкаларың ичиндәки жемиң хер бири нула деӊ болар, диймек, $x_{10}=0$.

Эгер $(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+(x_7+x_8+x_{10})+x_9=0$ гөрнүшде топласак, онда эдил шол озалкы ялы $x_9=0$ аларыс. Шу процеси довам эдип, $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{10}=0$ аларыс.

321. Берлен системадакы биринжи деңлеманиң сағ бөлеги икинжи деңлеманиң чеп бөлегине дең, икинжи деңлеманиң сағ бөлеги үчүнжи деңлеманиң чеп бөлегине дең ве ш. м. Диймек, ашакдакыны язмак мүмкиндир: $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots=\frac{x_{20}}{a_{20}}$. Инди деӊ гатнашыкларың хәсиетине гөрә: $\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{20}}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}}=\frac{x_1}{a_1}$ аларыс.

Берлен системаның иң ахыркы деңлемесини гөз өңүнде тутуп, $\frac{A}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}}=\frac{x_1}{a_1}$ аларыс, бу ерден $x_1=\frac{a_1A}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}}$. Бейлеки нәбеллилери-де шуңа меңзеш эдип тапмак болар.

322. Берлен системадакы деңлемелериң хеммесини члеиме-член гошуп, $\frac{5}{x-1}+\frac{5}{y+2}+\frac{5}{z}=\frac{35}{3}$ я-да $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$ аларыс. Шу иң ахыркы деңлиги берлен системаның биринжи деңлемесинден члеиме-член айрып, $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{y+2}=\frac{5}{3}$ аларыс. Инди шол ятланан деңлеманиң ики бөлегини-де 3-е көпелдип, берлен системаның икинжи деңлемеси билен члеиме-член гошсак, онда $\frac{4}{x-1}+\frac{9}{y+2}=\frac{21}{3}$ аларыс.

Инди ашакдакы системаны аларыс: $\frac{4}{x-1}+\frac{8}{y+2}=\frac{20}{3}$; $\frac{4}{x-1}+\frac{9}{y+2}=7$, бу ерден $\frac{1}{y+2}=\frac{1}{3}$ я-да $y=1$ аларыс.

Инди $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1+2}=\frac{5}{3}$ деңликден $\frac{1}{x-1}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$, $x=2$ аларыс. $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$ деңликден болса $\frac{1}{z}=1$, $z=1$ аларыс.

Жогабы: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

323. Меселәниң шертине гөрә $(x-y):xy:x=5:28:7$, бу ерде x ве y гөзленилйән санлардыр. Шу деңликден ашакдакылары аларыс.

$$\begin{cases}\frac{x-y}{xy}=\frac{5}{28}\\\frac{xy}{x}=\frac{28}{7}\end{cases}$$

Шу системаның икинжи деңлемесинден $y=4$ аларыс.

Инди системадакы биринжи деңлемәни икинжи деңлемә члеиме-член көпелдип, $\frac{x-y}{x}=\frac{5}{7}$ я-да $7(x-y)=5x$, я-да $2x=7y$ аларыс. Инди $2x=7\cdot4$; $x=14$.

Жогабы: 14 ве 4.

324. Меселе ашакдакы системаны чөзмеклиге гетирилйәр.

$$\begin{cases}a+aq+aq^2=14\\a^3q^3=64.\end{cases}$$

Икинжи деңлемеден $aq=\sqrt[5]{64}=4$ аларыс. aq бахасыны биринжи деңлемә гоялың, онда $a+4+4\cdot q=14$ аларыс. Бу ерден $a+4q=10$.

Серединйән система ашакдакы гөрнүше гелер.

$$\begin{cases}a+4q=10\\a\cdot4q=16\end{cases}$$

Системаны Вьетиң теоремасы билен чөзүп, $a_1=8$, $q=\frac{1}{2}$ я-да $a_2=2$, $q_2=2$ аларыс.

325. Илки билен 1001 саның 7-ә бөлүнйәндигиниң белләлиң. Инди 1001 саны 984 гезек гайталасак, онда 1001 1001 1001 ... 1001 гөрнүшдәки саны аларыс ве шол 7-ә бөлүнер. Эгер шол саның ызлы-ызындан бирнәче нуль язсак, ягны 1001 1001 1001 ... 1001 000 ... 0, онда иң ахыркы алнан сан 7-ә бөлүнер ве шол санда 1968 бирлик болуп, 1968 аз болмадык нуль болар.

326. Эгер дине бәшликлер билен язылан 555 ... 55 йигрими еди белгили саны 3-е бөлсек, онда ашакдакы саны аларыс: 185 185 ... 185. Бу ерде 1, 8, 5 санларың комбинациясы 9 гезек гайталаняр. Диймек, пай 9 бөлүнер. Нетижеде берлен сан 27-ә бөлүнер.

327. Гөзленилйән санлары x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 билен белләлиң ве олары артян тертипде ерлешдирилен дийип гүман эделиң. Онда алкан жемлериң иң кичиси $x_1+x_2=0$ болар, соңра улулыгы боюнча икинжи орундакы жем

$x_1 + x_3 = 2$ болар. Соңра $x_1 + x_3 = 4$; $x_1 + x_4 = 4$ болар. Иң ахырда $x_4 + x_5 = 15$ болар. Инди $(x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) = 6$. Эмма $x_1 + x_2 = 0$, шонуң үчин $x_3 = 3$. Инди $x_1 + x_3 = 2$ деңликден $x_1 = -1$ тапарыс. $x_1 + x_2 = 0$ деңликден $-1 + x_2 = 0$ ве $x_2 = 1$ аларыс. $x_1 + x_4 = 4$ деңликден $x_4 = 5$ аларыс. Иң аңырда $x_4 + x_5 = 15$ деңликден $x_5 = 10$ аларыс.

Шейлеликде, гөзленилйән санлар: -1, 1, 3, 5, 10 санлардыр.

328. Ислендик N сан секизлик системасында ашакдакы ялы языляр:

$$N = 8^{k-1} \cdot QK + 8^{k-2}Q_{k-1} + \ldots + 8Q_2 + Q.$$

Шу деңлигин саг бөлегиндәки гошулыжыларың иң ахыркысындан башгаларының хер бири 7-ә бөлүненде галындыда 1 галяр. Диймек, N сан 7-ә бөлүненде галындыда $Q_k + Q_{k-1} + \ldots + Q_2 + Q_1$ галжак. Шонуң үчин хасапламагың секизлик системасында язылан санаң 7-ә бөлүнмеги үчин, шол санын цифрлериниң жеми 7-ә бөлүнмелидир.

329. Берлен үчбелгили сан $100a + 10b + c$ болса, онда шол цифрлер аркалы терс тертипде язылан үчбелгили сан $100c + 10b + a$ болар. Инди шу санларың арасындакы тапавуды тапалың: $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) = 3^2 \cdot 11(a - c)$. Шол тапавуды аңладян саның квадрат болмагы үчин $a - c = 11$ болмалы. Эмма a ве c санларың хич бири 9-дан улы баха эе болуп билмейәр. Шонуң үчин $a - c = 11$ деңлик мүмкин дәлдир.

Шейлеликде, тассыклама субут эдилди.

330. Шол адамларың доглан йылының цифрлерини a, b, c, d биен белләлиң, онда оларың доглан йылы $1000a + 100b + 10c + d$ болар. Инди 1968-ден шол адамларың доглан йылыны айырсак, онда $a + b + c + d$, ягны $1968 - (1000a + 100b + 10c + d) = a + b + c + d$ аларыс. Илки билен $b = 8$ болуп билмейәндигини белләлиң. Хакыкатдан-да, эгер $b = 8$ болса, онда яшы иң болманда 68-ден улы болмалы, эмма $a + b + c + d$ жем шу ягдайда 68-ден улы сана дең болуп билмез, чүнки a, b, c ве d санлар бирбелгили санлардыр. Диймек, $a = 1$, $b = 9$.

Инди $1968 - (1000a + 100b + 10c + d) = a + b + c + d$ деңликден $1968 - 1000 - 900 - 10c - d = 1 + 9 + c + d$ я-да $58 = 11c + 2d$, бу ерден $d = 29 - 5c - \frac{c}{2}$. Мундан гөрнүши ялы, $c = 4$ болмалыдыр, чүнки меселәниң манысына гөрә d ве c положител битин ве бирбелгили сан болмалыдыр. Эгер $c = 2$ я-да $c = 6$ диййип гүман этсек, онда d сан я икибелгили, я-да отрицател сан болар. Диймек, $c = 4$, онда $d = 29 - 5 \cdot 4 - 2 = 7$.

Шейлеликде, 1947-нжи йылда догланларың яшы 1968-нжи йылда 21 болуп, оларың доглан йылының цифрлериниң жеми-де $1 + 9 + 4 + 7 = 21$ боляр.

331. Гөзленилйән икибелгили саны шейле язалың: $10a = b$, онда шол цифрлериң терс тертибинде язылан икибелги сан $10b + a$ болар. Инди оларың тапавуды $(10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b$ болар. Меселәниң шертине гөрә алнан тапавут 7 билен гутармалы ве шол саның цифрлериниң жеми: $a + b = 13$ болмалыдыр. Диймек, $9(a - b) = 10x + 7$ ве $a + b = 13$ деңликлери аларыс.

Инди $a + b = \frac{10x + 7}{9}$ ве $a + b = 13$ гөз өңүнде тутуп, $2a = \frac{10x+7}{9} + 13$ я-да $2a = x + 13 + \frac{x + 7}{9}$ аларыс. Меселәниң шертине гөрә a битин сан, диймек, $\frac{x + 7}{9}$ сан-да битин сан болмалыдыр. Шу ерден $x = 2$ бахаңы аларыс, онда $a = 8$ ве $b = 5$ болар. Гөзленилйән сан 85-дир.

332. Китабың сахыпаларыны нумерлемек үчин илки билен бирбелгили санлар алыняр, ягны илкинжи 9 цифр алыняр. Соңра икибелгили санлар 90 болуп, олары язмак үчин 180 цифр герек. Диймек, $9 + 90 = 99$ сахыпаны

нумерлемек үчин $9 + 180 = 189$ цифр герек. Инди $450 - 189 = 261$ цифр галяр. Шу цифрден нәче үчбелгили сан язмак мүмкин диен сорага жогап бермек кын дәл. Хакыкатдан-да, $261 : 3 = 87$ аларыс. Диймек, галан цифрлерден ене-де 87 сахыпаны нумерлемек болжак.

Шейлеликде, китабың жеми $99 + 87 = 186$ сахыпасы бар экен.

333. Шол хатарларың илки башдакы санларының бирнәчесини тапалың:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3 - 2 = 1;\ a_4 = 1 - 3 = -2,$$

$$a_5 = -2 - 1 = -3,\ a_6 = -3 - (-2) = -1,\ a_7 = -1 - (-3) = 2.$$

Диймек, шол хатарың илкинжи алты члени 2, 3, 1, -2, -3, -1 болуп, соңкы, ягны 7-нжи членден башлап ене-де шол санлар гайталаняр. Эмма 1969 саны 6 бөлсек, 328 егни, галындыда 1 галяр. Диймек, шол алты сан 328 гезек гайталанжак ве галындыда 1 боланы себәпли ене-де илки башдакы биринжи сандан башланжак. Башгача айданымызда, шол хатарда 1969-нжы ерде дурак сан 2-ә деңк болжак.

334. Деңлемәни $x^2 - 17 = 3y^2$ гөрнүшде гечүрип, x сан 3-е бөлүненде галян галындыларың -1, 0,1 болян ягдайларына серделиң.

Гой, $x = 3k$ болсун, онда $9k^2 - 17 = 3y^2$ болар. Бу деңлемәниң саг бөлеги үче бөлүнип, чепи бөлүнмейәр. Диймек, x сан үче бөлүнмейәр.

Инди $x = 3k \pm 1$ ягдая серделиң, онда деңлеме шейле гөрнүше гелер:

$$9k^2 \pm 6k - 16 = 3y^2.$$

Бу деңлик хем болуп билмез, ягны берлен деңлемәни канагатландырян x ве y битин санлар ёкдур.

335. Меселәниң шертини канагатландырян битин x ве y санлар бар диййип гүман эделиң. Шейле деңлик алалың: $x + y = (x - y) + 2y$. Шу деңликден гөрнүши ялы, $(x + y)$ ве $(x - y)$ санларың икиси-де бирвагтда я жүбүт, я-да тәк болмалыдыр. $(x + y) - (x - y) = 2y$ деңлиге серет. Эгер $(x + y)$ ве $(x - y)$ санларың икиси-де жүбүт болса, $(x + y) \cdot (x - y)$ көпелтмек хасылы 4-е бөлүнер. Эмма $(x + y) \cdot (x - y) = 1966$ деңлигиң саг бөлеги 4-е бөлүнмейәр. Эгер $(x + y)$ ве $(x - y)$ санларың икиси-де тәк болса, онда $(x - y) \cdot (x + y)$ көпелтмек хасылы тәк болар. Эмма $(x - y) = (x + y) = 1966$ деңлигиң саг бөлеги жүбүт сандыр.

Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян шейле битин x ве y санлар ёкдур.

336. $(x + y)^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy = a^2 - 2b$; $(x^2 + y^2)^2 = (a^2 - 2b)^2$; $x^4 + y^4 = (a^2 - 2b)^2 - 2x^2y^2 = (a^2 - 2b)^2 - 2b^2$.

Диймек, $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 4b^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$; $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

337. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ жем хайсы-да болса бир саның квадраты болмалы, ягны $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = N^2$ болмалы.

Деңлигиң чеп бөлегини ашакдакы ялы язалың:

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [x(x + 3)][(x + 1)(x + 2)] + 1 =$$
$$= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)[(x^2 + 3x) + 2] + 1 =$$
$$= (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = [(x^2 + 3x) + 1]^2 = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

338. **1-нжи чөзүлиши.** $\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{3^{32}}\right) +$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3^{63}} = \frac{3 + 1}{3} \cdot \frac{3^2 + 1}{3^2} \cdot \frac{3^4 + 1}{3^4} \cdots \frac{3^{32} + 1}{3^{32}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{63}} =$$
$$= \frac{(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)\cdots(3^{32} + 1)}{3^{63}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{63}}.$$

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Инди шу дробы шейле язалың:

$$\frac{(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{32}+1)}{(3-1)\cdot 3^{63}}+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=$$

$$=\frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{32}+1)}{2\cdot 3^{63}}+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=$$

$$=\frac{(3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{32}+1)}{2\cdot 3^{63}}+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=\frac{3^{64}-1}{2\cdot 3^{63}}+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=\frac{3^{64}}{2\cdot 3^{63}}=\frac{3}{2}.$$

2-нжи чөзүлиши. Берлен аңлатманы шейле язмак мүмкиндир:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{32}}\right)}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2\cdot 3^{64}}=\frac{1-\frac{1}{3^{64}}}{2}\times$$

$$\times 3+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=\frac{3-\frac{1}{3^{63}}}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^{63}}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^{63}}+\frac{1}{3^{65}}\right)=\frac{3}{2}.$$

339. 1-нжи чөзүлиши. Биринжи скобкаларың ичини $(1-2)$-ә көпелдйәрис ве бөлйәрис, сонра икинжини $(1-2^3)$-ә көпелдйәрис ве бөлйәрис, үчүнжини $(1-2^9)$-а көпелдйәрис ве бөлйәрис, иң ахыркыны $(1-2^{27})$-ә көпелдйәрис ве бөлйәрис, нетижеде ашакдакыны аларыс:

$$2\cdot 1024^8+1-2^{81}=2\cdot 2^{80}+1-2^{81}=1.$$

2-нжи чөзүлиши. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язярыс:

$$2\cdot 1024^8-\frac{1-2}{1-2}(1+2+2^2)(1+2^3+2^6)(1+2^9+2^{18})(1+2^{27}+2^{54})=$$

$$=2\cdot 1024^8-\frac{1-2^3}{1-2}(1+2^3+2^6)(1+2^9+2^{18})(1+2^{27}+2^{54})=$$

$$=2\cdot 1024^8+[(1-2^3)(1+2^3+2^6)](1+2^9+2^{18})(1+2^{27}+2^{54})=$$

$$=2\cdot 1024^8+(1-2^{27})(1+2^{27}+2^{54})=2\cdot 1024^8+1-2^{81}=$$

$$=2(2^{10})^8+1-2^{81}=2^{81}+1-2^{81}=1.$$

340. $n^5-5n^3+4n=n^5-n^3-4n^3+4n=n^3(n^2-1)-4n(n^2-1)=$
$=(n^2-1)(n^3-4n)=(n-1)(n+1)\cdot n(n-2)(n+2)=$
$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$

Шейлеликде, n^5-5n^3+4n аңлатма n-иң ислендик битин бахасында бәш саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылы боляр. Бәш саны ызыгидерли санларың бири бәше бөлүнмели, иң болманда бири икә, үче ве бири дөрде бөлүнмели. Диймек, шол сан $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ көпелтмек хасылына я-да 120-ә бөлүнмелидир.

341. $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)[(n^2-4)+5]=$
$=(n-1)(n+1)[(n-2)(n+2)+5]=(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+$
$+5(n-1)(n+1);$ $n^4-1=(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)+5(n-1)(n+1).$

Иң ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси 5-е бөлүнйәр. Шол гошулыжыларың биринжиси-де 5-е бөлүнйәр, чүнки n сан 5-е бөлүнмейән болса, онда я $(n-2)$ сан, я-да $(n-1)$ сан, я-да $(n+1)$ сан я-да $(n+2)$ сан 5-е бөлүнер.

Шейлеликде, n сан 5-е бөлүнмейән сан боланда n^4-1 сан 5-е бөлүнйәр.

342. $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}=5\cdot 5^{2n}\cdot 2^2\cdot 2^n+3^2\cdot 3^n\cdot 2\cdot 2^{2n}=20\cdot 25^n\cdot 2^n+$
$+18\cdot 3^n\cdot 4^n=20\cdot 50^n+18\cdot 12^n.$

Инди $N=20\cdot 50^n+18\cdot 12^n$ билен белләйин. Иң ахыркы деңлигиң сағ бөлегине $20\cdot 12^n$ саны гошалың ве айралың, онда $N=20\cdot 50^n-20\cdot 12^n+$
$+20\cdot 12^n+18\cdot 12^n=20(50^n-12^n)+38\cdot 12^n$ аларыс.

Диймек, $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}=20(50^n-12^n)+38\cdot 12^n$ болар.

Иң ахыркы деңлигиң сағ бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси 19-а бөлүнйәр ве биринжи гошулыжысы-да 19-а бөлүнйәр, чүнки 50^n-12^n аңлатма дагыдыланда көпелдижилериң бири $50-12=38$ боляр. Диймек, шол деңлигиң чеп бөлеги-де 19-а бөлүнер.

343. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы өврмек мүмкиндир:

$$\frac{1}{24}m^4+\frac{1}{4}m^3+\frac{11}{24}m^2+\frac{1}{4}m=\frac{m}{24}(m^3+6m^2+11m+6)=$$

$$=\frac{m}{24}(m^3+3m^2+3m^2+9m+2m+6)=\frac{m}{24}[m^2(m+3)+3m(m+3)+$$

$$+2(m+3)]=\frac{m}{24}(m+3)(m^2+3n+2)=\frac{m}{24}(m+3)(m+2)(m+1)=$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}.$$

Иң ахыркы дробуң санавжысы дөрт саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылыдыр. Эмма дөрт саны ызыгидерли саның көпелтмек хасылы 2-ә, 3-е ве 4-е бөлүнмелидир. Диймек, шол ытданылан дробуң санавжысы 24-е бөлүнмели.

Шейлеликде, берлен аңлатма m-иң ислендик битин бахасында битин сандыр.

344. $$\frac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}=\frac{x^4-2x^2+1-x^2}{9(x^2+x-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2-x^2}{9(x^2+x-1)}=$$

$$=\frac{(x^2-1+x)(x^2-1-x)}{9(x^2+x-1)^2}=\frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}.$$

345. $\dfrac{3n^2-3n+20}{n-1}=\dfrac{3n(n-1)+20}{n-1}=3n+\dfrac{20}{n-1}$. Берлен дробуң битин сан болмагы үчин $\dfrac{2n}{n-1}$ дробь битин бахалара эе болмалыдыр. $\dfrac{20}{n-1}$ дробь болса n-иң ашакдакы бахаларында битин сана эе болуп билер: $n=2, 3, 5, 6, 11, 21.$

346. n сан 1, 2, 3, ... бахалара эе боланда шол санларың квадратлары дегишлиликде 0, 1, 4, 9, 6, 5 цифрлер билен гутарар. Инди шол санлара 2 гошулса, ахнан санлар дегишлиликде 2, 3, 6, 1, 8, 7 цифрлер билен гутарян санлары аларыс. Эмма шу гөркезилен цифрлер билен гутарян санлар 5-е бөлүнмейәр, чүнки берлен саның 5-е бөлүнмеги үчин шол сан я 5-лик, я-да 0 билен гутармалыдыр.

347. Илки билен $n(n+1)$ сана гаралың. Шу ики ызыгидерли саның көпелтмек хасылы 2-ә бөлүнйәр. Эгер көпелдижилериң бири n я-да $(n+1)$ сан 3-е бөлүнсе, онда меселәниң шертинде берлен $n(n+1)(2n+1)$ көпелтмек хасылы 6 бөлүнйәр. Эгер n ве $n+1$ санларың хич бири 3-е бөлүнмесе, онда n сан 3-е бөлүненде галынды-да 1 галян болса, $n+1$ сан 3-е бөлүненде галындыда 2 галар.

Инди шол санларың жемине гаралың: $n(n+1)=2n+1$. Шу деңлигиң чеп бөлегиндәки гошулыжыларың биринжиси 3-е бөлүненде галындыда 1 галяр дийип ве икинжиси 3-е бөлүненде галындыда 2 галяр дийип гүман этдик, онда оларың жеми $2n+1$ сан 3-е галындысыз бөлүнмелидир.

Шейлеликде, $n(n+1)(2n+1)$ сан 6 бөлүнйәр.

348. Эгер n жүбүт болса, онда шол сан 2-ә бөлүнйәр. Эгер-де n тәк болса, онда n^2+5 сан 2-ә бөлүнйәр. Хакыкатдан-да, ислендик тәк саны $2k-1$ гөрнүшде язмак мүмкиндир:

$$n^2+5=(2k-1)^2+5=4k^2-4k+1+5=4k^2-4k+6.$$

Диймек, шу халда n^2+5 сан 2-ә бөлүнйәр. Эгер n сан 3-е бөлүнмейән болса, онда галындыда я 1, я-да 2 галар.

Шу халлара гаралың. Гой, n сан 3-е бөлүненде галындыда 1 галсын, онда $n^2+5=(3p+1)^2+5=9p^2+6p+1+5=9p^2+6p+6=3(3p^2+2p+2)$. Шу халда n^2+5 сан 3-е бөлүнйәр. n сан 3-е бөлүненде галындыда 2 галсын, онда $n^2+5=(3p+2)^2+5=9p^2+12p+4+5=9p^2+12p+9=3(3p^2+4p+3)$. Шу халда-да n^2+5 сан 3-е бөлүнйәр.

Шейлеликде, n — ислендик натурал сан болса-да $n(n^2+5)$ сан 6 бөлүнйәр.

349. $7^{727}+1=7^{4\cdot 181}\cdot 7+1$. Инди $7^{4\cdot 181}$ санын иң ахыркы цифри 1 болмалыдыр, чүнки 7^4 санын иң ахыркы цифри 1 билен гутаряр. Онда $7^{4\cdot 181}\cdot 7$ санын иң ахыркы цифри 7 болмалыдыр. Шол 7 билен гутарян санын үстүне 1 сан гошсак, алнан жем 8 билен гутарар. Эмма 5-е бөлүнйән санларын хеммеси я 5-лик билен, я-да 0 билен гутармалыдыр.

Шейлеликде, берлен сан 5-е бөлүнйәр диен тассыклама нәдогрудыр, шол сан 5-е бөлүнмейәр.

350. Эгер шол ызыгидерли санлары $(x-2)$; $(x-1)$; x; $(x+1)$; $(x+2)$ аркалы беллесек, онда ашакдакыны аларыс:

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2(x+1)^2+(x+2)=x^2-4x+4+x^2-2x+1+$$
$$+x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=5x^2+10=5(x^2+2).$$

$5(x^2+2)$ санын квадрат болмагы үчин x^2+2 сан 5-е бөлүнмелидир. Белли болшы ялы, 5-е бөлүнйән санлар я 5-лик, я-да 0 билен гутармалыдыр, ягны x^2 сан я 3-лүк, я-да 8-лик билен гутармалы. Эмма хич бир санын квадраты 3 билен я-да 8 билен гутармаяр.

Диймек, x^2+2 сан бәше бөлүнмейәр.

351. Гой, гөзленийән дробь $\frac{x}{y}$ болсун. Онда меселәнин шертине гөрә $\frac{x+21}{y+28}=\frac{x}{y}$. Шу ерден $xy+21y=xy+28x$ я-да $21y=28x$, я-да $\frac{x}{y}=\frac{21}{28}$, я-да $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.

Диймек, гөзленийән дробь $\frac{3}{4}$ дробдур.

352. Гөзленийән икибелгили саны $10x+y$ аркалы беллесек, онда терс тертипде шол цифрлер аркалы язылан сан $10y+x$ болар.

$(10x+y)+(10y+x)$ жеме гаралын. Бу жем $11(x+y)$ болар. Шу санын долы квадрат болмагы үчин $x+y$ сан 11-е дең болмалыдыр. Инди $x+y=11$ деңлемәни чөзйәрис. Меселәнин шертине гөрә x ве y санлар икибелгили санын цифрлерини аңладярлар, диймек, олар битин положител ве 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 бахалара эе болуп билерлер. Шу шертин үстүне оларын жеминиң 11-е дең болмалыдыгыны гөз өнүнде тутсак, онда $x=2$, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ве $y=9$, 8, 7, 6, 5, 4, 3 бахалар алнар.

Шейлеликде, гөзленийән санлар 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 болар.

353. Илки билен 3-иң дүрли дережелериниң нәхили цифр билен гутарядыгыны такыклалын: $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$.

3-иң 5, 6, 7, 8 ве ш. м. дережелеринин нәхили цифр билен гутаржакдыгы айдыңдыр. Берлен саны шейле язарыс: $3^{1965}-1965=3^{4\cdot 491}\cdot 3^1-1965$.

$3^{4\cdot 491}$ санын иң ахыркы цифри 1 ($3^4=81$ серетмели). Диймек, $3^{4\cdot 491}\cdot 3$ санын иң ахыркы цифри 3. Үч билен гутарян сандан 1965 саны айранымызда тапавутда 8 билен гутарян сан аларыс.

354. Ислендик тәк саны $N=2n+1$ гөрнүшде язмак мүмкиндир. $N^2=(2n+1)^2$ сана гаралын. $N^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$.

$N=4n(n+1)+1$ деңлигиң саг бөлегиндәки гошулыжыларын биринжисиндәки көпелдижилерин бири тәк болса, бейлекиси жүбүтдир, диймек, шол деңлиги ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$N=8k+1$$

Иң ахыркы деңликден гөрнүши ялы, ислендик тәк N сан 8-е бөлүненде галындыда 1 галяр.

355. $a^x=y$ билен беллап, деңсизлиги шейле гечүрелин.

$$2y^3-3y^2+1\geqslant 0,\ y>0.$$

Бу деңсизлик догрудыр, себәби

$$2y^3-3y^2+1=(1-y^2)+2y^2(y-1)=$$
$$=(1-y)(1+y)-2y^2(1-y)=(1-y)(1+y-2y^2)=$$
$$=(1-y)(1-y^2+y-y^2)=(1-y)(1-y)(1+y+y)=(1-y)(1+2y).$$

356. $(a+b)^4=[(a+b)^2]^2=(a^2+2ab+b^2)^2=(a^2+b^2)^2+$ $+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$.

Диймек, $(a+b)^4=(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$. Эмма $a^2+b^2\geqslant 2ab$, шонуң үчин $(a+b)^4\leqslant(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)^2$ $(a+b)^4\leqslant a^4+b^4+2a^2b^2+2a^4+2b^4+4a^2b^2+a^4+2a^2b^2+b^4=4a^4+4b^4+8a^2b^2<4a^2+4b^2+2(a^2+b^2)^2$. $(a+b)^4\leqslant 6a^4+6b^4+4a^2b^2$; $(a+b)^4\leqslant 6a^4+6b^4+(a^2+b^2)^2=7a^4+7b^4+2a^2b^2$; $(a+b)^4\leqslant 7a^4+7b^4+a^4+b^4$; $(a+b)^4\leqslant 8a^4+8b^4$.

357. Эгер $a\leqslant b$ болса, онда $(a+b)^n\leqslant(2b)^n=2^nb^n<2^n(a^n+b^n)$.

$a>b$ боланда хем эдил шуның ялы субут эдилйәр.

358. Эгер k сан 3-е бөлүнйәр дийип гүман этсек, онда $A_k=k^{k+1}+(k+1)^k$ деңлигин саг бөлегиндәки гошулыжыларын биринжиси 3-е бөлүнип, икинжиси, ягны $(k+1)$ сан 3-е бөлүнмейәр. Диймек, шу халда берлен A_k сан 3-е бөлүнмейәр.

Эгер k сан 3-е бөлүненде 1 сан галынды галяр дийип гүман этсек, онда $A_k=k^{k+1}+(k+1)^k=(3m+1)^{k+1}+(3m+2)^k$ я-да $1+2^k$ санын 3-е бөлүнйән халына гарамалы болар. Эгер шу ерде k тәк сан болса, онда $1+2^k$ сан 3-е бөлүнер. Диймек, шу халда k сан тәк сандыр, ягны $k=2t+1$.

Шейлеликде, бир тарапдан $k=3t+1$, икинжиден $k=2t+1$. Шу халда k саны $k=6p+1$ гөрнүшинде язмак мүмкиндир, чүнки k сан 3-е бөлүненде галындыда 1 сан галяр ве 2-ә бөлүненде-де 1 сан галяр, диймек, k сан 6-а бөлүненде-де галындыда 1 сан галар.

Инди k сан 3-е бөлүненде галынды-да 2 галяр дийип гүман эделин. Шу халда $A_k=(3n+2)^{k+1}+(3n+3)^k$ аларыс. Шу деңлигин саг бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси 3-е бөлүнйәр, эмма биринжиси бөлүнмейәр, диймек, берлен A_k сан-да 3-е бөлүнмейәр. Шейлеликде, $k=6p+1$ боланда берлен аңлатма 3-е бөлүнйәр.

359. 5-ден кичи болмадык ислендик йөнекей саны $6k\pm 1$ гөрнүшде язмак мүмкиндир. Меселәнин шертине гөрә $8p^2+1=(6k\pm 1)^2\cdot 8+1=$ $=(36k^2\pm 12+1)\cdot 9+1=288k^2\pm 96k+9=3(96k^2\pm 32k+3)$ сан йөнекей сан болмады. Эмма $8p^2+1=3(96k^2\pm 32k+3)$ деңликден гөрнүши ялы, $8p^2+1$ сан 3-е бөлүнйәр, диймек, шу халда $8p^2+1$ сан йөнекей сан дәлдир.

Шейлеликде, p санын ве $8p^2+1$ санын йөнекей сан болмаклары үчин p сан 5-ден кичи болмадыдыр. Эмма 5-ден кичи диңе ики саны, 3 ве 2 йөнекей сан бардыр.

Инди шол бахалары, ягны $p = 3$ ве $p = 2$ бахалары $8p^2 + 1$ аңлатма гоюп көрелиң. $p = 3$ боланда $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ йөнекей сан. Инди $p = 2$ хала гаралың: $8p^2 + 1 = 8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ дүзме сан.

Шейлеликде, диңе $p = 3$ меселәниң шертини канагатландыряр.

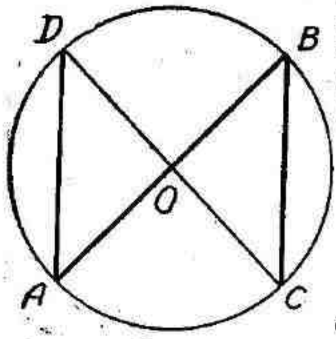
360. Эгер $a + b + c$ сан 6 бөлүнйән болса, онда $a + b + c = 6k$ деңлиги аларыс. $a + b = 6k - c$ деңлигиң ики бөлегини-де куба гөтерип, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 216k^3 - 108k^2c^2 + 18kc^3 - c^3$ аларыс, бу ерден $a^3 + b^3 + c^3 = 6(36k^3 - 18kc^2 + 3kc^2) - 3ab(a + b)$ я-да $a^3 + b^3 + c^3 = 6p - 3ab(a + b)$ (A) бу ерде $p = 36k^3 - 18kc^2 + 3k^2c$.

(A) деңлигиң сағ бөлегиндәки икинжи гошулыжы 6 бөлүнмели, чүнки я a, я-да b, я-да $a + b$ сан 2-ә бөлүнмелидир.

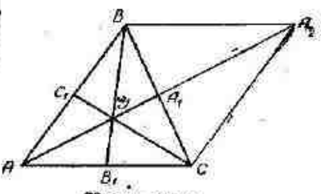
Шейлеликде, шу халда $a^3 + b^3 + c^3$ сан 6 бөлүнмелидир.

361. Гой, шол гүберчек дөртбурчлугың бурчлары бири-биринден тапавутлы болуп, оларың хич бири-де күтек болмасын. Онда шол гүберчек дөртбурчлугың дашкы бурчларының хер бири күтек болар ве шол дашкы бурчларың жеми 360°-дан көп болар. Эмма белли болшы ялы, гүберчек дөртбурчлугың дашкы бурчларының жеми 360° болмалыдыр. Диймек, гүберчек дөртбурчлугың ички бурчларының хер бири йити диййип гүман этмек нәдогрудыр, онда шол дөртбурчлугың иң болманда бир бурчы күтек болмалыдыр. Ш. с. т. э.

362. Гой, O берлен төверегиң меркези болсун (69-нжы чызгы). Онда меселәниң шертине гөрә $\cup AC = \cup DB$ болмалы, чүнки параллел хордаларың арасындакы дугалар деңдирлер. Эмма $\cup AD + \cup DB = \cup AC + \cup BC$ боланы себәпли $\cup AD = \cup BC$ болар. Инди D, O, C нокатларың бир гөни чызыгың үстүнде ятяндыгыны субут этмели. Шол максат билен ашакдакы жемлере гарарыс. $\cup AD + \cup AC = \cup BC + \cup BD$, эмма $\cup AD + \cup AC + \cup BC + \cup DB = 360°$, онда $\cup AD + \cup AC = \cup BC + \cup BD = 180°$. Диймек, DC кесим диаметрдир, бу болса D, O, C нокатларың бир гөни чызыгың үстүнде ятяндыкларыны субут эдйәр.



69-нжы чызгы.



70-нжи чызгы.

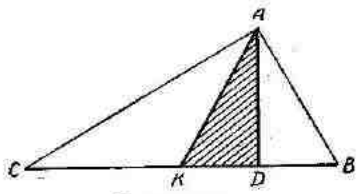
363. AGC үчбурчлукдан (70-нжи чызгы) ашакдакыны аларыс: $AG + CG > AC$ я-да $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$. Эдил шонуң ялы. AGB ве BGC үчбурчлуклардан дегишлиликде $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$ ве $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$ аларыс. Инди иң соңкы үч деңсизлиги членме-член гошуп, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{4}{3}m_a + \frac{4}{3}m_b + \frac{4}{3}m_c > a + b + c \text{ я-да } m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c),$$

меселәниң биринжи ярымы субут эдилди. Икинжи ярымыны субут этмек үчин AA_1 медианазы довам эдип, $A_1A_2 = AA_1$ кесими өлчәп гоялың ве A_2 нокады B ве C нокатлары билен бирлешдирелиң. Онда ACA_2 үчбурчлукдан $AC + A_2C > AA_2$ я-да $b + c > 2m_a$ аларыс. Эдил шунуң ялы эдип, $a + c > 2m_b$ ве $a + b > 2m_c$ аларыс.

Ахыркы үч деңсизлиги членме-член гошуп, $2a + 2b + 2c > 2m_a + 2m_b + 2m_c$ я-да $m_a + m_b + m_c < a + b + c$ аларыс.

364. Гой, ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлук болсун (71-нжи чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, ADK гөнүбурчлы үчбурчлугы гурмак кын дәлдир. Шол максат билен, бири-бирине перпендикуляр болан ики саны гөни чызык алып, оларың биринин үстүнде берлен h_a бейиклиги өлчәп гойярыс ве кәбир A нокады тапярыс. Инди A нокады меркез эдип, m_a радиуслы дуга



71-нжи чызгы.

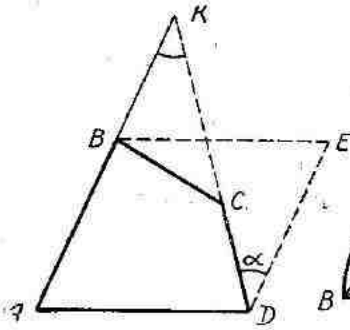
чызярыс, шол дуганың гөни бурчуң бейлеки тарапыны кесйән ери кәбир K нокады кесгитләр. K нокатдан ики тарапа-да $\frac{a}{2}$ кесими өлчәп гойсак, B ве C нокатлары аларыс. Шейлеликде, алнан ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлук болар.

365. Гой, гөзленилйән дөртбурчлук $ABCD$ болсун (72-нжи чызгы). Гой, $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$ ве $AD = d$ болсун. Инди хайсы хем болса ики гаршылыклы тарапыны, меселем AB ве DC тарапларыны довам эдип, шол тарапларың кесишме нокады болан K нокады аларыс. Онда $\angle AKD$ шол ики тарапың арасындакы бурч болар. B депеден AD тарапа параллел эдип, BE гөни чызыгы ве D депеден AB тарапа параллел эдип, DE гөни чызыгы гечирелиң. Нетижеде $BEDC$ дөртбурчлугы аларыс. Шол дөртбурчлугы гурмак кын дәлдир. Хакыкатдан-да, илки билен D нокадың янында $\angle AKD = \alpha$ бурчы гурярыс. Шол бурчуң тарапларында $DE = AB = a$ ве $CD = c$ кесимлери өлчәп гойярыс. Инди E нокады меркез эдип, $EB = AD = d$ радиуслы дуга чызярыс, соңра C нокады меркез эдип, $CB = b$ радиуслы дуга чызярыс. Шу ики дуганың кесишме B нокады гөзленилйән дөртбурчлугың үчүнжи депеси болар. Инди B нокатдан DE тарапа параллел гөни чызык гечирйәрис, онда D нокат аркалы BE тарапа параллел гөни чызык гечирип, гөзленилйән дөртбурчлугың дөрдүнжи депеси болан A нокады аларыс.

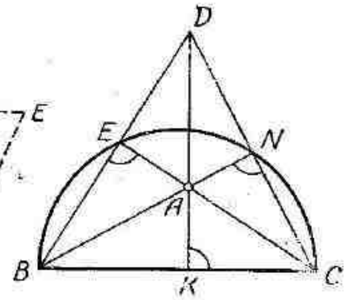
Шейлеликде, $ABCD$ гөзленилйән дөртбурчлукдыр.

366. Гой, берлен ярым тегелегиң ичиндәки берлен нокат A болсун (73-нжи чызгы). Диаметриң учлары болан B ве C нокатлары чызгыч аркалы A нокат билен бирлешдирйәрис ве шол гөни чызыклары ярым төверек билен кәбир N ве E нокатларда кесишйәнчә довам эдйәрис. Инди B ве E хем-де C ве N нокатлар аркалы гөни чызыклары гечирип, кәбир D нокады тапярыс. Иң ахырда D ве A нокатлар аркалы гөни чызык гечирип, BC диаметре перпендикуляр болан AK кесими аларыс. Хакыкатдан-да, BDC үчбурчлукда BN ве CE онуң бейикликлери болуп, олар A нокатда кесишйәрлер.

Диймек, үчүнжи депеден чыкып, шол A нокат аркалы гечйән DK кесим үчүнжи бейикликдир.



72-нжи чызгы.

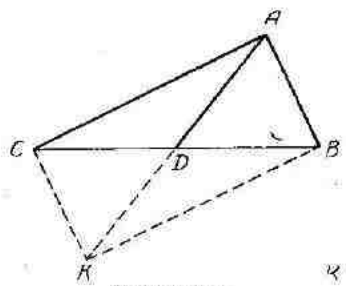


73-нжи чызгы.

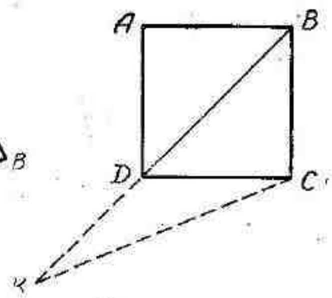
367. Гой, ABC үчбурчлук гөзленилйән үчбурчлук болсун (74-нжи чызгы). Эгер шол үчбурчлугың AD медианасыны довам эдип, $DK = AD$ кесимп өлчәп гойсак ве K нокады B ве C нокатлар билен бирлешдирсек, онда $ABKC$ параллелограмы аларыс. Инди ABK үчбурчлукда $AK = 2m_a$; $AB = c$ ве $BK = AC = b$. Диймек, ABK үчбурчлугы үч тарапы боюнча гурмак мүмкиндир. Шол үчбурчлук гурландан соңра AK тарапа B депеден чыкан медианаңы гечирсек ве шол медиананың довамында онуң узынлыгыны, ягны $BD = DC$ өлчәп гойсак, онда C нокады тапарыс.

Шейлеликде, ABC гөзленилйән үчбурчлук болар.

368. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве $ABCD$ гөзленилйән квадрат болсун (75-нжи чызгы). Инди BD диагонаны довам эдип, онуң үстүнде $DK = CD$ кесими өлчәп гоялың. Чызгыдан гөрнүши ялы, BCK үчбурчлугың BK тарапы берлен кесиме дең болмалы ($BK = BD + DC$), $\angle KBC = 45°$ ве $\angle BKC = 22°30'$. Диймек, BCK үчбурчлугы тарапы ве шол тарапа сепленйән ики бурчы боюнча гурмак мүмкиндир. Шол үчбурчлук гурландан соңра CB тарап билен 90° бурчы эмеле гетирйән CD кесими гечирип, D нокады тапарыс. Шейлеликде, B, C ве D нокады тапарыс.



74-нжи чызгы.

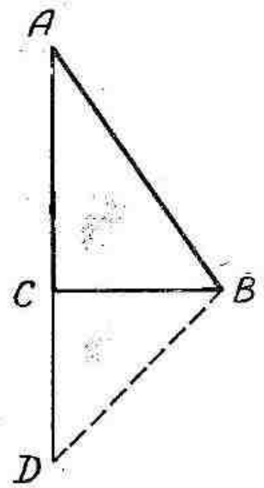


75-нжи чызгы.

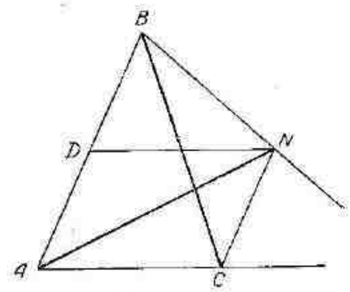
Шейлеликде, B, C ве D нокатлар гөзленилйән квадратың үч депеси болар.

369. Меселе чөзүлен дийип гүман эделиң ве гөзленилйән үчбурчлук ABC болсун (76-нжы чызгы). AC катети довам эдип, $CD = CB$ кесими өлчәп гойярыс. Башгача айданымызда, ACB довук чызыгы генелдйәрис. Нетижеде ADB үчбурчлугы аларык. Шу үчбурчлугы ики тарапы ве шол тарапларың бириниң гаршысында ятан бурчы боюнча гурмак мүмкиндир. Шу ерде AD тарап гөзленилйән үчбурчлугың катетлериниң жемине деңдир, AB тарап болса шол үчбурчлугың гипотенузасына деңдир, ADB бурч болса 45° деңдир.

Шейлеликде, илки билен AD кесими өлчәп гойярыс, соңра D нокадың янында 45° дең бурчы гурярыс. Инди A нокады меркез эдип, AB радиуслы



76-нжы чызгы.



77-нжи чызгы.

дуга чызарыс ве шол дуганың бурчуң DB тарапыны кесйән B нокадыны тапарыс. Иң ахырда B нокатдан AD тарапа перпендикуляр индерип, гөзленилйән ABC үчбурчлугы гурярыс.

370. Илки билен AB тарапы ики дең бөлеге бөлүп, кәбир D нокады аларыс (77-нжи чызгы). D нокат аркалы гечйән ве AC тарапа параллел болан DN гөни чызыгы гечирйәрис, ягны $DN \parallel AC$. Соңра N нокат аркалы гечйән ве AB тарапа параллел болан NK гөни чызыгы гечирйәрис, ягны $NK \parallel AB$.

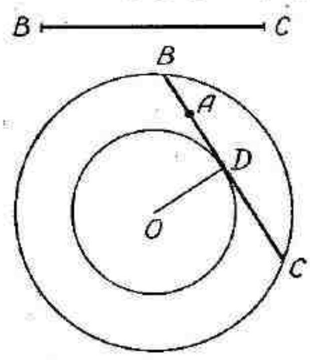
Инди A билен N ве B билен K нокатлары бирлешдирип AN ве BK медианалары аларыс.

371. Гой, A нокат аркалы узынлыгы берлен a кесиме дең болан хорда гечирилен болсун (78-нжи чызгы). Эгер тегелегиң O меркезинден шол хорда перпендикуляр индерсек, онда хорда ики дең бөлеге бөлүнер. Умуман, төверегиң ичинде берлен дең узынлыклары болан хордаларың орталарының геометрик орны берлен төверете концентрик болан төверекдир. Диймек, шу ерде илки билен шол концентрик төверегиң радиусының узынлыгыны тапмалыдыр. Берлен a кесиме O нокатдан индерилен перпендикулярың OD узынлыгыны ашакдакы ялы тапарыс:

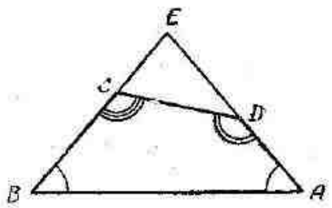
$$OD = \sqrt{OC^2 - CD^2}; \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Инди O нокады меркез эдип r радиуслы төверек чызярыс. A нокатдан шол төверегe галташян гечирйәрис. Шу BC галташян гөзленилйән хордадыр.

372. Берлен $ABCD$ дөртбурчлугың AD ве BC тарапларыны довам эдип, деңянлы ABE үчбурчлугы аларыс (79-нжы чызгы). Меселәниң шертине гөрә $\angle D > \angle C$, онда $\angle CDE < \angle DCE$ болар. Бир үчбурчлукда я-да дең үчбурчлукларда кичи бурчуң гаршысында кичи тарап ятяр, ягны $CE < DE$. Эмма $BE = AE$, онда $BE - CE < AE - DE$, я-да $BC > AD$. Ш. с. т. э.



78-нжи чызгы.



79-нжы чызгы.

373. 80-нжи чызгыдан гөрнүши ялы, $S_{PQR} = S_{AFQ} + S_{CFR} + S_{CEP} - S_{ACE}$, бу ерде AE — медиана, BF — бейиклик, CR — биссектриса.

Үчбурчлугың медианасының хәсиетинден пейдаланып, аларыс:

$$S_{AFQ} = \frac{1}{2} AF \cdot FQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^2}{12}.$$

Үчбурчлугың биссектрисасының хәсиетини уланып,

$$S_{CFR} : S_{BCF} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \left(a + \frac{a}{\sqrt{2}}\right);$$

$$S_{CEP} : S_{ACE} = \frac{a}{2} : \left(a\sqrt{2} + \frac{a}{2}\right); \quad S_{ACE} = \frac{a^2}{4}.$$

Бу ерден $S_{BCF} = \frac{a^2}{4}$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда

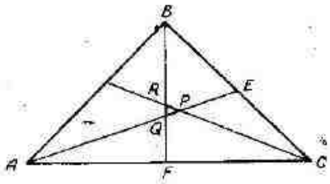
$$S_{PQR} = \frac{27\sqrt{2} - 38}{84} a^2 \text{ аларыс.}$$

374. Илки билен CMD бурчы хасаплалың (81-нжи чызгы).

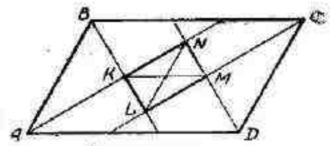
$$\angle CMD = 180° - (\angle DCM + \angle CDM).$$

Меселәниң шертине гөрә $\angle DCM = \angle BCM$ ве $\angle CDM = \angle ADM$, эмма $\angle ADM + \angle CDM + \angle DCM + \angle BCM = 180°$. Диймек,

$$\angle DCM + \angle CDM = \frac{180°}{2} = 90°.$$



80-нжи чызгы.



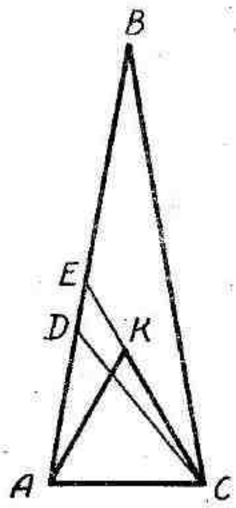
81-нжи чызгы.

Онда $\angle CMD = 180° - 90° = 90°$. Шейлеликде, $KNML$ дөртбурчлугың LMN бурчы гөнүдир.

Эдил шонуң ялы эдип, $\angle AKB = \angle LKN = 90°$ деңдигини субут эдерис. Диймек, $KNML$ гөнүбурчлукдыр, онда $KM = LN$.

375. Көпбурчлугың ичинден төверек чызмак мүмкин дийип гүман эделиң. Гой, гызыл ве гөк тараплар бașашадан гелсинлер. Шу халда гызыл тарапларың узынлыкларының жеми гөк тарапларың узынлыкларының жемине дең болуп, оларың хер бириниң жеми шол көпбурчлугың ярым периметрине дең болар. Эмма меселәниң шертине гөрә гызыл тарапларың узынлыкларының жеми периметриң ярысындан кичидир. Диймек, шу ягдайың болмагы мүмкин дәлдир. Башгача айданымызда, шу халда гызыл тарапларың саны гөк тарапларың санындан аз болмалы. Эгер гөк тарапларың саны гызыл тарапларың санындан көп дийип гүман этсек, онда гөк тарапларың икиси хөкман бири-бириниң янында болмалы болар. Бу болса меселәниң шертине гөрә мүмкин дәлдир.

Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырян көпбурчлугың ичинден төверек чызып боляр дийип гүман этмеклик нәдогры боляр, бу болса, меселедәки тассыкламаны субут эдйәр.

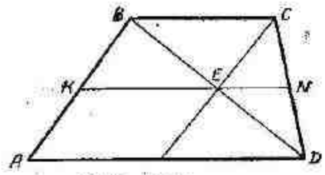


82-нжи чызгы.

376. Меселәниң шертине гөрә, $\angle ACD = 50°$ ве $\angle BAC = 80°$ (82-нжи чызгы). Диймек, $\angle ADC = 50°$. Шейлеликде, $AD = AC$. Эмма $AD = CK$. Диймек, $AC = CK$. Шейлеликде, ACK үчбурчлук деңянлы үчбурчлукдыр, ягны $\angle KAC = \angle CKA$. Эмма шол үчбурчлугың depесиндәки ACK бурч 60° деңдир.

Шейлеликде, гөзленилйән $\angle AKC$ бурч 60°-дыр.

377. Меселәниң шертине гөрә, $\angle BCE = \angle ECD$ ве $\angle ADE = \angle CDE$ (83-нжи чызгы). Инди, $\angle BCE + \angle ADE = \angle ECD + \angle CDE$. Эмма $\angle BCD + \angle CDA = 180°$, дий-



83-нжи чызгы.

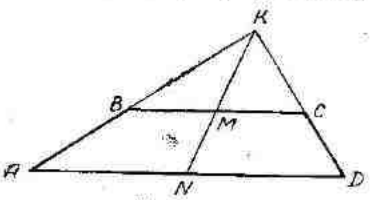
ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

мек, $\frac{\angle BCD}{2}+\frac{\angle CDA}{2}=90^\circ$ я-да $\angle ECD+\angle CDE=90^\circ$. Онда $\angle CED=90^\circ$. Диймек, CE ве DE биссектрисалар гөни бурч асты билен кесишйәрлер. Инди E нокадың трапецияның орта чызыгының үстүнде ятяндыгыны субут эделиң. Шол максат билен, E нокат аркалы трапецияның эсасларына паралел гөни чызык гечирелиң, ягны $EN \parallel AD$. Онда $\angle BCE=\angle CEN=\angle ECN$ болар. Диймек, $EN=CN$.

Инди END үчбурчлуга гаралың. Илки билен $\angle NED=\angle ADE$ белләлиң (ички атанак ятян бурчлар). Эмма $\angle ADE=\angle NDE$, шонуң үчин $\angle NED=\angle NDE$, ягны $EN=ND$.

Шейлеликде, $EN=CN$ ве $EN=ND$ деңликлерден $CN=ND$ гелип чыкяр. Эгер шейле болса, онда NEK трапецияның орта чызыгыдыр ве E нокат трапецияның орта чызыгының үстүнде ятяндыр.

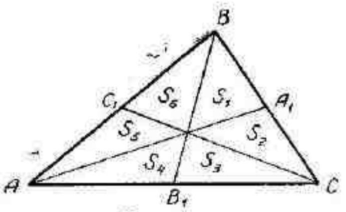
378. Эгер ромбуң дашындан төверек чызмак мүмкин дийип гүман этсек ве ромбуң гаршылыклы бурчларының деңдигини гөз өңүнде тутсак, шол бурчларың дагяян дугалары деп болмалыдыр. Диймек, шу халда ромбуң диагоналы төверегиң ики бөлеге бөлйәр; башгача айданымызда, ромбуң диагоналлары шол төверегиң диаметри болуп хызмат эдйәрлер. Эгер ромбуң диагоналлары дең болса, онда шейле ромб квадратдыр.



84-нжи чызгы.

Шейлеликде, квадратдан тапаувутланян ромбуң дашындан төверек чызмак мүмкин дийип гүман этмек нәлогрудыр.

379. Трапецияның гапдал тарапларыны довам эдип, AKD үчбурчлугы аларыс (84-нжи чызгы). Шол үчбурчлугың K депесиндәки бурч гөни бурчдур, чүнки AKD үчбурчлугың эсасындакы бурчларың жеми 90° деңдир. Диймек, KM кесим BKC гөнүбурчлы үчбурчлугың гөни бурчуның депесинден чыкян медиана боланы себәпли $KM=BM$. Эдил шонуң ялы, KN кесим AKD гөнүбурчлы үчбурчлугың гөни бурчуның депесинден чыкян медианасы боланы себәпли $KN=AN$. Эгер $AD=b$ ве $BC=a$ болса,



85-нжи чызгы.

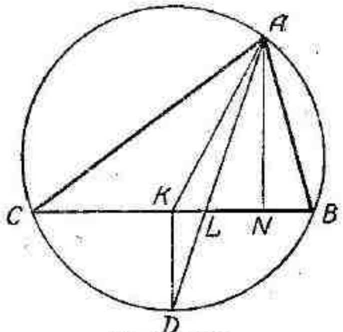
онда $KM=\frac{a}{2}$ ве $KN=\frac{b}{2}$ болуп, гөзленилйән $MN=KN-KM=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$.

Шейлеликде, $MN=\frac{b-a}{2}$.

380. Медианаларың кесишмеги аркалы алнан алты саны үчбурчлугың мейданларыны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ве S_6 билен белләлиң (85-нжи чызгы). Эгер B депеден AC тарапа бейиклик гечирсек, онда ABB_1 ве BCB_1 үчбурчлукларың мейданлары дең болар, чүнки оларың бейикликлери умумы ве эсаслары $AB_1=B_1C$. Диймек, $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5+S_6$.

Инди A депеден BC тарапа бейиклик гечирсек, онда яңкы ялы $S_1+S_6+S_5=S_2+S_3+S_4$ аларыс. Эгер медианаларың кесишме нокадындан

үчбурчлугың тарапларына перпендикуляр индерсек, онда $S_1=S_2$, $S_4=S_3$ ве $S_5=S_6$ аларыс.



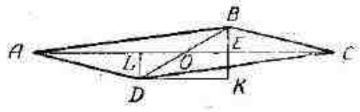
86-нжы чызгы.

Ахыркы үч деңлиги членме-член гошуп, ашакдакыны аларыс: $S_1+S_4+S_5=S_2+S_3+S_6$. Шу деңлиги $S_1+S_6+S_5=S_2+S_3+S_4$ деңлик билен деңешдирип, $S_4=S_6$ аларыс. $S_1=S_2$, $S_3=S_4$ ве $S_5=S_6$ боланы себәпли $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5+S_6$ деңликден $2S_1=2S_6$ я-да $S_1=S_6$ аларыс.

Шейлеликде, $S_2=S_1=S_6=S_5=S_4=S_3$ я-да $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$.

381. Берлен ABC үчбурчлугың дашындан төверек чызалың (86-нжы чызгы). BC тарапың ортасындан перпендикуляр галдырсак, шол перпендикуляр төвереги BC дуганың ортасы болан D нокатда кесер. Онда $\smile CD=\smile DB$ боланы себәпли AL биссектриса D нокат аркалы гечер ве шу ерде L нокат K нокатдан сагда ятар. Инди A нокатдан CB кесиме перпендикуляр индерсек, шол перпендикулярың эсасы N нокат L нокатдан сагда ятар, чүнки CB кесиме гарапда AD ягтыт кесимиң учларында CB кесиме перпендикуляр гечирилсе, онда шол перпендикулярың эсаслары L нокатдан дүрли тарапларда ятарлар.

382. Гой, берлен дөртбурчлук $ABCD$ болсун (87-нжи чызгы). B депеден ве D депеден AC диагонала BE ве DL перпендикулярлары индерйәрис. ADC үчбурчлугың мейданы $S_1=\frac{1}{2}AC\cdot DL$ ве ABC үчбурчлугың мейданы $S_2=\frac{1}{2}AC\cdot BE$ болар. Диймек, $ABCD$ дөртбурчлугың мейданы $S=S_1+S_2$ я-да $3=\frac{1}{2}AC(DL+BE)$, я-да $3=\frac{1}{2}6(DL+BE)$, бу ерден $DL+BE=1$ *см* аларыс. Эмма $DL+BE=BK$.

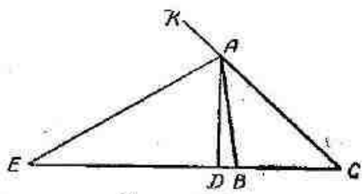


87-нжи чызгы.

Шейлеликде, BKD гөнүбурчлы үчбурчлугың BK катети 1 *см* болуп, BD гипотенузасы 2 *см* боланы себәпли, BDK бурч 30° деңдир. Онда $\angle BDK=\angle BOE=30^\circ$.

Шейлеликде, гөзленилйән бурч 30° деңдир.

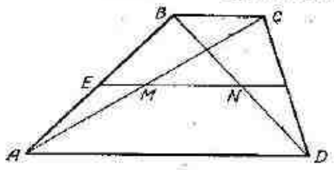
383. ABC үчбурчлугың дашкы бурчы $\angle BAK=\angle B+\angle C$ (88-нжи чызгы). AD катет AE гипотенузаның ярысына дең боланы себәпли $\angle AEB=30^\circ$ болмалыдыр. $\angle B=30^\circ+\frac{\angle BAK}{2}$. Диймек, $\angle B=30^\circ+\frac{\angle B+\angle C}{2}$ я-да $2\angle B=60^\circ+\angle B+\angle C$, я-да $\angle B-\angle C=60^\circ$.



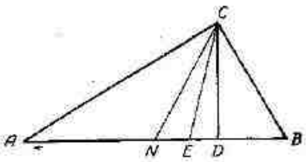
88-нжи чызгы.

Шейлеликде, гөзленилйән $\angle B - \angle C = 60°$-дыр.

384. Гой, $ABCD$ берлен трапеция болсун (89-нжы чызгы). Шол трапецияның EL орта чызыгыны гечирелин. Онда $EL \parallel BC$ ($BC \parallel AD$). Инди CDB үчбурчлуга гаралың. Шол үчбурчлукда L нокат CD тарапың ортасы ве $LN \parallel BC$, диймек, LN кесим ятланан үчбурчлугың орта чызыгыдыр. Онда $ND = NB$ болмалыдыр, ягны N нокат BD диагоналың ортасыдыр. Эдил шонуң ялы, ABC үчбурчлукда E нокат AB тарапың ортасы ве $EM \parallel BC$, диймек $CM = MA$, ягны M нокат AC диагоналың ортасыдыр.



89-нжы чызгы.

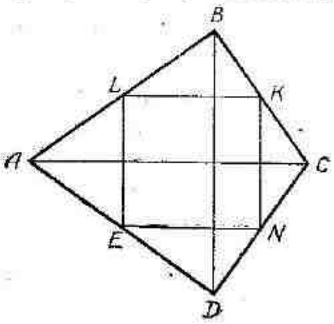


90-нжы чызгы.

Шейлеликде, BD ве AC диагоналларың ортасы трапецияның EN орта чызыгының үстүнде ятырлар, башгача айданымызда, трапецияның гапдал тарапларының орталары ве диагоналларының орталары бир гөни чызыгың үстүнде ятырлар.

385. Гой, ABC үчбурчлукда $\angle C = 90°$ болсун (90-нжы чызгы). Шол бурчуң CE биссектрисасыны, CN медианасыны ве CD бейиклигини гечирелин. Онда $\angle ECN = \angle ECD$ субут этмели. Гөнүбурчлы үчбурчлугың гипотенузасына гечирилен медиана шол гипотенузаның ярысына дең боланы себәпли $AN = CN = NB$, ягны $\angle CAN = \angle ACN$. Инди $\angle CAB + \angle ABC = 90°$ ве $\angle DCB + \angle CBD = 90°$ беллесек, онда $\angle CAB = \angle DCB$ аларыс. Диймек, $\angle ACN = \angle BCD$. Эмма $\angle ACE = \angle BCE$.

Иң ахыркы ики деңлигин икинжисинден биринжисини члениме-член айрып, $\angle ACE - \angle ACN = \angle BCE - \angle BCD$ я-да $\angle ECN = \angle ECD$ аларыс.

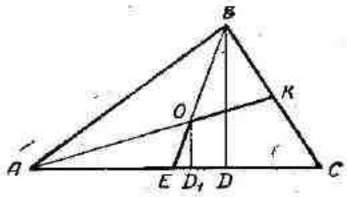


91-нжи чызгы.

386. Меселәниң шертине гөрә K нокат BC кесимиң ортасы ве E нокат AD кесимиң ортасы, L нокат AB кесимиң ортасы ве N нокат CD кесимиң ортасыдыр (91-нжи чызгы). Эгер K ве N нокатлары бирлешдирсек, онда $KN \parallel BD$ аларыс. Эдил шонуң ялы, $LE \parallel BD$ аларыс. Соңра L нокады K нокат билен, E нокады N нокат билен бирлешдирип, $LK \parallel AC$ ве $EN \parallel AC$ аларыс. Диймек, дөртбурчлук $ELKN$ параллелограмдыр. Шол параллелограмың диагоналлары дең, ягны $KE = LN$ (меселәниң шертине гөрә).

Шейлеликде, $ELKN$ гөнүбурчлукдыр, ягны $\angle NEL = \angle ELK = \angle ELK = \angle LKN = \angle KNE = 90°$, диймек, $AC \perp BD$.

387. ABC үчбурчлугың BE ве AK медианаларының кесишме O нокадыны C депе билен бирлешдирелиң (92-нжи чызгы). Белли болшы ялы, $OE = \frac{1}{3} BE$. Онда AOC үчбурчлугың мейданы ABC үчбурчлугың мейданының үчден бирине дең болар, ягны $S_{AOC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} S$, чүнки шол үчбурчлукларың BD ве OD_1 бейикликлери гечирилсе, $OD_1 = \frac{1}{3} BD$ болар. Диймек, EOC үчбурчлугың мейданы $S_{EOC} = \frac{1}{6} S$ болар. Эдил шонуң ялы OKC үчбурчлугың мейданы $S_{OKC} = \frac{1}{6} S$ болар.



92-нжи чызгы.

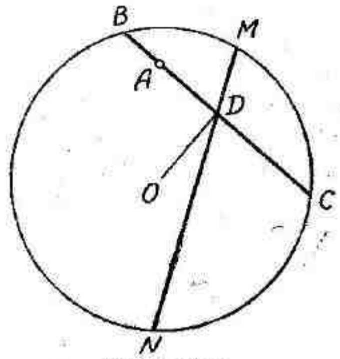
Диймек, $EOKC$ дөртбурчлугың мейданы

$$S_{EOKC} = S_{EOC} + S_{OKC} = \frac{1}{6} S + \frac{1}{6} S = \frac{1}{3} S.$$

Диймек, $S_{EOKC} = \frac{S}{3}$.

388. MN хорда билен ярпа бөлүнйән ве A нокат аркалы гечйән BC хорда гурлан дийип гүман эделиң (93-нжи чызгы). Эгер BC хорда D нокатда ики дең бөлеге бөлүнйән болса, онда $OD \perp BC$ болмалыдыр, чүнки исленди хорда перпендикуляр болан радиус шол хорданы ярпа бөлйәр. Инди AO кесим диаметр эдилип, шонуң үстүнде теверек гурлан дийип гүман этсек, онда $\angle ODA = 90°$ болар (диаметре дayanян бурч).

Шейлеликде, меселәниң ашакдакы гурлушы алыняр: илки билен A ве O нокатлары бирлешдирйәрис. AO кесими диаметр эдип, онуң үстүнде теверек гурярыс. Шол теверек берлен MN хорда-



93-нжи чызгы.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ны käбир D нокатда кесср. D ве A нокатлар аркалы гечирилен хорда гөзленилйән хордадыр.

389. Илки билен $y = x - 2$ тәзе нәбелли гиризелиң. Онда $(y - 0{,}5)^4 + (y + 0{,}5)^4 = 1$ деңлемәни аларыс. Инди $(y^2 - y + 0{,}25)^2 + (y^2 + y + 0{,}25)^2 = 1$ деңлемеден $2y^4 + 3y^2 + 0{,}125 = 1$ деңлемәни аларыс. $y^2 = z$ билен белләп, $2z^2 + 3z - 0{,}875 = 0$ деңлемәни чөзүп, $Z_{1,2} = \frac{-12 \pm 16}{16}$ аларыс. Диймек, $y^2 = \frac{-3 \pm 4}{4}$; $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-3 \pm 4}$; $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Шейлеликде, $x_1 = y_1 + 2 = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$ ве $x_2 = y_2 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = 1{,}5$.

390. Берлен деңлигиң чеп бөлегине $2x^2 + 1$ гошярыс ве айырярыс, онда: $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 4x - 1 - 1 = 0$ я-да $(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) = 0$ аларыс. Инди $(x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0$ я-да $[x^2 + 1 + \sqrt{2}(x - 1)][x^2 + 1 - \sqrt{2}(x - 1)] = 0$ аларыс. Бу ерден $x^2 + 1 + \sqrt{2}(x - 1) = 0$ ве $x^2 + 1 - \sqrt{2}(x - 1) = 0$ я-да $x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ ве $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$ аларыс.

Инди ахыркы ики деңлемәниң биринҗисинден

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 + 4\sqrt{2}}}{2} \text{ я-да } x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \text{ аларыс,}$$

икинҗисинден болса $x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 - 4\sqrt{2}}}{2}$ я-да

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2 - 4\sqrt{2}}}{2}, \text{ я-да } x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} \text{ аларыс.}$$

391. Гой, $x = \frac{1}{y}$ болсун, онда $\frac{1}{y^4} - \frac{4}{y^3} - 1 = 0$ я-да $y^4 + 4y - 1 = 0$ аларыс.

Бу деңлемәни 390-нҗы меселеде чөзүпдик.

392. Берлен деңлигиң чеп бөлегини шейле язалың:

$$7x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 3x^4 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 + 3 =$$
$$= (3x^4 + 3x^2 + 3) + (2x^3 + 2) + (4x^4 + 4x) = 3(x^4 + x^2 + 1) +$$
$$+ 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 4x(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$
$$= 3(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 4x(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$
$$= (x^2 - x + 1)[3(x^2 + x + 1) + 2(x + 1) + 4x(x + 1)] =$$
$$= (x^2 - x + 1)(7x^2 + 9x + 5) = 0; \quad x^2 - x + 1 = 0;$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad 7x^2 + 9x + 5 = 0; \quad x_{3,4} = \frac{-9 \pm i\sqrt{59}}{14}.$$

393. $x^4 - 8x + 63 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 - 8x - 1 =$
$$= (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 = (x^2 + 8 + 4x + 1)(x^2 + 8 - 4x - 1) =$$
$$= (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7) = 0.$$
$$x^2 + 4x + 9 = 0; \quad x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{5}$$

ве

$$x^2 - 4x + 7 = 0; \quad x_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{3}.$$

394. Шу деңлигиң чеп бөлегини шейле язмак мүмкиндир:

$$4x^4 - 8x^3 + 4x + 1 + 4x^2 - 4x^2 = (2x^2 - 2x - 1)^2.$$

Диймек, $(2x^2 - 2x - 1)^2 = 0$ я-да $(2x^2 - 2x - 1) = 0$;

$$2x^2 - 2x - 1 = 0; \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Шейлеликде, $x_1 = x_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ве $x_2 = x_4 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

395. Илки билен $x \neq 1$ ве $x \neq 3$ белләлиң. Инди $\sqrt[3]{\frac{x - 1}{3 - x}} = y$ билен белләлиң. Онда берлен деңлемеден $(x - 1)y + (3 - x)\frac{1}{y} = 2$ я-да $y^2(x - 1) - 2y + (3 - x) = 0$ аларыс. Инди ахыркы квадрат деңлемәни чөзүп, $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (x - 1)(3 - x)}}{x - 1}$ я-да $y_{1,2} = \frac{1 \pm (x - 2)}{x - 1}$ аларыс. Диймек, $y_1 = 1$ ве $y_2 = \frac{3 - x}{x - 1}$. Инди $\sqrt[3]{\frac{x - 1}{3 - x}} = 1$ ве $\sqrt[3]{\frac{x - 1}{3 - x}} = \frac{3 - x}{x - 1}$ деңлемелерден $x = 2$ бахаготапарыс.

396. Илки билен $x \neq 1$ белләлиң, онда $\sqrt[n]{x^2 - 1} \neq 0$ болар. Диймек, берлен деңлемәниң ики бөлегини-де $\sqrt[n]{x^2 - 1}$ аңлатма бөлмек мүмкиндир. Эгер берлен деңлемәниң ики бөлегини-де $\sqrt[n]{x^2 - 1}$ аңлатма бөлсек, онда $\sqrt[n]{\frac{x + 1}{x - 1}} + \sqrt[n]{\frac{x - 1}{x + 1}} = \frac{5}{2}$ деңлемәни аларыс. Инди $\sqrt[n]{\frac{x + 1}{x - 1}} = z$ билен беллесек, онда $z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $z_1 = 2$ ве $z_2 = \frac{1}{2}$ бахалары тапарыс. Диймек, $\sqrt[n]{\frac{x + 1}{x - 1}} = 2$. Инди $\frac{x + 1}{x - 1} = 2^n$ я-да $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2^n}{1}$ аларыс. Производ пропорцияны уланып, $\frac{x + 1 + x - 1}{x + 1 - x + 1} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$ я-да $x = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$ аларыс. Инди $z_2 = \frac{1}{2}$ баханы гоюп, $\sqrt[n]{\frac{x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2}$ я-да $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1}{2^n}$ аларыс. Производ пропорцияны уланып, $\frac{x + 1 + x - 1}{x + 1 - x + 1} = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$ я-да $x = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$ аларыс.

Шейлеликде, $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$; $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$.

397. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы эдип язарыс: $\frac{a^2 + ax + x^2}{a^2 - ax + x^2} + 1 = \frac{a^2}{x^2} + 1$; шу ерден $\frac{2(a^2 + x^2)}{a^2 - ax + x^2} = \frac{a^2 + x^2}{x^2}$ аларыс. Меселәниң шертине гөрә $a^2 + x^2 \neq 0$ болмалы, онда $\frac{2}{a^2 - ax + x^2} = \frac{1}{x^2}$ я-да $\frac{2}{1} = \frac{a^2 - ax + x^2}{x^2}$, я-да $\frac{2 - 1}{1} = \frac{a^2 - ax + x^2 - x^2}{x^2}$, я-да $1 = \frac{a^2 - ax}{x^2}$. Шу ерден $x^2 + ax - a^2 = 0$ аларыс.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Иң ахырда $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

398. Берлен деңлеме үчин $x = 3$ онуң көки болуп билмейәр, шонуң үчин деңлемәниң ики бөлегини-де $(x-3)^2$ аңлатма бөлүп, $x^2 - 16 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 0$ аларыс.

Шу деңлемәни $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 16$ гөрнүшде язып, онуң чеп бөлегини долы квадрата ченли долдурярыс, ягны деңлигиң ики бөлегине-де $2x \times \times \frac{3x}{x-3}$ я-да $\frac{6x^2}{x-3}$ аңлатманы гошярыс, онда $x^2 + \frac{6x^2}{x-3} + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 16 + \frac{6x^2}{x-3}$ я-да $\left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 = 16 + 6 \cdot \frac{x^2}{x-3}$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемеден $\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 = 16 + 6\frac{x^2}{x-3}$ алып, $\frac{x^2}{x-3} = y$ билен белләйәрис, нетижеде $y^2 = 16 + 16y$ я-да $y^2 - 16y - 16 = 0$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1 = 8$ ве $y_2 = -2$ бахалары тапарыс.

Инди $\frac{x^2}{x-3} = 8$ ве $\frac{x^2}{x-3} = -2$ деңлемелери чөзүп, $x_{1,2} = 4 \pm 2i\sqrt{2}$ ве $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{7}$ көклери тапарыс.

399. $x - 5 = y$ билен белләлиң, онда $y^3(y+1)^3 + 2y^3 + (y+1)^3 = 0$ я-да $y^3(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + 2y^3 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 0$, я-да $y^6 + 3y^5 + 3y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 0$ аларыс.

Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де y^3 бөлүп, ашакдакыны аларыс:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 4 + \frac{3}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0$$

я-да

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + 3\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 3\left(y + \frac{1}{y}\right) + 4 = 0.$$

Инди $y + \frac{1}{y} = z$ билен беллесек, онда $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$ ве $y^3 + \frac{1}{y^3} = z^3 - 3z$ болар. Инди $z^3 - 3z + 3z^2 - 6 + 3z + 4 = 0$ я-да $z^3 + 3z^2 - 2 = 0$ аларыс. $z^3 + 3z^2 - 2 = z^3 + z^2 + 2z^2 - 2 = z^2(z+1) + 2(z^2 - 1) = z^2(z+1) + 2(z+1)(z-1) = (z+1)(z^2 + 2z - 2) = 0$. Бу ерден

$$z_1 = -1;\ z^2 + 2z - 2 = 0;\ \ z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3};\ \ y + \frac{1}{y} = -1;$$

$$y^2 + 1 + y = 0;\ \ y_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ \ y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Инди $y + \frac{1}{y} = -1 + \sqrt{3}$ деңлемәни чөзүп, $y_{3,4} = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm i\sqrt[4]{12}}{2}$ аларыс.

Инди $y + \frac{1}{y} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ я-да $y^2 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}y + 1 = 0$.

$$y_{5,6} = \frac{-1 - i\sqrt{3} \pm \sqrt{2i\sqrt{3} - 18}}{4}.$$

Комплекс сандан көк алмак формуласыны уланып,

$$y_{5,6} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2}$$

аларыс.

$x = y + 5$ деңлиги гөз өңүнде тутуп, $x_{1,2} = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $x_{3,4} = \frac{9 + \sqrt{3} \pm i\sqrt[4]{12}}{2}$; $x_{5,6} = \frac{9 - \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2}$ ве $x_6 = \frac{9 - \sqrt{3} - \sqrt[4]{12}}{2}$ аларыс.

400. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де куба гөтерип, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{a+x}{a-x} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2} - \frac{a-x}{a+x} =$$

$$= \frac{b+x}{b-x} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2\left(\frac{b-x}{b+x}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}\left(\frac{b-x}{b+x}\right)^2} - \frac{b-x}{b+x}$$

я-да

$$\frac{a+x}{a-x} - 3\left(\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}\right) - \frac{a-x}{a+x} =$$

$$= \frac{b+x}{b-x} - 3\left(\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}} - \sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}\right) - \frac{b-x}{b+x},$$

я-да

$$\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{b+x}{b-x} - \frac{b-x}{b+x}.$$

Ахыркы деңликден $\frac{2ax}{a^2 - x^2} = \frac{2bx}{b^2 - x^2}$ аларыс.

Шу деңлемәни чөзүп, $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{-ab}$ аларыс.

401. Илки $\sqrt[3]{35 - x^3} = y$ билен белләлиң. Онда $xy(x + y) = 30$ аларыс. Эмма $35 - x^3 = y^3$ я-да $x^3 + y^3 = 35$. Диймек, берлен деңлемәниң ерине ашакдакы системаны аларыс:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ 3x^2y + 3xy^2 = 90. \end{cases}$$

Шу ерден $(x + y)^3 = 5^3$ я-да $x + y = 5$ аларыс.
Диймек, ашакдакы система алыняр:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Шу системаны чөзүп, $x_1 = 3$; $y_1 = 2$ ве $x_2 = 2$; $y_2 = 3$ бахалары тапарыс.

402. Берлен деңлигиң сағ бөлегине гаралың:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} - 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} - 1 =$$

$$= \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - 1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}.$$

Диймек, берлен деңлемәни ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$(\sqrt[3]{2})^{x^2 - 6x - 4} = (\sqrt{2})^x.$$

Шу деңликден $2^{\frac{x^2-6x-4}{3}} = 2^{\frac{x}{2}}$ я-да $\frac{x^2-6x-4}{3} = \frac{x}{2}$ аларыс.

Иң ахыркы деңлемәни чөзүп, $x_1 = 8$ ве $x_2 = -\frac{1}{2}$ аларыс.

403. $x^{\log_2 2x} = 2^2$; $\log_2 2x \cdot \log_2 x = 2$; $(\log_2^2 + \log_2 x)\log_2 x = 2$ я-да

$(1 + \log_2 x)\log_2 x = 2$; $\log_2 x + \log_2^2 x - 2 = 0$; $\log_2 x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$;

$$\log_2 x_1 = 1;\ x_1 = 2;\ \log_2 x_2 = -2;\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

404. Илки билен $a^x = b$ деңлиги ики түйсли эдип логарифмлалиң, онда $x \lg a = \lg b$ ве $x \log_a a = \log_b b$ аларыс. Инди $\log_a b \cdot \lg a = \lg b$ я-да $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ аларыс.

Шу формуланы меселәниң шертинде берлен деңлигиң сағ бөлегиндәки көпелдижилер үчин уланып,

$$\log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3}$$

$$\log_4 3 = \frac{\lg 3}{\lg 4}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\log_{10} 9 = \frac{\lg 9}{\lg 10}$$

аларыс. Шу деңликлери членме-член көпелдип, $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_{10} 9 = \lg 2$ аларыс. Ш. с. т. э.

405. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы эдип язарыс:

$$9 \cdot 5^{2x-4} + 4 \cdot 5^4 \cdot 5^{4-2x} = 325 \text{ я-да } 9 \cdot 5^{2x-4} + \frac{4 \cdot 25^2}{5^{2x-4}} = 25 \cdot 13.$$

Инди $5^{2x-4} = y$ билен белләп, $9y + \frac{4 \cdot 25^2}{y} = 25 \cdot 13$ я-да $9y^2 - 25 \cdot 13y + 4 \cdot 25^2 = 0$ квадрат деңлемәни аларыс. Инди

$$y_{1,2} = \frac{25 \cdot 13 \pm \sqrt{25^2 \cdot 13^2 - 4^2 \cdot 25^2 \cdot 9}}{18} = \frac{25 \cdot 13 \pm \sqrt{25^2(13^2 - 12^2)}}{18} =$$

$$= \frac{25 \cdot 13 \pm 25 \cdot 5}{18};\quad y_1 = \frac{25 \cdot 18}{18} = 25;\ y_2 = \frac{25 \cdot 8}{18} = \frac{100}{9}.$$

Инди $5^{2x-4} = 25$ я-да $2x - 4 = 2$; $x_1 = 3$. $5^{2x-4} = \frac{100}{9}$ я-да $(5^{x-2})^2 = \frac{100}{9}$ я-да

$$5^{x-2} = \frac{10}{3},$$

$$x_2 = \log_5 \frac{10}{3} + 2 = \log_5 \frac{2}{3} + 3.$$

406. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де 2^x көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$$2^{2x} + 1 = 2 \cdot 2^x \cdot \cos 2x.$$

Инди $2^x = y$ билен беллесек, онда $y^2 - 2y\cos 2x + 1 = 0$ деңлемәни аларыс. Бу ерден

$$y_{1,2} = \cos 2x \pm \sqrt{\cos^2 2x - 1}.$$

Хакыкы санлар областында чөзүви болмагы үчин $\cos^2 2x - 1 = 0$ болмалыдыр. Бу ерден $\cos^2 2x = 1$. Берлен деңлеме ашакдакы ялы язылар: $2^x + 2^{-x} = 2$. Шу деңлемәни чөзүп, $2^x = 1$ тапарыс. Бу ерден $x = 0$ аларыс.

407. Берлен деңлемеден $2y^2 = x^2 - 1$ аларыс. Шу деңлигиң чеп бөлеги жүбүт сан, диймек, $x^2 - 1$ жүбүт сандыр. Онда x тәк болмалыдыр. Инди $2y^2 = (x+1)(x-1)$ деңлигиң сағ бөлегиндәки көпелдижилериң хер бири жүбүт сан боланы себәпли, шол деңлигиң сағ бөлеги 4-е бөлүнмелидир, диймек, $2y^2$ сан-да 4-е бөлүнмелидир. Шейле диймек, y жүбүт сан диймекдир. Эмма йөнекей санларың ичинде диңе бир жүбүт сан 2-дир, ягны $y = 2$. Эгер $y = 2$ болса, онда $2y^2 = x^2 - 1$ деңликден $x = 3$ баха аларыс.

408. Гой, $x \geqslant y \geqslant z$ болсун. Берлен деңлемәниң чеп бөлегиндәки гошулыжылары x билен чалшыралың, онда $3x \geqslant xyz$ деңсизлиги аларыс. Шу ерде деңлик диңе $x = y = z$ боланда мүмкиндир. Онда $3x = x^3$ я-да $x = \sqrt{3}$ аларыс. Шейлеликде, деңлик мүмкин дәлдир. Инди $3x > xyz$ деңсизлиге гаралың. Шу деңсизликден $yz < 3$ аларыс, чүнки $x > 0$ болмалыдыр. Ахыркы деңсизликден гөрнүши ялы, $y = 1$; $z = 2$; $y = 2$; $z = 1$ я-да $y = 1$; $z = 1$ болмалыдыр. Онда $x + y + z = xyz$ деңликден биринжи ве икинжи ягдай үчин $x + 3 = 2x$ аларыс. Диймек, $x = 3$.

Инди $y = 1$, $z = 1$ боланда берлен деңлеме ашакдакы гөрнүши алар.

$$2 + x = x.$$

Шу деңлемәниң көки ёкдур.

Галан чөзүвлери ёкардакы тапылан чөзүвлериң орунларыны чалшырмак билен алынар.

$$x = 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1;\quad y = 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3;\quad z = 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 2$$

409. Косинуслар теоремасыны уланалың, онда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Инди $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ алып, шу деңлиги меселәниң шертинде берлен деңлемә гоялың, онда $b^2x^2 + 2bc\cos A \cdot x + c^2 = 0$ аларыс. Шу ерден

$$x = \frac{-bc\cos A \pm \sqrt{b^2c^2\cos^2 A - b^2c^2}}{b^2},\ \text{я-да } x = \frac{c \cdot \cos A + c\sqrt{\cos^2 A - 1}}{b},$$

я-да $x = -\frac{c}{b}(\cos A \pm \sqrt{-\sin^2 A}$ аларыс.

Ахыркы деңликден гөрнүши ялы, x-иң хакыкы бахасы ёкдур.

410. Системаның биринжи деңлемесини шейле язарыс: $x^{y+1} = 3^3$. Инди $(y+1)\log_3 x = 3$. Системаның икинжи деңлемесинден $(2y-5)\log_3 x = -1$ аларыс.

Ахыркы ики деңлиги членме-члeн бөлүп, $\frac{y+1}{2y-5} = -3$ я-да $y = 2$ аларыс. Инди $x^{y+1} = 27$ деңликден $x^3 = 27$ я-да $x = 3$ аларыс.

411. Системаның биринжи деңлемесинден ашакдакыны аларыс:

$$x^3y^3 + x^3 + y^3 = 17.$$

Инди $x + y = u$ билен ве $x \cdot y = v$ билен беллесек, онда

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 3uv = 17 \\ u + v = 5 \end{cases} \text{ аларыс.}$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Инди шу системаның икинжи деңлемесиниң ики бөлегини-де куба гөтерип, алнан нетижеден шол системаның биринжи деңлемесини члениме-члeн айырсак, онда $18uv = 108$ я-да $uv = 6$ аларыс.

Инди $\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$ системаны чөзүп, $u_1 = 3$; $v_1 = 2$, я-да $u_2 = 2$; $v_2 = 3$ бахалары аларыс. Онда $x + y = 3$ ве $xy = 2$, я-да $x + y = 2$ ве $xy = 3$. Бу ерден $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 2$.

Инди $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$ системаны чөзүп, $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$; $y_1 = 1 - i\sqrt{2}$; $x_2 = 1 - i\sqrt{2}$; $y_2 = 1 + i\sqrt{2}$ көклери тапарыс.

412. Берлен системаны ашакдакы ялы язалың:

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{xyz} = \dfrac{1}{a} \\[2mm] \dfrac{x+z}{xyz} = \dfrac{1}{b} \\[2mm] \dfrac{x+y}{xyz} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Шу системадан

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{a} \\[2mm] \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{b} \\[2mm] \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

системаны аларыс. Шу деңликлери члениме-члeн гошуп,

$$\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

аларыс.

Инди $\frac{1}{xz} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\frac{1}{xy} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\frac{1}{yz} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ деңликлерден $\frac{1}{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $\frac{1}{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)$ аларыс. Ахыркы үч деңлиги члениме-члeн көпелдип,

$$\frac{1}{xyz} = \pm\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)}$$

аларыс. Шу ерден

$$x = \frac{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}}{\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)}}$$

тапарыс. Бейлеки нәбеллилериң бахалары хем шуңун ялы тапылар.

413. Берлен деңлигиң чеп бөлегини шейле язалың:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{y} + 3 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y - 2\sqrt{y} + 1 = (x - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{y} - 1)^2.$$

Диймек, $(x - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0$. Ахыркы деңлигиң чеп бөлегиндäки гошулыжыларың хер бири положител сандыр, чүнки ислендик хакыкы санын квадраты положител сандыр. Диймек, шол деңлик диңе гошулыжыларың хер бири нула деңболанда ерине етирилйäр, ягны $(x - \sqrt{2})^2 = 0$ ве $(\sqrt{y} - 1)^2 = 0$ болмалыдыр. Шейлеликде, $x = \sqrt{2}$ ве $y = 1$ боланда берлен деңлик ерине етирилйäр.

414. Гой, арифметики прогрессияның тапавуды d болсун, онда $a_n = a_1 + (n - 1)d$ формуланы арифметики прогрессияның кәбир членлери үчин уланың: $\sqrt{2} - 1 = dl$ ве $3 - 1 = dk$ аларыс. Шу ерде l ве k санлар битин санлардыр. Ёкарда язылан деңликлерден $\frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 1} = \frac{l}{k}$ я-да $\frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{l}{k}$. Шу деңлигиң чеп бөлеги иррационал сан, эмма сағ бөлеги рационал сан, шейле болуп билмез. Диймек, членлериң ичинде 1, $\sqrt{2}$ ве 3 санлар душ гелйән арифметик прогрессия ёкдур.

415. Арифметики прогрессияның ислендик члениниң кесгитлемек үчин $a_m = a_1 + (m - 1)d$ ве $a_n = a_1 + (n - 1)d$ формулалары язып,

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{\dfrac{a_1 + a_m}{2}\cdot m}{\dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n} = \frac{[2a_1 + (m - 1)d]\,m}{[2a_1 + (n - 1)d]\,n} \text{ я-да } \frac{[2a_1 + (m - 1)d]\,m}{[2a_1 + (n - 1)d]\,n} = \frac{m^2}{n^2}$$

деңлиги аларыс. Инди шу ерден a_1 тапарыс.

$$\frac{2a_1 + (m - 1)d}{2a_1 + (n - 1)d} = \frac{m}{n} \text{ я-да } m[2a_1 + (n - 1)d] = n[2a_1 + (m - 1)d],$$

я-да $a_1 = \frac{md - nd}{2(m - n)} = \frac{d}{2}$; диймек, $a_1 = \frac{d}{2}$.

$$\text{Инди } \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m - 1)d}{a_1 + (n - 1)d} = \frac{\dfrac{d}{2} + (m - 1)d}{\dfrac{d}{2} + (n - 1)d} = \frac{\dfrac{1}{2} + m - 1}{\dfrac{1}{2} + n - 1} = \frac{2m - 1}{2n - 1}.$$

Шейлеликде, $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m - 1}{2n - 1}$.

416. Меселәниң шертине гөрә алнан n членлериң S_n жеми n-иң квадратындан 3 эссе көп болмалы, ягны $S_n = 3n^2$ болмалы. Эмма $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ве ш. м. боланы себәпли $S_1 = a_1 = 3\cdot 1^2 = 3$; $S_2 = 3\cdot 2^2 = 12$, ягны $a_2 = S_2 - a_1 = 12 - 3 = 9$. Инди $a_2 = a_1 + d$ деңликден $d = 9 - 3 = 6$.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессия 3, 9, 15, 21, ... болар.

417. Меселәниң шертинден ашакдакыны аларыс:

$$a_1 + a_{31} = a_3 + a_{29} = a_5 + a_{27} = a_7 + a_{25} = a_9 + a_{23} = a_{11} + a_{21} = a_{13} + a_{19} = a_{15} + a_{17}.$$

Диймек, $a_1 + a_{31} = \frac{784}{8} = 98$.

Инди $a_1 + a_{31} = a_6 + a_{26} = a_{11} + a_{21}$ ве $a_{16} = \frac{a_1 + a_{31}}{2}$ боланы себәпли

$$a_1 + a_6 + a_{11} + \ldots + a_{31} = 3 \cdot 98 + 49 = 343.$$

418. Меселәниң шертине гөрә $a_1 + a_2 + a_3 = 39$ ве $a_1a_2a_3 = 729$. $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ боланы себәпли $a_2 = \sqrt{a_1a_3}$ я-да $a_2^2 = a_1a_3$. Иң ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де a_2 көпелдип, $a_2^3 = a_1a_2a_3 = 729$ я-да $a_2^3 = 9^3$ аларыс. Бу ерден $a_2 = 9$. Инди $a_1 + a_3 = 39 - 9 = 30$ ве $a_1a_3 = 81$. Шу деңликлерден $x^2 - 30x + 81 = 0$ алып, $x_1 = 3$, $x_2 = 27$ тапарыс.

Шейлеликде, $a_1 = 3$; $a_2 = 9$; $a_3 = 27$ я-да 27, 9, 3. ... Нетижеде ики прогрессия алынýар: 3, 9, 27, ... ве 27, 9, 3, ...

419. Берлен деңсизлигиң чеп бөлегинден гөрнүши ялы, шол деңсизлик $x \geqslant 13$ ве $x < -13$ боланда ерликлидир. Эгер $x < -13$ болса, онда меселәниң шертинде берлен деңсизлигиң чеп бөлеги положител болуп, саг бөлеги отрицателдир. Башгача айданымызда, $x < -13$ боланда берлен деңсизлик канагатландырылмаýр

Эгер $x = 13$ болса, онда шол деңсизлик деңлиге өврүлйәр.

Эгер $x > 13$ болса, онда берлен деңсизлигиң сат бөлеги 120-ден кичидир, хакыкатдан-да $\frac{600}{13 - 8} = 120$. Шу халда шол деңсизлигиң чеп бөлеги 120-ден улудыр.

Шейлеликде, $x > 13$ болса берлен деңсизлиги канагатландырмаýар. Диймек, $x = 13$ болмалыдыр.

420. $a + b = 1$ деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ аларыс. Эмма $(a - b)^2 \geqslant 0$ боланы себәпли $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ болар. Инди $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ деңлиги $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ деңсизлик билен гошуп, $2a^2 + 2b^2 \geqslant 1$ аларыс. Шу деңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $4a^4 + 8a^2b^2 + 4b^4 \geqslant 1$ аларыс. Шу деңсизлиги $4(a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$ деңсизлик билен, ягны $4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4 \geqslant 0$ деңсизлик билен члениме-члeн гошуп, $8a^4 + 8b^4 \geqslant 1$ аларыс.

Иң ахыркы деңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $64a^8 + 128a^4b^4 + 64b^8 \geqslant 1$ деңсизлиги аларыс. Инди шу деңсизлиги $64(a^4 - b^4)^2 \geqslant 0$ я-да $64a^8 - 128a^4b^4 + 64b^8 \geqslant 0$ деңсизлик билен члениме-члeн гошуп, $128a^8 + 128b^8 \geqslant 1$ аларыс.

Диймек, $a^8 + b^8 \geqslant \frac{1}{128}$

421. Ислендик x үчин $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$. Шу деңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ аларыс. Инди меселәниң шертиндәки деңсизлигиң ики бөлегини-де x^4 бөлсек, онда $x^4 + x^2 - 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \geqslant 0$ я-да $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geqslant 4$ аларыс. Ёкарда гөркезилен деңсизликлер гөз өңүнде тутулса, иң ахыркы деңсизлик айдың болар.

422. a^2, b^2, c^2, d^2 санлар үчин ашакдакы деңсизлик ерликлидир. $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}$ я-да $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt{abcd}$. Эдил шонуң ялы $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b^2}$ я-да $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Инди $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt{abcd}$ ве $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ деңсизликлери члениме-члeн гошуп, $2a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt{abcd} + 2ab$ аларыс. Иң ахыркы деңсизлиги ашакдакы ялы

язмак мүмкиндир:

$$2(a^2 + b^2) + c^2 + d^2 \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} + 4\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}$$

я-да

$$2(a^2 + b^2) + c^2 + d^2 \geqslant 2\sqrt{ab}\,(\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}). \text{ Ш. с. т. э.}$$

423. Меселәниң шертиндәки деңсизликден $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) \geqslant 0$ деңсизлиги аларыс. Инди $a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab - ab) = (a + b)(a - b)^2$. Бу ерден $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) \geqslant 0$. Ш. с. т. э.

424. Белли болшы ялы, $\frac{a_1 + b_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1b_1}$. Эгер $a_1 = \frac{a + b}{2}$ ве $b_1 = \sqrt{ab}$ дийип гүман этсек, онда $\frac{\frac{a + b}{2} + \sqrt{ab}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a + b}{2}\sqrt{ab}}$ деңсизлиги аларыс. Шу ерден $\frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4} \geqslant \sqrt{\frac{(a + b)\sqrt{ab}}{2}}$ я-да $\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} \geqslant \sqrt{\frac{(a + b)\sqrt{ab}}{2}}$ аларыс. Ахыркы деңсизлигиң ики бөлегини-де 4-нжи дережә гөтерелиң, онда:

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8}{256} \geqslant \frac{(a + b)^2 ab}{4}$$

я-да $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a + b)^2$ аларыс. Ш. с. т. э.

425. Илки билен көпелижилериң хер бирини айратын хасаплалың.

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4 - 1}{4} = \frac{2 - 1}{2} \cdot \frac{2 + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{9 - 1}{9} = \frac{3 - 1}{3} \cdot \frac{3 + 1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{16 - 1}{16} = \frac{4 - 1}{4} \cdot \frac{4 + 1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{n + 1}{n}$$

Шу деңликлериң хеммесини члениме-члeн көпелделиң:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \ldots$$

$$\ldots \frac{n - 2}{n - 1} \cdot \frac{n}{n - 1} \cdot \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{n + 1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n + 1}{n}.$$

Диймек, $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$ болар.

426. Берлен жеми S билен белләп, деңлигиң ики бөлегини-де 2-ә көпелтсек, ашакдакыны аларыс:

$$2S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \ldots + \frac{2n - 1}{2^{n-1}}.$$

Инди гошулыжыларың хер бирини ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2^2}=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}$$

$$\frac{7}{2^3}=\frac{2}{2^3}+\frac{5}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2n-1}{2^{n-1}}=\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^{n-1}}.$$

Инди ашакдакыны аларыс:

$$2S=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\ldots+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}$$

я-да $2S=1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^n},$$

я-да $2S=1+2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+S-\dfrac{2n-1}{2^n},$

я-да $S=1+\dfrac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}.$

Диймек, гөзленилйән жем $S=3-\dfrac{2n+3}{2^n}.$

427. Илки билен A_2 сан 34300 сана бөлүненде галян галындыны тапалың.

$$A_2=7^7=823543=34300\cdot 24+343.$$

Инди A_k сан 34300 сана бөлүненде-де галындыда 343 сан галяр дийип гүман эделин ве шу ягдайда A_{k+1} сан 34300 сана бөлүненде галындыда 343 санын галандыгыны субут эделиң.

Хакыкатдан-да, гүман эдилишине гөрә $A_k=34300\cdot a_k+343$.

Инди $A_{k+1}=7^{A_k}$, ягны $A_{k+1}=7^{34300a_k+343}=7^{4(8575a_k+85)+3}=7^{4m}\cdot 7^3=$ $=7^{4m}\cdot 343.$

Инди 7 санын 4-нжи derejesini тапалың, ягны

$$7^4=(7^2)^2=49^2=2401=100k+1.$$

Шейлеликде, 7 саны 4-е кратны болан дереҗә гетерсек, нетиҗеде 01 билен гутарян сан аларыс. Диймек,

$$A_{k+1}=7^{A_k}=7^{4m}\cdot 343=(100k+1)\cdot 343=34300k+343.$$

Шейлеликде, A_k сан 34300 сана бөлүненде галындыда 343 сан галян болса, онда A_{k+1} сан 34300 сана бөлүненде-де галындыда 343 сан галяр. Диймек, A_p сан 34300 сана бөлүненде галындыда 343 сан галжак. Эдил шонун ялы A_n сан 34300 сана бөлүненде-де галындыда 343 сан галжакдыр. Онда A_p-A_n тапавут 34300 сана галандысыз бөлүнер. Ш. с. т. э.

428. Гошулыжыларын хер бирини ашакдакы ялы эдип язалың:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Бу деңликде $k=1, 2, \ldots, 1968$ бахалары берип, аларыс:

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2};$$

$$\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2};$$

$$\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2\cdot 1967+1}{1967^2\cdot 1968^2}=\frac{1}{1967^2}-\frac{1}{1968^2};$$

$$\frac{2\cdot 1968+1}{1968^2\cdot 1969^2}=\frac{1}{1968^2}-\frac{1}{1969^2}.$$

Шу деңликлери члеиме-член гошуп, ашакдакылары аларыс:

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2\cdot 1967+1}{1967^2\cdot 1968^2}+\frac{2\cdot 1968+1}{1968^2\cdot 1969^2}=$$

$$=1-\frac{1}{1969^2}=\frac{1968\cdot 1970}{1969^2}.$$

429. Мeселәнин шертиндәки жемин гошулыжыларының хер бирини ашакдакы ялы эдип язалың:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4 5}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Шу деңлемелери члеиме-член гошуп, ашакдакылары аларыс:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

430. $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = (6^2)^n + 3^n \cdot 3^2 \cdot 3^n = 36^n + 9\cdot 3^n + 3^n = 36^n + 10\cdot 3^n = (3\cdot 12)^n + 11\cdot 3^n - 3^n = 12^n\cdot 3^n - 3^n + 11\cdot 3^n = 3^n(12^n - 1) + 11\cdot 3^n = 3^n(12-1)(12^{n-1} + 12^{n-2} + \dots + 1) + 11\cdot 3^n.$

Диймек, $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 3^n\cdot 11(12^{n-1} + 12^{n-2} + \dots + 1 + 1).$

Ахыркы деңлигиң сag бөлеги 11-е бөлүнйәр, диймек, онуң чеп бөлегиндәки аңлатма-да 11-е бөлүнжекдир. ш. с. т. э.

431. $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9\cdot 3^{2n} + 2\cdot 8^{2n} = (11-2)\cdot 3^{2n} + 2\cdot 8^{2n} = 11\cdot 3^{2n} - 2\cdot 3^{2n} + 2\cdot 8^{2n} = 11\cdot 3^{2n} + 2(64^n - 9^n).$ Диймек, $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11\cdot 3^{2n} + 2(64^n - 9^n).$

Ахыркы деңлигиң сag бөлегиндәки гошулыжыларың бириңжиси 11-е бөлүнйәр, шол гошулыжыларың икинжиси-де 11-е бөлүнйәр, чүнки $64^n - 9^n$ аңлатма n-иң ислендик битин бахасында $(64 - 9)$ тапавуда, ягны 55-е бөлүнйәр.

Шейлеликде, берлен $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ аңлатма n-иң ислендик битин бахасында 11-е бөлүнйәр.

432. $11^{6n+3} + 1 = 11^{3(2n+1)} + 1 = (11^3)^{2n+1} + 1 = 1331^{2n+1} + 1 = (1332 - 1)^{2n+1} + 1 = 1332A - 1 + 1 = 1332A.$

Эмма 1332 сан 148-е бөлүнйәр, диймек, $11^{6n+3} + 1$ сан-да n-иң ислендик битин положител бахасында 148-е бөлүнжекдир.

433. $4^{2n+2} - 15n - 16 = 16\cdot 4^{2n} - 15n - 16 = 16(4^{2n} - 1) - 15n = 16(16^n - 1) - 15n = 16(16-1)(16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1) - 15n = 16\cdot 15(16^{n-1} + 16^{n-2} + 16^{n-3} + \dots + 1) - 15n = 15(16^n + 16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 16) - 15n = 15(16^n + 16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 16 - n) = 15[(16^n - 1) + (16^{n-1} - 1) + \dots + (16 - 1)] = 15[(16-1)(16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1) + (16 - 1) \times (16^{n-2} + 16^{n-3} + \dots + 1) + \dots + (16 - 1)] = 15\cdot 15[(16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1) + (16^{n-2} + 16^{n-3} + \dots + 1) + \dots + 1] = 225\cdot B.$ Ш. с. т. э.

Беллик: 1) $-n = \underbrace{-1-1-1-\dots-1}_{n \text{ гезек}}$ гөрнүшде язылды.

2) Иң ахыркы скобкаларың ичиндәки аңлатма гысгаҗа B билен белленилди.

434. $n^2 + 3n + 5 = n^2 + 7n - 4n - 28 + 33 = n(n+7) - 4(n+7) + 33 = (n+7)(n-4) + 33;$ $n^2 + 3n + 5 = (n-4)(n+7) + 33.$

Шу деңлигиң сag бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси 11-е бөлүнйәр, онда $n^2 + 3n + 5$ саның 11-е бөлүнмеги үчин $(n-4)(n+7)$ сан 11-е бөлүнмелидир. Эмма $(n+7) - (n-4) = 11$. Шу деңлигиң сag бөлеги 11-е бөлүнйәр, онда чеп бөлегиндәкилериң икиси-де бир вагтда я 11-е бөлүнмели я-да икиси-де 11-е бөлүнмели дәл. Диймек, эгер $(n+7)\cdot(n-4)$ сан 11-е бөлүнйән болса, онда шол сан 121-де бөлүнмели, чүнки шол ердәки көпелдижилериң хер бири 11-е бөлүнйәр. Инди $n^2 + 3n + 5 = (n-4)\cdot(n+7) + 33$ саның сag бөлегиндәки бириңжи гошулыжы 121-е бөлүнйәр, эмма икинжиси бөлүнмейәр. Диймек, $n^2 + 3n + 5$ сан n-иң хич бир бахасында 121-е бөлүнмейәр.

435. $7^{2n+1} - 25\cdot 2^{2n+1} + 2^{2n+2} = 7\cdot 7^{2n} - 25\cdot 2\cdot 2^{2n} + 4\cdot 2^{2n} = 7\cdot 7^{2n} - 46\cdot 2^{2n} = 7\cdot 7^{2n} - (53 - 7)\cdot 2^{2n} = 7\cdot 7^{2n} - 53\cdot 2^{2n} + 7\cdot 2^{2n} = 7(7^{2n} + 2^{2n}) - 53\cdot 2^{2n} = 7(49^n + 4^n) - 53\cdot 2^{2n}.$ Диймек, $7^{2n+1} - 25\cdot 2^{2n+1} + 2^{2n+2} = 7(49^n + 4^n) - 53\cdot 2^{2n}.$

Иң ахыркы деңлигиң сag бөлегиндәки гошулыжыларың икинжиси 53-е бөлүнйәр, бириңжи гошулыжының, ягны $7(49^n + 4^n)$ аңлатманың 53-е бөлүнмеги үчин n сан тәк болмалыдыр. Шейлеликде, n сан тәк боланда берлен аңлатма 53-е бөлүнйәр.

436. Арифметики прогрессияның дөрт члениниң бириңжисини a билен тапавудыны болса d билен беллесек, меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлиги аларыс:

$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) = (2n+1)^2$ я-да $(2n+1)^2 = 2(2a+3d).$

Шу деңлигиң сag бөлеги жүбүт сан, чеп бөлеги болса тәк сан. Шейле болуп билмез. Ш. с. т. э.

437. $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$ деңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гетерелиң, онда $2 > \frac{m^2}{n^2}$ аларыс, бу ерден $2n^2 - m^2 > 0$ аларыс. m ве n санларың битин сан боланлары себәпли $2n^2 - m^2$ сан битин сан болмалыдыр, ягны $2n^2 - m^2 \geqslant 1$ болмалыдыр. Инди $(\sqrt{2}n + m)(\sqrt{2}n - m) \geqslant 1$ я-да $\sqrt{2}n - m \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}n + m}$.

Меселәниң шертине гөрә $m < \sqrt{2}n$, шонуң үчин $\sqrt{2}n - m > \frac{1}{\sqrt{2}n + \sqrt{2}n}$ я-да $\sqrt{2}n - m > \frac{1}{2\sqrt{2}n}$, я-да $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^2}$. Ш. с. т. э.

438. Меселәниң шертиндәки деңсизликден $\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$ аларыс. Эмма бири-бирине дең болмадык a ве b ики положител сан үчин $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ деңсизлик ерликлидир. Эдил шол тассыкламаны n саны положител сан үчин уланcак, $\frac{1+2+3+\dots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$ аларыс. Шу деңсизлигиң чеп бөлегиндәки дробуң санавжысыны арифметики прогрессияның члендериниң жемини кесгитлемек үчин уланылян формула боюнча хасапласак, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n} = \frac{1+n}{2}.$$

Диймек,

$$\frac{1+n}{2} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots n}$$

я-да $\left(\frac{1+n}{2}\right)^n > 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots n$, я-да $n! \leqslant \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$. Ш. с. т. э.

439. Меселәни чөзмек үчин $\frac{x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ дробуң санавжысыны ве майдалавжысыны $(x-1)$ аңлатма көпелделиң, онда ашакдакыны аларыс:

$$\frac{(x-1)(x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{x^{45} + x^{34} + x^{23} + x^{12} + x - x^{44} - x^{33} - x^{22} - x^{11} - 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1} =$$

$$= \frac{(x^{45} - 1) - (x^{44} - x^{34}) - (x^{33} - x^{23}) - (x^{22} - x^{12}) - (x^{11} - x)}{x^5 - 1} =$$

$$= \frac{[(x^5)^9 - 1] - x^{34}(x^{10} - 1) - x^{23}(x^{10} - 1) - x^{12}(x^{10} - 1) - x(x^{10} - 1)}{x^5 - 1}.$$

Шу дробуң санавжысындакы гошулыжыларың хер бири (x^5-1) аңлатма бөлүнйәр, диймек, дробуң санавжысы (x^5-1) аңлатма гысгаляр.

440. Шу ерде бөлүжи икинжи дережели көпчлен, шонуң үчин галынды биринжи дережели көпчлен болмалыдыр. Шол галындыны $ax+b$ аркалы белләлиң. Инди x^2+1 көпчлениң көклери болуп, i ве $-i$ хызмат эдйәрлер. Шол бахалары берлен бөлүнижидәки x-иң орнуна гойсак, галындыны аларыс:

$$f(i)=1+i+i^3+i^9+i^{27}+i^{81}+i^{243}=1+i+i^3+(i^3)^3+(i^9)^3+(i^{27})^3+(i^{81})^3=1+i-i+i-i+i-i=1;$$

$$f(-i)=1-i+i-i+i-i+i=1.$$

Диймек, ёкарда белленилен $ax+b$ галындының ашакдакы бахалары болмалыдыр:

$$ai+b=1;\quad a=0;$$
$$-ai+b=1;\quad b=1.$$

Диймек, галынды 1-е деңдир.

441. Меселәниң шертине гөрә $a^{100}-2$ сан 73-е бөлүнйәр, онда оны $a^{100}-2=73k$ гөрнүшде язмак мүмкиндир, бу ерде k натурал сандыр. Эдил шонуң ялы, $a^{101}-69$ сан 73-е бөлүнйәр, диймек, $a^{101}-69=73l$ гөрнүшде язмак мүмкиндир. Инди $a^{100}-2=73k$ деңликден $a^{101}=73ak+2a$ деңлиги аларыс. Эмма $a^{101}=73l+69$. Диймек, $73l+69=73ak+2a$ я-да $2a=73(l-ak)+69$. Иң ахыркы деңлигиң чеп бөлеги жүбүт сан, диймек, l сан тәк болмалыдыр. Islendik тәк саны $2n+1$ гөрнүшде язмак мүмкиндир, диймек, $l-ak=2n+1$ болмалыдыр. Онда $2a=73(2n+1)+69$ я-да $2a=146n+142$ я-да $a=73n+71$ аларыс. Иң ахыркы деңликден гөрнүши ялы, a сан 73-е бөлүненде галындыда 71 галяр.

442. Берлен дробы гысгалтмак меселесини $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ дробы гысгалтмак меселеси билен чалшырмак мүмкиндир. Эмма $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}=a+\frac{a^2+1}{a^3+2a}$. Инди $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$ дробы гысгалтмак меселесини $\frac{a^3+2a}{a^2+1}$ дробы гысгалтмак меселеси билен чалшырярыс. Эмма $\frac{a^3+2a}{a^2+1}=a+\frac{a}{a^2+1}$.

Инди $\frac{a}{a^2+1}$ дроба-да озалкылар ялы гараярыс, ягны $\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$. Иң ахыркы дробдан гөрнүши ялы, ол a-ның хич бир бахасында гысгалмаяр. Шейлеликде, берлен дроб a-ның хич бир битин бахасында гысгалмаяр.

443. Хакыкатдан-да, меселедәки тассыклама гөрә $1156=34^2$, $111556=334^2$ ве ш. м. Инди шу тассыкламаны шол ызыгидерлигиң умумы члени үчин субут эделиң. Шол максат билен $\underbrace{111\ldots111}_{n\text{ гезек}}\underbrace{555\ldots555}_{(n-1)\text{ гезек}}6$ саны гаралың.

$$\text{Инди }\underbrace{111\ldots111}_{n\text{ гезек}}\underbrace{555\ldots555}_{(n-1)\text{ гезек}}6=\overbrace{111\ldots111}^{n\text{ гезек}}\overbrace{555\ldots555}^{n\text{ гезек}}+1=10^{2n-1}+$$
$$+10^{2n-2}+10^{2n-3}+\ldots+10^{n+2}+10^{n+1}+10^n+5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2}+5\cdot10^2+$$
$$+5\cdot10+5+1=10^n(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\ldots+10^2+10+1)+$$
$$+5(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^2+10+1)+1.$$

Шу гошулыжыларың хер бирини геометрики прогрессияның члеңлериниң жемини анладян формула боюнча хасаплап, ашакдакыны аларыс.

$$10^n(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^2+10+1)+5(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^2+10+1)+$$
$$+1=10^n\cdot\frac{10^n-1}{10-1}+5\cdot\frac{10^n-1}{10-1}+1=\frac{10^{2n}-10^n}{9}+\frac{5\cdot10^n-5}{9}+1=$$
$$=\frac{10^{2n}+4\cdot10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2.$$

Шейлеликде, тассыклама субут эдилди.

444. 19681968 ... саның ызындан үчбелгили саны язмак диймек 1968 ... 19681968000 саның үстүне үчбелгили сан гошмак диймекдир. Гой, шол гошулян үчбелгили сан N болсун. Онда 1968 ... 19681968000 + N сан аларыс. Шу ердәки гошулыжыларың биринжисини $7\cdot8\cdot9=504$-е бөленимизде галындыда 408 сан алыныр. Меселәниң шертини канагатландырмак үчин $408+N$ жем 504-е бөлүнмелидир. Диймек, N сан 600-е деңдир.

Шейлеликде, гөзленилйән сан 19681968600 болмалыдыр.

445. Бирмеңзеш цифрлерден дүзүлен алтыбелгили сан $N=\overline{aaaaaa}$ гөрнүшде я-да $N=100000a+10000a+1000a+100a+10a+a$ гөрнүшде языляр. Эдил шонуң ялы, бирмеңзеш цифрлерден дүзүлен дөртбелгили сан $M=1000b+100b+10b+b$ гөрнүшде язылар. Меселәниң шертине гөрә $N=233M+x$ я-да

$$a\cdot10^5+a\cdot10^4+a\cdot10^3+a\cdot10^2+a\cdot10+a=233(b\cdot10^3+b\cdot10^2+b\cdot10+b)+x$$

я-да $\frac{(10^6-1)a}{10-1}=\frac{(10^4-1)b}{10-1}\cdot233+x$, я-да $(10^6-1)a=(10^4-1)b\cdot233+9x$ аларыс.

Меселәниң икинжи шертинден пейдаланып, $\frac{10^5a-a}{10-1}=\frac{10^3b-b}{10-1}\cdot233+x-1000$ я-да $(10^5-1)a=(10^3-1)b\cdot233+9x-9000$ аларыс.

Инди $a(10^6-1)=(10^4-1)b\cdot233+9x$ ве $a(10^5-1)=(10^3-1)b\cdot233+9x-9000$ деңликлериң биринжисинден икинжисини айрып, $100a=233b+1$ аларыс. Бу ерден $a=\frac{233b+1}{100}=2b+\frac{33b+1}{100}$. Меселәниң шертине гөрә $\frac{33b+1}{100}$ битин сан болмалыдыр. Онда $b=3$ болмалы, диймек, $a=2\cdot3+\frac{33\cdot3+1}{100}=7$.

Шейлеликде, бөлүниже 777777 ве бөлүжи 3333-дир.

446. Шу ерде 5 көпүклик монета икисинде-де душ гелйәр. Шонуң үчин биз диңе 2 көпүклик ве 3 көпүклик монеталара гараярыс. Эгер 1 манатдан, ягны 100 көпүкден 5 көпүклиги бирнәче гезек айырсак, онда 95, 90, 85, 80, 75, 70, ..., 25, 20, 15, 10, 5 санлары аларыс. Шу санларың ичинде 2-ә бөлүнйән санларың саны 3-е бөлүнйән санларың санындан көпдүр. Диймек, меселәниң тассыкламасы догры, Ш. с. т. э.

447. Гой, гөзленилйән дроб $\frac{p}{q}$ болсун. Меселәниң шертине гөрә $\frac{p}{q}=\frac{p+n}{q\cdot n}$ болмалыдыр. Онда шу деңликден $p=\frac{n}{n-1}$ аларыс. P — битин сан болмалыдыр. Бу ягдай диңе $n=2$ боланда болар. Диймек, $P=\frac{2}{2-1}=2$.

Шейлеликде, гөзленилйән дроблар $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{2}{3}$ болмалыдырлар.

448. Окувчының бир гүнде чөзен меселелериниң саныны a_1 билен, ики гүнде чөзен меселелериниң саныны a_2 билен, үч гүнде чөзен меселелериниң саныны a_3 билен ве ш. м. 77 гүнде (11 хепдеде 7·11) чөзен меселелериниң саныны a_{77} билен белләлиң. Инди ашакдакы ики хатар сана гаралың:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77} \text{ ве } a_1 + 20, a_2 + 20, \ldots, a_{77} + 20.$$

Шу ерде жеми 154 сан бар. Илки билен $a_{77} \leqslant 132$ белләлиң, чүнки $12 \cdot 11 = 132$. Диймек, ёкарда язылан хатарлардакы 154 санларың хич бири 152-ден улы дәлдир ($132 + 20 = 152$). Шейлеликде, шол санларың саны 154 ве оларың хич бири 152-ден улы болмаса, онда оларың ичинде иң болманда икиси бири-бирине дең болмалыдыр. Эмма биринжи хатардакы санларың хеммеси бири-бириниден үйтгешик, диймек, икинжи хатардакы санлар-да бири-бириниден үйтгешик болмалыдырлар. Онда кәбир k ве l үчин $a_k = a_l + 20$ болмалыдыр (бу ерде $k, l \leqslant 77$). Диймек, $a_k - a_l = 20$. Ш. с. т. э.

449. 1-нжи чөзүлиши. Гой, гөзленилйән сан $\overline{a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}6}$ болсун. Онда тәзе алнан сан $\overline{6a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}}$ болар. Меселәниң шертине гөрә $4 \cdot \overline{a_1a_2 \ldots a_{n-1}6} = \overline{6a_1a_2 \ldots a_{n-1}}$ болмалыдыр. Ахыркы деңликден гөрнүши ялы, $a_{n-1} = 4$ болмалы, чүнки $4 \cdot 6 = 24$ боляр. Инди шейле сан аларыс: $\overline{a_1a_2 \ldots 46}$. Шу саны 4-е көпелтсек, ыздан үчүнжи орунда дуран цифр 8 болар. Диймек, инди $\overline{a_1a_2 \ldots 846}$ аларыс. Сонра 3, ягны $\overline{a_1a_2a_3 \ldots 3846}$ аларыс. Соңра $\overline{a_1a_2 \ldots 53846}$ аларыс. Инди шу саны 4-е көпелдип, 153846 аларыс. Эгер шу санда 6 цифр биринжи орна гечирилсе, онда 615384 аларыс ве шу сан өңки сандан 4 эссе көп болар.

2-нжи чөзүлиши. Гой, гөзленилйән сан $N = \overline{a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}6}$ болсун. Шу саны шейле язалың. $N = 10x + 6$, бу ерде $x = \overline{a_1a_2 \ldots a_{n-1}}$. Инди $4N = \overline{6a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}}$ я-да $4(10x + 6) = 6 \cdot 10^y + x$.

Ахыркы деңлемеден ашакдакылары аларыс:

$40x + 24 - x = 6 \cdot 10^y$ я-да $39x = 6(10^y - 4)$ я-да $13x = 2(10^y - 4)$.

Шу деңликден гөрнүши ялы, $10^y - 4$ сан 13-е бөлүнмелидир, ягны $\frac{10^y - 4}{13}$ битин сандыр. Шу аңлатманың битин сан болмагы үчин $y = 5$ болмалыдыр (барламак аркалы тапылар). Онда $\frac{10^5 - 4}{13} = \frac{99996}{13} = 7692$ аларыс.

Диймек, $x = 2 \cdot 7692 = 15384$. Шейлеликде, $N = 153846$.

450. Гой, гөзленилйән икибелгили сан $10x + y$ болсун, онда меселәниң шертине гөрә $10x + y = 2xy$ болмалыдыр. Шу деңлемәни $10x = 2xy - y$ я-да $10x = (2x - 1)y$ гөрнүшде язып, $y = \frac{10x}{2x - 1}$ аларыс. Инди $y = \frac{10x}{2x - 1} = \frac{10x - 5 + 5}{2x - 1} = 5 + \frac{5}{2x - 1}$ аларыс. Меселәниң манысына гөрә y битин сан, онда $2x - 1$ сан 5-иң бөлүжиси болмалы, ягны $2x - 1 = 1$ болмалыдыр. Бу ерден $x = 1$, онда $y = 10$. Эмма меселәниң манысына гөрә x ве y санлар 9-дан улы болуп билмейәрлер. Диймек, шу сан меселәниң шертини канагатландырмаяр.

Инди $\frac{5}{2x - 1}$ саның битин сан болмагы үчин $2x - 1 = 5$ хала гаралың. Шу халда $x = 3$ ве $y = 6$. Диймек, гөзленилйән сан 36 болмалыдыр.

451. Илки билен шол адамың XX асырда доглаандыгыны белләлиң, ягны онуң доглан йылының илкинжи ики цифри белли — 19. Инди онуң соңкы ики цифрини гөзләлиң. Шол йылы шейле белләлиң: $\overline{19xy}$. Онда меселәниң

шертине гөрә $1 + 9 + x + y$ шол адамының яшы болар. Инди меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$10x + y + (1 + 9 + x + y) = 67 \text{ я-да } 11x + 2y = 57. \text{ Бу ерден}$$

$$x = \frac{57 - 2y}{11} = 5 + \frac{2 - 2y}{11} = 5 + \frac{2}{11}(1 - y).$$

Шу ердәки x ве y нәбеллилериң манысына гөрә, 0-дан кичи ве 9-дан улы бахалары алып билмейәрлер. Диймек, $(1 - y)$ саның 11-е бөлүнмеги үчин $1 - y = 0$ болмалыдыр. Бу ерден $y = 1$, онда $x = 5$ аларыс.

Шейлеликде, шол адам 1951-нжи йылда доглан ве онуң 16 яшы бардыр.

452. Меселе чөзүленде биз иң „эрбет" хала гарамалы, ол хем болса ак ве гара реңкли шарлардан 10 саныcы, гызылындан 19 саныcы, гөк шардан 19 саныcы ве яшыл шардан 19 саныcы чыкарылыпдыр диййп гүман этмекдир. Шу шарларың үстүне ислендик реңклеп бир шар гошулайса, онда шарың шол реңклиси әйййәм 20 саны болар.

Шейлеликде, бир реңклисинден 20-ден аз болмалык шар чыкармак үчин жеми $10 + 19 + 19 + 19 + 1 = 68$ саны шар чыкармалыдыр.

453. Автомобиллериң тизликлери бирменгзеш болуп, оларың хер бири 5 сагат 30 минут йөрән болса, онда A ве B пунктларың арасындакы узаклыгы гечмек үчин бир автомобиль 11 сагат вагт сарп эдер. Эгер автомобиллериң ики башлакы тизликлерини x *км/сагат* билен беллесек, онда шол узаклык $11x$ (*км*) болар. Инди ашакдакы деңлемелери дүзмек мүмкиндир:

$\frac{11x}{2} + 30 = (x + 12)t$ — бу автомобиллериң бириниң гечен ёлы

$\frac{11x}{2} - 30 = xt$ — бу автомобиллериң икинжисиниң гечен ёлы.

Инди ашакдакы системаны аларыс:

$$\left.\begin{aligned} 11x + 60 &= 2xt + 24t \\ 11x - 60 &= 2xt \end{aligned}\right\}$$

Биринжи деңлемеден икинжини айрып $120 = 24t$ аларыс, бу ерден $t = 5$ (сагат). Инди $11x - 60 = 2x \cdot 5$, $x = 60$ *км/сагат*.

Шейлеликде, гөзленйән узаклык $11 \cdot 60 = 660$ *км*.

454. Биринжи ёлагчы x *км* гечен болса, икинжи ёлагчы $(x + 12)$ *км* гечмели. Эгер шол x *км* ёлы гечмек үчин биринжи ёлагчы y сагат вагт сарп эден болса, онда $\frac{x}{y}$ шол ёлагчының тизлиги болар. Икинжи тарапдан, шол ёлагчының тизлиги $\frac{x + 12}{6}$ болар. Диймек, $\frac{x}{y} = \frac{x + 12}{8}$. Инди икинжи ёлагчы үчин $\frac{x}{9}$ аңлатма онуң тизлиги болар. Икинжи тарапдан $\frac{x + 12}{y + 6}$ аңлатма-да икинжи ёлагчының тизлигидир. Диймек, $\frac{x}{y} = \frac{x + 12}{y + 6}$.

Шейлеликде,

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{x + 12}{8} \\ \frac{x}{9} = \frac{x + 12}{y + 6} \end{cases}$$

системаны аларыс. Шу системаның икинжи деңлемесини ашакдакы ялы язарыс:

$$\frac{x+12}{x}=\frac{y+6}{9}.$$

Производ пропорцияны уланып, $\frac{12}{x}=\frac{y-3}{9}$ я-да $x=\frac{108}{y-3}$ аларыс.

Инди системаның биринжи деңлемесини $\frac{x+12}{x}=\frac{8}{y}$ гөрнүшде язып, $\frac{12}{x}=\frac{8-y}{y}$ я-да $x=\frac{12y}{8-y}$ аларыс.

Шейлеликде, $\frac{108}{y-3}=\frac{12y}{8-y}$. Шу ерден $y^2+6y-72=0$ деңлемәни алып, $y=6$ бахасыны аларыс. Инди $x=\frac{12\cdot 6}{8-6}=36$. Диймек, биринжи ёлагчы 36 *км*, икинжи болса 48 *км* ёл гечипдир (душушан вагтлары). A ве B пунктларын арасындакы узаклык 84 *км* болуп, биринжи ёлагчының тизлиги $\left(\frac{x}{y}=\frac{36}{6}=6\right)$ сагатда 6 *км* болуп, икинжи ёлагчының тизлиги $\left(\frac{36}{9}=4\right)$ сагатда 4 *км* болар.

Жогабы: аралык 84 *км*, тизликлери 6 *км/сағ* ве 4 *км/сағ*.

455. Окувчыларың биринжиси x-ың коэффициентини (-1) эдип алса, берлен деңлик ашакдакы гөрнүше гелер:

$$x^3+\dots+x^2-x+\dots=0.$$

Инди икинжи окувчы галан бош ерлериң бирине ислендик битин a саны язса, мысал үчин, ол x^2-ың коэффициентини a эдип алса, онда $x^3+ax^2-x+\dots=0$ алнар. Инди биринжи окувчы азат члениң ерине $(-a)$ язса, онда $x^3+ax^2-x-a=0$ деңлеме алнар. Шу ерден $x^2(x+a)-(x+a)=(x+a)(x^2-1)=0$ аларыс.

Диймек, $x^3+ax^2-x-a=(x+a)(x^2-1)=0$ деңлеме алынды. Шу ерден гөрнүши ялы, деңлемәниң үч көки-де битин сандыр.

456. a, b, c санлар бири-бирине дең дәл диййп гүман эделиң ве кесгитлилик үчин, гой $a>b>c$ болсун. Онда $a^k>2b^k$ болар ялы эдип, k саны сайлап алмак мүмкиндир. Эдил шонуң ялы эдип, $a^k>2c^k$ аларыс. Ахыркы ики деңсизлиги членме-член гошуп, $2a^k>2b^k+2c^k$ я-да $a^k>b^k+c^k$ аларыс.

Шейлеликде, a, b, c санларың ичинде бир-бирине деңлери болмаса a^k, b^k, c^k санлардан үчбурчлук гурмак мүмкин дәлдир. Бу болса меселәниң шертине гаршы гелйәр. Онда биизиң эден гүманымыз ялңышдыр.

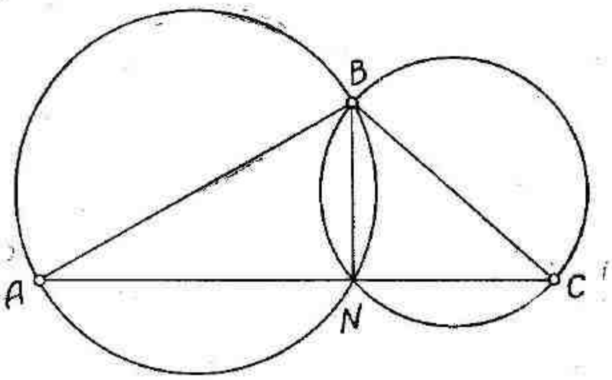
457. ABN үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусыны R_1 билен беллесек, онда $2R_1>AB$ аларыс, чүнки диаметр хордадан кичи дәлдир (94-нжи чызгы).

Инди BNC үчбурчлугың дашындан чызылан төверегиң радиусыны R_2 билен беллесек, онда $2R_2>BC$ аларыс. Диймек,

$$2R_1+2R_2\geqslant AB+BC.$$

Шу гатнашыгың чеп бөлегиндәки жемиң иң кичи баха эе болмагы үчин $2R_1+2R_2=AB+BC$ болмалыдыр. Шу халда AB ве BC кесимлер диаметр болмалыдырлар. AB кесимиң диаметр болмагы үчин ANB бурч 90° болмалыдыр. Диймек, BN кесим AC кесиме перпендикулярдыр.

Шейлеликде, гөзленилйән N нокат AC кесиме B нокатдан индерилен перпендикулярың эсасы болмалыдыр.



94-нжи чызгы.

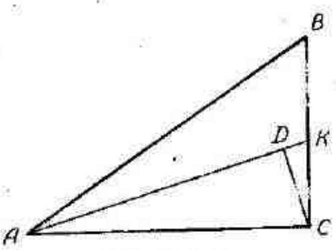
458. Берлен квадратың хер тарапыны бәш дең бөлеге бөлүп, шол бөлме нокатлар аркалы квадратың тарапларына параллел гөни чызыклары геçирсек, берлен квадраты 25 саны кичижик квадратлара бөлерис. Эгер шол квадратжагазларың хер бириниң ичинде ятян нокатларың саны 5-ден артык болмаса, онда жеми $5\cdot 25=125$ нокат болар. Эмма нокатларың саны 126. Шонуң үчин квадратжагазларың хайсы хем болса бириниң ичинде ятян нокатларың саны 5-ден көп болмалыдыр. Инди хер квадратжыгың дашындан радиусы $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ деӊ болан төверек чызалың. Онда шол төверегиң радиусы $\frac{1}{7}$-ден кичи болар ве шол төвереклериң хайсы хем болса бириниң ичинде ятян нокатларың саны 5-ден көп болар. Диймек, радиусы $\frac{1}{7}$-е деӊ болан төвереклериң бириниң ичинде 6 нокадың ятжакдыгы айдыңдыр.

459. $\sqrt[4]{a^4+b^4}=\sqrt{\sqrt{a^4+b^4}}=\sqrt{\sqrt{a^2\left(a^2+\frac{b^4}{a^2}\right)}}=$

$=\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}=\sqrt{a\sqrt{a^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}.$

Гой, $\frac{b^2}{a}=y$ болсун. Онда $\frac{a}{b}=\frac{b}{y}$ аларыс ве y кесими гурарыс. Сонра $x=\sqrt{a\sqrt{a^2+y^2}}$ аларыс.

Инди $z=\sqrt{a^2+y^2}$ кесими гурярыс ве $x=\sqrt{az}$ деңлиги $x^2=az$ гөрнүшде я-да $\frac{a}{x}=\frac{x}{z}$ гөрнүшде язарыс ве x кесими гурарыс.



95-нжи чызгы.

460. Меселәниң шертине гөрә (95-нжи чызгы) $\angle BAK = \angle CAK$; $AC = b$; $BC = a$.

$\triangle AKC \backsim \triangle ADC$, ($\angle ACK = \angle CDA$; $\angle KAC$ — умумы бурчадыр).

$$\frac{CD}{KC} = \frac{AC}{AK};\ CD = KC\cdot\frac{AC}{AK} \qquad (1)$$

Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хәсиети боюнча

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} \text{ я-да } \frac{BK+KC}{KC} = \frac{AB+AC}{AC}, \text{ я-да } \frac{a}{KC} = \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{b};$$

$$KC = \frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

$$\triangle AKC\text{-ден } AK = \sqrt{AC^2+KC^2} = \sqrt{b^2+\frac{a^2b^2}{(b+\sqrt{a^2+b^2})^2}} \qquad (3)$$

(1), (2), (3) деңликлери гөз өңүнде тутуп,

$$CD = \frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b(b+\sqrt{a^2+b^2})}{b\cdot\sqrt{(b+\sqrt{a^2+b^2})^2+a^2}} =$$

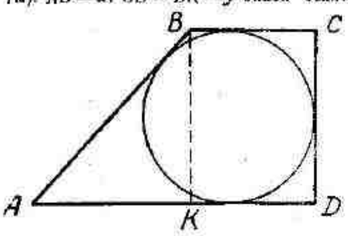
$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2+2b\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2+a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{2a^2+2b^2+2b\sqrt{a^2+b^2}}} =$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+b\sqrt{a^2+b^2}}} \text{ аларыс.}$$

461. Меселәниң шертине гөрә $AD = a$; $BC = b$;

$$BC + AD = AB + CD$$

(төверегиң дашындан чызылан дөртбурчлугың хәсиетине гөрә (96-нжы чызгы). $AB = x$, $CD = BK = y$ билен белләп, $x + y = a + b$ аларыс. ABK гөнүбурчлы үчбурчлукдан Пифагорың теоремасыны уланып, ашакдакыны аларыс: $BK^2 + AK^2 = AB^2$ я-да $BK^2 + (a-b)^2 = AB^2$; ёкардакы белленишине гөрә $y^2 + (a-b)^2 = x^2$ we $x + y = a + b$



96-нжы чызгы.

Диймек,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (a-b)^2 \\ x + y = a + b \end{cases}$$

системаны алдык. Биринжи деңлемәни икинжи деңлемә члене-чиен бөлүп,

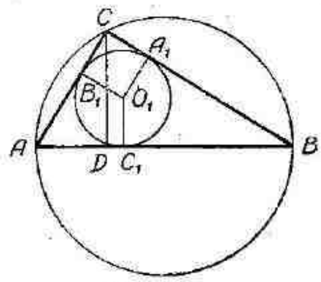
$$x - y = \frac{(a-b)^2}{a+b} \text{ аларыс.}$$

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = \dfrac{(a-b)^2}{a+b}. \end{cases}$$

Шу системаның деңлемелерини членме-член гошуп, $2x = a + b + \frac{(a-b)^2}{a+b}$ я-да $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ аларыс. Инди $y = a + b - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$.

Шейлеликде, $AB = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ we $CD = \frac{2ab}{a+b}$.

462. Төверегиң радиусыны r билен we гипотенуза индерилен бейиклиги h_c билен белләлиң (97-нжи чызгы). Субут этмели: $r > 0{,}4\cdot h_c$. $AC_1 = AB_1$, $CB_1 = CA_1$ we $BA_1 = BC_1$. $AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + AB_1 = 2p$ я-да $AC_1 + BC_1 + A_1C = p$, я-да $A_1C = p - c$; $A_1C = B_1C = O_1A_1 = r$. Диймек, $r = p - c$.



97-нжи чызгы.

ABC үчбурчлугың S мейданы биринжи тарапдан, $S = \frac{1}{2}ab$, икинжи тарапдан болса $S = \frac{1}{2}c\cdot h_c$ болмалыдыр. Диймек,

$$ab = c\cdot h_c;\ h_c = \frac{ab}{c}.$$

Инди $\frac{r}{h_c} = \frac{p-c}{\frac{ab}{c}} = \frac{c(p-c)}{ab}$;

$$\frac{r}{h_c} = \frac{c\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{ab} = \frac{c(a+b-c)}{2ab} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{2ab} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}-a^2-b^2}{2ab}$$

Биз $\frac{r}{h_c} > 0{,}4$ деңсизлиги субут этмели. Диймек,

$$\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}-a^2-b^2}{2ab} > \frac{2}{5}$$

я-да $5(a+b)\sqrt{a^2+b^2} - 5(a^2+b^2) > 4ab$ деңсизлиги субут этмек етерликдир.

Иң соңкы деңсизлиги шейле язарыс:

$$5(a+b)\sqrt{a^2+b^2} > 5a^2 + 4ab + 5b^2$$

Шу денсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип,

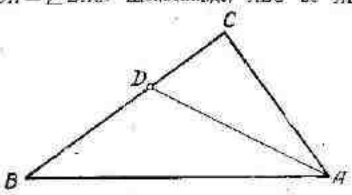
$$25(a^2+2ab+b^2)(a^2+b^2) > 25a^4+16a^2b^2+25b^4+40a^3b+50a^2b^2+40ab^3$$

я-да $5a^3b-8a^2b^2+5ab^3>0$ аларыс. Шу денсизликден ашакдакыны язмак мүмкиндир:

$$5a^3b-10a^2b^2+5ab^3>0 \text{ я-да } 5ab(a-b)^2>0.$$

Иң ахыркы денсизлик айдыңдыр. Диймек, $5a^3b-8a^2b^2+5ab^3>0$ денсизлик догрудыр. Башгача айданымызда, шол денсизлик билен дең гүйчли болан $\frac{r}{h_c}>0{,}4$ денсизлик догрудыр, ш. с. т. э.

463. Илки билен A бурчуң биссектрисасыны гечирйәрис ве ABD үчбурчлугы аларыс (98-нжи чызгы). Шол үчбурчлугың дашкы бурчы $\angle CDA$ үчбурчлугың $\angle DBA$ ве $\angle DAB$ ики бурчунын жемине деңдир. Башгача айданымызда, $\angle CDA=\angle BAC$. Шейлеликде, ABC ве ADC үчбурчлуклар



98-нжи чызгы.

меңзешдирлер. Диймек, $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{BC}$ аларыс. Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хәсиетине гөрә: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ аларыс. Меселәниң шертине гөрә ашакдакылары аларыс: $\frac{AD}{b}=\frac{c}{BC}$ ве $\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}$. Инди $AD=BD$ деңлиги гөз өңүнде тутуп, $\frac{BD}{b}=\frac{c}{BC}$ ве $\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}$ аларыс. Икинжи деңлиги шейле язарыс: $\frac{BD+CD}{CD}=\frac{b+c}{b}$ я-да $\frac{BC}{CD}=\frac{b+c}{b}$. Инди $BD=\frac{bc}{BC}$ ве $CD=\frac{b\cdot BC}{b+c}$.

Иң ахыркы деңлиги гошуп, ашакдакыны аларыс. $BD+DC=\frac{bc}{BC}+\frac{b\cdot BC}{b+c}$ я-да $BC=\frac{bc}{BC}+\frac{b\cdot BC}{b+c}$, я-да $1=\frac{bc}{BC^2}+\frac{b}{b+c}$, я-да $BC^2=b(b+c)$.

Диймек, $BC=a=\sqrt{b(b+c)}$ аларыс.

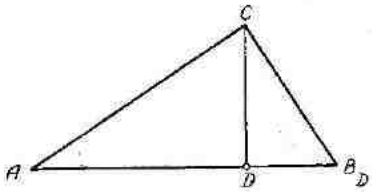
464. Озалкы меселеде $\frac{r}{h_c}=\frac{c(a+b-c)}{2ab}$ алыпдык. Шу ерде денсизлиги субут этмели. Шу денсизлигиң ерине онуң билен деңгүйчли болан $\frac{c(a+b-c)}{2ab}<\frac{1}{2}$ денсизлиге гаралың:

$$\frac{c(a+b-c)}{2ab}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{2ab}<\frac{1}{2},$$

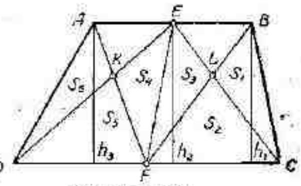
я-да $(a+b)\sqrt{a^2+b^2}<ab+a^2+b^2$, я-да $(a+b)^2(a^2+b^2)<(a^2+b^2+ab)^2$. Бу ерден $a^2b^2>0$ аларыс. Иң соңкы денсизлик айдыңдыр, диймек, $r<0{,}5h_c$ денсизлик догрудыр, ш. с. т. э.

465. Гой, $h_c\geq h_b$ болсун, онда меселәниң шертине гөрә $h_c\geq h_b\geq AC$. 99-нжы чызгыдан гөрнүши ялы, h_c перпендикуляр болуп, AC янтыдыр. Диймек, AC кесим h_c бейикликден кичи болуп билмез. Онда $h_c\geq AC$ шертден $h_c=AC$ гелип чыкяр. Башгача айданымызда, h_c бейиклик AC тарап билен габат гелйәр. Шейле ягдай диңе гөнүбурчлы үчбурчлукда болуп билер. Диймек, шу халда h_b бейиклик AB тарап билен габат гелйәр, ягны $h_b=AB$ болмалыдыр. Гумән эдилишине гөрә $h_c\geq h_b\geq AC$, ягны $AC\geq AB$. Эмма $h_b=AB$, диймек, $h_b\geq AC$-ден $AB\geq AC$ гелип чыкяр.

Шейлеликде, $AB=AC$. Диймек, ABC үчбурчлук деңянлы гөнүбурчлы үчбурчлукдыр.



99-нжы чызгы.



100-нжи чызгы.

466. Ашакдакы ялы белгилемелери гиризелиң (100-нжи чызгы). Гой, BLC үчбурчлугың мейданы S_1, FLC үчбурчлугың мейданы S_2, LEF үчбурчлугың мейданы S_3, EKF үчбурчлугың мейданы S_4, FKD үчбурчлугың мейданы S_5 ве DKA үчбурчлугың мейданы S_6 болсун. B, E ве A нокатлардан DC гөни чызыга перпендикуляр индерйәрис ве оларың узынлыкларыны деңишиликде h_1, h_2 ве h_3 билен белгилейәрис, онда

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}h_1\cdot FC \qquad (1)$$

$$S_3+S_4=\frac{1}{2}h_2\cdot FC \qquad (2)$$

$$S_4+S_5=\frac{1}{2}h_2\cdot DF \qquad (3)$$

$$S_5+S_6=\frac{1}{2}h_3\cdot DF \qquad (4)$$

Инди $DF=FC$ гөз өңүнде тутсак ве $h_2=\frac{h_1+h_3}{2}$ деңлиге яда салсак, онда (1) ве (4) деңликлери хем-де (2) ве (3) деңликлери гошуп ашакдакыны аларыс:

$$S_1+S_2+S_5+S_6=FC\cdot\frac{h_1+h_3}{2} \text{ ве } S_3+S_4+S_4+S_5=FC\cdot h_2$$

я-да $S_1+S_2+S_5+S_6=S_3+S_4+S_4+S_5$ я-да $S_1+S_6=S_3+S_4$, ш. с. т. э.

467. $x^2+y^2=1$ деңлигиң ики бөлегини-де куба гөтерип, $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=1$ деңлик аларыс. Шу деңликден $x^6+3x^2y^2(x^2+y^2)+y^6=1$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

я-да $x^6+y^6=1-3x^2y^2$ аларыс. Инди $x^6+y^6=1-3x^2(1-x^2)=1-3x^2+$ $+3x^4=3\left(x^4-x^2+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=3\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ деңлиги аларыс.

Шейлеликде, $x^6+y^6=3\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ деңликде гөрнүши ялы, x^6+y^6 аңлатма $x^2=\frac{1}{2}$ я-да $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ боланда $\frac{1}{4}$-е дең болан иң кичи баха ведир. Инди $x^2+y^2=1$ деңликлен гөрнүши ялы, $y=0$ боланда x^2-ың бахасы $x^2=1$ болан иң улы баха боляр. Диймек, x^6+y^6 аңлатманың иң улы бахасы $x^6+y^6=3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, ягны $x^6+y^6=1$ болар.

468. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы эдип язалың:

$$y=\frac{x^3+16}{x}=\frac{x^3+4x^2-16x+16+4x-4x^2+12x}{x}=$$
$$=\frac{x^2(x+4)-4x(x+4)+4(x+4)}{x}+12=\frac{(x+4)(x^2-4x+4)}{x}+$$
$$+12=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x}+12.$$

Диймек,

$$y=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x}+12.$$

Шу деңлигиң сағ бөлегиндәки дробуң иң кичи бахасы $x=2$ боланда алыняр.

Диймек, $x=2$ боланда y-иң кичи бахасы 12-ә дең болжак.

469. Меселәниң шертинде берлен деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, ашакдакыны аларыс:

$$y^2=\frac{25-30x+9x^2}{1-x^2}=\frac{25x^2-30x+9}{1-x^2}+\frac{16-16x^2}{1-x^2}=\frac{(5x-3)^2}{1-x^2}+16.$$

Диймек,

$$y^2=\frac{(5x-3)^2}{1-x^2}+16,\quad y=\sqrt{\left(\frac{5x-3}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+16}.$$

Шу деңлигиң сағ бөлегинден гөрнүши ялы, y-иң кичи бахасы $5x-3=0$ боланда алыняр. Шу халда $y=\sqrt{16}$ баха ведир.

Шейлеликде, $x=\frac{3}{5}$ боланда y-иң иң кичи бахасы 4-е дең боляр.

470. $\left.\begin{array}{r}x+ky=3\\kx+4y=6\end{array}\right\}$

системаны ашакдакы ялы эдип язарыс:

$\left.\begin{array}{r}4\cdot x+4\cdot ky=12\\k^2x+4\cdot ky=6k\end{array}\right\}$ я-да $k^2x-4x=6k-12$, я-да $x(k^2-4)=6(k-2)$, я-да

$$x=\frac{6}{k+2}.$$

Инди берлен системадан y-и тапарыс.

$\left.\begin{array}{r}kx+k^2y=3k\\kx+4y=6\end{array}\right\}$ я-да $k^2y-4y=3k-6$, я-да $y=\frac{3}{k+2}$.

Меселәниң шертине гөрә $x>1$ болмалы, башгача айданымызда, $\frac{6}{k+2}>1$ я-да $k+2<6$, я-да $k<4$ болмалы. Эдил шонуң ялы $y>0$ шерти гөз өңүнде тутуп, $\frac{3}{k+2}>0$ аларыс. Шу ерден $k+2>0$ я-да $k>-2$ аларыс. Шейлеликде, меселәниң шертини канагатландырмак үчин $-2<k<4$ болмалыдыр. Шу шертден başга-да, $k\neq 2$ шерти гөз өңүнде тутмалы, чүнки $k=2$ боланда $\left.\begin{array}{r}x+2y=3\\2x+4y=6\end{array}\right\}$ система гелип чыкяр. Бу болса ики нәбелли бир деңлемедир. Шу халда x ве y нәбеллилери түкениксиз көп баха ведирлер.

471. Гөркезилен амаллар ерине етириленден соңра алнан көпчлени ашакдакы ялы язалың:

$(5-7x+x^3)^{1965}\cdot(6-10x+13x^2-9x^3)^{1966}=A_1+A_1x^k+A_3x^l+\ldots$

Шу деңлигиң ики бөлегине-де $x=1$ баханы гойсак, онда сағ бөлегинде көпчлениң коэффициентлериниң жемини аларыс, ягны $(5-7+1)^{1965}\times$ $\times(6-10+13-9)^{1968}=A_1+A_2+\ldots$ я-да $A_1+A_2+A_3+\ldots=0$. Диймек, гөзленилйән жем 0 дендир.

472. Белли болшы ялы, $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. Инди шол деңсизлиги уланып,

$$\frac{1+x_1}{2}\geqslant\sqrt{x_1\cdot 1}$$
$$\frac{1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_2\cdot 1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1+x_{1968}}{2}\geqslant\sqrt{x_{1968}\cdot 1}\ \text{аларыс.}$$

Шу деңсизликлери члеме-член көпелдип,

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{1968})\geqslant 2^{1968}\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2\ldots x_{1968}}$$

аларыс. Эмма меселәниң шертине гөрә $x_1\cdot x_2\ldots x_{1968}=1$ болмалыдыр.

Диймек, $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{1968})\geqslant 2^{1968}$ аларыс, ш. с. т. э.

473. Белли болшы ялы, $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Диймек,

$$\log_4 N=\frac{\log_2 N}{\log_2 4}=\frac{\log_2 N}{2}\ \text{ве}\ \log_2 7=\frac{1}{\log_7 2}.$$

Инди

$$\log_4 39{,}2=\log_4\frac{392}{10}=\log_4\frac{196}{5}=\log_4\frac{7^2\cdot 2^2}{5}=\log_4\left(\frac{7\cdot 2}{\sqrt{5}}\right)^2=$$
$$=2\log_4\frac{7\cdot 4}{\sqrt{5}}=2\cdot\frac{\log_2\frac{7\cdot 2}{\sqrt{5}}}{2}=\log_2\frac{7\cdot 2}{\sqrt{5}}=\log_2 7+\log_2 2-\log_2\sqrt{5}$$

Эмма $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$. Диймек, $b = 1 + \log_2 5$; $b = 1 + \log_2 (\sqrt{5})^2$; $\log_2 \sqrt{5} = \frac{b-1}{2}$.

Шейлеликде, $\log_4 39{,}2 = \frac{1}{\log_7 2} + 1 - \frac{b-1}{2} = \frac{1}{a} + 1 - \frac{b-1}{2} = \frac{2+2a-ab+a}{2a} = \frac{2+3a-ab}{2a}$.

474. Инди билен $\log_x 2 = y$ аркалы белләлиң, онда $\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} + \ldots + = 1$ деңлиги аларыс. $y > 1$; ($\log_x 2 > 1$) боланы себәпли шу деңлиге түкениксиз кемелйән прогрессияның членлериниң жеминиң формуласыны уланарыс, яғны

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}} \text{ я-да } \frac{1}{y} : \frac{y-1}{y} = 1$$

я-да $\frac{1}{y-1} = 1$. Бу ерден $y = 2$ аларыс, диймек, $\log_x 2 = 2$ я-да $x^2 = 2$. Бу ерден $x = \sqrt{2}$ аларыс.

475. Белли болшы ялы, $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Диймек, $\log_2 (2^{2x-3} + 1) = \frac{\log_3 (2^{2x-3} + 1)}{\log_3 2}$ болмалыдыр, онда

$$\log_3 2 \cdot \frac{\log_3 (2^{2x-3} + 1)}{\log_3 2} = \log_3 2^x + 1 - \log_3 4$$

аларыс. Инди $\log_3 (2^{2x-3} + 1) - \log_3 2^x = \log_3 3 - \log_3 4$ я-да

$$\log_3 \frac{2^{2x-3}+1}{2^x} = \log_3 \frac{3}{4}, \text{ я-да } \frac{2^{2x-3}+1}{2^x} = \frac{3}{4}.$$

Бу ерден $4 \cdot 2^{2x-3} + 4 = 3 \cdot 2^x$ я-да $2^{2x} + 8 - 6 \cdot 2^x = 0$ аларыс. Инди $2^x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, $2^x = 4$, $2^x = 2$. Диймек, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

476. $\frac{9^x}{9} - \frac{3^x \cdot 3^{\frac{3}{\log_2 3}}}{9} = 1$; $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$ боланы себәпли $\frac{9^x}{9} - \frac{3^x}{9} \times$ $\times 3^{3\log_3 2} = 1$. $9^x - 3^x \cdot (3^{\log_3 2})^3 = 9$; $9^x - 3^x \cdot 2^3 = 9$; $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; $3^x = y$ билен белләсек, $y^2 - 8y - 9 = 0$ аларыс. Бу ерден $y_1 = 9$; $y_2 = -1$. $3^x = 9$, $x_1 = 2$, $3^x = -1$. Диймек, $x = 2$ берлен деңлемәниң көки болуп, $3^x = -1$ деңлемәниң көки ёкдур, чүнки $3^x > 0$ болмалыдыр.

477. Системаның биринжи деңлигини йөнекейлешдирип аларыс:

$$\frac{\log_x 0{,}5}{\log_x 0{,}5 + \log_y 0{,}5} = \frac{\frac{1}{\log_{0{,}5} x}}{\frac{1}{\log_{0{,}5} x} + \frac{1}{\log_{0{,}5} y}} = \frac{\log_{0{,}5} y}{\log_{0{,}5} x \cdot y};$$

онда шерте гөрә

$$\frac{\log_{0{,}5} y}{\log_{0{,}5} xy} = \frac{1}{\log_y 0{,}125} = \frac{\log_{0{,}5} y}{3} \text{ я-да } \frac{\log_{0{,}5} y}{\log_{0{,}5} xy} = \frac{\log_{0{,}5} y}{3},$$

$\log_{0{,}5} y \neq 0$ боланда, онда $\log_{0{,}5} xy = 3$ я-да $x \cdot y = 0{,}125$.

Инди ёкардакылары пейдаланып, берлен система дең гүйчли система аларыс: $\begin{cases} x \cdot y = 0{,}125 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Бу системаны чөзүп, тапарыс:

$$x_1 = 0{,}5\,(1 + \sqrt{0{,}5}); \quad y_1 = 0{,}5\,(1 - \sqrt{0{,}5}).$$
$$x_2 = 0{,}5\,(1 - \sqrt{0{,}5}); \quad y_2 = 0{,}5\,(1 + \sqrt{0{,}5}).$$

478. Системаны йөнекейлешдирип, аларыс:

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 77 \\ \sqrt{x} - \sqrt[4]{y} = 7. \end{cases}$$

Бу ерден $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 77$; $y = (x - 77)^2$

y-иң бахасыны икинжи деңликде гоюп, аларыс:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-77} = 7; \quad (\sqrt{x} - 7)^2 = x - 77, \quad x - 14\sqrt{x} + 49 = x - 77,$$

бу ерден x тапарыс:

$$x = \left(\frac{126}{14}\right)^2 = 81, \; x = 81.$$

Биринжи деңликде x-иң бахасыны гоюп, тапарыс:

$$\sqrt{y} = 81 - 77, \quad \sqrt{y} = 4; \quad y = 16.$$

479. $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{25-16}{25}} = \pm\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{9-16}{25}} = -\frac{24}{7};$$

$$\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{9}{25} - \frac{16}{25}} = -\frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{-7} = \frac{24}{7};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{24}{7}.$$

480. $(\sin x - \cos x)^2 = a^2$;

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = a^2; \quad 2 \sin x \cos x = \frac{1-a^2}{2};$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) =$$
$$= a\left(1 + \frac{1-a^2}{2}\right) = a \cdot \frac{3-a^2}{2}.$$

Диймек, $\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{a(3-a^2)}{2}$.

481. Берлен деңликлери квадрата гөтерелиң, онда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2$ ве $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = b^2$ аларыс.

Инди шу ики деңлиги члеңме-член гошалың, онда $2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$ я-да $2\cos(\alpha-\beta) = a^2 + b^2 - 2$ я-да $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$.

Инди илки башда берлен деңликлери члеңме-член көпелделиң, онда

$$(\cos\alpha + \cos\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = ab \text{ я-да}$$
$$\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta = ab,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = ab - \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\beta = ab - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta);$$
$$\sin(\alpha+\beta) = ab - \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2};$$
$$\sin(\alpha+\beta) = ab - \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Эмма $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$, шонуң үчин

$$\sin(\alpha+\beta) = ab - \sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{a^2+b^2-2}{2};$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{a^2+b^2-2}{2} = ab.$$
$$\sin(\alpha+\beta)\left(1 + \frac{a^2+b^2-2}{2}\right) = ab;$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{2+a^2+b^2-2}{2} = ab; \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

482. Берлен деңликлери квадрата гөтерелиң, онда

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2 \\ &\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = b^2 \end{aligned} \qquad (A)$$

аларыс.

Шу ики деңлигиң биринжисинден икинжисини айралың, онда

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = a^2 - b^2,$$
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2[\cos(\alpha+\beta)] = a^2 - b^2$$

аларыс.

Инди $2\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2} = a^2 - b^2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ я-да

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2-b^2-2\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (B)$$

Инди (A) системадан ашакыны аларыс:

$$2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$$

я-да $2\cos(\alpha-\beta) = a^2 + b^2 - 2$, бу ерден $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$.

Инди (B) деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\frac{a^2+b^2-2}{2} = \frac{a^2-b^2}{2} - \cos(\alpha+\beta) \text{ я-да}$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{a^2+b^2-2}{2} + 1\right) = \frac{a^2-b^2}{2}, \text{ я-да}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{2} : \frac{a^2+b^2}{2} \text{ я-да}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \text{ аларыс.}$$

483. Берлен деңлигиң чеп бөлегине гаралың:

$$\left(\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 = \frac{(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2}{\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\sin^2\alpha(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)^2} =$$
$$= \frac{\sin^4\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2}{(1+\cos\alpha)^2} = \frac{\sin^4\alpha\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{(1+\cos\alpha)^2} = \frac{\sin^4\alpha(1+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)^2} =$$
$$= \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^4\alpha}{1+\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha)}{1+\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Шейлеликде, берлен деңлемәниң чеп бөлегиндәки аңлатма, онуң саг бөлегиндәки аңлатма деңдир.

484. Белли болшы ялы, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Шу формуланы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ үчин уланалың, онда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\gamma} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

Диймек, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$.

Инди шу формуланы башда берлен деңлик үчин уланалың, онда

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{8}-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{8}}{1-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{8}-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{33}{40}-\frac{1}{80}}{1-\frac{1}{10}-\frac{1}{16}-\frac{1}{40}}=\frac{\frac{65}{80}}{\frac{65}{80}}=1,$$

диймек, $1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ я-да $1=1$. Ш. с. т. э.

485. Гой, $n=2$ болсун, онда

$$|\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\alpha_2|=|\cos(\alpha_1-\alpha_2)|\leqslant 1$$

аларыс.

Инди $n>2$ болсун, онда

$$\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdot\underbrace{\sin\alpha_3\ldots\sin\alpha_n}_{A}+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\underbrace{\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n}_{B}=$$

$=|A\sin\alpha_1\sin\alpha_2+B\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2|\leqslant A|\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\alpha_2|\leqslant A\cdot 1\leqslant 1.$ Шу ерде $A>B$ дийип гуман эдйәрис. A ве B санларың хер бири бирден кичидир, чүнки оларың хер бири синусларың я-да косинусларың көпелтмек хасылыдыр.

486. Илки билен $\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$ гөрнүшде язарыс. Инди $2\cos^2 x=1+\cos 2x$. Диймек, $\cos^2 2x-\sin^2 2x=-(1+\cos 2x)$ я-да $\cos^2 2x-\sin^2 2x+1+\cos 2x=0$, я-да $2\cos^2 2x+\cos 2x=0$, я-да $\cos 2x\,(2\cos 2x+1)=0$. Бу ерден $\cos 2x=0$; $2x=360^\circ n\pm 90$ я-да $2\cos 2x+1=0$, бу ерден $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=360^\circ n\pm 120^\circ$, $x=180^\circ n\pm 60^\circ$.

487. Илки билен ашакдакы тождествоны аларыс: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1$ аларыс. Инди берлен деңлемәни гөз өңүнде тутуп, $2\sin^2 x\cos^2 x-\frac{5}{8}=1$ аларыс. Шу ерден $\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{2}=\frac{3}{8}$, я-да $(\sin 2x)^2=\frac{3}{4}$ аларыс.

Инди $\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x=180^\circ n\pm 60^\circ$, я-да $x=90^\circ n\pm 30^\circ$.

Жогабы: $x=\frac{\pi}{2}k\pm\frac{\pi}{6}$, шу ерде k-битин сандыр.

Беллик: Шу ерде синус үчин бурчларың умумы гөрнүшиндәки $x=180^\circ n\pm(-1)^n\alpha$ (1) формуланың дерегине $x=180^\circ n\pm\alpha$ (2) формула уланылды, чүнки шу халда $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ве $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Шонуң үчин (1) формуланың дерегине (2) формуланы язарыс.

488. 1-нжи чөзүлиши. Илки билен $\operatorname{tg}x>0$ ве $\operatorname{ctg}x>0$ белләлиң. a ве b ики саны положител сан үчин $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ багланышыгының ерине етирилйәндигини гөз өңүнде тутсак, онда $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x}$ я-да $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2$ аларыс. Эмма меселеде $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$ берлиндир. Шейле болмагы мүмкин дәлдир, чүнки $2>\sqrt{3}$.

2-нжи чөзүлиши. Белли болшы ялы, $(a-1)^2>0$, шу ерде $a\neq 1$.

Инди $a^2-2a+1>0$, я-да $a^2+1>2a$, я-да $a+\frac{1}{a}>2$ (a — сан положител дийип гуман эдйәрис). Онда $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}>2$ болмалыдыр.

Диймек, берлен деңлемәниң чөзүви ёкдур.

489. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язалың:

$$\sin 70^\circ+4\cdot 2\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\sin 70^\circ+4\cdot(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cdot\cos 80^\circ=$$
$$=\sin 70^\circ+4\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ+4\cos 20^\circ\cdot\cos 80^\circ=\sin 70^\circ+$$
$$+2\cdot\cos 80^\circ+4\cos 20^\circ\cdot\cos 80^\circ=\sin 70^\circ+2\cos 80^\circ+2\cos 60^\circ+$$
$$+2\cos 100^\circ=\sin 70^\circ+2\cos 80^\circ+1-2\cos 80^\circ=\sin 70^\circ+1=$$
$$=\cos 20^\circ+1=2\cos^2 10^\circ.$$

490. Берлен аңлатманы шейле язарыс:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{4}{(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}=\frac{4}{\sin^2 2\alpha}.$$

Эмма $\frac{4}{\sin^2 2\alpha}\geqslant 4$, чүнки $\sin^2 2\alpha\leqslant 1$.

Шейлеликде, берлен аңлатманың иң кичи бахасы $\frac{4}{\sin^2 2\alpha}\geqslant 4$ багланышыкдан алыняр, шу иң кичи баха 4-е дең болуп, ол баха $\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{4}$ боланда алыняр.

491. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)=$

$$=\frac{\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos 27^\circ\cdot\cos 63^\circ}=\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\cdot\cos 63^\circ}=$$
$$=\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\sin 9^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\cdot\sin 27^\circ}=\frac{2}{2\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{2}{2\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=$$
$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{2\cdot 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=$$
$$=\frac{4\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=4.$$

492. $\sin 40^\circ+2\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ-2\cos 30^\circ=\sin 40^\circ+2\cdot\frac{\cos 30^\circ+\cos 10^\circ}{2}-$

$$-2\cos 30^\circ=\sin 40^\circ+\cos 30^\circ+\cos 10^\circ-2\cos 30^\circ=\sin 40^\circ+\cos 10^\circ-$$
$$-\cos 30^\circ=2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ\cdot\sin 10^\circ=2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ+\sin 10^\circ)=$$
$$=2\sin 20^\circ(\sin 70^\circ+\sin 10^\circ)=2\sin 20^\circ\cdot 2\sin 40^\circ\cos 30^\circ=$$
$$=4\sin 40^\circ\cdot\sin 20^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ.$$

493. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha - (\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha -$

$$-\left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \operatorname{tg} 3\alpha - \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha - \frac{\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 3\alpha\cdot\cos 3\alpha}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha(\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha)}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha - (\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha)}{\cos 2\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Шейлеликде,

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

494.

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x +$$
$$+ \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x + \sin x + \cos x =$$
$$= 2\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0.$$

Шейлеликде, а) $\sin x + \cos x = 0$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де $\cos x$ бөлүп, $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ аларыс. Бу ерден $\operatorname{tg} x = -1$; $x_1 = n\pi - \frac{\pi}{4}$. б) $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 360° n \pm 60° = 60°(6n \pm 1)$

495. Берлен деңлемени ашакдакы ялы язалың:

$$\sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Инди

$$\sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{\frac{5x}{2} + \frac{x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{5x}{2} - \frac{x}{2}}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos x$$

ве

$$1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = \cos x$$

боланы себәпли, $2\sin\frac{3x}{2}\cos x = \cos x$ аларыс. Бу ерден

$$\cos x\left(2\sin\frac{3x}{2} - 1\right) = 0$$

я-да $\cos x = 0$ ве $2\sin\frac{3x}{2} - 1 = 0$ аларыс.

Диймек, $x = 180° n + 90°$ ве $x = 120° n + (-1)^n\cdot 20°$.

496. Берлен деңлемәниң чеп бөлегини ашакдакы ялы язалың:

$$\sin x\cdot\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x).$$

Диймек,

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2},$$

я-да $\cos 2x - \cos 4x = 1$, я-да $\cos 2x = 1 + \cos 4x$,
я-да $\cos 2x = 2\cos^2 2x$, я-да $\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$.

Бу ерден $\cos 2x = 0$ ве $1 - 2\cos 2x = 0$;

$$2x = 180°n + 90°;\quad x = 90°n + 45°;$$
$$2x = 360°n \pm 45°;\quad x = 180° n \pm 22°30'.$$

497. Берлен деңлиги ашакдакы ялы язарыс: $9(\sin x + \cos x)^2 = 4\sin^2 2x$, я-да $9(1 + \sin 2x)^2 = 4\sin^2 2x$, я-да $5\sin^2 2x + 18\sin 2x + 9 = 0$. Бу ерден $\sin 2x = \frac{1}{5}$; $2x = 180° n + (-1)^n \arcsin\frac{1}{5}$; $x = 90° n + \frac{1}{2}(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{5}$.

498. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^2 x\cos^2 x,$$

я-да $\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = \sin^2 x\cos^2 x$, я-да $\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = 0$, я-да $(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 = 0$, я-да $(\cos 2x)^2 = 0$.

Бу ерден $\cos 2x = 0$; $2x = 180° n + 90°$; $2x = 90°(2n+1)$; $x = 45°(2n+1)$.

499. Берлен аңлатманы A билен белләп, $A = \sin 85°\cdot\sin 35°\cdot\sin 25°$ аларыс.

Инди $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$ формуланы уланып, ашакдакыны аларыс:

$$\sin 85°\cdot\sin 35° = \frac{\cos 50° - \cos 120°}{2} = \frac{\cos 50° + \cos 60°}{2} = \frac{\cos 50° + \frac{1}{2}}{2}.$$

Диймек,

$$A = \frac{1}{2}\left(\cos 50° + \frac{1}{2}\right)\sin 25° = \frac{1}{2}\cos 50°\cdot\cos 65° + \frac{1}{4}\cos 65° =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos 115° + \cos 15°) + \frac{1}{2}\cos 65°\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(-\sin 25° + \cos 15° + \sin 25°) = \frac{1}{4}\cos 15°.$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}.$$

Диймек,

$$\sin 85°\cdot\sin 35°\cdot\sin 25° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{16} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16}.$$

500. Берлен аңлатманы шейле язалың:

$$\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12° = (\cos 24° + \cos 48°) - (\cos 84° + \cos 12°) =$$
$$= 2\cos 36°\cos 12° - 2\cos 48°\cdot\cos 36° = 2\cos 36°(\cos 12° - \cos 48°) =$$

$$= 2\cdot 2\cdot\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot\sin 30^\circ = \frac{8\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 18^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{2\cdot\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2\cdot\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2\cos 17^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}.$$

501. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язарыс:

$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}} = \frac{(x+1)^2-4+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{(x-1)^2-4+(x-1)\sqrt{x^2-9}} =$$

$$= \frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{(x+3)(x-3)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}\,[(x-1)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{x-3}]}{\sqrt{x-3}\,[(x+1)\sqrt{x-3}+(x-1)\sqrt{x+3}]} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}.$$

502. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язалын:

$$\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+b} + \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}}\cdot\frac{b+a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\dfrac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}}{\dfrac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a^2-b^2}} \times$$

$$\times \frac{a-\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{(2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a})(a+b)}{2a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2})(a+b)}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{2}.$$

503. Берлен аңлатманы ашакдакы ялы язалын:

$$\frac{x^3+4x^2+10x+12}{x^3-x^2+2x+16}\cdot\frac{x^3-3x^2+8x}{x^2+2x+6} = \frac{(x+2)(x^2+2x+6)}{x^3-x^2+2x+16}\times$$

$$\times\frac{x(x^2-3x+8)}{x^2+2x+6} = \frac{(x+2)(x^2-3x+8)x}{x^3-x^2+2x+16} =$$

$$= \frac{x(x^3-3x^2+8x+2x^2-6x+16)}{x^3-x^2+2x+16} = \frac{x(x^3-x^2+2x+16)}{x^3-x^2+2x+16} = x.$$

504. Берлен аңлатманы шейле язалын:

$$a\sqrt{2}\cdot\frac{(8+\sqrt{16-a^2})\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}}{\sqrt{4+\sqrt{16-a^2}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}} - \sqrt{(4+a)^3} - \sqrt{(4+a)^3} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}\,(8+\sqrt{16-a^2})}{\sqrt{16-16+a^2}} - \sqrt{(4+a)^3} + \sqrt{(4-a)^3} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}\,(8+\sqrt{16-a^2})}{a} - \sqrt{(4+a)^3} + \sqrt{(4-a)^3} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}\cdot(8+\sqrt{16-a^2}) + (\sqrt{(4-a)^3}-\sqrt{(4+a)^3}) =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}\cdot(8+\sqrt{16-a^2}) + (\sqrt{4-a}-\sqrt{4+a})\times$$

$$\times(4-a+\sqrt{16-a^2}+4+a) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{16-a^2}}\times$$

$$\times(8+\sqrt{16-a^2}) + (\sqrt{4-a}-\sqrt{4+a})(8+\sqrt{16-a^2}) =$$

$$= (8+\sqrt{16-a^2})(\sqrt{8-2\sqrt{16-a^2}}+\sqrt{4-a}-\sqrt{4+a}) =$$

$$= (8+\sqrt{16-a^2})(\sqrt{(\sqrt{4+a}-\sqrt{4-a})^2}+\sqrt{4-a}-\sqrt{4+a}) =$$

$$= (8+\sqrt{16-a^2})(\sqrt{4+a}-\sqrt{4-a}+\sqrt{4-a}-\sqrt{4+a}) = 0.$$

505. $$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13} = \frac{a^3-4a^2+2a^2+13a-8a+26}{a^3-4a^2-a^2+13a+4a-13} =$$

$$= \frac{(a^3-4a^2+13a)+(2a^2-8a+26)}{(a^3-4a^2+13a)-(a^2-4a+13)} = \frac{a(a^2-4a+13)+2(a^2-4a+13)}{a(a^2-4a+13)-(a^2-4a+13)} =$$

$$= \frac{(a^2-4a+13)(a+2)}{(a^2-4a+13)(a-1)} = \frac{a+2}{a-1}.$$

506. $$\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2} = \frac{2a^4+2a^2+a^3+2a^2+a+2}{2(a^3-1)-a(a-1)} =$$

$$= \frac{2a^2(a^2+1)+a(a^2+1)+2(a^2+1)}{(a-1)(2a^2+a+2)} = \frac{(a^2+1)(2a^2+a+2)}{(a-1)(2a^2+a+2)} = \frac{a^2+1}{a-1}.$$

507. $$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-a}{bc} =$$

$$= \frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{b(a+c)(a-c)}\cdot\frac{(a-c)c+c^2-(1+c)(a-c)}{c(a-c)}\times$$

$$\times\frac{bc}{c+c^2-a} =$$

$$= \frac{(a-c)(a-c)(a^2+ac+c^2)(ac-c^2+c^2-a-ac+c+c^2)bc}{(a^2+ac+c^2)\cdot b(a+c)(a-c)\cdot c(a-c)\cdot(c+c^2-a)} =$$

$$= \frac{(-a+c+c^2)}{(a+c)\cdot(c+c^2-a)} = \frac{1}{a+c}.$$

508. $$\frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3}:\frac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4} =$$

$$= \frac{(a+2b-a+2b)[(a+2b)^2+(a+2b)(a-2b)+(a-2b)^2]}{(2a+b+2a-b)[(2a+b)^2-(2a+b)(2a-b)+(2a-b)^2]}:$$

$$:\frac{3a^4+3a^2b^2+4a^2b^2+4b^4}{4a^4+4a^2b^2+3a^2b^2+3b^4} =$$

$$= \frac{4b(a^2+4ab+4b^2+a^2-4b^2+a^2-4ab+4b^2)}{4a(4a^2+4ab+b^2-4a^2+b^2+4a^2-4ab+b^2)}:$$

$$= \frac{3a^2(a^2+b^2)+4b^2(a^2+b^2)}{4a^2(a^2+b^2)+3b^2(a^2+b^2)} = \frac{b(3a^2+4b^2)}{a(4a^2+3b^2)} : \frac{(a^2+b^2)(3a^2+4b^2)}{(a^2+b^2)(4a^2+3b^2)} =$$

$$= \frac{b(3a^2+4b^2)(a^2+b^2)(4a^2+3b^2)}{a(4a^2+3b^2)(a^2+b^2)(3a^2+4b^2)} = \frac{b}{a}.$$

509. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)=$

$$= \frac{6a^3+11a^2+5a+3}{a+1} : \frac{3a^2+a+1}{a+1} = \frac{6a^3+11a^2+5a+3}{3a^2+a+1} =$$

$$= \frac{6a^3+2a^2+9a^2+2a+3a+3}{3a^2+a+1} = \frac{2a(3a^2+a+1)+3(3a^2+a+1)}{3a^2+a+1} =$$

$$= \frac{(3a^2+a+1)(2a+3)}{3a^2+a+1} = 2a+3.$$

510. $$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}} = \frac{\frac{b+a-2c}{ab}\cdot(a+b+2c)}{\frac{b^2+a^2+2ab-4c^2}{a^2b^2}} =$$

$$= \frac{\frac{(a+b-2c)(a+b+2c)}{ab}}{\frac{(a+b)^2-4c^2}{a^2b^2}} = \frac{(a+b-2c)(a+b+2c)a^2b^2}{ab(a+b+2c)(a+b-2c)} = ab.$$

511. $x+\frac{1}{x}=y$ билен белләлиң. Онда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ деңлеме аларыс.

Инди берлен деңлемәниң ерине $7y-2(y^2-2)=9$ я-да $2y^2-7y+5=0$ деңлеме аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1=\frac{5}{2}$ ве $y_2=1$ тапарыс.

Инди $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ деңлемәни чөзүп, $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$ аларыс.

$x+\frac{1}{x}=1$ деңлемәни чөзүп, $x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ аларыс.

512. Инди билен $x+4=y$ деңлик аркалы тәзе нәбелли гиризйәрис. Онда берлен деңлемәниң ерине ашакдакыны аларыс:

$$(y-1)^4+(y+1)^4=16.$$

Шу деңликден гөрнүши ялы, y-иң тәк дережели членлери өзара ёк болярлар. Диймек,

$$y^4+6y^2+1+y^4+6y^2+1=16$$

я-да $y^4+6y^2-7=0$ аларыс. Шу деңлемәни чөзүп,

$$y_{1,2}=\pm 1, \quad y_{3,4}=\pm i\sqrt{7}$$

бахалары тапарыс.

Шейлеликде, $x_1=-3$, $x_2=-5$, $x_3=-4+i\sqrt{7}$, $x_4=-4-i\sqrt{7}$.

Беллик. Тәзе нәбеллини гиризенимизде

$$\frac{(x+3)+(x+5)}{2}=y$$

деңлиги уландык.

513. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язалың:

$$\sqrt[3]{1-(x-1)}=1-\sqrt{x-1}.$$

Инди $\sqrt[3]{(1+\sqrt{x-1})(1-\sqrt{x-1})}=1-\sqrt{x-1}$ я-да

$$\sqrt[3]{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}-(1-\sqrt{x-1})=0, \text{ я-да}$$

$$(1-\sqrt{x-1})\left[\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x-1}}{(1-\sqrt{x-1})^2}}-1\right]=0.$$

Бу ерден $1-\sqrt{x-1}=0$; $x_1=2$.

Инди $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x-1}}{(1-\sqrt{x-1})^2}}=1$ я-да $1+\sqrt{x-1}=(1-\sqrt{x-1})^2$ я-да $x^2-11x+10=0$. Бу ерден $x_2=1$, $x_3=10$ бахалары тапарыс.

514. Инди билен $x^3-x^2=y$ деңлик аркалы тәзе нәбелли гиризйәрис. Онда берлен деңлемәниң ерине ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$y-\frac{8}{y}=2.$$

Шу деңлемәни чөзүп, $y_1=4$, $y_2=-2$ бахалары тапарыс. Диймек, $x^3-x^2=4$ ве $x^3-x^2=-2$.

Инди $x^3-x^2-4=0$ деңлемәни чөзелиң. Шол деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$x^3-x^2-4=x^3-8-x^2+4=(x^3-8)-(x^2-4)=$$

$$=(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)(x+2)=(x-2)(x^2+x+2)=0.$$

Диймек, $x_1=2$; $x_2=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $x_3=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

Инди болса $x^3-x^2=-2$ деңлемәни чөзелиң: $x^3-x^2+2=x^3+1-x^2+1=(x^3+1)-(x^2-1)=(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x+1)=(x+1)(x^2-2x+2)=0$. Диймек, $x_4=-1$; $x_5=1+i$; $x_6=1-i$.

515. Ашакдакы ялы эдип, тәзе нәбелли гиризелиң:

$$x+\frac{1}{x}=y.$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерелиң, онда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ аларыс.

Инди шол деңлигиң ики бөлегини-де куба гөтерелиң, онда $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3$ аларыс.

Берлен деңлемәниң ерине $y^3-3y+y^2-2+y=6$ я-да $y^3+y^2-2y-8=0$ деңлемәни аларыс.

Шу деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$y^3 + y^2 - 2y - 8 = (y^3 - 8) + (y^2 - 2y) = (y - 2)(y^2 + 2y + 4) + y(y - 2) = (y - 2)(y^2 + 3y + 4) = 0.$$

Диймек, $y_1 = 2$.

Инди болса $x + \frac{1}{x} = 2$ деңлемәни чөзүп, $x_{1,2} = 1$ тапарыс.

516. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язарыс:

$$\sqrt[7]{(ax - b)^3} + \sqrt[7]{\frac{1}{(ax - b)^3}} = \frac{65}{8}.$$

Эгер $\sqrt[7]{(ax - b)^3} = y$ билен белләсек, онда $8y^2 - 65y + 8 = 0$ деңлеме аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1 = 8$, $y_2 = \frac{1}{8}$ тапарыс. Инди $\sqrt[7]{(ax - b)^3} = 8$ я-да $(ax - b)^3 = 8^7 = 2^{21}$ я-да $ax - b = 2^7$. Бу ерден $x_1 = \frac{128 + b}{a}$.

$\sqrt[7]{(ax - b)^3} = \frac{1}{8}$ деңликден $(ax - b)^3 = \frac{1}{8^7} = \frac{1}{2^{21}}$; $ax - b = \frac{1}{2^7}$; $ax = b + \frac{1}{2^7}$ $\quad x_2 = \frac{128b + 1}{a}$ аларыс.

517. Берлен деңлемәни

$$-\sqrt{x^3} + 2x + 2\sqrt{x} = 0$$

гөрнүше гетирип $x_1 = 0$ тапарыс. Инди $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ деңлемәни чөзүп, $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$ тапарыс.

518. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$\frac{x(x+4)+4}{x+4} - \frac{2(x+2)+2}{x+2} = \frac{x(x+1)+1}{x+1} - \frac{2(x+3)+3}{x+3};$$

$$x + \frac{4}{x+4} - 2 - \frac{2}{x+2} = x + \frac{1}{x+1} - 2 - \frac{3}{x+3};$$

$$\frac{4}{x+4} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+3}; \quad \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3};$$

$$\frac{3x}{(x+1)(x+4)} = -\frac{x}{(x+2)(x+3)}; \quad x\left(\frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+5x+6}\right) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = 0; \quad \frac{2x^2+10x+11}{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)} = 0;$$

$$2x^2 + 10x + 11 = 0,$$

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

519. Берлен деңлемәниң чеп бөлегиндәки дробларың хер бириниң санавҗысыны ве майдалавҗысыны $x \neq 0$ бөлүп, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{2}{3x - 1 + \frac{2}{x}} - \frac{7}{3x + 5 + \frac{2}{x}} = 1 \quad \text{я-да} \quad \frac{2}{3x + \frac{2}{x} - 1} - \frac{7}{3x + \frac{2}{x} - 1 + 6} = 1.$$

Эгер $3x + \frac{2}{x} - 1 = y$ билен белләсек, онда $\frac{2}{y} - \frac{7}{y+6} = 1$ я-да $y^2 + 11y - 12 = 0$ аларыс. Шу деңлемеден $y_1 = 1$; $y_2 = -12$ тапарыс. Диймек $3x + \frac{2}{x} - 1 = 1$ ве $3x + \frac{2}{x} - 1 = -12$ деңлемелер алыняр.

Шу деңлемелери чөзүп, $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3}$; $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$ тапарыс.

520. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де 4-е бөлсек, ашакдакыны аларыс.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} = \frac{28}{5}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)$$

Эгер $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = y$ билен белләсек, онда $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} = y^2 + 3$ аларыс. Инди өкардакы деңлемәниң ерине $y^2 + 3 = \frac{28}{5}y$ я-да $5y^2 - 28y + 15 = 0$ деңлеме аларыс.

Шу деңлемәни чөзүп, $y_1 = 5$, $y_2 = \frac{3}{5}$ тапарыс.

Инди болса $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = 5$ ве $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = \frac{3}{5}$ деңлемелери чөзүп, $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{31}$; $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{159}}{5}$ тапарыс.

521. Берлен системаны ашакдакы ялы язалың

$$\begin{cases} (x + y) + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$$

Шу системадан $z^2 - 11z + 30 = 0$ квадрат деңлемәни аларыс. Диймек, $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ ве $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$ болҗак.

Иң ахыркы системалары чөзүп $x_1 = 3$; $y_1 = 2$; $x_2 = 2$; $y_2 = 3$; $x_3 = 5$; $y_3 = 1$; $x_4 = 1$; $y_4 = 5$ бахалары тапарыс.

522. Берлен системаның икинҗи деңлемесини 3-е көпелдип, биринҗи деңлемеден айырарыс.

$$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = 8 \text{ я-да } (x - y)^3 = 8; \ x - y = 2.$$

Инди системаның икинҗи деңлемесини шейле язарыс: $xy(x - y) = 6$. Эмма $x - y = 2$, диймек, $xy = 3$. Шейлеликде, берлен системаның дерегине

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x \cdot (-y) = -3 \end{cases}$$

гөрнүшдәки системаны аларыс. Шу иң ахыркы системадан Виетиң теоремасының эсасында $z^2 - 2z - 3 = 0$ квадрат деңлеме дүзүп, шу деңлемәниң $z_1 = 3$; $z_2 = -1$ көклерини тапарыс. Диймек,

$$\begin{matrix} x_1 = 3; & -y_1 = -1 \\ x_2 = -1; & -y_2 = 3 \end{matrix} \quad \text{я-да} \quad \begin{matrix} x_1 = 3; & y_1 = 1; \\ x_2 = -1; & y_2 = -3. \end{matrix}$$

523. Берлен деңликлери гошуп хем айрып, ашакдакы деңлемелер системасыны аларыс.

$$\begin{cases} 6x^2 - 7xy + 6y^2 = 36, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Бу ерде $xy = 6$ ве $x^2 + y^2 = 13$, онда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Бу ерден $x + y = \pm 5$ аларыс.

Инди $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ ве $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$ системалары чөзүп, $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = 3$; $y_2 = 2$; $x_3 = -2$; $y_3 = -3$; $x_4 = -3$; $y_4 = -2$ бахалары тапарыс.

524. Берлен системаны ашакдакы ялы язарыс:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{xy}{3} \\ x^2 + y^2 = 160. \end{cases}$$

Инди $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{x^2y^2}{9}$, я-да $\frac{x^2y^2}{9} - 2xy - 160 = 0$, я-да $x^2y^2 - 18xy - 1440 = 0$.

$xy = z$ билен белләп, ашакдакы квадрат деңлемәни аларыс: $z^2 - 18z - 1440 = 0$, бу ерден $z_{1,2} = 9 \pm \sqrt{1521} = 9 \pm 39$; $z_1 = 48$; $z_2 = -30$.

Инди $x + y = \frac{xy}{3}$, $xy = 48$ ве $xy = -30$ деңликлери гөз өңүнде тутуп, ашакдакы системалары язарыс.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 48 \end{cases} \text{ ве } \begin{cases} x + y = -10 \\ xy = -30. \end{cases}$$

Бу ерден

$$x_1 = 4,\ x_2 = 12;\ x_3 = -5 + \sqrt{55};\ x_4 = -5 - \sqrt{55};$$
$$y_1 = 12;\ y_2 = 4;\ y_3 = -5 - \sqrt{55};\ y_4 = -5 + \sqrt{55}.$$

525. 1) Берлен системаның биринҗи деңлемесиниң ики бөлегини-де 2-ә бөлйәрис:

$$\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{5}{4}.$$

Ахыркы деңлигиң ики бөлегине-де 1 гошарыс ве айырарыс.

$$\frac{x^2 + y^2}{2xy} + 1 = \frac{5}{4} + 1 \text{ я-да } \frac{(x + y)^2}{2xy} = \frac{9}{4},\ \frac{x^2 + y^2}{2xy} - 1 = \frac{5}{4} - 1$$

$$\text{я-да } \frac{(x - y)^2}{2xy} = \frac{1}{4}.$$

Алнан деңликлери бири-бирине члене-член бөлүп.

$$\frac{(x + y)^2}{(x - y)^2} = \frac{9}{1} \text{ я-да } \frac{x + y}{x - y} = \pm\frac{3}{1} \text{ аларыс.}$$

Шу деңликден $\frac{2x}{2y} = \frac{4}{2}$ я-да $x = 2y$ аларыс. Шу бахаңы берлен системаның икинҗи деңлемесинде гоюп, $4y^2 - y^2 = 3$; $y_{1,2} = \pm 1$ аларыс. Диймек, $x_{1,2} = \pm 2$.

2) Берлен системаның биринҗи деңлемесини ашакдакы ялы язарыс:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$$

Инди $\frac{x}{y} = z$ билен беллесек,

$$z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$$

деңлеме аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $z_1 = 2$ ве $z_2 = \frac{1}{2}$ аларыс. Диймек, $x = 2y$ ве $x = \frac{1}{2}y$ ве ш. м.

526. Берлен системаны шейле язарыс:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = -3 \\ 6x^2 - 11y^2 = 10 \end{cases} \text{ я-да } \begin{cases} 10x^2 - 20xy = -30 \\ 18x^2 - 33y^2 = 30 \end{cases}$$

$$\text{я-да } 28x^2 - 20xy - 33y^2 = 0.$$

Инди $x = ty$ билен белләп, $28t^2y^2 - 20ty^2 - 33y^2 = 0$ деңлиги аларыс. Бу ерден $28t^2 - 20t - 33 = 0$. Шу квадрат деңлемәни чөзүп, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{-11}{14}$ тапарыс. Диймек, $x = \frac{3}{2}y$. Шу бахаңы берлен системаның икинҗи деңлемесине гоюп, $6 \cdot \frac{9}{4}y^2 - 11y^2 = 10$ я-да $10y^2 = 40$, я-да $y = \pm 2$ аларыс.

Шейлеликде, $x_{1,2} = \pm 3$; $y_{1,2} = \pm 2$.

Б е л л и к. Хакыкы көклери тапмак билен чәкленйәрис.

527. Берлен системаның икинҗи деңлемесини ашакдакы ялы язарыс:

$$x^2 + y^2 = 3 - xy.$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 9 - 6xy + x^2y^2$ аларыс. Берлен системаның биринҗи деңлемесини гөз өңүнде тутуп, $9 - 6xy = 21$ я-да $xy = -2$ аларыс.

Инди $x^2 + y^2 = 5$ ве $xy = -2$ деңликлери гөз өңүнде тутуп, $(x + y)^2 = 1$ ве $(x - y)^2 = 9$ аларыс.

Ахыркы ики деңликден

$$x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2;\ x_4 = 1;$$
$$y_1 = -1;\ y_2 = 2;\ y_3 = 1;\ y_4 = -2.$$

тапарыс.

528. 1) Берлен деңлемелери члене-член гошалың, онда ашакдакыны аларыс:

$$y^2 + xy + x^2 + xy = 441, \text{ я-да } (x + y)^2 = 441, \text{ я-да } x + y = \pm 21.$$

Шу бахаңы берлен системаның икинҗи ве биринҗи деңлемелерине гоюп, дегишлиликде $x_{1,2} = \pm 10$ ве $y_{1,2} = \pm 11$ аларыс.

2) Эгер берлен системаның биринҗи деңлемесини икинҗи деңлемесине бөлсек, онда $\frac{y}{x} = \frac{11}{10}$ аларыс. Ызы айдыңдыр.

529. Берлен системаны ашакдакы гөрнүшде язалың:

$$\begin{cases} (x + y) + \dfrac{x^2}{y^2} = 7 \\ (x + y) \cdot \dfrac{x^2}{y^2} = 12 \end{cases}$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Инди Виетиң теоремасыны уланып, $z^2 - 7z + 12 = 0$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $z_1 = 4$ ве $z_2 = 3$ аларыс. Диймек,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{x^2}{y^2} = 4 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ \dfrac{x^2}{y^2} = 3 \end{cases}$$

Шу системаларың биринжисинден $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $y_1 = 1$; $y_2 = -3$ аларыс.

Икинжи системаны чөзүп, $x_3 = 6 + 2\sqrt{3}$; $x_4 = 6 - 2\sqrt{3}$; $y_3 = -2 - 2\sqrt{3}$; $y_4 = -2 + 2\sqrt{3}$ тапарыс.

530. Берлен системаның биринжи деңлемесинден икинжи деңлемесини члениме-член айырсак, $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{5}{6} = 0$ деңлеме аларыс. $\frac{x}{y} = z$ билен белгилесек, $6z^2 + 5z - 6 = 0$ деңлеме аларыс.

Шу деңлемәни чөзүп, $z_1 = \frac{2}{3}$ ве $z_2 = -\frac{3}{2}$ тапарыс. Инди $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ве $\frac{x}{y} = -\frac{3}{2}$. Диймек, $x = \frac{2y}{3}$ ве $x = -\frac{3y}{2}$.

$\frac{2y}{3} \cdot y - \frac{2y}{3y} = \frac{16}{3}$ деңликден $y_{1,2} = \pm 3$ ве $-\frac{3y}{2} \cdot y + \frac{3y}{2y} = \frac{16}{3}$ деңликден $y_{3,4} = \pm \frac{i\sqrt{23}}{3}$ аларыс. Шейлеликде, $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$; $x_3 = \frac{i\sqrt{23}}{2}$; $y_3 = -\frac{i\sqrt{23}}{3}$; $x_4 = -\frac{i\sqrt{23}}{2}$; $y_4 = \frac{i\sqrt{23}}{3}$ бахалары тапарыс.

531. Берлен системаны ашакдакы ялы язалың:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2}{y} = 40 \\ \dfrac{y^3 + x^2y}{x} = 10 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} \dfrac{x(x^2 + y^2)}{y} = 40 \\ \dfrac{y(y^2 + x^2)}{x} = 10 \end{cases}$$

Шу деңлемелериң биринжисини икинжисине бөлүп, $\frac{x^2}{y^2} = 4$ я-да $x = \pm 2y$ аларыс. Шу бахаңы берлен системаның биринжи деңлемесинде гоюп, $y = \pm 2$ тапарыс.

Диймек, $x_1 = 4$; $y_1 = 2$; $x_2 = -4$; $y_2 = -2$.

532. Берлен системаның биринжи деңлемесини ашакдакы гөрнүшде язалың:

$$(x^2)^3 + (y^2)^3 = 65. \quad \text{Инди} \quad (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = 65.$$

Системаның икинжи деңлемесини гөз өңүнде тутсак, $x^2 + y^2 = 5$ аларыс. Бу ерден $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25$. Шу деңлемеден берлен системаның икинжи деңлемесини члениме-член айырып, $x^2y^2 = 4$ аларыс. Диймек,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4. \end{cases}$$

Шу системаны чөзүп,

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$; $x_5 = 1$; $x_6 = -1$; $x_7 = 1$; $x_8 = -1$
$y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $y_3 = -1$; $y_4 = 1$; $y_5 = 2$; $y_6 = -2$; $y_7 = -2$; $y_8 = 2$

бахалары тапарыс.

533. Берлен системаның икинжи деңлемесинден $x^2 + y^2 = 6x$ бахаңы системаның биринжи деңлемесине гойярыс:

$$\sqrt{\frac{1 + 4x}{1 + 8x}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{6x + 2x + 11}} \quad \text{я-да} \quad \frac{\sqrt{1 + 4x}}{\sqrt{1 + 8x}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{1 + 8x}},$$

я-да $\sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 + 8x} = 2$ аларыс. Алнан иррационал деңлемәни чөзйәрис. $1 + 8x = 4 - 4\sqrt{1 + 4x} + 1 + 4x$ я-да $x = 1 - \sqrt{1 + 4x}$; $x^2 - 2x + 1 = 1 + 4x$; $x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. Алнан көклериң икинжиси ($x_2 = 6$) $\sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 + 8x} = 2$ деңлемәни канагатландырмаяр, диймек, $x = 0$.

Инди $x^2 + y^2 - 6x = 0$ деңликден $y = 0$ тапярыс.

Шейлеликде,

$$x = 0, \; y = 0.$$

534. Илки билен берлен системаның икинжи деңлемесинден $x^2 + y^2 = 6x - 5$ тапярыс ве шу бахаңы системаның биринжи деңлемесинде гойярыс. Онда $\sqrt{4x + 4 + 6x - 5} - \sqrt{4 - 4x + 6x - 5} = 4$ деңлиги аларыс.

Инди $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{2x - 1} = 4$ иррационал деңлемәни чөзйәрис:

$$10x - 1 = 16 + 8\sqrt{2x - 1} + 2x - 1; \; 8x - 16 = 8\sqrt{2x - 1} \;\; \text{я-да}$$
$$x - 2 = \sqrt{2x - 1}, \text{ я-да } x^2 - 4x + 4 = 2x - 1.$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ квадрат деңлемәни чөзүп, $x_1 = 5$; $x_2 = 1$ бахалары аларыс.

Инди $x^2 + y^2 = 6x - 5$ деңликден $5^2 + y^2 = 6 \cdot 5 - 5$ я-да $y_{1,2} = 0$ ве $1 + y^2 = 6 - 5$; $y_{3,4} = 0$ бахалары аларыс.

Шейлеликде, $x_1 = 5$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = 0$.

Алнан бахалары берлен системадакы деңлемелере гоюп барланымызда икинжи көклериң биринжи деңлемәни канагатландырмаяндыгыны гөрйәрис.

Жогабы: $x = 5$; $y = 0$.

535. Берлен системаның биринжи деңлемесиниң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$ аларыс. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 16 - 16xy + 4x^2y^2$ я-да $x^4 + y^4 = 2x^2y^2 - 16xy + 16$ аларыс. Инди берлен системаның икинжи деңлемесини гөз өңүнде тутуп, $16 = 2x^2y^2 - 16xy + 16$ я-да $2x^2y^2 - 16xy = 0$ аларыс. Шу ерден $xy = 0$ ве $xy = 8$ аларыс.

Инди берлен системаның дерегине

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 8 \end{cases}$$

ики система аларыс. Шу системаларың биринжисинден $z^2 - 2z = 0$ я-да $z_1 = 0$; $z_2 = 2$, диймек, $x_1 = 0$; $y_1 = 2$ я-да $x_2 = 2$; $y_2 = 0$ аларыс. Инди икинжи системадан $z^2 - 2z + 8 = 0$; $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-7}$.

Меселәниң шертине гөрә берлен деңлемелер системасындакы нәбеллилериң хакыкы бахаларыны танмалы, шонуң үчин z-иң иң ахыркы бахалары шол шерти канагатландырмаяр. Шейлеликде, $x_1 = 0$; $y_1 = 2$ ве $x_2 = 2$; $y_2 = 0$ бахалары аларыс.

536. Берлен системаның икинжи деңлемесини шейле язярыс:

$$20x^2y^2 + 9xy - 20 = 0.$$

Шу деңлемәни чөзүп, $xy = \frac{-9 \pm 41}{40}$ я-да $(xy)_1 = \frac{4}{5}$ ве $(xy)_2 = -\frac{5}{4}$ тапарыс.

Инди берлен системаның биринжи деңлемесини $y - x = 2xy$ гөрнүшде язып, $y - x = 2 \cdot \frac{4}{5}$ ве $y - x = 2 \cdot \frac{-5}{4}$ я-да $y - x = \frac{8}{5}$ ве $y - x = -\frac{5}{2}$ аларыс.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Шейлеликде, берлен системаның дерегине

$$\begin{cases} y + (-x) = \dfrac{8}{5} \\ -xy = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} y + (-x) = -\dfrac{5}{2} \\ y(-x) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

ики система аларыс. Шу системаларың биринжисинден Виетиң теоремасы боюнча $z^2 - \frac{8}{5}z - \frac{4}{5} = 0$ я-да $5z^2 - 8z - 4 = 0$ квадрат деңлеме аларыс. Диймек, $z_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{5}$; $z_1 = 2$ ве $z_2 = -\frac{2}{5}$, яғны $x_1 = -2$ ве $y_1 = -\frac{2}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5}$ ве $y_2 = 2$.

Эдил шонуң ялы эдип, икинжи системадан $z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{5}{4} = 0$ деңлемәни аларыс. Шу ерден $z_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{4}$ ве $z_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{4}$. Диймек, $x_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$; $y_3 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{4}$ ве $x_4 = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$, $y_4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{4}$.

Шейлеликде, $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{2}{5}$; $x_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$; $x_4 = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$; $y_1 = -\frac{2}{5}$; $y_2 = 2$; $y_3 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{4}$; $y_4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{4}$.

537. $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = z$ билен белләлиң, онда берлен системаның биринжи деңлемесинден $z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3}$ я-да $3z^2 - 10z + 3 = 0$ деңлемәни аларыс. Бу ерден $z_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3}$; $z_1 = 3$; $z_2 = \frac{1}{3}$. Инди $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 3$ ве $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{1}{3}$; $x + y = 9x - 9y$, бу ерден $4x = 5y$. Шу бахаңы берлен системаның икинжи деңлемесине гоюп, $\frac{5y}{2} + 2y - \frac{5y}{4} \cdot y = -2$ я-да $5y^2 - 18y - 8 = 0$; $y_1 = 4$; $y_2 = -\frac{2}{5}$; $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ аларыс.

Жогабы: $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $y_1 = 4$; $y_2 = -\frac{2}{5}$.

538. Берлен системадакы биринжи деңлемәниң ики бөлегини-де куба гөтерелиң, онда ашакдакыны аларыс:

$$x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3 = 125.$$

Инди системадакы икинжи деңлемәни гөз өңүнде тутсак, онда $3x^4y + 3x^2y^2 = 60$ я-да $x^4y + x^2y^2 = 20$, я-да $x^2y(x^2 + y) = 20$ аларыс. Эмма $x^2 + y = 5$. Диймек

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2y = 4 \end{cases}$$

системаны аларыс. Шу системадан $z^2 - 5z + 4 = 0$ квадрат деңлемәни дүзйәрис ве $z_1 = 4$ хем $z_2 = 1$ көклери тапарыс. Диймек,

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 4. \end{cases}$$

Шейлеликде, $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$; $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 4$; $y_4 = 4$.

539. $x + y = 5 - xy$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де куба гөтерелиң, онда $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 125 - 75xy + 15x^2y^2 - x^3y^3$ я-да $x^3 + y^3 + x^3y^3 = 125 - 75xy + 15x^2y^2 - 3x^2y - 3xy^2$ аларыс.

Инди берлен системадакы икинжи деңлемәни гөз өңүнде тутуп, ашакдакы деңлиги аларыс: $17 = 125 - 75xy + 15x^2y^2 - 3xy(x + y)$. Эмма $x + y = 5 - xy$ боланы себәпли, $17 = 125 - 75xy + 15x^2y^2 - 3xy(5 - xy)$ я-да $17 = 125 - 90xy + 18x^2y^2$ аларыс.

$x^2y^2 - 5xy + 6 = 0$ квадрат деңлемәни чөзүп, $(xy) = \frac{5 \pm 1}{2}$ я-да $(xy)_1 = 3$; $(xy)_2 = 2$ аларыс.

Инди $xy = 3$ дийсек, онда $x + y = 2$ аларыс.

Эгер $xy = 2$ дийсек, онда $x + y = 3$ аларыс. Шейлеликде,

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

ики системаны чөзүп, нәбелли x ве y тапарыс. Биринжи системадан $z^2 - 2z + 3 = 0$ квадрат деңлеме дүзйәрис. Шу квадрат деңлемәниң ($D = 1 - 3 = -2 < 0$) дискриминанты нулдан кичи боланы себәпли онуң хакыкы көклери ёкдур.

Инди икинжи системадан $t^2 - 3t + 2 = 0$ квадрат деңлеме дүзүп, $t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ я-да $t_1 = 2$; $t_2 = 1$ бахалары тапарыс.

Шейлеликде, x ве y нәбеллилер үчин

$$\begin{matrix} x_1 = 2; \\ y_1 = 1 \end{matrix} \quad \text{ве} \quad \begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{matrix}$$

бахалары тапарыс.

540. Берлен системаның биринжи деңлемесинден $x^2 + y^2 = 13 - xy$ аларыс. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 169 - 26xy + x^2y^2$ аларыс.

Инди системаның икинжи деңлемесини гөз өңүнде тутсак, онда $x^2y^2 - 13xy + 30 = 0$ аларыс. Шу деңлемеден $(xy)_1 = 3$ ве $(xy)_2 = 10$ тапарыс. Шу бахалары берлен системаның биринжи деңлемесине гоюп,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 10 \end{cases}$$

системалары аларыс.

Системаларың биринжисинден $x^2 + y^2 + 2xy = 16$ я-да $(x + y)^2 = 16$, я-да $x + y = \pm 4$ аларыс.

Инди $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$ системаны чөзүп, $x_1 = 3$; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 3$ бахалары тапарыс.

Инди болса $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$ системаны чөзүп, $x_3 = -3$; $y_3 = -1$; $x_4 = -1$; $y_4 = -3$ бахалары тапарыс.

Ёкарда гөркезилен системаларың икинжисини чөзүп,

$$x_5 = \frac{\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2};\ y_5 = \frac{\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2};\ x_6 = \frac{-\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2};$$

$$y_6 = \frac{-\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}; \quad x_7 = \frac{\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}; \quad y_7 = \frac{\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2};$$

$$x_8 = \frac{-\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}; \quad y_8 = \frac{-\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}$$

бахалары тапарыс.

541. Меселәниң шертинде берлен системаның икинжи деңлемесини ашакдакы ялы языалың

$$x - y = y - 1.$$

Бу ерден $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = y - 1$ аларыс.

Системаның биринжи деңлемесини гөз өңүнде тутуп, $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{y-1}{2}$ аларыс.

Шейлеликде,

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{y-1}{2} \end{cases}$$

системадан алнан $y + 4\sqrt{y} - 5 = 0$ деңлемәни чөзүп, $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ бахалары тапарыс.

542. Берлен системаның икинжи деңлемесини ашакдакы ялы язарыс:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 2$$

Шу деңликден $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ ве $\sqrt{x} - \sqrt{y} = -1$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

системалардан $x_1 = 25$; $x_2 = \frac{49}{4}$; $y_1 = 9$; $y_2 = \frac{81}{4}$ тапарыс.

543. Берлен системаның биринжи деңлемелеринде x белли хасапланылса, онда

$$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-x \pm 3x}{2}}$$

аларыс.

Диймек, $y_{1,2} = \pm\sqrt{x}$; $y_{3,4} = \pm\sqrt{-2x}$. Шу бахалары берлен системаның икинжи деңлемесине гоюп,

$$x \pm \sqrt{x} = 6 \text{ ве } x \pm \sqrt{-2x} = 6$$

деңлемелери аларыс.

Шу деңлемелериң биринжисини чөзүп, $x_1 = 4$; $x_2 = 9$ тапарыс. Диймек, $y_1 = 2$; $y_2 = -3$.

Ёкарда гөркезилен деңлемелериң икинжисини чөзүп, $x_{3,4} = 5 \pm 3i$ ве $y_{3,4} = 1 \pm 3i$ тапарыс.

544. Илки билен $\frac{x}{y} = z$ деңлик аркалы тәзе нәбелли гиризйәрис. Онда $z^2 + z^3 = 12$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни ашакдакы ялы язарыс.

$$z^3 + z^2 - 12 = z^3 - 8 + z^2 - 4 = (z-2)(z^2 + 2z + 4) + (z-2)(z+2) =$$
$$= (z-2)(z^2 + 3z + 6) = 0.$$

Бу ерден $z = 2$ аларыс. Диймек, $\frac{x}{y} = 2$. Инди $x = 2y$ бахасыны берлен системаның икинжи деңлемесинде гоюп, $2y^4 + y^2 - 3 = 0$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1 = 1$; $y_2 = -1$ бахалары тапарыс. Диймек, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$; $y_2 = -1$.

545. Берлен системаның биринжи деңлемесинден гөрнүши ялы, $xy > 0$ болмалыдыр. Инди системаны шейле язарыс:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21 \\ \sqrt{xy}(|x| + |y|) = 90. \end{cases}$$

Ахыркы системадан гөрнүши ялы, x ве y нәбеллилериң икиси-де бир вагтда я положител я-да отрицател болмалыдыр, чүнки оларың бири положител болуп, бейлекиси отрицател болса, онда $\sqrt{xy}$ аңлатма хыялы болар, бу болса мүмкин дәлдир.

Диймек, ахыркы системаның икинжи деңлемеси я $\sqrt{xy}(x + y) = 90$ я-да $\sqrt{xy}(x + y) = -90$ гөрнүшде болмалыдыр. Шейлеликде, берлен системаның ерине ашакдакы ики системаны аларыс:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21 \\ \sqrt{xy}(x + y) = 90 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21 \\ \sqrt{xy}(x + y) = -90. \end{cases}$$

Илки билен шу системаларың биринжисини чөзелиң:

$$x + y = 21 - \sqrt{xy}; \quad \sqrt{xy}(21 - \sqrt{xy}) = 90 \text{ я-да } xy - 21\sqrt{xy} + 90 = 0.$$

Инди $\sqrt{xy} = z$ билен белгилесек, $z^2 - 21z + 90 = 0$ квадрат деңлемәни аларыс. Шу ерден $z_{1,2} = \frac{21 \pm 9}{2}$; $z_1 = 15$; $z_2 = 6$, диймек, $\sqrt{xy} = 15$ ве $\sqrt{xy} = 6$. Инди $x + y = 21 - 15$ ве $x + y = 21 - 6$.

Шейлеликде,

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \sqrt{xy} = 15 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x + y = 15 \\ \sqrt{xy} = 6. \end{cases}$$

Иң ахыркы ики системаның биринжиси мүмкин дәлдир, чүнки ики санын орта арифметик бахасы шол санларын орта геометрик бахасындан кичи дәлдир.

Инди $\begin{cases} x + y = 15 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$ системаны чөзелиң.

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 225 \\ 4xy = 144 \end{cases}$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 81; \qquad x - y = \pm 9.$$

Диймек,

$$\begin{matrix} x + y = 15 \\ x - y = 9 \end{matrix} \text{ я-да } \begin{matrix} x + y = 15 \\ x - y = -9. \end{matrix}$$

$$x_1 = 12; \; y_1 = 3; \; x_2 = 3; \; y_2 = 12$$

Инди $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21 \\ \sqrt{xy}(x + y) = -90 \end{cases}$ системаны чөзмели. Шейле система мүмкин дәлдир, чүнки системадан гөрнүши ялы, x ве y санларын икиси-де бир вагтда положител болмалыдыр.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

546. Икинжи деңлемеден биринжи деңлемәни члеме-член айырырыс:

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{1}{a} - a.$$

Инди $\frac{x}{y} = z$ билен белләйәрис, онда $z - \frac{1}{z} = \frac{1}{a} - a$ я-да $z^2 - 1 = \frac{1-a^2}{a}z$, я-да $z^2 - \frac{1-a^2}{a}z - 1 = 0$ деңлеме аларыс.

$$z_{1,2} = \frac{\frac{1-a^2}{a} \pm \sqrt{\frac{1-2a^2+a^4}{a^2}+4}}{2}; \quad z_{1,2} = \frac{\frac{1-a^2}{a} \pm \sqrt{\frac{(1+a^2)^2}{a^2}}}{2};$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{1-a^2}{a} \pm \frac{1+a^2}{a}}{2}; \quad z_1 = \frac{1-a^2+1+a^2}{2a}; \quad z_1 = \frac{1}{a}; \quad z_2 = -a.$$

Инди $\frac{x}{y} = \frac{1}{a}$ я-да $y = ax$. Шу баханы берлен системадакы деңлемелериң биринжисине гоюп, $x \cdot ax - \frac{x}{ax} = a$ я-да $ax^2 - \frac{1}{a} = a$, я-да $ax^2 = a + \frac{1}{a}$, я-да $a^2x^2 = a^2 + 1$ аларыс.

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}; \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+1}.$$

Жогабы: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$; $y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+1}$.

$z_2 = -a$ баха берлен системаны канагатландырмаяр.

547. Берлен системаны ашакдакы ялы язярыс:

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 = 3a^3 \\ x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 15a^3. \end{cases}$$

Шу деңлемелери члеме-член гошарыс ве икинжисинден биринжисини айырырыс, онда

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3 \\ xy^2 + x^2y = 6a^3 \end{cases} \text{ аларыс.}$$

Ахыркы системаның икинжи деңлемесиниң ики бөлегини-де 3-е көпелдип, биринжи деңлеме билен гошсак, $(x+y)^3 = 27a^3$ аларыс. Бу ерден, $x + y = 3a$.

Инди $xy(x+y) = 6a^3$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, $xy = 2a^2$ аларыс. Диймек,

$$\begin{cases} x + y = 3a \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

Шу системаны чөзүп, $x_1 = a$; $y_1 = 2a$; $x_2 = 2a$; $y_2 = a$ бахалары аларыс.

548. Берлен системаның биринжи деңлемесиниң чеп бөлегини ики саның квадратларының тапавуды боюнча даргадып, ашакдакыны аларыс:

$$(x+y)(x-y-a) = 0.$$

Шу деңликден $x = -y$ ве $x - y = a$ аларыс. Меселәниң шертине гөрә $x = -y$ болуп билмез.

Инди

$$\begin{cases} x - y = a \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = b \end{cases}$$

системаны ашакдакы гөрнүшде язярыс:

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = a \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = b. \end{cases}$$

Диймек,

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{a}{b} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = b. \end{cases}$$

Шу системаны чөзүп, $x = \left(\frac{b^2+a}{2b}\right)^2$ ве $y = \left(\frac{a-b^2}{2b}\right)^2$ тапарыс.

549. Берлен системаның биринжи деңлемесинден икинжи деңлемесини члеме-член айрып, ашакдакыны аларыс: $x^2 - y^2 - 2ay + 2bx - a^2 + b^2 = 0$ я-да $(x+b)^2 - (y+a)^2 = 0$. Инди $(x+b+y+a)(x+b-y-a) = 0$. Бу ерден $x + y = -(a+b)$ ве $x - y = a - b$ я-да $y = -x - a - b$ ве $y = x - a + b$.

Шу бахалары берлен системаның биринжи деңлемесине гоюп,

$$x^2 + 2ax + a^2 + 2ab = 0 \text{ ве } x^2 - 2ax + a^2 - 2ab = 0$$

ве ш. м. аларыс.

550. Берлен системаның биринжи деңлемесиниң ики бөлегини-де квадрата гетерип, ашакдакы ялы язярыс:

$$y - x^2 = \sqrt{y - x}.$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гетерип, шейле язярыс:

$$y^2 - y(2x^2+1) + x^4 + x = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x^4 - 4x}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x-1)}{2};$$

$$y_1 = x^2 + x; \quad y_2 = x^2 - x + 1.$$

Системаның икинжи деңлемесини гөз өңүнде тутуп, $x^2 + x - a = 0$ ве $x^2 + 1 - a = 0$ деңлемелери чөзүп, көклерини тапарыс.

551. Берлен системаның биринжи деңлемесинден $y + z = 6 - x$ алып, шу баханы икинжи деңлемә гойсак $x(6-x) = 5$ я-да $x^2 - 6x + 5 = 0$ аларыс. Шу ерден, $x_1 = 5$; $x_2 = 1$ тапарыс.

Шу бахалары берлен системаның икинжи ве үчүнжи деңлемелеринде гоюп,

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y(1+z) = 8 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} y + z = 1 \\ y(5+z) = 8 \end{cases}$$

системалары аларыс.

Шу системалары чөзүп, $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $z_1 = 3$; $x_2 = 1$; $y_2 = 4$; $z_2 = 1$; $x_3 = 5$; $y_3 = 2$; $z_3 = -1$; $x_4 = 5$; $y_4 = 4$; $z_4 = -3$ бахалары тапарыс.

Беллик. Берлен системаның биринжи ве икинжи деңлемелерини

$$\begin{cases} x + (y+z) = 6 \\ x \cdot (y+z) = 5 \end{cases}$$

гөрнүшде язып, Виетиң теоремасыны уланмак боларды.

552. Берлен системаның икинжи деңлемесинден үчүнжи деңлемесиниң ики эссесини айырырыс, онда $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = 0$ я-да $(y + z - x)^2 = 0$, я-да $x = y + z$ аларыс. Берлен системаның биринжи деңлемесини гөз өңүнде тутсак, онда $x = 2$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$$

системаны чөзүп, $y_1 = 3$; $z_1 = -1$; $y_2 = -1$; $z_2 = 3$ бахалары тапарыс. Диймек, $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $z_1 = -1$; $x_2 = 2$; $y_2 = -1$; $z_2 = 3$.

553. Берлен системаны шейле язярыс:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 20 \\ x + yz = 17 \\ x^2 + xy + xz + yz = 35. \end{cases}$$

Шу системаның үчүнжи деңлемесинден биринжи деңлемесини айырярыс, онда $yz = 15$ аларыс. Инди $x = 2$ баханы системадакы биринжи деңлемә гоюп, $y + z = 8$ аларыс.

Инди $\begin{cases} y + z = 8 \\ yz = 15 \end{cases}$ системадан $y_1 = 5$; $z_1 = 3$ ве $y_2 = 3$; $z_2 = 5$ аларыс.

Шейлеликде, $x_1 = 2$; $y_1 = 5$; $z_1 = 3$; $x_2 = 2$; $y_2 = 3$; $z_2 = 5$ бахалары аларыс.

554. Берлен системаны ашакдакы гөрнүшде язярыс:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2xy - 2xz + 2yz = 2k \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 1. \end{cases}$$

Шу системаның үчүнжи деңлемесинден икинжисини члениме-член айрып $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1 - 2k$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1 - 2k \end{cases}$$

системадан $y^2 + z^2 - 2yz = 1 - k$ я-да $(y - z)^2 = 1 - k$ аларыс. Эмма берлен системаның үчүнжи деңлемесинден $(y - z)^2 = (1 - x)^2$. Диймек, $(1 - x)^2 = 1 - k$ я-да $1 - x = \pm\sqrt{1 - k}$. Бу ерден $x = 1 \pm \sqrt{1 - k}$ ве ш. м.

555. Берлен системадакы биринжи ве икинжи деңлемелери члениме-член гошуп, ашакдакыны аларыс: $x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + 4yz - 12z^2 = 0$ я-да $(x + y)^2 + 4z(x + y) - 12z^2 = 0$. Иң ахыркы деңлемәни чөзүп, ашакдакыны аларыс: $(x + y)_{1,2} = -2z \pm \sqrt{4z^2 + 12z^2}$ я-да $(x + y)_{1,2} = -2z \pm 4z$; $x + y = 2z$ ве $x + y = -6z$. Берлен системадакы биринжи деңлемеден икинжи деңлемәни айрып, ашакдакыны аларыс: $x^2 - y^2 + 4z(x - y) + 4z^2 = 0$. Эмма $z = \frac{x + y}{2}$ ве $z = \frac{x + y}{-6}$ гөз өңүнде тутсак, онда

$$x^2 - y^2 + 4\cdot\frac{x + y}{2}(x - y) + 4\cdot\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = 0$$

я-да

$$x^2 - y^2 + 2(x^2 - y^2) + 4\cdot\frac{(x + y)^2}{4} = 0,$$

я-да $3(x^2 - y^2) + (x + y)^2 = 0$, я-да $y^2 - xy - 2x^2 = 0$ аларыс. Иң ахыркы деңлемәни чөзүп, $y_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2}$ я-да $y_{1,2} = \frac{x \pm 3x}{2}$, я-да $y_1 = 2x$ ве $y_2 = -x$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} x + y = 2z \\ y = 2x \\ xyz = 8 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} 3x = 2z \\ y = 2x \\ xyz = 8 \end{cases}$$

системаны чөзйәрис, онда $3x^3 = 8$ аларыс. Инди $u = \sqrt[3]{3}x$ деңлик аркалы тәзе нәбелли гиризйәрис ве $u^3 - 8 = 0$ деңлеме аларыс. Шу деңлемәни чөзйәрис:

$$(u - 2)(u^2 + 2u + 4) = 0;\ u_1 = 2;\ u_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3};\ u_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Инди $x\sqrt[3]{3} = 2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ я-да $x_1 = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$; $y_1 = \frac{4\sqrt[3]{9}}{3}$; $z_1 = \sqrt[3]{9}$;

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}};\ y_{2,3} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}};\ z_{2,3} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{3}}.$$

556. Берлен системаның икинжи деңлемесини биринжи деңлемә ве үчүнжи деңлемә члениме-член бөлелиң, онда ашакдакылары аларыс:

$$\frac{u}{y} = 3$$

$$\frac{z}{y} = 2$$

я-да $u = 3y$; $z = 2y$. Шу бахалары системаның дөрдүнжи деңлемесине гоюп,

$$y + 2y + 3y = x + 4$$

я-да $6y = x + 4$ аларыс.

Инди берлен системаның икинжи үч деңлемесини члениме-член гошалың, онда

$$x^2(yz + zu + uy) = 44 \text{ аларыс.}$$

z-иң ве u-ның бахаларыны шу ерде гоюп,

$$x^2(2y\cdot y + 2y\cdot 3y + 3y\cdot y) = 44$$

я-да $x^2\cdot y^2 = 4$; $xy = \pm 2$ аларыс.

Инди $6y - x = 4$; $xy = \pm 2$ системаны чөзүп, $x = 2$; $y = 1$ бахалары тапарыс.

Жогабы: $x = 2$; $y = 1$; $z = 2$; $u = 3$.

557. Берлен системаның биринжи деңлемесинден икинжи деңлемесини члениме-член айырярыс. Онда $ax - x + y - ay = 1 - a$ аларыс. Инди шол системаның икинжи деңлемесиниң ики белгисини-де a көпелдип, алнан деңлемеден системаның үчүнжи деңлемесини члениме-член айырярыс, онда $ax - x + a^2y - y = 0$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} ax - x + y - ay = 1 - a \\ ax - x + a^2y - y = 0 \end{cases}$$

системаны чөзелиң: $y - ay - a^2y + y = 1 - a$ я-да $y(a^2 + a - 2) = a - 1$, бу ерден $y = \frac{a - 1}{a^2 + a - 2} = \frac{a - 1}{(a - 1)(a + 2)} = \frac{1}{a + 2}$. Диймек, $y = \frac{1}{a + 2}$.

Шу баханы $ax + y - x - ay = 1 - a$ деңлиге гоюп,

$$ax - x + \frac{1}{a + 2} - a\cdot\frac{1}{a + 2} = 1 - a \text{ я-да } x(a - 1) = 1 - a + \frac{a}{a + 2} - \frac{1}{a + 2},$$

я-да

$$x(a - 1) = \frac{-a^2 - a + 2 + a - 1}{a + 2}, \text{ я-да } x = \frac{1 - a^2}{(a - 1)(a + 2)} = \frac{-1 + a}{a + 2}.$$

Инди $a\cdot\frac{-1 + a}{a + 2} + \frac{1}{a + 2} + z = 1$ деңликден $z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}$ аларыс.

Шейлеликде,

$$x = \frac{-1 + a}{a + 2};\ y = \frac{1}{a + 2};\ z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}.$$

558. Берлен системадакы деңлемелериң хеммесини члене-член гошалың, онда $x+y+z=(a+b+c)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ аларыс.

Инди берлен системаның биринжи деңлемесини гөз öңүнде тутуп, ашакдакыны аларыс:

$$x=a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Шонуң ялы эдип,

$$y=b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right), \quad z=c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

аларыс. Шу деңликлерден $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $\frac{x}{z}=\frac{a}{c}$ я-да $y=\frac{bx}{a}$, $z=\frac{cx}{a}$ аларыс. Ызыны довам этмек кынчылык дөретмез.

559. Берлен деңлемелери члене-член гошарыс:

$$2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{7}{12}+\frac{8}{15}+\frac{9}{20}$$

я-да

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}=\frac{47}{60}$$

Инди шу деңлемеден берлен системаның биринжи, икинжи ве үчүнжи деңлемелерини айрып, дегишлиликде ашакдакыны аларыс:

$$\frac{1}{y+z}=\frac{47}{60}-\frac{7}{12} \qquad \frac{1}{y+z}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{x+z}=\frac{47}{60}-\frac{8}{15} \quad \text{я-да} \quad \frac{1}{x+z}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{47}{60}-\frac{9}{20} \qquad \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}$$

Инди $\begin{cases} y+z=5 \\ x+z=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ системаны аларыс.

$$2x+2y+2z=5+4+3;\ x+y+z=6.\ x=1;\ y=2;\ z=3$$

Шейлеликде, $x=1$; $y=2$; $z=3$.

560. Берлен системаның биринжи деңлемесини икинжи ве үчүнжи деңлемелери билен гошалың, соңра системаның икинжи деңлемесини үчүнжи деңлемеси билен гошалың, онда ашакдакылары аларыс:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{x+y}=1 \\ \frac{b+c}{y+z}=1 \\ \frac{c+a}{z+x}=1 \end{cases} \quad \text{я-да} \quad \begin{cases} x+y=a+b \\ y+z=b+c \\ z+x=a+c \end{cases}$$

Диймек, $x+y+z=a+b+c$.

Инди

$$x+b+c=a+b+c,\ x=a,$$
$$y+a+c=a+b+c,\ y=b,$$
$$z+a+b=a+b+c,\ z=c.$$

561. Гөзленилйән дроблары $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ гөрнүшде язалың. Меселәниң шертине гөрә

$$x:y:z=1:2:3$$

ве

$$a:b:c=1:\frac{1}{3}:0{,}2$$

я-да

$$a:b:c=\frac{1}{1}:\frac{1}{3}:\frac{1}{5},$$

я-да

$$a:b:c=1:3:5.$$

Шейлеликде,

$$\begin{matrix} x=m & & a=n \\ y=2m & \text{ве} & b=3n \\ z=3m & & c=5n. \end{matrix}$$

Мундан башга-да меселәниң шертине гөрә $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{3}=\frac{136}{315}$. Диймек,

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{2m}{3n}+\frac{3m}{5n}}{3}=\frac{136}{315} \text{ я-да } \frac{34m}{45n}=\frac{136}{315}, \text{ я-да } \frac{m}{n}=\frac{4}{7}.$$

Шейлеликде, гөзленилйән дроблар: $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{12}{35}$.

562. Ойлап тапыжыларын биринжисиниң алан пулуның манат саныны x билен белләлиң. Онда икинжисиниң аланы $\left(\frac{1}{3}x+60\right)$ манат болуп, үчүнжисиниң аланы $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+60\right)+30\right]$ манат болар.

Шейлеликде, ашакдакы деңлемәни дүзйәрис:

$$x+\left(\frac{1}{3}x+60\right)+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+60\right)+30\right]=1410$$

я-да $\frac{4x}{3}+60+\frac{x}{9}+50=1410$. Шу деңлемәни чөзүп, $x=900$ тапарыс. Диймек, ойлап тапыжыларың биринжиси 900 манат, икинжиси 360 манат, үчүнжиси 150 манат алыпдыр.

563. Эгер Можайск билен Вязьманың арасындакы узаклык $(27x)$ *км* болса, онда Вязьма билен Смоленскиниң арасындакы узаклык $(35x)$ *км* болар.

Можайск билен Вязьманың арасында $(27x)$ *км* боланы себәпли, Москва билен Можайскиниң арасындакы узаклык $(21x)$ *км* болмалыдыр, чүнки шол аралыкларың узаклыклары 7 : 2 ялы гатнашяр.

Шейлеликде, Москва билен Смоленскиниң арасындакы узаклыкда жеми $21x+27x+35x=83x$ (*км*) бар.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

Меселәниң шертине гөрә $83x = 415$. Бу ерден $x = 5$.

Диймек, Москва билен Можайскиниң арасындакы узаклык 105 *км*, Можайский билен Вязьманың арасындакы узаклык 135 *км*, Вязьма билен Смоленскиниң арасындакы узаклык 175 *км* болмалыдыр.

Жогабы: 105 *км*, 135 *км*, ве 175 *км*.

564. Клубуң залындакы хатарларың саныны x билен белләлиң. Онда хер бир хатардакы орунларың саны $\frac{320}{x}$ болар. Эгер хатарларың хер бириндәки орунларың саны 4 сан артдырылса, онда оларың саны $\left(\frac{320}{x}+4\right)$ болар. Хатарларың саны-да бир сан артдырылыпдыр. Диймек, $(x+1)$ хатар болупдыр.

Шейлеликде, ашакдакы деңлемәни дүзәрис:

$$(x+1)\left(\frac{320}{x}+4\right)=420.$$

Шу ерден $x^2-24x+80=0$ квадрат деңлемәни аларыс ве оны чөзүп, $x_1=20$; $x_2=4$ бахаларыны аларыс. Диймек, хатарларың саны 21 болды.

Беллик. Шу ерде хатарларың соңкы саны x билен беллесикде $\left(\frac{320}{x-1}+4\right)x=420$ деңлеме алнар ве шу деңлеме чөзүлип, $x=21$ баха тапылар.

565. Экзамен тәбшырян гызларың саныны x билен беллесек, огланларың саны $(108-x)$ болар. Огланларың хер бирине пайланылан кагызларың саныны y билен беллесек, гызларың алан кагызларының саны $(y+1)$ болар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңликлери аларыс: $x(y+1)=240$ ве $y(108-x)=240$. Шу деңликлери член-член гошсак, $x+108y=480$ аларыс. Инди $x=480-108y$ баханы гоюп, $9y^2-31y-20=0$ квадрат деңлемәни аларыс ве оны чөзүп, $y=4$ тапарыс. Диймек, $x=48$.

Жогабы: гызларың саны 48, огланларың саны 60.

566. Гөзленилйән саны x билен белләлиң. Меселе йыгындысының голязмасындакы сан шейле болмалы: $x\cdot3-4$. Эмма типографияда гойберлен ялңышлык үчин шейле язылыпдыр:

$$x:3+4$$

Меселәниң шертине гөрә, ашакдакы деңлиги аларыс: $x\cdot3-4=x:3+4$. Шу деңлемәни чөзүп, $x=3$ тапарыс. Шейлеликде, гөз өңүнде тутулян мысал ашакдакы гөрнүшде болмалы: $3\cdot3-4$

Жогабы: $3\cdot3-4$.

567. Нәбелли икибелгили саның онлукларының цифрини x билен беллесек, бирликлериниң цифри $2x$ болар. Диймек, шол сан $10x+2x$ гөрнүшде язылар. Цифрлериниң ерлериниң чалшырылмагына гөрә тәзе алнан икибелгили сан $10\cdot2x+x$ гөрнүшде язылар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзәрис:

$$136\cdot(10x+2x)=136\cdot(10\cdot2x+x)-1224.$$

Шу ерден $136\cdot12x=136\cdot21x-1224$ деңлемәни алып, $x=1$ тапарыс. Шейлеликде, хакыкы көпелтмек хасылы $136\cdot12=1632$.

Жогабы: 1632.

568. Берлен квадрат деңлемәниң көклери x_1 ве x_2 болса, онда

$$x_1^2+x_2^2=1{,}75.$$

Виетиң теоремасы боюнча ве $x_1+x_2=3a$ ве $x_1x_2=a^2$. Ахыркы ики деңлигиң биринжисиниң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=9a^2$ аларыс. Шол ердәки икинжи деңлик гөз өңүнде тутулса, $x_1^2+x_2^2=7a^2$ аларыс. Диймек, $7a^2=1{,}75$. Бу ерден $a=\pm0{,}5$ аларыс

Жогабы: $a=\pm\frac{1}{2}$.

569. Ящиклериң дөрдүсиндәки чайың умумы мукдары ящиклериң хер бириндәки озалкы чайың мукдарына дең болса, онда кәки башга ящиклериң хер биринде дең чай болупдыр. Инди ящиклериң хер бириндәки чайың аграмыны x *кг* билен беллесек, онда ашакдакы деңлиги аларыс:

$$(x-9)+(x-9)+(x-9)+(x-9)=x.$$

Шу ерден, $x=12$ тапарыс.

Жогабы 12 *кг*.

570. Мотоциклчиниң сакланмазындан озалкы тизлигини x билен белләлиң, онда соңкы тизлиги $(x+10)$ *км/сағ* болар. Озалкы тизлик билен 80 *км* узаклыгы $\frac{80}{x}$ сагатда гечерди. Тәзе тизлиги билен шол аралыгы гечмек үчин $\frac{80}{x+10}$ сагат герек болар. Меселәниң шертине гөрә шу ики вагтың тапавуды 24 минут я-да $\frac{2}{5}$ сагатдыр. Диймек, $\frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=\frac{2}{5}$. Шу деңликден $x^2+10x-2000=0$ квадрат деңлеме аларыс ве оны чөзүп, $x=40$ тапарыс.

Жогабы: 40 *км/сағ*.

571. Ишчилериң биринжиси әхли иши x гүнде гутаряр диелиң. Онда ишчи бир гүнде ишиң $\frac{1}{x}$ бөлегини гутарар. Эгер икинжи ишчи әхли иши y гүнде гутарян болса, онда ол бир гүнде ишиң $\frac{1}{y}$ бөлегини гутарар. Эгер-де оларың икиси-де биле ишлеселер, онда бир гүнде ишиң $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ бөлегини ерине етирерлер.

Ики ишчи 8 гүнде әхли ишиң $\frac{2}{3}$ бөлегини ерине етирерлер. Ишиң галан бөлеги $\frac{1}{3}$ болар. Эгер әхли ишиң $\frac{1}{3}$ бөлегини икинжи ишчи 5 гүнде ерине етирйән болса, онда ол әхли иши 15 гүнде ерине етирер. Диймек, $y=15$ (гүн). Инди $\frac{1}{x}+\frac{1}{15}=\frac{1}{12}$ деңликден $x=60$ (гүн) тапарыс.

572. A ве B станцияларың арасындакы узаклыгы x билен белләлиң. Онда шол аралыгы гечмек үчин биринжи поезд $\frac{x}{30}$ сагат, икинжи болса $\frac{x}{40}$ сагат вагт сарп эдер. Диймек, икинжи поезд биринжиден $\left(\frac{x}{30}-\frac{x}{40}\right)$ сагат гич уграпдыр. Инди биринжи поезд станцияларың арасындакы узаклыгың $\frac{2}{3}$ бөлегини гечмек үчин $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{30}$ сагат вагт сарп эдер. Биринжи поезде гечмек үчин $x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}x$ *км* галар. Шол поезд $\left(\frac{1}{3}x-8\right)$ *км* геченде икинжи поезд онуң ызындан етипдир. Шол вагта ченли биринжи поезд ене-де $\left[\left(\frac{1}{3}x-8\right):15\right]$ сагат йөрәпдир.

Шейлеликде, биринжи поезд жеми $\left(\frac{2x}{90}+\frac{\frac{x}{3}-8}{15}\right)$ сагат ёл йөрәпдир. Икинжи поезд $\frac{x-8}{40}$ сагат ёл йөрәпдир. Диймек, $\frac{2x}{90}+\frac{x-2y}{45}-\frac{x-8}{40}=\frac{x}{30}-\frac{x}{40}$ аларыс. Бу ерден $x=30$ *км*.

573. Колхоздан автостанция ченли болан узаклыгы x *км* билен белләлиң. Онда шол аралыгы 3 *км/сағ* тизлик билен гечмек үчин $\frac{x}{3}$ сагат герек болар. $\frac{x}{3}$ сагат автобуса етишмек үчин герек вагтдан 40 минут я-да $\frac{2}{3}$ сагат көпдүр. Ёлагчы 3 *км* геченден сонра 4 *км/сағ* тизлик билен йөрән, станция бармак үчин $\frac{x-3}{4}$ сагат вагт сарп этди. Диймек, ол жеми $\left(\frac{x-3}{4}+1\right)$ сагат вагт сарп эдипдир. Шу görкезилен вагт хакыкы герек вагтдан 45 минут я-да $\frac{3}{4}$ сагат аздыр.

Диймек, $\frac{x-3}{4}+1+\frac{3}{4}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$. Шу ерден $x=20$ *км* тапарыс.

574. Гөзленилйән икибелгили саның бирликлериниң цифрини x ве онлукларының цифрини y билен белләлиң. Онда мeселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс: $(10y+x)-(10x+y)=18$. Меселәниң биринжи шертине гөрә $\frac{10y+x}{xy}=2\frac{2}{3}$ болмалыдыр.

Шейлеликде, $9y-9x=18$ я-да $y-x=2$ ве $10y+x=\frac{8xy}{3}$. Шу ерден $x=4$ ве $y=6$ бахалары тапарыс. Диймек, гөзленилйән сан 64 болмалыдыр.

575. Эгер икинжи гапдакы сув x *л* дийсек, онда меселәниң шертине гөрә биринжи гапдакы сув $8x$ *л* болар. Биринжи гапдан a *л* сув алнандан сонра, шол гапда $(8x-a)$ *л* галар. Икинжи гапда болса инди $(x+a)$ *л* сув болар.

Меселәниң шертине гөрә $x+a=\frac{1}{4}(8x-a)$. Шу деңлемәни чөзүп, $x=\frac{5a}{4}$ *л* тапарыс.

Диймек, биринжи гапда $10a$ *л*, икинжиде болса $\frac{5a}{4}$ *л* сув болупдыр.

576. Экскурсия гатнашыянларың саныны x билен белләлиң. Онда олардан 75 көпүкден йыгналанда жеми $75x$ көпүк пул йыгналып, 80 көпүкден йыгналанда $80x$ көпүк пул йыгналар. Эмма $75x$ көпүк пул йыгналмалы пулдан 440 көпүк аз ве $80x$ көпүк йыгналмалы пулдан 440 көпүк артык. Диймек, $75x+440=80x-440$. Бу ерден $x=176$ (адам).

577. Шәхерлериң арасындакы узаклыгы x *км* билен белләлиң. Мотоциклчи a *км/сағ* тизлик билен ёл гечендe $\frac{x}{a}$ сагат сарп эдйәр. Ол ызына гайданда $(a+b)$ *км/сағ* тизлик билен ёл гечип, $\frac{x}{a+b}$ сагат сарп эдйәр. Меселәниң шертине гөрә $\frac{x}{a}-c=\frac{x}{a+b}$, я-да $\frac{x-ac}{a}=\frac{x}{a+b}$, я-да $ax+bx-a^2c-abc=ax$, я-да $bx=ac(a+b)$, $x=\frac{ac(a+b)}{b}$.

Диймек, гөзленилйән аралык $\frac{ac(a+b)}{b}$ *км* болмалыдыр.

578. Ишчиниң әхли тайярламалы деталының саныны x билен белләлиң ве шолары y гүнде ерине етирипдир диелиң. Онда онуң хер гүнде тайярламалы деталының саны $\frac{x}{y}$ болар. Эгер ишчи хер гүнде 10 детал артык ясаса, онда әхли деталы ясамак үчин $\frac{x}{10+\frac{x}{y}}$ гүн сарп эдер. Эгер хер гүнде 5 детал аз ясаса, онда әхли деталы ясамак үчин $\frac{x}{\frac{x}{y}-5}$ гүн сарп эдер.

Меселәниң шертине гөрә

$$\begin{cases}\frac{x}{\frac{x}{y}+10}=y-4\frac{1}{2}\\[2mm] \frac{x}{\frac{x}{y}-5}=y+3\end{cases}$$

Шу ерден

$$\begin{cases}10y-4{,}5\cdot\frac{x}{y}=45\\[2mm] \frac{3x}{y}-5y=15\end{cases}$$

системаны аларыс. Шу системаның биринжи деңлемесиниң ики бөлегини-де $\frac{2}{3}$ көпелдип, $\frac{20y}{3}-\frac{3x}{y}=30$ аларыс. Шу деңлиги системаның икинжи деңлемеси билен члене-член гошуп, $\frac{20y}{3}-5y=45$ аларыс. Шу ерден $y=27$.

Инди, $\frac{20\cdot27}{3}-\frac{3x}{27}=30$ деңликден, $x=1350$ тапарыс.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Шейлеликде, 1350 деталы 27 гүнде ясаныдыр.

579. Гөзленилйән санын ызындан нуль язып, сонра ене-де икибелгили саны язмак диймек, шол гөзленилйән саны 1000-е көпелдип, алнан көпелтмек хасылына икинжи икибелгили саны гошмак диймекдир. Башгача айданымызда, гөзленилйән икибелгили санын улусыны x билен, кичисини y билен белләсек ве ёкарда айдыланлары ерине етирсек, онда $1000x + y$ аларыс. Эдил шонуң ялы, кичи санын ызындан улы саны язсак ве алнан дөртбелгили санын ызындан нуль язсак, онда $1000y + 10x$ аларыс. Меселәнин шертине гөрә, $1000x + y = 2(1000y + 10x) + 590$ ве $2x + 3y = 72$ аларыс. Шу ерден $x = 21$ ве $y = 10$ аларыс.

580. Ики шәхериң арасындакы узаклыгы x *км* билен белләлиң. Биринжи гүн шол узаклыгын $\frac{3}{8}$ бөлегини гечип, икинжи гүн $\frac{5}{12}$ бөлегини гечен болса, онда ики гүнде $\left(\frac{3x}{8} + \frac{5x}{12}\right)$ *км* ёл гечилер.

Меселәнин шертине гөрә үчүнжи гүн $\left(\frac{x}{6} + 40\right)$ *км* ёл гечилипдир. Диймек, $\frac{3x}{8} + \frac{5x}{12} + \frac{x}{6} + 40$ жем әхли ёла деңдир. Шейлеликде, $\frac{3x}{8} + \frac{15x}{12} + \frac{x}{6} + 40 = x$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $x = 960$ тапарыс.

Диймек, гөзленилйән узаклык 960 *км* болмалыдыр.

581. Санлары x ве y билен, оларын тапавудыны d, галындыны r билен белләлиң: $x - y = d$; $x = y + d$. Биринжи саны d бөлелиң. Онда $x = kd + r$ (1) аларыс, бу ерде k — етен пайдыр. Диймек, $kd + r = y + d$, бу ерден икинжи сан $y = (k - 1)d + r$ (2)

(1) ве (2) багланышыкдан x ве y санлары оларын тапавудына бөленинде пайын бирден тапавутланяндыгы гелип чыкяр.

582. Гөзленйән битин положител бөлүжинн x билен, етен пайы y билен, галындыны болса z билен белләлиң. Онда ашакдакы деңлемелере гелерис: $180 = xy + z$ ве $z = \frac{1}{4}y$. Бу системаның битин чөзүлишини тапмалы. Мунуң үчин икинжи деңлемеләки z-иң бахасыны биринжи деңлемеде ерине гоюп, йөнекейлешдирилеңден соң $y(4x + 1) = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$ деңлиге гелерис. Бу ерден $4x + 1$ санын 5; 9; 45 санларын биринин болмалыдыгы гөрүнйәр. Диймек, x бөлүжи 1; 2; 11 санлар болуп билер. Бөлүжинин 1-е я-да 2-ә дең болмажагыны барламак аңсат, онда гөзленйән сан 11 болмалыдыр.

583. Гөркезме. Гөзленилйән санлары дегишлиликде x ве y билен белләп аларыс:

$$\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{18}.$$

Жогабы. 9 ве 6.

584. Гой, икинжи керпич өрүжи әхли ишн x гүнде ерине етирер диелиң, онда биринжи керпич өрүжи $(x + 3)$ гүнде ерине етирер. Иши

1 (бирлиге) кабул эдип, биринжи керпич өрүжи бир гүнде ишин $\frac{1}{x+3}$ бөлегини ерине етирер, икинжиси болса ишин $\frac{1}{x}$ бөлегини ерине етирер. Биринжи керпич өрүжи $1\frac{1}{2}$ гүнде ишин $\frac{1}{x+3} \cdot 1\frac{1}{2}$ бөлегини ерине етирер, ишин галан бөлегини болса олар билеликде $5\frac{1}{2}$ гүнде ерине етирерлер, ягны $\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x}\right) \cdot 5\frac{1}{2}$ иш эдерлер, бу ерден деңлеме дүзйәрис:

$$\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x}\right) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{x+3} \cdot 1\frac{1}{2} = 1$$

я-да $2x^2 - 19x - 33 = 0$.

Жогабы. 11 ве 14 гүнде.

585. Гой, икинжи пыяда адам әхли аралыгы x сагатда гечйәр диелиң, онда биринжи пыяда адам шол аралыгы $(x + 2{,}5)$ сагатда гечер. Әхли ёлы бирлик хөкмүнде кабул эдип, биринжи пыяда адамың бир сагатда ёлун $\frac{1}{x+2{,}5}$ бөлегини, икинжиниң болса $\frac{1}{x}$ бөлегини гечйәндигини тапарыс. Оларың бири-бириниң гаршысына йөрәп, әхли ёлы 3 сагатда гечендиклери беллидир, бу ерден деңлеме дүзйәрис:

$$\left(\frac{1}{x+2{,}5} + \frac{1}{x}\right) \cdot 3 = 1$$

я-да $2x^2 - 7x - 15 = 0$. Бу деңлемәни чөзүп, аларыс: $x_1 = 5$ $\left(x_2 = -\frac{3}{2} < 0\right.$ деңлемәниң бу көки меселәниң шертини канагатландырмаяр$\left.\right)$.

Жогабы. 7,5 сагатда ве 5 сагатда.

586. Биринжи велосипедчи биринжи душушыга ченли $(S + a)$ *км* ёл гечипдир, икинжи болса $(S - a)$ *км* гечипдир, бу ерде S A пунктдан B пункта ченли болан узаклык. Икинжи душушыга ченли олар дегишлиликде $2S + \frac{1}{k}S$ ве $2S - \frac{1}{k}S$ *км* ёл гечипдирлер.

Эгер-де ики жисим хемишелик тизлик билен херекет этсе, онда сарп эдилен вагтларың деңлигинде жисимлериң тизликлериниң гатнашыгы жисимлериң гечен ёлуның гатнашыгына деңдир. Шонуң үчин хем S тапмак үчин $\frac{S+a}{S-a} = \frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}$ деңлемәни аларыс. Бу ерден $S = 2a\,k$ *км*.

587. A ве B пунктларың арасындакы узаклыгы l билен, мотоциклериң тизлигини болса v_1 ве v_2 билен белләлиң. Биринжи мотоцикл t вагт ичинде $p + l - q$ деп болан ёлы, икинжи мотоцикл болса $q + l - p$ дең болан ёлы гечипдир. Шоңа гөрә

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{l+p-q}{t} \\ v_2 = \dfrac{l+q-p}{t} \end{cases} \qquad (1)$$

Башга тарапдан, тизликлериң гатнашыгы биринжи гезек душушянчалар гечилен ёлуң гатнашыгына деңдир, ягны

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{t-p}{p}.$$

Шу ерде (1) формуладан v_1 ве v_2 бахаларыны ерине гоюп, t кесгитлемек үчин деңлеме аларыс. Оны чөзүп, $t=3p-q$ аларыс. t-иң шу бахасыны (1) формулада ерине гоюп, аларыс:

$$v_1=\frac{4p-2q}{t},\quad v_2=\frac{2p}{t}.$$

588. Гой, ишчилериң хер бири t гүн ишләпдир ве A ишчи x манат, B ишчи болса y манат газаныпдыр диелиң. Меселәниң шертинден ашакдакы деңлемелер системасыны аларыс:

$$\begin{cases}(t-1)\dfrac{x}{t}=720\\[2mm](t-7)\dfrac{y}{t}=648\\[2mm](t-1)\dfrac{y}{t}-(t-7)\dfrac{x}{t}=324\end{cases}\qquad(1)$$

Илкинжи ики деңлемеден тапарыс:

$$\frac{t-1}{t}=\frac{720}{x},\quad \frac{t-7}{t}=\frac{648}{y}.$$

Онда соңкы деңлемеден аларыс:

$$720\cdot\frac{y}{x}-648\cdot\frac{x}{y}=324 \text{ я-да } 20\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2-9\cdot\left(\frac{y}{x}\right)-18=0.$$

Бу ерден $y=\frac{6}{5}x$ (отрицател көки ташлаярыс). Инди (1) системаның икинжи деңлемесини биринжә бөлүп ве $\frac{y}{x}$ оның бахалары билен чалшырып аларыс:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{t-7}{t-1}=\frac{648}{720},\quad \frac{t-7}{t-1}=\frac{3}{4}.$$

Бу ерден $t=25$, диймек, $x=750$ манат, $y=900$ манат.

589. Гой, сагат суткада x минут öңе гидйәр диелиң. Онда ол хакыкы вагты $\frac{2}{x}$ суткадан соң гөркезер. Эгер ол суткада 3 минут аз гөркезип, $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ минут öңе гидйән болса, онда ол хакыкы вагты $\frac{3}{x+\frac{1}{2}}$ суткадан соң гөркезерди. Диймек, $\frac{3}{x+\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{x}$, бу ерден $x^2+\frac{3}{2}x-1=0$.

Бу деңлемәни чөзүп, тапарыс: $x=0{,}5$.

590. Гой, C сыяхатчының биринжи кенардан гайыкдан дүшен ерине (ёлуң галан бөлегини йүзүп гечейин диййн гайыкдан дүшен ери) ченли аралык x болсун. A сыяхатчының икинжи кенардан эдил шол аралыкда гайыга мүнендигини белләлиң. Хакыкатдан-да, A ве C сыяхатчының бир кенардан бейлеки кенара гечиш усулы диңе C сыяхатчының илки гайыкда гидип, соң болса йүзүп, A сыяхатчының болса оның терсине, ягны илки йүзүп, соңра болса гайыга мүнүп гечйәнлиги билен тапавутланяр. Оларың бирмензеш v тизлик билен йүзйәнлиги себәпли, өзүнем $v\neq v_1$, шейле хем бейлеки кенара гечмек үчин деңваг сарп эдендиклери зерарлы гөркезилен аралыклар деңдир болмалыдыр.

Шейле белләмекден соң деңлеме дүзмек аңсатдыр, ягны

$$\frac{x+S-2(S-x)}{v_1}=\frac{S-x}{v}.$$

Бу ерде деңлемәниң чеп бөлеги гайыгың A сыяхатчы билен душушянча гечен ёлуна сарп эден вагтыны, саг бөлеги болса A сыяхатчының гайык билен душушянча сарп эден вагтыны гөркезйәр.

Алнан деңлемеден тапарыс:

$$x=\frac{S(v+v_1)}{3v+v_1}.$$

Бу ерден биринжи кенардан икинжи кенара гечмек үчин нәче вагт сарп эдилҗендигини кесгитлемек боляр:

$$T=\frac{s-x}{v}+\frac{x}{v_1}=\frac{sv+3v_1}{v_1+3v+v_1}.$$

591. Гой, AB аралык S *км* деңъ, биринжи хем-де икинжи самолётларың тизликлери болса v_1 ве v_2 деңъ болсун. Онда меселәниң шертине гөрә деңлемелериң системасыны аларыс:

$$\frac{s}{2v_1}+\frac{a}{v_1}=\frac{s}{2v_2}-\frac{a}{v_2}\qquad(1)$$

$$\frac{s}{2v_2}-\frac{s}{2v_1}=b\qquad(2)$$

$$\frac{3s}{4v_1}-b=\frac{s}{4v_2}\qquad(3)$$

$\frac{s}{2v_1}=x$, $\frac{s}{2v_2}=y$ диййп белләлиң. (2) ве (3) деңлемелерден $x=\frac{3}{2}b$, $y=\frac{5}{2}b$ тапарыс, биринжиден болса $a\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=b$ тапарыс. Эмма $\frac{v_2}{v_1}=\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$. Инди $v_1=\frac{8a}{3b}$, $v_2=\frac{8a}{5b}$ ве $v_2=8a$ болянлыгыны тапмак кын дәлдир.

592. Эгер биринжи автомобилиң тизлигини x *км/саг.* аркалы белгилесек, онда душушянчалар биринжи автомобиль tx *км* ёл гечер, икинжиси болса $(s-tx)$ *км* ёл гечер. Шейлеликде, икинжи автомобилиң тизлиги $\frac{s-tx}{t}$ *км/саг* деңдир. p *км* ёлы гечмек үчин биринжи автомобиле герек болҗак вагт $\frac{p}{x}$ сагада деңдир, икинжи автомобиле зерур болан вагт болса $\frac{pt}{s-tx}$ сагада деңдир

Меселәниң шертине лайыклыкда аларыс:

$$\frac{p}{x} - \frac{pt}{s - tx} = q$$

Шу деңлемәни чөзүп, аларыс:

$$x = \frac{2pt + qs \pm \sqrt{4p^2t^2 + q^2s^2}}{2qt}$$

Жогабы. Биринҗи автомобилиң тизлиги

$$\frac{2pt + qs - \sqrt{4p^2t^2 + q^2s^2}}{2qt} \text{ км/сағ},$$

икинҗи автомобилиң тизлиги $\frac{qs - 2pt + \sqrt{4p^2t^2 + q^2s^2}}{2qt}$ *км/сағ* болар.

593. Пассажир поездиң тизлигини x билен белләәлиң. Онда шол ёлы гечмек үчин пассажир поезде $\frac{650}{x}$ сағат герек болар. Йүк чекйән поезде болса шол аралыгы гечмек үчин $\frac{650}{x-24}$ сағат герек болар.

Меселәниң шертинден ашакдакы деңлиги аларыс: $\frac{650}{x-24} - \frac{650}{x} = 12$. Шу деңлемеден $x^2 - 24x - 1300 = 0$ деңлемәни алып, $x = 50$ *км/сағ* тапарыс.

Диймек, пассажир поездиң тизлиги 50 *км/сағ* болуп, йүк чекйән поездиң тизлиги 26 *км/сағ* $(50 - 24)$ болмалыдыр.

594. Гөзленилйән санлары x ве y билен белләлиң ве $x > y$ болсун. Меселәниң шертине гөрә $\frac{x+y}{2} + 16 = x$ ве $\sqrt{xy} - 8 = y$. Шейлеликде, ашакдакы система алыняр:

$$\begin{cases} x - y = 32 \\ \sqrt{xy} - y = 8 \end{cases}$$

Шу системаның биринҗи деңлемесини ашакдакы ялы язярыс:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 32$$

Икинҗисини болса шейле язярыс:

$$\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 8.$$

Ахыркы ики деңлиги бири-бирине бөлүп $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 4$ я-да $\sqrt{x} = 3\sqrt{y}$ аларыс. Довамы айдыңдыр.

Жогабы: $x = 36$, $y = 4$.

595. Заводларың бири заказы x гүнде ерине етирйән болса, бейлекиси $(x - 4)$ гүнде ерине етирер. Бир гүнде биринҗи завод заказың $\frac{1}{x}$ бөлегини, икинҗи завод $\frac{1}{x-4}$ бөлегини ерине етирер. Билеликде бир гүнде заказың $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$ бөлеги ерине етирилер.

Ики завод билеликде кәбир иши 24 гүнде ерине етирйән болса, онда бир гүнде шол ишиң $\frac{1}{24}$ бөлегини ерине етирерлер.

Меселәниң шертине гөрә $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$ жем $\frac{1}{24}$-ден бәш эссе көп.

Диймек, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right) : 5 = \frac{1}{24}$ я-да $\frac{2x-4}{x(x-4)} = \frac{5}{24}$. Шу деңлемәни чөзүп, $x = 12$ тапарыс.

Жогабы: 12 гүн ве 8 гүн.

596. Меселәниң шертине гөрә ики турба билеликде ховзы $2\frac{11}{12}$ сағатда долдурярлар. Диймек, олар билеликде бир сағатда ховзуң $\frac{12}{35}$ бөлегини долдурярлар.

Инди бир турба айратынлыкда ховзы x сағатда долдуряр дийсек, онда икинҗи турба ховзы $(x - 2)$ сағатда долдурар. Шу ики турба билеликде бир сағатда ховзуң $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ бөлегини долдурарлар.

Шейлеликде, ашакдакы деңлемәни аларыс:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{12}{35}$$

Шу деңлемәни чөзүп, $x = 7$ тапарыс.

Жогабы: 7 сағат ве 5 сағат.

597. Автомобиллериң деӊ тизликлери боланы себәпли, олар A ве B пунктлардан деӊ узаклыкда душушмалы. Башгача айданымызда, оларың хер бири 5 сағат 30 минутда $\frac{x}{2}$ *км* ёл гечмели. Бу ерде A ве B пунктларың арасындакы узаклык x билен белленилди.

Диймек, оларың хер бириниң тизлиги $\frac{\frac{x}{2}}{5{,}5}$ *км/сағ* я-да $\frac{x}{11}$ *км/сағ* болмалыдыр.

Автомобиллериң бириниң тизлиги $\left(\frac{x}{11} + 12\right)$ *км/сағ* боланда, ол $\left(\frac{x}{2} + 30\right)$ *км* ёл гечйәр. Икинҗиси болса шол вагтда $\left(\frac{x}{2} - 30\right)$ *км* ёл гечйәр. Шейлеликде, $\frac{\frac{x}{2} + 30}{\frac{x}{11} + 12} = \frac{\frac{x}{2} - 30}{\frac{x}{11}}$ болмалыдыр.

Шу деңлемәни ашакдакы гөрнүше гетирйәрис: $\frac{x+60}{2x+264} = \frac{x-60}{2x}$. Шу ерден $x = 660$ *км* тапарыс.

598. Эгер A пунктдан чыкан велосипедчиниң душушыга ченли сарп эден вагтыны x билен беллесек, онда B пунктдан чыкан велосипедчи душушыга ченли $(x - 1)$ сағат сарп эдер. Оларың тизликлерини тапмак үчин гечен ёлларыны дегишлиликде шол вагтлара пайламалыдыр. Эгер B пунктдан чыкан велосипедчи 36 *км* ёл гечен болса, онда A пунктдан чыкан велосипедчи $78 - 36 = 42$ (*км*) ёл гечер. Шейлеликде, оларын тизликлери дегишлилликде

$$\frac{42}{x}\ км/сағ \text{ ве } \frac{36}{x-1}\ км/сағ \text{ болар}$$

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни аларыс: $\frac{42}{x} + 4 = \frac{36}{x-1}$.

Шу ерден $2x^2 + x - 21 = 0$ квадрат деңлеме алып, $x = 3$ (сагат) тапарыс.

Жогабы: *А* пунктдан чыкан велосипедчи душушыга ченли 3 сагат, *В* пунктдан чыкан велосипедчи болса 2 сагат вагт сарп эдипдир.

599. Токарың план боюнча хер гүнде ясамалы деталларының саныны x билен белләлиң. Онда 450 деталь ясамак үчин $\frac{450}{x}$ гүн герек болар. Хер гүнде $(x + 10)$ деталь ясап, 480 деталы ясамак үчин $\frac{480}{x+10}$ гүн герек болар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис: $\frac{450}{x} - 3 = \frac{480}{x+10}$ я-да $x^2 + 20x - 1500 = 0$.

Шу деңлемәни чөзүп, $x = 30$ тапарыс.

Жогабы: 30 деталь.

600. Теплоходың ята сувдакы тизлигини x *км/сағ* билен белләлиң. Онда ол акымың угруна $(x + 2)$ *км/сағ* тизлик билен йөрәп, акымың гаршысына болса $(x - 2)$ *км/сағ* тизлик билен йөрәр. Теплоходың акымың угруна сарп эден вагты $\frac{36}{x+2}$ сагат болуп, акымың гаршысына сарп эден вагты $\frac{17}{x-2}$ сагат болар. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис:

$$\frac{36}{x+2} + \frac{17}{x-2} = \frac{3}{4}$$

(шу ердәки деңлигиң сағ бөлегиндәки $\frac{3}{4}$ сагат = 45 минут)

Шу деңлемәни

$$3x^2 - 212x + 140 = 0$$

гөрнүшдәки квадрат деңлемә гетирип, $x = 70$ тапарыс.

Жогабы: 70 *км/сағ*.

601. Гөзленилйән санын онлукларының цифрини x билен белләсек, онуң бирликлериниң цифри $x+2$ болар. Онда шол икибелгили сан $10x + (x + 2)$ гөрнүшде аңладылар.

Меселәниң шертине гөрә икибелгили санын цифрлериниң жеми, ягны $[x + (x + 2)]$ жеми шол сана, ягны $10x + (x + 2)$ сана көпелдиленде 144 алыняр. Диймек, $[10x + (x + 2)][x + (x + 2)] = 144$ я-да $(11x + 2) \times (2x + 2) = 144$, я-да $(11x + 2)(x + 1) = 72$.

Шу ерден $11x^2 + 13x - 70 = 0$ квадрат деңлеме алып, $x = 2$ тапарыс.

Жогабы: 24.

602. Гөзленилйән санларың бирини x ве бейлекисини y билен белләлиң. Гой, $x > y$ болсун. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис:

$$x^2 - y^2 = 133.$$

Шу деңлиги ашакдакы ялы язалың: $(x + y)(x - y) = 133 \cdot 1$, я-да $(x + y) \times (x - y) = 19 \cdot 7$. Диймек,

$$\begin{cases} x + y = 133 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ я-да } \begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Шу системаларың биринжисини чөзүп, $x = 67$ ве $y = 66$ бахалары тапарыс. Системаларың икинжисини чөзүп, $x = 13$ ве $y = 6$ бахалары тапарыс.

Жогабы: 67 ве 66; 13 ве 6.

603. Окувчы китабы x гүн окаиндыр диелиң. Онда ол хер гүнде $\frac{480}{x}$ сахыпа окар. Окувчы китабы $(x - 5)$ гүн окаса, онда хер гүнде $\frac{480}{x-5}$ сахыпа окар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис: $\frac{480}{x} = \frac{480}{x-5} - 16$. Шу ерден $x^2 - 5x - 150 = 0$ гөрнүшдәки квадрат деңлемәни аларыс ве оны чөзүп, $x = 15$ тапарыс.

Жогабы: 15 гүн.

604. Гөзленилйән санларың бирини x билен ве икинжисини y билен белләлиң. Гой, $x > y$ болсун. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңликлери аларыс:

$$\begin{cases} x - y = 48 \\ \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 18. \end{cases}$$

Шу деңликлериң биринжисини $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 48$ гөрнүшде, икинжисини болса $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 36$ гөрнүшде язып, ашакдакы системаны аларыс:

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 48 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Бу ерден

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Шу системаны чөзүп, $x = 49$ ве $y = 1$ тапарыс.

605. Гөзленилйән ики санын бирини x билен, бейлекисини y билен белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемелери дүзйәрис. $x + y = xy = x^2 - y^2$. Шу ерден $x + y = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$; $(x + y)(x - y - 1) = 0$; $x = -y$; $x - y = 1$ аларыс.

Индиң

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = x + y \end{cases}$$

системаны чөзүп, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ве $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_3 = 0$; $y_3 = 0$ бахалары тапарыс.

606. Илки билен сагадың ики стрелкасы-да деңолчегли херекет эдйәр дийип гүман эделиң.

Сагат 9-да кичи стрелка билен улы стрелканың арасындакы гечмели узаклыкда 45 саны минут бөлеги бар. Инди улы стрелка кичиниң ызындан етйәнчә кичи стрелка x минут бөлеги гечипдир диелиң. Онда улы стрелка $(x+45)$ минут бөлегини гечер. Эгер улы стрелканың кичи стрелкадан 12 эссе тиз херекет эдйәндигини гөз өңүнде тутсак, онда ашакдакы деңлемәни аларыс: $x+45=12\cdot x$. Шу ерден $x=\frac{45}{11}$ (минут бөлеги).

Шейлеликде, кичи стрелка $4\frac{1}{11}$ минут бөлегини гечипдир. Диймек, улы стрелка кичиниң ызындан етйәнчә $4\frac{1}{11}+45=49\frac{1}{11}$ минут гечер.

607. Эгер үчбурчлугың тарапында ерлешен шарларың саныны x билен беллесек, онда квадратың тарапындакы шарларың саны $x-2$ болар. Шарлар квадрат гөрнүшинде ерлешдирилende оларың саны $(x-2)(x-2)$ болар.

Эгер шарлар үчбурчлук гөрнүшинде ерлешдирилсе, онда оларың саны $1+2+3+\ldots+x=\frac{1+x}{2}x$ болар. Диймек, $(x-2)(x-2)=\frac{1+x}{2}\cdot x$, шу ерден $x^2-9x+8=0$ квадрат деңлеме аларыс. Деңлемәни чөзүп, $x=8$ тапарыс.

Диймек, квадратың тарапындакы шарларың саны $8-2=6$ болмалы. Шейлеликде, шарларың умумы саны 36 болмалыдыр.

608. Томашачылары диңе гиң гапыдан гойбермек үчин x минут герек болсун диййиң гүман эделиң. Онда меселәниң шертине гөрә диңе дар гапыдан гойберлеңде $(x+4)$ минут вагт герек болар. Гапыларың икисинден гойберлеңде $\frac{15}{4}$ минут вагт герек болар.

Бир минутда гиң гапыдан томашачыларың $\frac{1}{x}$ бөлеги, дар гапыдан болса $\frac{1}{x+4}$ бөлеги чыкар. Оларың икисинден бир минутда томашачыларың $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}$ бөлеги чыкар.

Эмма икинжи тарапдан, ики гапыдан бир минутда томашачыларың $\frac{4}{15}$ бөлеги чыкар. Шейлеликде, ашакдакы деңлемәни аларыс.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{4}{15}.$$

Шу ерден $2x^2-7x-30=0$ квадрат деңлемәни аларыс ве деңлемәни чөзүп, $x=6$ тапарыс.

Жогабы: 6 минутда ве 10 минутда.

609. Эгер үчбелгили саның онлукларының цифрини x билен беллесек, онда йүзлүклериң цифри $(x-1)$ болар. Шол саның бирликлериниң цифри болса шейле аңладылар: $16-[x+(x-1)]=17-2x$.

Шейлеликде, гөзленилйән үчбелгили сан $100(x-1)+10x+(17-2x)=108x-83$ гөрнүшде аңладылар.

Терс тертипде язылан сан $(17-2x)100+10x+(x-1)=1699-189x$ гөрнүшде язылар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис:

$$(108x-83)-(1699-189x)=594.$$

Шу деңлемеден $x=8$ тапарыс.

Шейлеликде, гөзленилйән үчбелгили сан 781 болар.

610. Эгер велосипедчи 1 *км* узаклыгы x минутда гечйән болса, онда мотоциклетчи шол узаклыгы $(x-4)$ минутда гечер. Велосипедчи 5 сагатда, ягны 300 минутда $\frac{300}{x}$ километр ёл гечер. Мотоциклчи болса 300 минутда $\frac{300}{x-4}$ километр гечер. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис: $\frac{300}{x}=\frac{300}{x-4}-100$. Шу деңлемәни $x^2-4x-12=0$ гөрнүшдәки квадрат деңлемә гетирип ве оны чөзүп, $x=6$ тапарыс.

Диймек, велосипедчи 1 *км* узаклыгы 6 минутда гечйәр. Шейлеликде, велосипедчи 300 минутда 50 *км* гечер. Мотоциклчи болса шол вагтда $\frac{300}{6-2}=150$ (*км*) гечер.

Жогабы: 50 *км* ве 150 *км*.

611. Гөзленилйән үчбелгили саның онлукларының цифрини x билен, йүзлүклериниң цифрини y билен беллэлиң, онда шол сан шейле язылар: $100y+10x+3$.

Эгер 3 цифр шу саның өңүне гечирилип язылса, онда ашакдакыны аларыс: $300+10y+x$.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис: $(100y+10x+3)\cdot 3+1=300+10y+x$. Шу ерден $290y=290-29x$ деңлиги аларыс.

Инди $y=\frac{290-29x}{290}=1-\frac{29x}{290}$. x ве y санлар меселәниң манысына гөрә битин положител сан болмалыдырлар. Шонуң үчин $y=1-\frac{29x}{290}$ деңликден гөрнүши ялы, $x=0$ болмалы. Шу халда $y=1$.

Шейлеликде, гөзленилйән сан 103 болмалыдыр.

612. Гой, бригада план боюнча хер гүнде x *м*³ одун тайярламалы болсун. Онда 216 *м*³ одуны тайярламак үчин $\frac{216}{x}$ гүн герек болар. Бригада илкинжи үч гүн план боюнча ишләпдир. Диймек, шол вагтда $3x$ *м*³ одун тайярланылыпдыр. Хер гүнде 8 *м*³ одун артык тайярланыланы себәпли, белленилен вагтдан бир гүн аз сарп эдилипдир. Диймек, хер гүнде $(x+8)$ *м*³ одун тайярламак иши жеми $\left(\frac{216}{x}-4\right)$ гүн довам эдипдир.

Шейлеликде, меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңлемәни дүзйәрис. $3x+\left(\frac{216}{x}-4\right)(x+8)=232$. Шу ерден $x^2+48x-1728=0$ квадрат деңлемәни аларыс ве оны чөзүп, $x=24$ тапарыс.

Жогабы: 24 *м*³.

613. Дробуң положител болмагы үчин онуң санавжысы ве майдалавжысы положител я-да санавжысы ве майдалавжысы отрицател болмалыдыр.

Берлен мысалда $3a-8>0$ ве $5-a>0$ болмалы, я-да $3a-8<0$ ве $5-a<0$ болмалы. Биринжи халда $a>\frac{8}{3}$ ве $a<5$. Диймек, шу халда $\frac{8}{3}<a<5$. Икинжи халда $a<\frac{8}{3}$ ве $a>5$. Шейле болуп билмез.

Диймек, $\frac{8}{3}<a<5$ боланда берлен дробь положител баха эедир.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

614. Берлен деңсизлиги ашакдакы ялы язалың: $2x^3 - x - 1 > 0$, я-да $x^3 - x + x^3 - 1 > 0$, я-да $x(x^2 - 1) + (x^3 - 1) > 0$, я-да $x(x+1)(x-1) - (x-1)(x^2 + x + 1) > 0$.

Бу ерден $(x-1)(2x^2 + 2x + 1) > 0$ аларыс.

Иң ахыркы деңсизлигиң чеп бөлегиндәки икинҗи скобкаңың ичиндәки аңлатманы шейле язалың: $(x-1)\cdot 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] > 0$. Квадрат скобкаларың ичиндәки аңлатма мыдама положителдир, шонуң үчин $x - 1 > 0$ я-да $x > 1$ болмалыдыр.

615. Берлен деңсизлиги ашакдакы ялы язарыс:

$$\frac{4x+3}{x-2} - 3 < 0.$$

Умумы майдалавҗа гетирип, $\frac{x+9}{x-2} < 0$ аларыс.

Дробуң отрицател бахасы болмагы үчин онуң санавҗысы билен майдалавҗысының аламатлары гаршылыклы болмалыдыр. Шонуң үчин ахыркы деңсизлигиң ерине онуң билен деңгүйчли болан деңсизликлериң ики системасыны аларыс:

$$\begin{cases} x + 9 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \text{ ве } \begin{cases} x + 9 < 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Биринҗи системадан

$$\begin{cases} x > -9 \\ x < 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Икинҗи системадан

$$\begin{cases} x < -9 \\ x > 2 \end{cases} \qquad (2)$$

(1) системаның деңсизликлериниң икисини-де x-иң $-9 < x < 2$ аралыкдакы бахаларының хеммеси канагатландыряр. (2) системаның чөзүви ёк, чүнки олар бири-бирине гаршылыклыдыр, ягны көкдеш дәлдирлер.

Шейлеликде, берлен деңсизлигиң чөзүви

$$-9 < x < 2$$

болмалыдыр.

616. Берлен деңсизлик ашакдакы деңсизлик билен деңгүйчлүдир.

$$\frac{5x-3}{4-x} > 4.$$

Шу деңсизликден $\frac{9x-19}{4-x} > 0$ аларыс. Дробуң положител болмагы үчин, онуң санавҗысы ве майдалавҗысы бирмензеш аламатлы болмалыдыр, ягны

$$1)\ \begin{cases} 4x - 19 > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \text{ ве } 2)\ \begin{cases} 9x - 19 < 0 \\ 4 - x < 0. \end{cases}$$

Шу системаларың биринҗисинден $\frac{19}{9} < x < 4$ аларыс. Икинҗи система көкдеш дәлдир.

617. Берлен деңсизлигиң чеп бөлегиндәки көкүң арифметики бахасы гөз өңүнде тутуляр, шонуң үчин $5 - x \geqslant 0$ я-да $x \leqslant 5$ болмалыдыр. Эгер $x < 4$ болса, онда деңсизлигиң чеп бөлеги отрицател болуп, онуң саг бөлеги

положителдир. Шу халда деңсизлик ерине етирилйәндир. Эгер $x - 4 \geqslant 0$ ве $x < 5$ болса, онда деңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гетеренимизде онуң манысы үйтгемез ве берлен деңсизлигиң ерине ашакдакы деңсизлиги аларыс: $x^2 - 7x + 11 < 0$. Инди

$$x^2 - 7x + 11 = \left(x - \frac{7 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right) < 0.$$

Шу ерден $\frac{7-5}{2} < x < \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ аларыс.

$x \geqslant 4$ ве $x < 5$ деңсизликлери ве иң ахыркы нетиҗәни деңешдирип,

$$4 \leqslant x < \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

аларыс, чүнки $\frac{7-\sqrt{5}}{2} < 4$ ве $\frac{7+\sqrt{5}}{2} < 5$. Илки башда $x < 4$ боланда берлен деңсизлик ерине етирилйәр дийип белләнимизи гөз өңүнде тутсак, $-\infty < x < \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ аларыс.

618. Берлен деңсизлиги ашакдакы ялы язалың:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2+x}{2-x}} > 2^6, \text{ я-да } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2+x}{2-x}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}.$$ Бу ерден $\frac{2+x}{2-x} < -8$ аларыс.

Шу деңсизлиги умумы майдалавҗа гетирип, ашакдакыны аларыс:

$$\frac{18-7x}{2-x} < 0.$$

Дробуң бахасы нулдан кичи, шонуң үчин ашакдакы мүмкин болан ики хала гаралың:

$$1)\ \begin{cases} 18 - 7x > 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 18 - 7x < 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases}$$

Биринҗи системадан ашакдакыны аларыс: $2 < x < \frac{18}{7}$. Икинҗи системадан $x > \frac{18}{7}$ ве $x < 2$ аларыс. Бир вагтда ахыркы ики деңсизлик мүмкин дәлдир.

Шейлеликде, деңсизлигиң чөзүви ашакдакыдыр:

$$2 < x < \frac{18}{7}.$$

619. Эгер $a > 3$ болса, онда берлен деңсизлигиң ики бөлегини-де $20(a-3)$ аңлатма көпелдип, ашакдакыны аларыс:

$$15ax + 10a + 15x - 30 < 12ax + 16a - 36x - 48$$

аларыс. Шу ерден $x(a + 17) < 2(a - 3)$ аларыс.

Өзалкы белленилишине гөрә $a > 3$, диймек, $a + 17 > 0$, онда ахыркы деңсизликден $x < \frac{2(a-3)}{a+17}$ аларыс.

Эгер-де $a < 3$ болса, онда эдил ёкардакы алгебраик өврүмлери гечирип, $x > \frac{2(a-3)}{a+7}$ аларыс.

620. Берлен мысалдан гөрнүши ялы, $x-1\geqslant 0$ болмалы. Берлен дeңсизлиги ашакдакы ялы язалын: $\sqrt{x-1}-1>\sqrt[3]{x-2}$. Шу дeңсизлигиң ики бөлегини-де куба гөтерелиң, онда $(\sqrt{x-1}-1)^3>x-2=(x-1)-1$ аларыс. Эгер $\sqrt{x-1}=y$ билен беллесек, онда $(y-1)^3>y^2-1$ я-да $(y-1)^3-(y^2-1)>0$, я-да $(y-1)[(y-1)^2-(y+1)]>0$, я-да $(y-1)\times$ $\times(y-3)y>0$ аларыс.

Иң соңкы дeңсизликден гөрнүши ялы, $y-1>0$ ве $y-3>0$ я-да $y-1<0$ ве $y-3<0$ болмалы. Башгача айданымызда, я $y>0$ я-да $y<1$ болмалы. Диймек, $y(y-1)(y-3)>0$ дeңсизлигиң ерине етирилмеги үчин $0<y<1$ я-да $y>3$ болмалыдыр.

Инди $0<\sqrt{x-1}<1$ я-да $\sqrt{x-1}>3$ болмалы. Диймек, $1<x<2$ я-да $x>10$ болмалыдыр.

621. Берлен дeңсизлигиң ики бөлегини-де 10^x сана бөлелиң, онда ашакдакы дeңсизлиги аларыс: $\frac{4^x}{10^x}-2\cdot\frac{25^x}{10^x}-1<0$ я-да $\left(\frac{2}{5}\right)^x-2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x-1<0$.

Эгер $\left(\frac{2}{5}\right)^x=y$ билен беллесек, онда $y-2\cdot\frac{1}{y}-1<0$ я-да y^2-y- $-2<0$, я-да $y^2-2y+y-2<0$, я-да $(y-2)(y+1)<0$ аларыс.

Белленилишинден гөрнүши ялы, $y>0$, диймек, $y-2<0$ я-да $y<2$. Шейлеликде, $\left(\frac{2}{5}\right)^x<2$. Бу ерден $x>\log_{\frac{2}{5}}2$ аларыс.

622. Берлен дeңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерелиң:

$$a^2+2ab+b^2\geqslant 1.$$

Шу дeңсизлиги $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$ дeңсизлик билен члeнме-члeн гошалың, онда $2a^2+2b^2\geqslant 1$ я-да $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$ аларыс.

Иң ахыркы дeңсизлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерелиң, онда $a^4+2a^2b^2+b^4\geqslant\frac{1}{4}$ аларыс.

Шу дeңсизлиги $a^4-2a^2b^2+b^4\geqslant 0$ дeңсизлик билен члeнме-члeн гошалың, онда $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$ аларыс. Ш. с. т. э.

623. Меселәниң шертине гөрә ашакдакылары аларыс: $a_1+a_2+a_3=27$ ве $a_1^2+a_2^2+a_3^2=275$. Белли болшы ялы, $a_2=a_1+d$ ве $a_3=a_1+2d$. Диймек, $a_1+a_1+d+a_1+2d=27$ я-да $a_1+d=9$.

Шейлеликде, $a_2=a_1+d=9$; $a_2=9$.

Инди $\begin{cases}a_1+a_3=18\\ a_1^2+a_3^2=194\end{cases}$ я-да $\begin{cases}a_1^2+2a_1a_3+a_3^2=324\\ a_1^2+a_3^2=194.\end{cases}$

Диймек, $\begin{cases}a_1+a_3=18\\ a_1\cdot a_3=65.\end{cases}$

Шу системаны чөзүп, $a_1=5$; $a_3=13$ тапарыс.

Жогабы: 5; 9; 13.

624. a_1 билен a_{19}, a_4 билен a_{16}, a_8 билен a_{12} прогрессияның ахырларындан дeң узаклыкдакы члeнлери болаңы себәпли $a_1+a_{19}=a_4+a_{16}=a_8+a_{12}$ болмалыдыр.

$a_1+a_8+a_{12}+a_{19}=224$ дeңликден $(a_4+a_{16})+(a_8+a_{12})=224$ я-да $2(a_4+a_{16})=224$, я-да $a_4+a_{16}=112$ аларыс. Диймек, $a_1+a_{19}=a_4+a_{16}=112$.

Инди

$$s_{19}=\frac{a_1+a_{19}}{2}\cdot 19=\frac{112}{2}\cdot 19=56\cdot 19=1064.$$

Шейлеликде, гөзленилйән жем $s_{19}=1064$.

625. $a_n=a_1+(n-1)d$ формуланы улансак, онда $a_7=a_1+6d$ я-да $35=11+6d$; $d=4$ аларыс.

Меселәниң шертине гөрә $a_4=b_4$, бу ерде b_4 — икинжи прогрессияның дөрдүнжи члeни $a_4=a_1+3d=11+12=23$. Диймек, $b_4=23$.

Эмма $b_1=38$ болаңы себәпли $23=38+3d'$, бу ерде d' икинжи прогрессияның тапавудыдыр. Диймек, $d'=-5$.

Инди, $b_n=b_1+(n-1)d'$ дeңликден $13=38-(n-1)(-5)$ я-да $n=6$ тапарыс.

Шейлеликде, икинжи прогрессияның алты члeни болмалыдыр.

626. Прогрессияның тапавудыны d билен белләлиң, онда $a_2-a_1=d$ ве $a_3-a_2=d$, ягны $a_2-a_1=a_3-a_2$ болар. Шу ерден $2a_2=a_1+a_3$ аларыс.

Инди $a_1+a_2+a_3=9$ дeңликден $3a_2=9$, $a_2=3$ аларыс. $a_2=3$ бахаsuccessi $a_1\cdot a_2\cdot a_3=15$ дeңликде гоюп, $a_1\cdot a_3=5$ аларыс.

Шейлеликде,

$$\begin{cases}a_1+a_3=6\\ a_1a_3=5\end{cases}$$

система аларыс. Шу системаны чөзүп, $a_1=1$, $a_3=5$ я-да $a_1=5$, $a_3=1$ бахалары тапарыс.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессиялар ашакдакылардыр.

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\dots$$

$$5,\ 3,\ 1,\ -2,\ -3,\dots$$

627.

$$a_m=a_1+(m-1)d=n$$
$$a_n=a_1+(n-1)d=m.$$

Шу дeңликлериң биринжисинден икинжисини айрып, ашакдакыны аларыс:

$$a_m-a_n=(m-1)d-(n-1)d=n-m.$$

Шу ерден $d=\frac{n-m}{m-n}=-1$.

Инди $a_p=a_1+(p-1)d$ дeңлиги $a_n=a_1+(n-1)d=m$ дeңликден айрып, $a_n-a_p=(n-1)d-(p-1)d$ я-да $a_n-a_p=(n-p)d=p-n$ аларыс.

Диймек, $a_p=a_n-p+n=m-p+n$.

Жогабы: $m-p+n$.

628. Үчбелгили санларың ичинде 7-ә бөлүнйәнлерден иң кичиси 105 болуп, шейле санларың иң улусы 994-дир. Диймек, $a_1=105$, $a_n=994$.

Инди $994=105+(n-1)\cdot 7$ (меселәниң шертине гөрә $d=7$). Бу ерден $n=128$.

Шейлеликде, $S=\frac{105+994}{2}\cdot 128=70336$.

Жогабы: 70336.

629. 5-ә бөлүненде галындыда 1 галян санларың хеммесини ашакдакы гөрнүшде язмак мүмкиндир: $5k+1$. Шу ерде $k=1, 2, 3, \dots, 100$. Шу бахалары гоюп,

$$5\cdot 1+1$$
$$5\cdot 2+1$$
$$5\cdot 3+1$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$5\cdot 100+1$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

аларыс. Инди гөзленилйән жем $5\cdot1+5\cdot2+5\cdot3+\cdots5\cdot100+1+1+\cdots+1=S$ болмалыдыр.

Диймек, $S=5\cdot(1+2+3+\cdots+100)+100$ я-да $S=5\cdot\frac{1+100}{2}\cdot100+100$. Шу ерден $S=25\,350$ тапарыс.

630. Эгер $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}$ прогрессия берлен болса, онда шол прогрессияның члeнлериниң жеми

$$S=\frac{a_2+a_{2n}}{2}\cdot n$$

болар. Эмма $a_2+a_{2n}=42$ боланы себәпли $S=21\cdot n$. Диймек, $n=\frac{126}{21}$; $n=6$.

Жогабы: 6.

631. Прогрессияның члeнлериниң жеминиң кесгитленишине гөрә $S_1=a_1$; $S_2=a_1+a_2$; $S_3=a_1+a_2+a_3$ ве ш. м.

$S_n=3n^2-2n$ деңликде n-иң ерине 1, 2, 3, ... бахалары гоюп, $S_1=a_1=3\cdot1^2-2\cdot1=1$; $S_2=a_1+a_2=3\cdot2^2-2\cdot2=8$ ве ш. м. бахалары аларыс.

Инди $a_1=1$; ве $S_2=8$ боланы үчин $a_2=7$ аларыс. Онда $a_2-a_1=d=7-1=6$. Диймек, $a_{10}=a_1+9d=1+9\cdot6=55$.

Шейлеликде, $a_{10}=55$.

632. Меселәниң шертине гөрә $a_3+a_9=6$ ве $a_3\cdot a_9=8\frac{7}{16}$. Прогрессияның биринжи члeнини a_1 билен, тапавудыны d билен белләлиң. Онда ашакдакыны аларыс:

$$\left.\begin{aligned}(a_1+2d)+(a_1+8d)&=6,\\(a_1+2d)\cdot(a_1+8d)&=\frac{135}{16}\end{aligned}\right\}$$

Виетиң теоремасыны уланып, $z^2-6z+\frac{135}{16}=0$ аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $z_1=\frac{15}{4}$, $z_2=\frac{9}{4}$ аларыс. Диймек,

$$\left.\begin{aligned}a_1+2d&=\frac{9}{4},\\a_1+8d&=\frac{15}{4}\end{aligned}\right\}\quad\text{я-да}\quad\left.\begin{aligned}a_1+2d&=\frac{15}{4},\\a_1+8d&=\frac{9}{4}\end{aligned}\right\}$$

Биринжи системаны чөзүп, $d=\frac{1}{4}$; $a_1=\frac{7}{4}$; $a_1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$; $a_1=\frac{13}{4}$; $a_{15}=\frac{21}{4}$. Диймек, $S_{15}=52\frac{1}{2}$.

Икинжи системаны чөзүп, $S_{15}=37\frac{1}{2}$ тапарыс.

633. Үчбурчлугың бир тарапыны a билен, бейлеки ики тарапыны $a-d$, $a+d$ билен белләсек ве үчбурчлугың мейданыны тапмак үчин Геронуң формуласыны уланcак, онда ашакдакыны аларыс:

$$6=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a+d\right)\left(\frac{3a}{2}-a-d\right)}$$

я-да $6=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a-4}{2}}$, я-да $6=\frac{a}{4}\sqrt{3\cdot(a^2-16)}$,

я-да $24=a\sqrt{3(a^2-16)}$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $a^4-16a^2-192=0$ аларыс. Шу ерден $a=2\sqrt{6}$.

Диймек, гөзленилйән прогрессия: $2\sqrt{6}-2$; $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{6}+2$.

634. Гөзленилйән прогрессияның илкинжи дөрт члениниң жеми $[a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=124$. Ахыркы дөрт члениниң жеми $a_1+(n-1)d]+[a_1+(n-2)d]+[a_1+(n-3)d]+[a_1+(n-4)d]=156$. Ахыркы ики деңликден $4a_1+6d=124$ ве $4a_1+4dn-10d=156$ я-да $2a_1+3d=62$ ве $2a_1+2dn-5d=78$ аларыс.

Инди $\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=210$ я-да $\frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=210$. Бу ерден $[2a_1+(n-1)d]\cdot n=420$.

Шейлеликде, ашакдакы системаны аларыс:

$$\begin{cases}2a_1+3d=62\\2a_1+2dn-5d=78\\2a_1n+dn^2-dn=420\end{cases}$$

Шу системаның икинжи деңлемесинден биринжи деңлемесини члeнме-член айрып, ашакдакыны аларыс:

$$dn-4d=8.$$

Шол системаның икинжи деңлемесиниң ики бөлегини-де n-е көпелдип, үчүнжи деңлемеден члeнме-член айырсак, $4dn-dn^2=420-78n$ аларыс. Ахыркы ики деңлигиң биринжисинден d бахаы тапып, икинжи деңлемә гойсак ве кәбир алгебраик өврүмелери гечирсек, ашакдакыны аларыс:

$$n^2-10n+24=0.$$

Шу ерден $n=6$ тапарыс. (Икинжи көк меселәниң шертини канагатландырмаяр). $dn-4d=8$ деңликден $d=4$ тапарыс. Инди $2a_1+3d=62$ деңликден $a_1=25$ тапарыс.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессия: 25; 29; 33; 37; 41; 45.

635. Гой, прогрессияның n члени алнан болсун. Онда меселәниң шертине гөрә $a_1+a_2+\ldots+a_n=4n^2$ болмалыдыр. Инди $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Диймек, $S_n=4n^2$. Иң ахыркы деңликде n-иң ерине 1, 2, 3, ... бахалары гоюп, ашакдакылары аларыс:

$$\begin{aligned}&S_1=4\cdot1^2=a_1,\\&S_2=a_1+a_2=4\cdot2^2,\\&S_3=a_1+a_2+a_3=4\cdot3^2 \text{ ве ш. м.}\end{aligned}$$

Инди $S_2-S_1=a_1+a_2-a_1=4\cdot2^2-4\cdot1^2=12$. $a_2=12$; $a_2-a_1=d$; $d=12-4=8$.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессия: 4, 12, 20, ...

636. Геометрик прогрессияның члeнлериниң жемини ашакдакы формула аркалы тапмак болар:

$$S=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Шу формула S, q ве n бахаларыны гоюп, $635=\frac{a_1(2^7-1)}{2-1}$ аларыс. Бу ерден $a_1=\frac{635}{2^7-1}=\frac{635}{127}=5$; $a_1=5$; $a_n=a_1q^{n-1}$ формула боюнча $a_7=5\cdot2^6=320$.

Шейлеликде, $a_1=5$ ве $a_7=320$.

637. Шол санлар геометрик прогрессияның члeнлери болуп билжек дийип гүман эделиң. Онда прогрессияның майдалавжысыны q билен белләп, $11=10\cdot q^n$ ве $12=10\cdot q^k$ аларыс. Шу ерден $10=\frac{11}{q^n}$ ве $10=\frac{12}{q^k}$ я-да $10^k=\frac{11^k}{q^{nk}}$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ве $10^n = \frac{12^n}{q^{kn}}$; $q^{nk} = \frac{11^k}{10^k}$ ве $q^{kn} = \frac{12^n}{10^n}$ я-да $\frac{11^k}{10^k} = \frac{12^n}{10^n}$, я-да $11^k = 10^{k-n} \cdot 12^n$.
Ахыркы деңлигиң мүмкин дәлдиги айдыңдыр.

638. Меселәниң шертинде берлен деңликлери ашакдакы ялы язарыс:

$$u_1q^2 - u_1 = 16,$$
$$u_1q^4 - u_1q^2 = 144.$$

Инди

$$u_1q^2(q^2 - 1) = 144,$$
$$u_1(q^2 - 1) = 16.$$

Ахыркы ики деңлигиң биринжисини икинжисине бөлүп, $q^2 = 9$ я-да $q = \pm 3$ аларыс.

Инди $u_1(3^2 - 1) = 16$, $u_1 = 2$.

Диймек, гөзленилйән прогрессиялар ашаклакылар болмалыдырлар:

$$\div 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162.$$
$$\div 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162.$$

639. Меселәниң шертинде берлен деңликлери ашакдакы ялы язарыс:

$$u_1 + u_1q^4 = 51$$
$$u_1q + u_1q^5 = 102.$$

Инди

$$u_1(1 + q^4) = 51$$
$$u_1q(1 + q^4) = 102.$$

Ахыркы деңлиги онуң өң яныңдакы деңлиге члене-член бөлүп, $q = 2$ тапарыс.

Инди $u_1 + u_1 \cdot 2^4 = 51$ деңликден $u_1 = 3$. $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ формулadan $3069 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$ деңлиги алып, $2^n = \frac{3069 + 3}{3} = 1024$ аларыс. Бу ерден $2^n = 2^{10}$, $n = 10$.

Жогабы: 10.

640. Белли болшы ялы, $S_8 = \frac{u_1(q^8 - 1)}{q - 1}$. Шу халда $85 = \frac{u_1[(-2)^8 - 1]}{-2 - 1}$, я-да $-255 = u_1 \cdot 255$, $u_1 = -1$.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессия ашакдакыдыр:

$$\div -1;\ 2;\ -4;\ 8;\ -16;\ 32;\ -64;\ 128.$$

641. Эгер геометрик прогрессияны дүзйән u_1, u_2, u_3 үч сан алсак, онда меселәниң шертине гөрә

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21, \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1q} + \frac{1}{u_1q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \text{ аларыс.}$$

Инди $u_1(1 + q + q^2) = 21$, $\frac{q^2 + q + 1}{u_1q^2} = \frac{7}{12}$. Шу системаның биринжи деңлигини икинжи деңлиге бөлүп, $2q^2 - 5q + 2 = 0$ аларыс ве оны чөзүп, $q_1 = 2$; $q_2 = \frac{1}{2}$ тапарыс. $u_1 = 3$ ве $u_1 = 12$.

Диймек, гөзленилйән прогрессиялар ашакдакылардыр:

$$\div 3;\ 6;\ 12;\ \ldots$$
$$\div 12;\ 6;\ 3;\ \ldots$$

642. Гой, гөзленилйән геометрик прогрессияның членлери $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ болсун. Онда $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ я-да $S_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots + u_1q^{n-1}$. Шол прогрессияның члeнлериниң квадратларының жеми $u_1^2 + u_1^2q^2 + u_1^2q^4 + \ldots + u_1^2q^{2n-2}$ болар. Шу прогрессияның биринжи члени u_1^2 болуп, майдалавжысы q^2-дыр. Диймек, $S_n' = \frac{u_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$, бу ерде S_n' икинжи прогрессияның n члeнлериниң жемидир.

Жогабы: $\frac{u_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$.

643. Эгер прогрессияның әхли члениниң жемини S_1 билен, тәк ердәки члeнлериниң жемини S_2 билен беллесек, онда меселәниң шертине гөрә ашаклакыны аларыс:

$$S_1 = 3S_2.$$
$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n}.$$
$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1}.$$

Диймек, $S_1 = \frac{u_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$; $S_2 = u_1 + u_1q^2 + u_1q^4 + \ldots + u_1q^{2(n-1)}$.

Шу деңлигиң ики бөлегини-де q^2 көпелделиң:

$$S_2q^2 = u_1q^2 + u_1q^4 + u_1q^6 + \ldots + u_1q^{2n}.$$

Ахыркы ики деңлигиң икинжисинден биринжисини члеме-член айралың, онда $S_2(q^2 - 1) = u_1q^{2n} - u_1$ я-да $S_2 = \frac{u_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$ аларыс. Диймек, $\frac{u_1(q^{2n} - 1)}{q - 1} = 3 \cdot \frac{u_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$ я-да $1 = \frac{3}{q + 1}$; $q = 2$.

Жогабы: 2.

644. Гой, a_1, a_2, a_3 ... геометрик прогрессияның дегишли члeнлери болуп, q онуң санавжысы болсун. a_1^3, a_2^3, a_3^3 санлар-да геометрик прогрессияны дүзерлер ве шу прогрессияның майдалавжысы q^3 болар.

Меселәниң шертине гөрә ашакдакы деңликлери аларыс:

$$\frac{a_1}{1 - q} = 4;\quad \frac{a_1^3}{1 - q^3} = 192.$$

Инди $\frac{a_1^3}{(1 - q)^3} = 64$ деңлиги $\frac{a_1^3}{1 - q^3} = 192$ деңлиге члеме-член бөлүп, $\frac{(1 - q)^3}{1 - q^3} = \frac{64}{192}$ я-да $\frac{1 - 2q + q^2}{1 + q + q^2} = \frac{1}{3}$ аларыс. Шу деңликден $2q^2 + 5q + 2 = 0$ квадрат деңлемәни алып, онуң $q_1 = -\frac{1}{2}$ көкүни тапарыс.

Инди $\frac{a_1}{1 - q} = 4$ деңликден $\frac{a_1}{1 + \frac{1}{2}} = 4$ алып, $a_1 = 6$ тапарыс.

Шейлеликде, $a_1 = 6$ ве $q = -\frac{1}{2}$.

645. Меселәниң шертине гөрә $u_n = 10(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots)$. Шу ерде $n = 1$ дийип гуман этсек, онда $u_1 = 10(u_2 + u_3 + u_4 + \dots)$ аларыс.

Инди $u_1 = 10(u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots)$, я-да $u_1 = 10 \cdot \frac{u_1 q}{1 - q}$. Бу ерден $1 - q = 10q$, я-да $q = \frac{1}{11}$.

Жогабы: $\frac{1}{11}$.

646. Эгер $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ санлар түкениксиз кичелйән геометрик прогрессияның членлери болса, онда $a_1, a_3, a_5, \dots$ ве $a_2, a_4, a_6, \dots$ санлар-да түкениксиз кичелйән геометрик прогрессияның членлери боларлар. Эмма $a_3 = a_1 q^2$ ве $a_4 = a_2 q^2$ ве ш. м. болан себәпли $a_1, a_3, a_5, \dots$ ве $a_2, a_4, a_6, \dots$ прогрессияларың мейдалавжылары q^2 болар.

Инди $S = \frac{a_1}{1 - q}$ формуланы уланып, $\frac{a_1}{1 - q^2} = 36$ ве $\frac{a_2}{1 - q^2} = 12$ аларыс. Шу деңликлериң биринжисини икинжисине члени-член белүп,

$$\frac{a_1(1 - q^2)}{(1 - q^2)\,a_2} = \frac{36}{12} \text{ я-да } \frac{a_1}{a_1 q} = 3 \text{ я-да } q = \frac{1}{3}$$

аларыс. Инди $a_1 = 36\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 32$.

Шейлеликде, гөзленилйән прогрессия: $32;\ \frac{32}{3};\ \frac{32}{9};\ \frac{32}{27};\ \dots$

647. Эгер гөзленилйән прогрессияның членлерини u_1, u_2, u_3 билен белләсек, онда меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс: $u_1 + u_2 + u_3 = 195$ ве $u_1 = u_3 - 120$.

Инди $\begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 195 \\ u_1 = u_1 q^2 - 120 \end{cases}$ аларыс.

$u_1 = \frac{120}{q^2 - 1}$ баханы системаның биринжи деңлемесине гоюп, $5q^2 - 8q - 21 = 0$ $q_1 = 3$; $q_2 = -\frac{7}{5}$ аларыс. Инди $u_1 = \frac{120}{3^2 - 1}$ ве $u_1 = \frac{120}{\left(\frac{-7}{5}\right)^2 - 1}$;

$u_1 = 15$ ве $u_1 = 125$.

Шейлеликде,

$$\div\div\ 15;\ 45;\ 135;\ \dots$$
$$\div\div\ 125;\ -175;\ 245.$$

648. Прогрессияның биринжи членини a_1 билен, майдалавжысыны болса q билен белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә ашакдакылары аларыс:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 21 \\ a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 = 189 \end{cases}$$

Инди

$$\begin{cases} a_1(1 + q + q^2) = 21 \\ a_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189 \end{cases}$$

Ахыркы системаның биринжи деңлигиниң ики бөлегини-де $(1 - q)$ аңлатма икинжи деңлигиң ики бөлегини-де $(1 - q^2)$ аңлатма көпелдип,

$$\begin{cases} a_1(1 - q^3) = 21(1 - q) \\ a_1^2(1 - q^6) = 189(1 - q^2) \end{cases}$$

аларыс.

Шу системаның биринжи деңлигиниң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, алнан нетижәни икинжи деңлиге бөлелиң, онда ашакдакыны аларыс:

$\frac{a_1^2(1 - q^3)^2}{a_1^2(1 - q^6)} = \frac{21^2(1 - q)^2}{189(1 - q^2)}$ я-да $\frac{1 - q^3}{1 + q^3} = \frac{21(1 - q)}{9(1 + q)}$. Инди $9(1 + q)(1 - q^3) = 21(1 - q)(1 + q^3)$ я-да $3(1 + q + q^2) = 7(1 - q + q^2)$. Ахыркы деңлемәни чөзүп, $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$ тапарыс.

Инди $a_1(1 + q + q^2) = 21$ деңликден $a_1(1 + 2 + 2^2) = 21$ я-да $a_1 = 3$ аларыс. Эдил шонуң ялы эдип, $a_1 = 12$ тапарыс.

649. Эгер гөзленилйән прогрессияның членлерини $u_1, u_2, \dots$ билен белләсек, онда меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{1}{8}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 + \dots)$$

ве $u_2 = 6$. Инди

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots = \frac{1}{8}(u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + \dots + u_1^2 q^{2n-2} + \dots)$$

я-да $\frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1^2}{1 - q^2}$ ве $u_1 q = 6$ аларыс. Инди $1 = \frac{u_1}{8(1 + q)}$ я-да $u_1 = 8(q + 1)$; $8(q + 1)q = 6$, бу ерден $q = \frac{1}{2}$ тапарыс. Инди $u_1 = 12$ тапарыс.

Диймек, гөзленилйән прогрессия $\div\div\ 12;\ 6;\ 3;\ \dots$

650. Геометрик прогрессияның биринжи членини a_1, майдалавжысыны q билен белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 91.$$

Эгер арифметик прогрессияның тапавудыны d билен беллесек, онда меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс:

$$\begin{cases} a_1 q + 27 = a_1 + 25 + d \\ a_1 q^2 + 1 = a_1 + 25 + 2d \end{cases}$$

Шу системаның биринжи деңлемесиниң ики бөлегини-де 2-э көпелдип, икинжи деңлемесинден члени-член айырсак, $a_1 q^2 - 2a_1 q + a_1 = 28$ аларыс. Инди $a_1(1 + q + q^2) = 91$ деңлиги иң ахыркы деңлиге члени-член бөлсек, онда $\frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{91}{28}$ я-да $\frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{13}{4}$, я-да $\frac{3q}{q^2 - 2q + 1} = \frac{13 - 4}{4}$; $\frac{3q}{q^2 - 2q + 1} = \frac{9}{4}$; $3q^2 - 10q + 3 = 0$ аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $q_1 = 3$ ве $q_2 = \frac{1}{3}$ тапарыс. Инди $a_1(1 + 3 + 3^2) = 91$ деңликден $a_1 = 7$ ве $a_1\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) = 91$ деңликден $a_1 = 63$. Инди

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

$$a_7 = a_1 \cdot q_1^6 = 7 \cdot 3^6 = 5103$$

$$a_7 = a_1 q_2^2 = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{7}{81}.$$

Шейлеликле, 1) $a_7 = 5103$; 2) $a_7 = \frac{7}{81}$.

651. Эгер арифметик прогрессияның члenлерини $a_1, a_2, a_3, \ldots$ билен беллесек, онда меселәниң шертине гөрә $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_4}$ болмалыдыр. Инди $a_2^2 = a_1 \cdot a_4$ я-да $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$. Шу ерден $a_1 = d$ аларыс.

Инди a_4, a_6, a_9 членлери тапалың.

$$a_4 = a_1 + 3d \quad \text{я-да} \quad a_4 = a_1 + 3a_1 = 4a_1,$$
$$a_6 = a_1 + 5d \quad \text{я-да} \quad a_6 = a_1 + 5a_1 = 6a_1,$$
$$a_9 = a_1 + 8d \quad \text{я-да} \quad a_9 = a_1 + 8d = 9a_1.$$

$q = \frac{6a_1}{4a_1} = \frac{3}{2}$. Диймек, хакыкатдан-да $4a_1$; $6a_1$; $9a_1$ санлар геометрик прогрессияны дүзйәрлер ве онуң майдалавжысы $\frac{3}{2}$ дендир.

652. Арифметик прогрессияның членлерини $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ билен белләлиң.

Меселәниң шертине гөрә $a_1 = 24$; $a_5 = a_1 q$; $a_{11} = a_1 q^2$. Инди $a_1 = 24$; $a_1 + 4d = 24q$; $a_1 + 10d = 24q^2$ я-да $24 + 4d = 24q$; $24 + 10d = 24q^2$. Ахыркы ики деңлигиң биринжисиниң ики бөлегини-де $\frac{5}{2}$ көпелдиң, $60 + 10d = 60q$ аларыс. Инди $24 + 10d - 60 - 10d = 24q^2 - 60q$ я-да $-36 = 24q^2 - 60q$. Шу ерден $2q^2 - 5q + 3 = 0$ деңлемәни алып, $q = \frac{3}{2}$ тапарыс. Диймек, $d = 3$.

Гөзленилйән арифметик прогрессия: $\div 24$; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54.

653. Геометрик прогрессияның биринжи членини a_1, майдалавжысыны q билен белләлиң. Онда меселәниң шертине гөрә $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 16\frac{4}{9}$.

Эгер арифметик прогрессияның биринжи членини b_1 билен, тапавудыны d билен беллесек, онда $b_1 = a_1$; $b_4 = a_1 q$; $b_8 = a_1 q^2$ аларыс. Инди $a_1(1 + q + q^2) = \frac{148}{9}$; $b_1 = a_1$; $b_4 = b_1 + 3d$; $b_8 = b_1 7d$, я-да $\begin{cases} a_1 + 3d = a_1 q \\ a_1 + 7d = a_1 q^2, \end{cases}$ я-да $\begin{matrix} a_1(q-1) = 3d \\ a_1(q^2 - 1) = 7d. \end{matrix}$ Бу ерден $\frac{a_1(q^2-1)}{a_1(q-1)} = \frac{7}{3d}$ я-да $q + 1 = \frac{7}{3}$; $q = \frac{4}{3}$.

Инди $a_1\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right) = \frac{148}{9}$ деңликлеп $a_1 = 4$. Диймек, $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 4 + 4 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{64}{27} = \frac{700}{27}$. Шейлеликде, $S_4 = \frac{700}{27}$.

654. Меселәниң шертине гөрә ашакдакы геометрик прогрессияны аларыс: 3, $3q$, $3q^2$, $3q^3$, $3q^4$, $3q^5$, $3q^6$, $3q^7$, 19 683. Диймек, $3q^8 = 19\,683$ я-да $q^8 = 6\,581$, я-да $q^8 = 3^8$. Бу ерден $q = 3$. Прогрессияның 5-нжи члени $3q^4 = 3 \cdot 3^4 = 243$. Инди $\frac{243 - x}{x} = \frac{4}{3}$ аларыс. Бу ерден $\frac{243}{x} = \frac{9}{5}$ я-да $x = 135$.

Жогабы: 135, 108.

655. Арифметик прогрессияның членлерини $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ билен беллесек, меселәниң шертине гөрә ашакдакыны аларыс: $\frac{1 + (1 + 8d)}{2} \cdot 9 = 369$. Бу ерден $d = 10$. Диймек, $a_9 = 1 + 8d = 81$.

Геометрик прогрессияның членлерини $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_9$, билен беллесек, ашакдакыны аларыс: $u_9 = 81$; $u_9 = u_1 \cdot q^8$; $81 = q^8$, бу ерден $q = \sqrt{3}$; $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 1 \cdot (\sqrt{3})^6 = 27$. Диймек, $u_7 = 27$.

656. Берлен жеми S билен белләлиң, онда $S = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де x көпелделиң, онда $S \cdot x = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + nx^{n+1}$ аларыс. Инди $S(1 - x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - nx^{n+1}$ аларыс. Бу ерден

$$S = \frac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - nx^{n+1}}{1 - x} \text{ я-да } S = \frac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}{1 - x} - \frac{nx^{n+1}}{1 - x},$$

я-да $S = \dfrac{\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}}{1 - x} - \frac{nx^{n+1}}{1 - x} = \frac{x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1 - x}$.

Шейлеликде, $S = \frac{x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1}}{1 - x}$.

657. Эгер берлен квадратың тарапы a болса, онуң тарапларының орталары ичинден чызылан квадратың депелери болса, онда икинжи квадратың тарапы $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ болар $\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Диймек, онуң мейданы $S_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$ болар. Шоңуң ялы, икинжи квадратың ичинден чызылан үчүнжи квадратың тарапы-да $\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a}{2}$ болар. Диймек, онуң мейданы $S_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Шу процес түкениксиз довам этдирилсе, ашакдакы ызыгидерлиги аларыс: $S = a^2$; $S_1 = \frac{a^2}{2}$; $S_2 = \frac{a^2}{4}$; ...

Шейлеликде, гөзленилйән жем $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \ldots = \dfrac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$ болар.

Жогабы: $2a^2$.

658. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де 27^x бөлүп, ашакдакыны аларыс: $\left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{18}{27}\right)^x = 2$ я-да $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$. Эгер $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ билен беллесек, онда $y^3 + y + 2 = 0$ деңлемәни аларыс. Инди $y^3 + y - 2 = y^3 - 1 + y - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) + (y - 1) = (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0$. Шу ерден $y_1 = 1$; $y_{2,3}$ болса меселәниң шертини канагатландырмаяр.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1; \ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0; \ x = 0.$$

Жогабы: 0.

659. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}, \text{ я-да } \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x},$$

я-да $\left(\frac{3}{2}\right)^{6x-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$. Бу ерден $6x-4=2x$; $x=1$.

Жогабы: 1.

660. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}+1,25=0$ я-да $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+\frac{5}{4}=0$, я-да $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+\frac{5}{4}=0$, я-да $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-8\times$

$$\times\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+5=0.$$

Эгер $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$ билен белләсек, онда $4y^2-8y-y^{-1}+5=0$, я-да $4y^3-8y^2+5y-1=0$ аларыс. $4y^3-4y^2-4y^2+4y+y-1=4y^2(y-1)-4y(y-1)+(y-1)=(y-1)(4y^2-4y+1)=0$. $y_1=1$; $y_2=y_3=\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1;\ x_1=0;\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2};\ x_2=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}.$$

661. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}}=(2^7)^x\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}}, \text{ я-да } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3x}}=2^{7x}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}},$$

я-да $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3-6+3x}=2^{7x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x-2}{3}}$, я-да $(2^{-1})^{4x-9}=2^{7x}\cdot2^{-\frac{2x-2}{3}}$,

я-да $2^{9-4x}=2^{\frac{19x+2}{3}}$. Шу ерден $9-4x=\frac{19x+2}{3}$.

Ахыркы деңлемәни чөзүп, $x=\frac{25}{31}$ тапарыс.

Жогабы: $\frac{25}{31}$.

662. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$3^{3x}+2^{2x}\cdot3^{x}=2^{3x+1}.$$

Шу деңлигиң ики белегини-де 2^{3x} бөлелиң, онда $\frac{3^{3x}}{2^{3x}}+\frac{2^{2x}}{2^{3x}}\cdot3^x=2$, я-да $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2$ аларыс.

Инди $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$ билен белләлиң. Онда $y^3+y-2=0$ аларыс (ызы 658-нжи меселедәки ялы).

663. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс: $2\cdot7\cdot7^x-7^{2x}\cdot7^{-3}=679$, я-да $14\cdot7^x-\frac{1}{343}\cdot7^{2x}-679=0$. Эгер $7^x=y$ билен белләсек, онда $14\cdot y-\frac{y^2}{343}-679=0$, я-да $y^2+4802y+232\,897=0$ аларыс. Шу квадрат деңлемәни чөзүп, $y_1=49$; $y_2=4\,753$ тапарыс. Инди

$$7^x=49;\quad 7^x=7^2;\ x_1=2;$$
$$7^x=4753;\ x_2=\log_7 4753.$$

Жогабы: 2, $\log_7 4753$.

664. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $y^{-1}+139y-108y^2-32=0$. Бу ерде $y=x^{-x}$. Шу деңлемеден $108y^3-139y^2+32y-1=0$ деңлемәни аларыс. $108y^3-139y^2+32y-1=108y^3-108y^2-31y^2+31y+y-1=108y^2(y-1)-31y(y-1)+(y-1)=(y-1)(108y^2-31y+1)=0$. Бу ерден $y=1$. Диймек, $x^{-x}=1$; $x=1$.

Жогабы: $x=1$.

665. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $25^x-10^x=2\cdot4^x$. Шу деңлигиң ики белегини-де 4^x сана бөлелиң, онда $\left(\frac{25}{4}\right)^{x}-\left(\frac{10}{4}\right)^{x}=2$, я-да $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-2=0$ аларыс.

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=y$ билен белләп, $y^2-y-2=0$ аларыс.

Шу деңлемәни чөзүп, $y=2$ тапарыс. Инди $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=2$. Бу ерден $x=\log_{\frac{5}{2}}2$.

Жогабы: $\log_{\frac{5}{2}}2$.

666. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $2^{2x+2}+2^{2x-4}=5^{x+0,5}+5^{x-1,5}$ я-да $2^{2x-4}(2^6+1)=5^{x-1,5}(5^2+1)$, я-да $2^{2x-4}\cdot65=5^{x-1,5}\cdot26$, я-да $\frac{2^{2x-4}}{5^{x-1,5}}\times$

$\times\frac{65}{26}=1$, я-да $\frac{2^{2x-4}}{5^{x-1,5}}\cdot\frac{5}{2}=1$, я-да $\frac{2^{2x-5}}{5^{x-2,5}}=1$, я-да $\frac{2^{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}}{5^{x-\frac{5}{2}}}=1$, я-да

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-\frac{5}{2}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{0}$. Бу ерден $x-\frac{5}{2}=0$.

Диймек, $x=\frac{5}{2}$.

Жогабы: $\frac{5}{2}$.

667. Берлен деңлемәниң сағ бөлегиндәки аңлатма майдалавҗысы 0,5 болан түкениксиз геометрик прогрессияның жемидир, шонуң үчин

$$2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=\frac{6,5}{1-0,5}$$

я-да $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=13$. Инди $2^{x-4}\cdot 2^3+2^{x-4}+2^2\cdot 2^{x-4}=13$ я-да $8\cdot 2^{x-4}+2^{x-4}+4\cdot 2^{x-4}=13$, я-да $13\cdot 2^{x-4}=13$. Бу ерден $2^{x-4}=1$, я-да $2^{x-4}=2^0$; $x=4$.

668. Эгер $\sqrt{7+\sqrt{48}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$ деңлиги гөз өңүнде тутсак, онда $\sqrt{7-\sqrt{48}}=\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$ аларыс.

Берлен деңлемәни еркие $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}\right)^x=14$ деңлемәни язмак мүмкиндир. Шу деңликден $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{2x}-14\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+1=0$ деңлиги аларыс.

Инди $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=y$ билен белгилесек, онда $y^2-14y+1=0$ деңлемәни аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1=7+\sqrt{48}$; $y_2=7-\sqrt{48}$ тапарыс.

Диймек, 1) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=7+\sqrt{48}$; $(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}=7+\sqrt{48}$. Бу ерден $x_1=2$.

2) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=7-\sqrt{48}=\frac{1}{7+\sqrt{48}}=(7+\sqrt{48})^{-1}$; $\frac{x}{2}=-1$; $x_2=-2$.

669. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $2^{x^2-4}(2^{x+2}-1)=992$. я-да $2^{x^2-4}(2^{x+2}-1)=2^5\cdot 31$. Шу деңлигиң сағ бөлегиндәки 2^5 көпелдиҗи жүбүт сан болуп, икинҗи көпелдиҗи, ягны 31 тәк сандыр. Шол деңлигиң чеп бөлегиндәки $(2^{x+2}-1)$ көпелдиҗи тәк болуп, 2^{x^2-4} көпелдиҗи жүбүт сандыр. Диймек, $2^{x^2-4}=2^5$ ве $2^{x+2}-1=31$.

Шейлеликде $x^2-4=5$ я-да $x=\pm 3$ ве $x+2=5$; $x=3$.

Жогабы: $x=3$.

670. $6\cdot 6^x+3\cdot 3^x=3^2\cdot 3^x-6^x+3^x$ я-да $6\cdot 3^x\cdot 2^x+3\cdot 3^x=3^2\cdot 3^x-2^x\cdot 3^x+3^x$. Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де $3^x\neq 0$ бөлйәрис, онда $6\cdot 2^x+3=3^2-2^x+1$ аларыс. Бу ерден $7\cdot 2^x=7$ я-да $2^x=1$ аларыс. Диймек, $x=0$.

671.

$$2^{-\frac{2}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}\cdot 3^{-\frac{1}{x}}=3^{-\frac{2}{x}}$$

$$3^{-\frac{2}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}\cdot 3^{-\frac{1}{x}}-2^{-\frac{2}{x}}=0.$$

Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де $2^{-\frac{2}{x}}$ бөлелиң, онда $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}-1=0$ аларыс. Гой, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}=y$ болсун, онда $y^2-y-1=0$ аларыс. $y_1=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}$; $y_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, эмма $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}>0$ болмалы, шонуң үчин y_2 шерти канагатландырмаяр.

Инди $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{1}{x}\lg\frac{3}{2}=\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$-\frac{1}{x}(\lg 3-\lg 2)=\lg(1+\sqrt{5})-\lg 2$; $x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg 2-\lg(1+\sqrt{5})}$.

672. $3\cdot 3^{-x}-3\cdot 3^x+3^{2x}+3^{-2x}=6$ я-да $3^{2x}+3^{-2x}-2+3(3^{-x}-3^x)-4=0$.

$3^{-x}-3^x=y$ билен белләлиң, онда $3^{-2x}+3^{2x}-2=y^2$ аларыс. Диймек, $y^2+3y-4=0$, $y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}$; $y_1=1$; $y_2=-4$. Инди $3^{-x}-3^x=1$ я-да $3^{-x}-3^x-1=0$, $\frac{1}{3^x}-3^x-1=0$; $1-3^{2x}-3^x=0$; $3^{2x}+3^x-1=0$. $3^x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$; $3^x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $3^{-x}+3^x=-4$; $3^{-x}-3^x+4=0$. $\frac{1}{3^x}-3^x+4=0$; $1-3^{2x}+4\cdot 3^x=0$; $3^{2x}-4\cdot 3^x-1=0$; $3^x=2\pm\sqrt{4+1}$; $3^x=2+\sqrt{5}$. Ызы аңсатдыр.

673. Биринҗи деңлемәни ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\left(5^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{y}{2}}\right)\left(5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}\right)=544.$$

Алнан деңлемәни берлен системадакы икинҗи деңлемә членме-член бөлйәрис: $5^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{y}{2}}=34$. Шу деңлеме билен $5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=16$ деңлемәни система эдйәрис:

$$\left.\begin{aligned}5^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{y}{2}}&=34\\5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}&=16\end{aligned}\right\}$$

Шу деңлемелери членме-член гошуп, ашакдакыны аларыс:

$$5^{\frac{x}{2}}=25;\quad 5^{\frac{x}{2}}=5^2;\quad x=4.$$

Биринҗи деңлемеден икинҗи деңлемәни айрып, $2\cdot 3^{\frac{y}{2}}=18$ аларыс, бу ерден $3^{\frac{y}{2}}=9$; $y=4$.

Диймек, берлен системаның $x=4$ ве $y=4$ көклери бардыр.

674. Берлен системаны ашакдакы ялы язарыс:

$$\begin{cases}8^x=10y\\2\cdot 2^x=10y\end{cases}\ \text{я-да}\ \begin{matrix}2^{3x}=10y\\2^{x+1}=10y,\end{matrix}\quad \text{я-да}\ 2^{3x}=2^{x+1}.$$

Бу ерден $3x=x+1$; $x=\frac{1}{2}$.

Инди $x = \frac{1}{2}$ бахаңы берлен системаның икинжи деңлемесине гоюп, $2^{\frac{1}{2}} = 5y$ я-да $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$ аларыс.

Жогабы: $x = \frac{1}{2}$ ве $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

675. Берлен системаның икинжи деңлемесинден y-и тапып, шол системаның биринжи деңлемесине гоярыс, ягны: $y = x^{\frac{3}{2}}$; $x^{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{2}x}$. Бу ерден $x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x$. Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x^3 = \frac{9}{4}x^2$ аларыс. Бу ерден $4x^3 - 9x^2 = 0$; $x^2(4x - 9) = 0$. $x > 0$ боланы себәпли $x = \frac{9}{4}$.

Инди $y = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Жогабы: $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$.

676. Берлен системаның биринжи деңлемесинден гөрнүши ялы, $y = 1$ я-да $x^2 + 7x + 12 = 0$. Шейлеликде, ашакдакы системалары аларыс:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x^2 + 7x + 12 = 0 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Биринжи системадан $x_1 = 5$; $y_1 = 1$ бахалары тапярыс.
Икинжи системадан

$$x_2 = -3; \quad x_3 = -4$$
$$y_2 = 9; \quad y_3 = 10$$

бахалары тапярыс.

677. Берлен системаның биринжи деңлемесинден x-ы тапярыс. $x = \sqrt[y+1]{27}$ я-да $x = 3^{\frac{3}{y+1}}$. Шу бахаңы берлен системаның икинжи деңлемесине гоярыс, онда $\left(3^{\frac{3}{y+1}}\right)^{2y-5} = \frac{1}{3}$ я-да $3^{\frac{6y-15}{y+1}} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ аларыс. Бу ерден $\frac{6y-15}{y+1} = -1$; $y = 2$ тапарыс. Инди $x = 3^{\frac{3}{2+1}} = 3$.

Жогабы: 3; 2.

678. Берлен деңлемәни шейле язярыс:
$\lg(\sqrt{x+1} + 1) = 3\lg\sqrt[3]{x-40}$ я-да $\lg(\sqrt{x+1} + 1) = \lg(\sqrt[3]{x-40})^3$, я-да $\lg(\sqrt{x+1} + 1) = \lg(x-40)$. Ахыркы деңликден $\sqrt{x+1} + 1 = x - 40$ аларыс.

Инди $\sqrt{x+1} = x - 41$ деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип, $x + 1 = x^2 - 82x + 1681$ я-да $x^2 - 83x + 1680 = 0$ деңлемени аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $x_1 = 48$; $x_2 = 35$ тапярыс. Алнан көклериң икинжиси изки башда берлен деңлемәни канагатландырмаяр.

Шейлеликде, $x = 48$.

679. Берлен деңлемәни шейле язалың: $\log_2[2 + \log_3(3 + x)] = \log_2 1$. Шу ерден $2 + \log_3(3 + x) = 1$ я-да $\log_3(3 + x) = -1$. Ахыркы деңликден $3 + x = 3^{-1}$ аларыс. Бу ерден $x = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}$.

Диймек, $x = -2\frac{2}{3}$.

680. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{x^{-1}} = 2$ я-да $3\sqrt{\lg x} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\lg x - 2 = 0$; $\lg x - 3\sqrt{\lg x} + 2 = 0$.

$\sqrt{\lg x} = y$ билен белләлиң, онда $y^2 - 3y + 2 = 0$. Шу деңлемеден $y_1 = 2$; $y_2 = 1$ бахалары тапарыс.

Инди $\sqrt{\lg x} = 2$; $\lg x = 4$; $x_1 = 10\,000$; $\sqrt{\lg x} = 1$; $\lg x = 1$; $x_2 = 10$.

681. Берлен деңлемәни шейле язярыс: $\log_a(35 - x^3) = 3\log_a(5 - x)$ я-да $\log_a(35 - x^3) = \log_a(5 - x)^3$. Ахыркы деңликден $35 - x^3 = (5 - x)^3$ аларыс. Шу ерден $x^2 - 5x + 6 = 0$ аларыс.

Диймек, $x_1 = 3$; $x_2 = 2$. Шу көклери берлен деңлемә гоюп, оларың икисиниң-де шол деңлемәни канагатландырýандыкларыны гөрйәрис.

682. Берлен деңлемеден ашакдакыны аларыс:

$$\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \dots + \log_3 x^8 = 3\log_3 3 + 30\log_3 x;$$
$$\log_3 x + 2\log_3 x + 3\log_3 x + \dots + 8\log_3 x - 30\log_3 x = 3\log_3 3;$$
$$36\log_3 x - 30\log_3 x = 3;\ 6\log_3 x = 3;\quad \log_3 x = \frac{1}{2};\quad x = \sqrt{3}.$$

683. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2{,}5.$$

Бу ерден

$$(\log_5 x)^2 - 2{,}5\log_5 x + 1 = 0;\quad \log_5 x = 1{,}25 \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1};\quad \log_5 x = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4};$$
$$\log_5 x_1 = 2;\quad x_1 = 5^2 = 25;\quad \log_5 x_2 = \frac{1}{2};\quad x_2 = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Шейлеликде, $x_1 = 25$; $x_2 = \sqrt{5}$.

684. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $4^x\cdot 4^{1,5} + 9^x = 6^x\cdot 6$ я-да $8\cdot 4^x + 9^x = 6\cdot 6^x$. Ахыркы деңлигиң ики бөлегини-де 6^x бөлелиң, онда $8\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{9}{6}\right)^x = 6$ я-да $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 6$ аларыс. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ билен белләлиң, онда

$$8y + \frac{1}{y} - 6 = 0$$

аларыс.

Инди $8y^2 - 6y + 1 = 0$. Шу деңлемәни чөзүп, $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{4}$ тапарыс. Инди

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2}$; $x\log\frac{2}{3} = \log\frac{1}{2}$; $x(\log 2 - \log 3) = -\log 2$;

$x_1 = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$.

81*

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{4}$; $x(\log 2-\lg 3)=-\log 4$; $x_2=\frac{\log 4}{\log 3-\log 2}$; $x_2=2x_1$.

685. Деңлемедәки геометрик прогрессияларың жемини тапалын:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3};\quad 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}.$$

Инди деңлеме ашакдакы горнуше гелер:

$$\left(3\cdot\frac{2}{3}\right)^{\log_a x}=\left(2a\cdot\frac{4}{5}\right)^{\log_x a}.$$

Бу деңлемәни йөнекейлешдирип $2^{\log_a^x}=2^{4\log_x^a}$ деңлемә гелерис, мундан $\log_a^x=4\log_x^a$ я-да $\log_a^x=\log_x^{a^4}$. Бирмеңзеш эсаслы логарифме гечип, аларыс:

$$\log_a^x=\frac{\log_a^{x^4}}{\log_a^x}=\frac{4}{\log_a^x}.$$

Бу ерден $\log_a^x=\pm 2$ деңлик гелйәр. Соңкы деңлемәни чөзүп, $x=a^{\pm 2}$ нетижәни тапарыс.

686. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$9^{2x}-4^{2x}-2\cdot 9^{2x}+2\cdot 4^x\cdot 9^x+36^x=0$$

$$\text{я-да}\ -9^{2x}-4^{2x}+2\cdot 36^x+36^x=0,\quad \text{я-да}\ 9^{2x}+4^{2x}-3\cdot 36^x=0.$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де 6^{2x} аңлатма бөлелиң.

$$\left(\frac{9}{6}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{6}\right)^{2x}-3=0\quad\text{я-да}\quad\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-3=0.$$

Инди $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=y$ билен белләлиң, онда

$$y+\frac{1}{y}-3=0;\quad y^2-3y+1=0;\quad y_{1,2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Диймек,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Бу ерден

$$2x\lg\frac{3}{2}=\lg\frac{3+\sqrt{5}}{2};\quad x_{1,2}=\frac{\lg(3\pm\sqrt{5})-\lg 2}{\lg 9-\lg 4}.$$

687. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$\frac{\log\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3 3x}+\log_3^2 x=1.$$

Шу ерден

$$\log_3 3-\log_3 x+\log_3^2 x(\log_3 3+\log_3 x)=\log_3 3+\log_3 x.$$

Инди $\log_3^2 x+\log_3^3 x-2\log_3 x=0$; $\log_3 x(\log_3^2 x+\log_3 x-2)=0$; $\log_3 x=0$; $x_1=1$. $\log_3^2 x+\log_3^3 x-2=0$; $\log_3 x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$; $\log_3 x=\frac{-1+3}{2}$; $x_2=3$; $\log_3 x_3=\frac{-1-3}{2}=-2$; $x_3=\frac{1}{9}$.

Шейлеликде,

$$x_1=1;\quad x_2=3;\quad x_3=\frac{1}{9}.$$

688. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{3}{\log_3 3x}=0.$$

Шу ерден $\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{1+\log_3 x}+\frac{3}{2+\log_3 x}=0$. Ахырки деңликден $6\log_3^2 x+11\log_3 x+4=0$; $\log_3 x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{12}=\frac{-11\pm 5}{12}$;

$\log_3 x_1=-\frac{1}{2}$; $\log_3 x_2=\frac{-4}{3}$. Шу ерден $x_1=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x_2=3^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$.

Шейлеликде, $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2=\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$.

689. $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$ формуланы гөз өңүнде тутуп, берлен системаны ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\log_x 2\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x 2x}=\frac{\log_x 2}{\log_x 4x}.$$

Шу деңликден $\frac{\log_x 2}{\log_x 2x}=\frac{1}{\log_x 4x}$ аларыс, чүнки $\log_x 2\neq 0$. Диймек, $\log_x 2x=\log_x 2\cdot\log_x 4x$. Шу деңлиги ашакдакы ялы язмак мүмкиндир: $\log_x 2+\log_x x=\log_x 2(\log_x 4+\log_x x)$. Шу деңликден $\log_x 2=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ аларыс.

Бу ерден $x=2^{\frac{\pm\sqrt{2}}{2}}$.

690. Берлен деңлемәни чөзмек үчин ашакдакы формуланы уланалың:

$$\log_b a\cdot\log_c b=\log_c a.$$

Онда ашакдакыны аларыс: $\log_a x\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\left(1+\frac{\log_a a}{\log_a c}\right)=\frac{\log_a x}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a x}{\log_a c}\times$ $\times\log_a c\cdot\log_a x\frac{\log_a c(\log_a c+\log_a a)}{\log_a b\cdot\log_a c}=\frac{(\log_a x)^2\cdot\log_a c}{\log_a b\cdot\log_a c}$; $\log_a x(1+\log_a c)=$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

$=(\log_a x)^2$. Бу ерден 1) $\log_a x=0$; $x_1=1$. 2) $1+\log_a c=\log_a x$; $\log_a x=$ $=\log_a a+\log_a c=\log_a (ac)$; $x_2=ac$.

691. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_3 \sqrt{x+1}-\log_3 (x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$$

я-да

$3^{\log_3 (x^2-1)-2\log_3 \sqrt{x+1}}=\sqrt{2(x-1)}$; $3^{\log_3 \frac{x^2-1}{x+1}}=\sqrt{2(x-1)}$. Инди $a^{\log_a x}=$ $=x$ формула боюнча ашакдакыны аларыс: $\frac{x^2+1}{x+1}=\sqrt{2(x-1)}$,

я-да

$$x^2-1=(x+1)\sqrt{2(x-1)},$$

я-да $(x^2-1)^2=(x+1)^2\cdot 2(x-1)$ $x\neq\pm 1$ боланы себәпли $x^2-1=2(x+1)$, я-да $x^2-2x-3=0$; $x=3$.

692. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс:

$$4^{\log_{16} x}+2^{2\log_{16} x-1}=3^{\log_{16} x+\frac{1}{2}}+3^{\log_{16} x-\frac{1}{2}}$$

я-да

$$2^{2\log_{16} x}+2^{2\log_{16} x-1}=3^{\log_{16} x}(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}),$$

я-да

$$2^{2\log_{16} x}(1+2^{-1})=3^{\log_{16} x}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

я-да

$$2^{2\log_{16} x}\cdot\frac{3}{2}=3^{\log_{16} x}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}},$$

я-да

$$4^{\log_{16} x}\cdot 3=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot 3^{\log_{16} x},$$

я-да

$$4^{\log_{16} x}=3^{\log_{16} x}\cdot\frac{2^3}{\sqrt{3^3}},$$

я-да

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16} x}=\sqrt{\frac{2^6}{3^3}}=\sqrt{\frac{4^3}{3^3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Диймек, $\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16} x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Бу ерден

$$\log_{16} x=\frac{3}{2},\quad x=16^{\frac{3}{2}},\quad x=\sqrt{16^3}=4^3,\quad x=64$$

693. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де 2-ә көпелдип ве $2=2\lg 10$ деңлиги гөз өңүнде тутуп, ашакдакыны аларыс:

$$2\lg\sqrt{7x+4}+2\lg\sqrt{x-2}=2\lg(2x-5)-2\lg 2+2\lg 10$$

я-да

$$\lg(7x+4)+\lg(x-2)=\lg(2x-5)^2-2\lg 2+2\lg 10,$$

я-да

$$\lg(7x+4)(x-2)=\lg\frac{(2x-5)^2}{4}\cdot 100.$$

Бу ерден $(7x+4)(x-2)=(2x-5)^2\cdot 25$.

Шу деңлемәни $93x^2-490x+633=0$ гөрнүше гетирип ве алнан квадрат деңлемәни чөзүп, $x_1=3$; $x_2=\frac{211}{93}$ тапарыс.

Жогабы: 3; $\frac{211}{93}$.

694. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язарыс:

$\left(4\log_x x+\log_x\frac{1}{3}\right)(\log_3 x)^2=\frac{1}{2}$, я-да $(4-\log_x 3)(\log_3 x)^2=\frac{1}{2}$.

Инди $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$ формуланы гөз өңүнде тутуп,

$\left(4-\frac{\log_3 3}{\log_3 x}\right)(\log_3 x)^2=\frac{1}{2}$ аларыс.

Шу ерден $4(\log_3 x)^2-\log_3 x=\frac{1}{2}$, я-да $8(\log_3 x)^2-2\log_3 x-1=0$.

Шу квадрат деңлемәни чөзүп, $\log_3 x=\frac{1}{2}$ ве $\log_3 x=-\frac{1}{4}$ тапарыс. Диймек, $x_1=3^{\frac{1}{2}}$ я-да $x_1=\sqrt{3}$ ве $x_2=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

695. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язарыс: $\log_2(2^x-3)+$ $+\log_2 2^x=2\log_2 2$, я-да $\log_2(2^x-3)\cdot 2^x=\log_2 4$. Шу деңликден

$$2^x(2^x-3)=4$$

аларыс.

Инди $2^{2x}-3\cdot 2^x-4=0$ деңликде $2^x=y$ билен белләп, $y^2-3y-4=0$ квадрат деңлемәни аларыс ве оны чөзүп, $y_1=4$, $y_2=-1$ тапарыс. $y_2=-1$ баха $2^x=-1$ деңлемәни канагатландырмаяр. Диймек, $2^x=4$. Бу ерден $x=2$.

696. Берлен деңлемәни шейле язарыс:

$$\log_3(10^{\sqrt{x+2}})^{\lg 3}=\log_3 3^{x-4}.$$

Шу ерден $(10^{\sqrt{x+2}})^{\lg 3}=3^{x-4}$, я-да $\sqrt{x+2}\lg 3\cdot\log_{10} 10=(x-4)\log_{10} 3$, я-да $\sqrt{x+2}=x-4$, я-да $x^2-9x+14=0$. Шу деңлемәни чөзүп, $x=7$ баханы тапарыс. $x=2$ баханың канагатландырмандыгыны гөс-гөни барламак аркалы гөрмек мүмкиндир.

Жогабы: 7.

697. Берлен деңлигиң ики бөлегини логарифмирләлиң, онда

$$\left(3-\lg\frac{200}{x}\right)\lg x=\lg 400$$

аларыс. Бу ерден $(3-\lg 200+\lg x)\lg x=\lg 4\cdot 100$ я-да

$$(3-2-\lg 2+\lg x)\lg x-\lg 4-2=0,$$

я-да $(1-\lg 2)\lg x+\lg^2 x-2\lg 2-2=0$, я-да

$$\lg^2 x+(1-\lg 2)\lg x-(\lg 2+2)=0.$$

Инди $\lg^2 x - (\lg 2 - 1)\lg x - (2\lg 2 + 2) = 0$ квадрат деңлемәни чөзүп $\lg x = \frac{\lg 2 - 1 \pm (\lg 2 + 3)}{2}$ аларыс. Шу ерден $\lg x = \lg 2 + 1$ я-да $\lg x = \lg 2 \cdot 10$ ве $\lg x = -2$. $x_1 = 20$ ве $x_2 = 0{,}01$.

698. Берлен системаның икинжи деңлемесинден $\lg y \cdot \lg x = \lg 4$ аларыс. Шол системаның биринжи деңлемесинден $\lg y + \lg x = \lg 40$ аларыс.

Инди

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 40 \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \end{cases}$$

системаны чөзмели болар. Шу системадан $z^2 - z\lg 40 + \lg 4 = 0$ аларыс.

$$z^2 - z(1 + \lg 4) + \lg 4 = 0; \quad z_{1,2} = \frac{1 + \lg 4 \pm \sqrt{(1 + \lg 4)^2 - 4\lg 4}}{2} =$$

$$= \frac{1 + \lg 4 \pm (1 - \lg 4)}{2}; \quad z_1 = 1; \quad z_2 = \lg 4.$$

Диймек, $\lg x = 1$; $\lg y = \lg 4$, я-да $\lg x = \lg 4$; $\lg y = 1$. Бу ерден $x_1 = 10$; $y_1 = 4$; $x_2 = 4$; $y_2 = 10$.

699. Берлен системаның биринжи деңлемесини шейле язалың:

$$2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2(y + 1) = 3.$$

Шол системаның икинжи деңлемесини ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2(y + 1) = \frac{4}{3}.$$

Инди ашакдакы системаны аларыс:

$$\begin{cases} 4\log_2 x + \log(y + 1) = 6 \\ 4\log_2 x \cdot \log_2(y + 1) = 8. \end{cases}$$

Шу системадан $z^2 - 6z + 8 = 0$ деңлемәни алып, $z_1 = 4$; $z_2 = 2$ тапарыс. Диймек,

$$(1)\ \begin{cases} 4\log_2 x = 4 \\ \log_2^2(y + 1) = 2 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 4\log_2 x = 2 \\ \log_2(y + 1) = 4. \end{cases}$$

Шейлеликде, $x_1 - 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = \sqrt{2}$; $y_2 = 15$.

700. Берлен системаның икинжи деңлемесини шейле язярыс:

$$\sqrt[x-y]{324} = 2(9x^2 + 6xy + y^2),$$

я-да

$$\frac{\sqrt[x-y]{324}}{2} = (3x + y)^2.$$

Бу ерден

$$3x + y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt[x-y]{324}}{2}}.$$

Шу бахаңы берлен системаның биринжи деңлемесине гойярыс, онда

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt[x-y]{324}}{2}}\right)^{x-y} = 9$$

аларыс. Бу ерден $\sqrt{\frac{324}{2^{x-y}}} = 9$, я-да $\frac{324}{2^{x-y}} = 81$. Диймек,

$$2^{x-y} = \frac{324}{81} = 2^2; \quad x - y = 2.$$

Инди, $3x + y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{324}}{2}}$; $3x + y = \pm 3$. Диймек,

$$1)\ \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$$

Биринжи системаны чөзүп, $x_1 = \frac{5}{4}$, $y_1 = -\frac{3}{4}$ бахалары тапарыс. Икинжи системаны чөзүп, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = -\frac{9}{4}$ аларыс.

701. Берлен системадакы x ве y нәбелликлер үчин мүмкин болан бахалары $x > 0$, $y > 0$ болмалыдыр. Берлен системаның биринжи деңлемесинден $x = \sqrt[y]{y^x}$ бахаңы тапып, системаның икинжи деңлемесине гойярыс, онда $(\sqrt[y]{y^x})^m = y^n$ я-да $y^{\frac{mx}{y}} = y^n$ аларыс. Шу деңликден $y = 1$ я-да $\frac{mx}{y} = n$ аларыс. Диймек, берлен системаның ерине ашакдакы ики системаны аларыс:

$$1)\ \begin{cases} y = 1 \\ x^m = y^n \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \frac{mx}{y} = n \\ x^m = y^n \end{cases}$$

Биринжи системаны чөзүп, $y_1 = 1$; $x_1 = 1$ аларыс. Икинжи системаның биринжи деңлемесинден $y = \frac{mx}{n}$ бахаңы тапып, шол системаның икинжи деңлемесине гоюп,

$$x^m = \left(\frac{mx}{n}\right)^n \quad \text{я-да} \quad x^m = \left(\frac{m}{n}\right)^n \cdot x^n; \quad x^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

$$x_2 = \sqrt[m-n]{\left(\frac{m}{n}\right)^n}; \quad y_2 = \sqrt[m-n]{\left(\frac{m}{n}\right)^m}$$

тапарыс. Бу ерде $m - n \neq 0$.

702. Белли болшы ялы, $a + bi$ комплекс санын тригонометрик гөрнүши ашакдакы ялыдыр: $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, бу ерде $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ве $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Шу мысалда

$$a = 1 - \cos\alpha$$
$$b = \sin\alpha.$$

Диймек,

$$r = \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = \sqrt{2(1 - \cos\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Инди $a = r\cos\varphi = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi$. бу ерден

$$\cos\varphi = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\sin\varphi = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Диймек,

$$1-\cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

703.

$$x_{1,2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 12i}}{2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{9+6i-1-12i}}{2} =$$

$$= \frac{(3+i) \pm \sqrt{9-6i-1}}{2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{(3-i)^2}}{2} =$$

$$= \frac{(3+i) \pm (3-i)}{2}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = i.$$

704. Берлен деңликден ашакдакыны аларыс:

$$(x+y)^2 + 6 = 5(x+y) \quad \text{ве} \quad x = y+1$$

я-да

$$(x+y)^2 - 5(x+y) + 6 = 0 \quad \text{ве} \quad x - y = 1.$$

Ахыркы ики деңлемеде биринжи квадрат деңлемәни чөзүп,

$$x+y = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad (x+y)_1 = 3 \quad \text{ве} \quad (x+y)_2 = 2$$

аларыс. Инди ашакдакы ики системаны аларыс:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1. \end{cases}$$

Бу системалары чөзүп,

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 1;$$

$$x_2 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

бахалары аларыс. Шу бахаларың хеммесиниң берлен деңлемәни канагатландыряндыгыны шол деңлемә гоймак билен гөрйәрис.

705.

$$\frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a+bi)^2 + (a-bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} =$$

$$= \frac{a^2 + 2abi - b^2 + a^2 - 2abi - b^2}{a^2+b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2+b^2}.$$

706. Берлен деңлиги ашакдакы ялы язалың:

$$x + 1 + (y-3)i = (1+i)(5+3i)$$

я-да

$$x + 1 + (y-3)i = 5 + 8i - 3 = 2 + 8i.$$

Инди $(x+1) + (y-3)i$ ве $2+8i$ комплекс санлары деңешдирип, ашакдакыны аларыс:

$$\begin{aligned} x+1 &= 2 \quad \text{я-да} \quad x = 1, \\ y-3 &= 8 \qquad\qquad y = 11. \end{aligned}$$

Шейлеликде, $x = 1$ ве $y = 11$ боланда меселәниң шертиндәки деңлик ерине етирилйәр.

707.

$$\frac{i}{x+1} - \frac{1}{(x+i)^2} - \frac{i}{x-1} - \frac{1}{(x-i)^2} = \frac{(x-1)i - (x+1)i}{(x+1)(x-1)} -$$

$$- \frac{(x-i)^2 + (x+i)^2}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{xi - i - xi - i}{x^2-1} - \frac{x^2 - 2xi - 1 + x^2 + 2xi - 1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2i}{x^2-1} - \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} - \frac{2i}{x^2-1}.$$

708. Меселәниң шертине гөрә $a = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$. Шу ерден

$$a^2 = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ,$$

я-да $a^2 = -\frac{1}{2} + i\sin 60^\circ$. Инди $a^2 + a + 1 = -\frac{1}{2} + i\sin 60^\circ + \cos 60^\circ +$

$$+ i\sin 60^\circ + 1 = -\frac{1}{2} + 2i\sin 60^\circ + \frac{1}{2} + 1 = 1 + 2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Шейлеликде, $a^2 + a + 1 = 1 + i\sqrt{3}$.

709. Берлен деңлемәни ашакдакы гөрнүшде язалың:

$$(6x - iy)(8x + 3iy) = 15(5+2i).$$

Бу ерден $48x^2 + 18ixy - 8xyi + 3y^2 = 75 + 30i$ я-да $48x^2 + 3y^2 + 10ixy = 75 + 30i$. Иң ахыркы деңликден

$$\begin{cases} 48x^2 + 3y^2 = 75 \\ 10xy = 30 \end{cases}$$

я-да

$$\begin{cases} 16x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 3 \end{cases}$$

аларыс. Ахыркы системаның икинжи деңлемесиниң ики бөлегини-де 8-е көпелдип, шол системаның биринжи деңлемеси билен члеме-член гошсак ашакдакыны аларыс: $16x^2 + 8xy + y^2 = 49$, я-да $(4x+y)^2 = 7^2$. Бу ерден $4x + y = \pm 7$. Диймек,

$$\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 4xy = 12 \end{cases} \quad \text{ве} \quad \begin{cases} 4x + y = -7 \\ 4xy = 12. \end{cases}$$

Ахыркы ики системаның биринжисинден $z^2 - 7z + 12 = 0$ квадрат деңлеме дүзүп, $z_1 = 4$, $z_2 = 3$ тапарыс. Диймек, $4x = 4$; $x_1 = 1$; $y_1 = 3$.

Икинжи системаны чөзүп, $x_2 = -1$; $y_2 = -3$ тапарыс.

710. Берлен деңлигиң чеп бөлегини ашакдакы ялы язярыс:

$$\left(yi + \frac{1}{xi}\right)^2 - \left(xi + \frac{1}{yi}\right)^2 = -y^2 + \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^2} + x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2} =$$

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$= x^2 - y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x} - \frac{2x}{y} = (x^2 - y^2) + \frac{x^2 - y^2}{x^2y^2} + \frac{2y^2 - 2x^2}{xy} =$$

$$= (x^2 - y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2} - \frac{2}{xy}\right) = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{xy} - 1\right)^2.$$

Шейлеликле,

$$\left(yi + \frac{1}{xi}\right)^2 - \left(xi + \frac{1}{yi}\right)^2 = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{xy} - 1\right)^2.$$

Ш. с. т. э.

711.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec} 2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\sin 2\alpha}} = \frac{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin 2\alpha}} = \frac{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}} = 2.$$

712.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta = (\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) +$$
$$+ (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) +$$
$$+ \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cdot\cos\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta +$$
$$+ \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cdot\cos\beta = (\sin\alpha\cos\beta)^2 + (\sin\beta\cos\alpha)^2 +$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha)^2 =$$
$$= [\sin(\alpha+\beta)]^2 = \sin^2(\alpha+\beta).$$

713.

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} =$$

$$\frac{4\sin^2\alpha}{4(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}.$$

714. $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha\cdot\operatorname{ctg} 4\alpha =$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} - 8\cos 4\alpha\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha} - \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha} - \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha} -$$

$$- \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha} - \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha} -$$

$$- \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{4\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha} - \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{4\cos 4\alpha - 8\cos^2 4\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin^2 4\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos 4\alpha(1 - 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha)}{\sin^2 4\alpha} = \frac{4\cos 4\alpha(1 - \sin 8\alpha)}{\sin^2 4\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos 4\alpha(\sin 90^\circ - \sin 8\alpha)}{\sin^2 4\alpha} = \frac{4\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}\cdot 2\cos(45^\circ + 4\alpha)\sin(45^\circ - 4\alpha) =$$

$$= \frac{8\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}\cdot\sin^2(45^\circ - 4\alpha).$$

715. $$\frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1 + \cos 2\alpha) + (\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos 2\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cdot 2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

716. $$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)\cdot(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha.$$

717. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\beta +$$
$$+ \sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin\beta\cos\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta.$$

718. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$

$$= \frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

719. $16\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ =$

$$= 16\sin 10^\circ\cdot\frac{1}{2}\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot 1 = \frac{4\cdot 2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1.$$

720. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{2} = \frac{\cos 11x + \cos x}{2},$$

Бу ерден $\cos 5x = \cos 11x$ аларыс. Шу деңликден $5x + 11x = 2\pi n$ ве $11x - 5x = 2\pi n$ аларыс. Диймек, $x_1 = \frac{\pi n}{8}$ ве $x_2 = \frac{\pi n}{3}$.

721. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

Бу ерден $\sin x - \sin x \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\cos x$, я-да $\sin x(1 - \cos x) = 2\sin^2\frac{x}{2}\cos x$, я-да $\sin x \cdot 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}\cos x$. Бу ерден

$$2\sin^2\frac{x}{2}(\sin x - \cos x) = 0; \quad \sin\frac{x}{2} = 0; \quad \frac{x}{2} = 180°n; \quad x_1 = 360°n.$$

$$\sin x - \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x_2 = 180°n + 45° = 45(4n + 1).$$

722. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $\sin 3x + \sin x = \cos x$ я-да $2\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} = \cos x$, я-да $2\cos x \sin 2x - \cos x = 0$, я-да

$$\cos x(2\sin 2x - 1) = 0. \quad \cos x = 0; \quad x_1 = 180°n + 90° = 90°(2n + 1).$$

$$2\sin 2x - 1 = 0; \quad \sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = 180°n + (-1)^n \cdot 30°.$$

$$x_2 = 90°n + (-1)^n \cdot 30°.$$

723. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың: $\cos x - \sin x = \frac{1}{\cos x} = 0$

я-да $\frac{\cos^2 x - \sin x \cos x - 1}{\cos x} = 0$,

я-да
$$\frac{\cos^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x} = 0,$$

я-да $\frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\cos x} = 0$, я-да $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$, я-да

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Бу ерден $\sin x = 0$; $x = k\pi$; $\sin x + \cos x = 0$ я-да $\operatorname{tg} x + 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$.
Бу ерден $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$.

724. 1) Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язарыс: $1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ я-да $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$; $\sin x_1 = \frac{1}{2}$; $\sin x_2 = -1$; $x_1 = 180°k + (-1)^k \cdot 30°$;

$$x_2 = 180° \cdot k + (-1)^k \cdot 270°.$$

2) Берлен деңлемәниң чеп бөлеги икелдилен аргументиң косинусы боланы себәпли, шол деңлемәни ашакдакы ялы язмак мүмкиндир:

$$\cos 2x = \sin x \text{ я-да } \cos 2x = \cos(90° - x).$$

Бу ерден

$$2x + 90° - x = 360°n; \quad x = 360°n - 90° = 90°(4n - 1);$$
$$2x - 90° + x = 360°n; \quad x = 120°n + 30° = 30°(4n + 1).$$

725. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$2\sin^2 3x + (2\sin 3x \cos 3x)^2 = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x),$$

я-да
$$2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x \cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0,$$

я-да
$$2\cos^2 3x(2\sin^2 3x - 1) = 0.$$

Бу ерден

$$\cos 3x = 0; \quad 3x = 180°n + 90°; \quad x_1 = 60°n + 30°; \ x_1 = 30°(2n + 1);$$
$$2\sin^2 3x - 1 = 0; \quad x_2 = 60°n \pm 45°.$$

726. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

я-да
$$2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 0,$$

я-да
$$2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0.$$

Бу ерден $\sin x = 0$; $x_1 = 180°n$ ве $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$. Шу деңлемәниң ики бөлегини-де 2-ә бөлүп, $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$ я-да $\sin x \cos 60° + \sin 60° \cdot \cos x = 0$ аларыс. Шу деңлиги $\sin(x + 60°) = 0$ гөрнүшде язып, $x + 60° = 180°n$ я-да $x_2 = 180°n - 60°$ аларыс.

727. Берлен деңлемәни шейле язалың:

$$2\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} + \sin 2x = 2\cos\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} + \cos 2x$$

я-да
$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x.$$

Инди
$$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1).$$

Бу ерден
$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

аларыс.

Көпелдиҗилериң хер бирини нула деңләп, $2\cos x + 1 = 0$ ве $\sin 2x - \cos 2x = 0$ аларыс. Шу ахырки ики деңлемелериң биринҗисинден $\cos x = -\frac{1}{2}$ аларыс. Диймек, $x_1 = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$; $x_1 = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$.

$\sin 2x - \cos 2x = 0$ деңлемәни чөзүп, $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8}$.

728. Берлен деңлемәниң ики бөлегини-де $2\sqrt{3}$ бөлүп, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x - \frac{1}{2}\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ аларыс.

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Шу деңлемәни ашакдакы ялы язарыс: $\sin 5x \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ я-да $\sin(5x - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Бу ерден $5x - 30° = \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}$. $x = 6° + 36° n + (-1)^n \cdot 9°$.

729. Берлен деңлемәни шейле язалың: $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 1 = 0$, я-да $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$, я-да $\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 = 0$, я-да $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos x) = 0$. Бу ерден

$$\sin x + \cos x = 0; \ \operatorname{tg} x = -1; \ x_1 = \pi \cdot n + \frac{3}{4}\pi.$$

$$\sin x + \cos x + 1 = 0; \ \sin x + \cos x = -1.$$

Шу деңлигиң ики бөлегини-де квадрата гөтерип,

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1,$$

я-да $2 \sin x \cos x = 0$ аларыс. Бу ерден $\sin x = 0$; $x_2 = \pi n$. $\cos x = 0$; $x_3 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}$.

730. Берлен деңлемәни ашакдакы ялы язалың:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2,$$

я-да $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$, я-да

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0;$$
$$2 \cos 5x \cdot \cos 3x + 2 \cos 5x \cdot \cos x = 0;$$
$$2 \cos 5x (\cos 3x + \cos x) = 0; \quad \cos 5x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos x = 0;$$

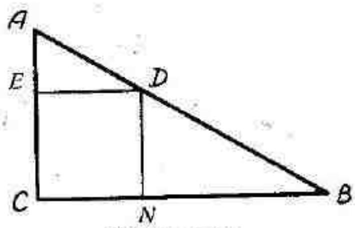
$$\cos x = 0; \ x_1 = \pi n + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2n + 1); \quad \cos 2x = 0; \ 2x_2 = \pi n + \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2n + 1); \quad \cos 5x = 0; \ 5x_3 = \pi n + \frac{\pi}{2};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{5} n + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}(2n + 1).$$

731. Гой, $AC = b$, $BC = a$ болсун (101-нжи чызгы). $CN = CE = x$. $\triangle ADE \backsim \triangle DNB$. Онда

$$\frac{BN}{DE} = \frac{DN}{AE} \text{ я-да } \frac{a - x}{x} = \frac{x}{b - x}.$$

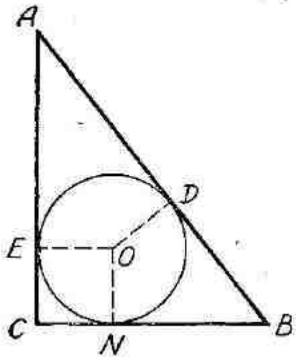


101-нжи чызгы.

Шу ерден $\frac{a}{x} = \frac{b}{b - x}$ я-да $\frac{b - x}{x} = \frac{b}{a}$ аларыс. Иң ахыркы деңликден $\frac{b}{x} = \frac{a + b}{a}$ аларыс. Бу ерден $x = \frac{ab}{a + b}$ Диймек, квадратың периметри $\frac{4ab}{a + b}$ болар.

732. Гой, $AD = 12$ *см* ве $DB = 5$ *см* болсун (102-нжи чызгы). $CE = CN = x$. Пифагорың теоремасыны уланып, $(CN + NB)^2 + (CE + EA)^2 = (AD + DB)^2$ я-да $(x + 5)^2 + (x + 12)^2 = 17^2$, я-да $x^2 + 17x - 60 = 0$ аларыс. Шу деңлемәни чөзүп, $x = 3$ тапарыс. Диймек,

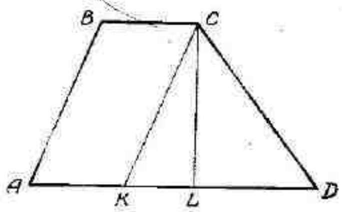
$$AC = 15 \text{ см}, \quad BC = 8 \text{ см}.$$



102-нжи чызгы.

733. Меселәниң шертине гөрә

$$AD - BC = 14 \text{ см}, \quad AB = 13 \text{ см}, \quad CD = 15 \text{ см}$$



103-нжи чызгы.

(103-нжи чызгы). C депеден AB тарапа параллел эдип, CK гөни чызыгы гечирйәрис. Онда $BC = AK$ болар. Диймек, $AD - AK = 14$ *см*. Трапецияның ичинден төверек чызып боляр диймек, $BC + AD = AB + CD$ диймекдир, ягны

$$2 \cdot BC + 14 = 13 + 15; \quad BC = 7 \text{ см}; \quad AD = 21 \text{ см}.$$

CDK үчбурчлугың мейданыны Геронуң формуласы боюнча хасаплалың;

$$S_{CDK} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}; \quad S_{CDK} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7} = 7 \cdot 3 \cdot 4.$$

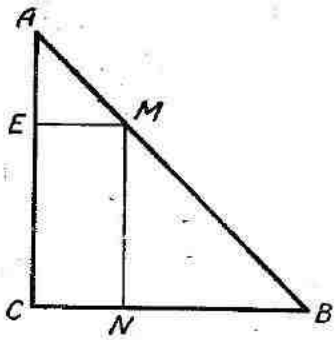
Эмма $S_{CDK} = \frac{1}{2} CL \cdot KD$; диймек, $7 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot CL \cdot 14$; $CL = 12$ *см*. Трапецияның мейданы

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CL = \frac{21 + 7}{2} \cdot 12 = 168 \text{ см}^2.$$

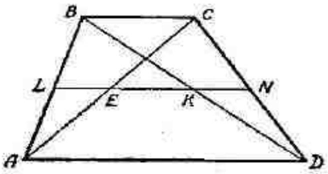
734. Гой, $ME = 4$ *см*, $MN = 8$ *см* болсун (104-нжи чызгы).

$$\triangle AEM \backsim \triangle MNB.$$

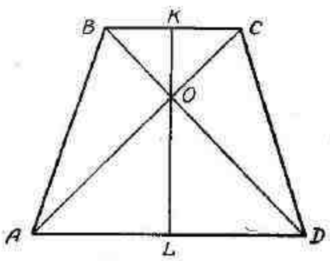
Диймек, $\frac{MN}{AE} = \frac{NB}{ME}$ $\frac{8}{x} = \frac{y}{4}$; $xy = 32$ $(AE = x;\ NB = y)$. $CNME$ гөнүбурчлугуң мейданы $4 \cdot 8 = 32$ *см*^{2}. Диймек, $S_{MNB} + S_{AEM} = 100 - 32 = 68$ *см*^{2} я-да $4y + 2x = 68$, я-да $2y + x = 34$ аларыс.



104-нжи чызгы.



105-нжи чызгы.



106-нжы чызгы.

Шейлеликде,

$$\begin{cases} x + 2y = 34 \\ x \cdot 2y = 64 \end{cases}$$

системаны чөзүп, $x = 2$; $y = 16$ я-да $x = 32$; $y = 1$ бахалары тапарыс.

Диймек, үчбурчлугың катетлери: 10 *см* ве 20 *см* я-да 40 *см* ве 5 *см*.

735. Гой, E ве K нокатлар $ABCD$ трапецияның BD ве AC диагоналларының ортасы болсун (105-нжи чызгы). E ве K нокатлар аркалы трапецияның эсасларына параллел гөни чызык гечирелиң. Онда EN кесим ACD үчбурчлугың орта чызыгы болар ве $EN = \frac{AD}{2}$ болар. EN гөни чызык K нокадың үстүнден гечер, чүнки KN кесим BCD үчбурчлугың орта чызыгыдыр ве $KN = \frac{BC}{2}$. Инди

$$EK = EN - KN = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Шейлеликде, $EK = \frac{a-b}{2}$.

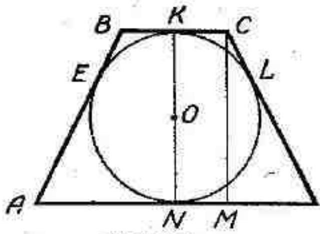
736. Меселәниң шертине гөрә $ABCD$ трапецияда (106-нжы чызгы) $AC \perp BD$ ве $AB = CD$. Диагоналларың кесишме O нокады аркалы трапецияның KL бейиклигини гечирелиң. Онда $\angle BOK = \angle KOC = 45°$ болар. Диймек, $\angle KBO = \angle KCO = 45°$. Шейлеликде, $BK = OK = KC$. Эдил шонуң ялы, $OL = AL = LD$.

$ABCD$ трапецияның мейданы

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot KL = \frac{2 \cdot BK + 2 \cdot AL}{2} \cdot KL = (BK + AL) \cdot KL = (OK + OL) KL = KL^2 = a^2.$$

Диймек, $KL = a$.

737. Эгер трапецияның ичинден теверек чызып болян болса, онда шол трапеция деңиллы болмалыдыр (107-нжи чызгы). Чызгыдан гөрнүши ялы, $CK = CL = 2$ *см*, $DN = DL = 8$ *см*. Диймек, $CD = CL + LD = 10$ *см*.



107-нжи чызгы.

Инди $\triangle CMD$-ден $MC^2 = CD^2 - DM^2 = 10^2 - 6^2 = 64$; $MC = 8$ *см*. Шейлеликде, ичинден чызылан теверегиң радиусы $r = 4$ *см*.

Дашындан чызылан теверегиң радиусыны тапмак үчин ACD үчбурчлуга гаралың.

Белли болшы ялы,

$$R = \frac{abc}{4s}.$$

Шу ерде

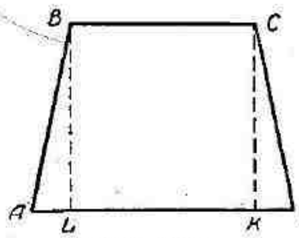
$$a = CD = 10 \text{ см};$$
$$b = AC = 2\sqrt{41} \text{ см};$$
$$c = AD = 16 \text{ см};$$
$$S = \frac{1}{2} MC \cdot AD = 64 \text{ см}^2.$$

Диймек,

$$R = \frac{10 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{41}}{4 \cdot 64} = \frac{5\sqrt{41}}{4} \text{ см}.$$

Шейлеликде,

$$R = \frac{5\sqrt{41}}{4} \text{ см}; \quad r = 4 \text{ см}.$$



108-нжи чызгы.

738. Берлен деңиллы $ABCD$ трапецияның CK бейиклигини ве AC диагоналыны гечирелиң (108-нжи чызгы). $AL = KD$ боланы себәпли

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{16 - 12}{2} = 2 \text{ см}.$$

CDK гөнүбурчлы үчбурчлукдан

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{14^2 + 2^2} = 10\sqrt{2} \text{ см}.$$

ACK үчбурчлукдан

$$AC = \sqrt{CK^2 + AK^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2} \text{ см}.$$

ACD үчбурчлугың дашындан чызылан теверек D депеден-де гечер, шонуң үчин шол теверегиң радиусыны тапмак етерликдир, яғны

$$R = \frac{AC \cdot CD \cdot AD}{4S_1} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 16}{4 \cdot S_1},$$

эмма

$$S_1 = \frac{1}{2} AD \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 = 8 \cdot 14.$$

Диймек,

$$R = \frac{14 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 16}{4 \cdot 8 \cdot 14} = 10 \text{ см}.$$

ABBYY PDF Transformer+ Click here to buy www.ABBYY.com

Шейлеликде, гөзленилйән мейдан $S = \pi R^2 = 100\pi$ *см*^{2}.

739. ABC деңяплы үчбурчлугың BB_1 бейиклигини x билен белдесек, $AB = 2x$ болар (109-нжы чызгы). Онда $AB_1 = x\sqrt{3}$ болар. Диймек, үчбурчлугың тараплары:

$$AB = BC = 2x \quad \text{ве} \quad AC = 2x\sqrt{3}$$

аларыс.

ABC үчбурчлугың мейданы S биринҗи тарапдан

$$S = \frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x\sqrt{3} = x^2\sqrt{3},$$

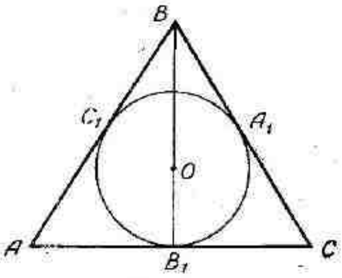
икинҗи тарапдан

$$S = pr = (AB + BC + AC)\cdot\frac{1}{2}\cdot r = (2x + x\sqrt{3})\cdot 3$$

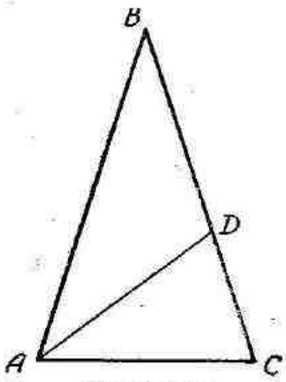
болар.

Инди $x^2\sqrt{3} = 3x(2 + \sqrt{3})$ деңликден

$$x = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{3} = 2\sqrt{3} + 3.$$



109-нжы чызгы.



110-нжы чызгы.

Шейлеликде,

$$AB = BC = 4\sqrt{3} + 6; \quad AC = 6\sqrt{3} + 12.$$

740. Меселәниң шертине гөрә $\angle ABC = 36°$, $AD = \sqrt{20}$ (110-нжы чызгы)

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180° - \angle ABC}{2} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$

$$\angle CAD = \angle BAD = \frac{72°}{2} = 36°;$$

$$\angle ADC = 180° - \angle ACD - \angle DAC = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

Диймек,

$$AD = DB; \quad AD = AC.$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AD} \quad \text{я-да} \quad \frac{\sqrt{20}}{BC} = \frac{BC - BD}{\sqrt{20}},$$

я-да

$$\frac{\sqrt{20}}{BC} = \frac{BC - \sqrt{20}}{\sqrt{20}}; \quad BC^2 - \sqrt{20}\cdot BC - 20 = 0;$$

$$BC = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{20 + 80}}{2} = \sqrt{5} + 5.$$

Шейлеликде, $AC = AD = \sqrt{20}$ ве $BC = 5 + \sqrt{5}$.

741. Меселәниң шертине гөрә $\angle A = 2\angle B$; $\angle BAD = \angle DAC$ (111-нжи чызгы).

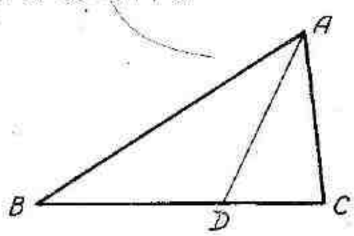
$$\triangle ABC \backsim \triangle ADC.$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}; \quad \frac{DC}{8} = \frac{8}{12};$$

$$DC = \frac{8\cdot 8}{12} = \frac{16}{3}; \quad DC = \frac{16}{3} \text{ см};$$

$$BD = BC - DC = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3};$$

$$BD = \frac{20}{3} \text{ см}.$$



111-нжи чызгы.

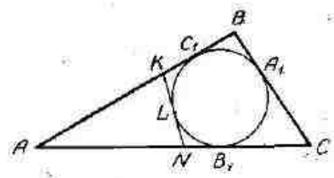
Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хәсиети боюнча ашакдакыны аларыс:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}; \quad AB = \frac{AC\cdot BD}{DC}; \quad AB = \frac{8\cdot\frac{20}{3}}{\frac{16}{3}} = \frac{8\cdot 20}{16} = 10 \text{ см}.$$

$$AB = 10 \text{ см}.$$

742. Гой, $BC = 6$ *см*, $AC = 12$ *см*, $AB = 10$ *см* болсун (112-нжи чызгы). Белли болшы ялы, $BA_1 = BC_1$, $AC_1 = AB_1$, $A_1C = B_1C$. Гой, $BA_1 = x$ болсун, онда $BC_1 = x$; $AC_1 = 10 - x$

$$A_1C = 6 - x; \quad CB_1 = 6 - x;$$
$$AB_1 = 10 - x.$$

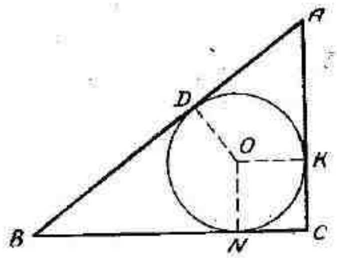


112-нжи чызгы.

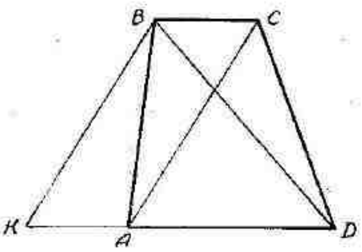
Диймек,

$$AC = AB_1 + B_1C = 10 - x + 6 - x = 12; \quad x = 2 \text{ см}.$$

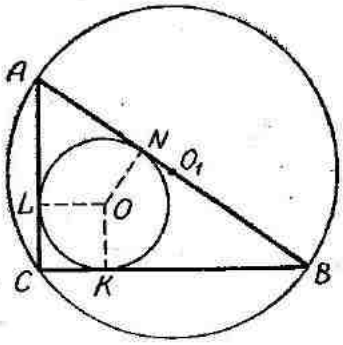
Шейлеликде, $AC_1 = AB - BC_1 = 10 - 2 = 8$ *см*.



113-нжи чызгы.



114-нжи чызгы.



115-нжи чызгы.

Инди AKN үчбурчлугын периметрини хасаплалың:

$$AN + AK + KN = AN + AK + KL + LN = AN + AK + KC_1 + NB_1 = (AN + NB_1) + (AK + KC_1) = AB_1 + AC_1 = 2\cdot AC_1 = 2\cdot 8 = 16 \text{ см}.$$

Шейлеликде, AKN үчбурчлугын периметри 16 *см* дендир.

743. Меселәниң шертине гөрә $AB = 10$ *см* ве $AD = AK$; $BD = BN$, $CN = CK = r$.

$BD = 10 - AD$; $BN = 10 - AD$ (113-нжи чызгы).

ABC үчбурчлугың периметри

$$2p = AD + DB + BN + NC + KC + KA = 2AD + 2BD + 2CN = 2\cdot AD + 20 - 2\cdot AD + 2r = 20 + 2r.$$

Диймек, $p = 10 + r$. Эмма үчбурчлугың мейданы $S = pr = (10 + r)\,r$ я-да $24 = (10 + r)\,r$; $r^2 + 10r - 24 = 0$. Шу деңлемәни чөзүп, $r = 2$ *см* тапарыс.

744. Меселәниң шертине гөрә $AC = 7$ *см*; $BD = 8$ *см*; $AD = 6$ *см*; $BC = 3$ *см* (114-нжи чызгы). B депеден AC диагонала параллел әдип, BK гөни чызыгы гечирйәрис. BDK үчбурчлукда $BK = AC = 7$ *см*, $BD = 8$ *см*, $DK = DA + AK = 6 + 3 = 9$ *см*.

Шол үчбурчлугың мейданыны Героның формуласы боюнча хасапламак мүмкиндир:

$$2p = 9 + 8 + 7 = 24; \quad p = 12$$

$$S = \sqrt{12\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

$ABCD$ трапециянын мейданы BDK үчбурчлугың мейданына деңдир. Хакыкатдан-да, BCD ве ABK үчбурчлуклар деңулулыклыдырлар, чүнки оларың эсаслары $BC = AK$ ве шол эсаслара D хем K депелерден гечирилен бейикликлер (AD ве BC ики параллел чызыкларың арасындакы узаклыклар) деңдирлер.

Шейлеликде, $ABCD$ трапециянын мейданы $S = 12\sqrt{5}$ *см*^{2}.

745. Төверегиң ичинден чызылан үчбурчлугың мейданыны $S = pr$ формула боюнча хасапламак мүмкиндир (115-нжи чызгы). Диймек,

$$S = pr = \frac{AB + BC + AC}{2}\cdot r = \frac{2AN + 2BN + 2r}{2}\cdot r = (AN + BN + r)\cdot r =$$

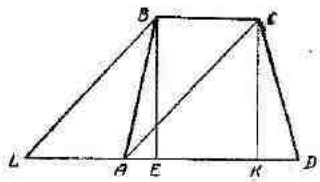
$$= [(AN + BN) + r]\,r = (2R + r)\cdot r = 2Rr + r^2$$

$$S_{ABC} = 2Rr + r^2.$$

746. Гой, $AD = x$; $BC = y$ болсун (116-нжы чызгы). Онда $AK = \frac{x + y}{2}$ болар. ACK үчбурчлукдан

$$AK^2 + CK^2 = AC^2;$$

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + CK^2 = 10^2 \qquad (1)$$



116-нжы чызгы.

DBL үчбурчлугың мейданы

$$S = \frac{1}{2} BE\cdot LD = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (x + y).$$

Эмма DBL үчбурчлугың мейданы $ABCD$ трапециянын мейданына деңдир. Диймек, $\frac{1}{2}(x + y)\cdot BE = 48$.

Инди (1) деңлиги гөз өңүнде тутсак,

$$\left(\frac{48}{BE}\right)^2 + CK^2 = 10^2$$

болар. Эмма $BE = CK$. Диймек,

$$48^2 + CK^4 - 100\cdot CK^2 = 0$$

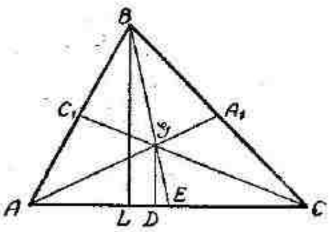
я-да

$$CK = \sqrt{50 \pm \sqrt{50^2 - 48^2}} = \sqrt{50 \pm 14}; \quad CK = 8 \text{ см} \text{ я-да } CK = 6 \text{ см}.$$

747. ABC үчбурчлукда (117-нжи чызгы)

$$CG = \frac{2}{3} CC_1 = \frac{2}{3}\cdot 24 = 16 \text{ см}.$$

$$AG = \frac{2}{3} AA_1 = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12 \text{ см}.$$



117-нжи чызгы.

Диймек, AGC үчбурчлугын мейданыны Героның формуласы боюнча хасапламак мүмкиндир.

$$2p = 16 + 12 + 20 = 48; \quad p = 24$$

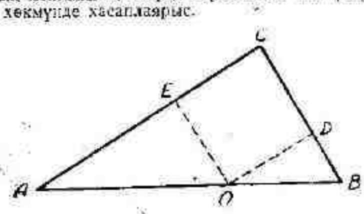
$$S = \sqrt{24\cdot 8\cdot 12\cdot 4} = 96.$$

Эмма AGC үчбурчлугың мейданы ABC үчбурчлугың мейданындан үч эссе кичидир. Хакыкатдан-да, BLE үчбурчлукдакы BE тарапы LGE үчбурчлукдакы GE тарап билен деңешдирсек, $GE = \frac{1}{3} BE$ аларыс. Диймек, $GD = \frac{1}{3} BL$.

Шейлеликде, ABC үчбурчлугың мейданы $S_{ABC} = 3\cdot 96 = 288$ *см*^{2}.

ABBYY PDF Transformer+
Click here to buy
www.ABBYY.com

748. *Илки* билен ABC үчбурчлугың мейданыны Героның формуласы боюнча хасаплаарыс (118-нжи чызгы). Сонра теӊелеӊиӊ O, меркезини үчбурчлугыӊ C депеси билен бирлешдирип, OCB ве OAC ики үчбурчлугы аларыс. ABC үчбурчлугың мейданыны ёкарда гөркезилен ики үчбурчлугың мейданларының жеми хөкмүнде хасаплаарыс.



118-нжи чызгы.

Шейлеликде,

$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ве

$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OAC}=\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r=\frac{r}{2}(a+b).$$

Диймек,

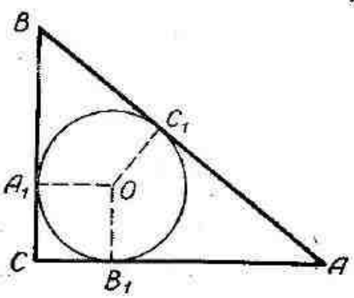
$$\frac{r}{2}(a+b)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b}.$$

Гөзленилйән мейдан

$$S=\frac{\pi r^2}{2}=\pi\cdot\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{2(a+b)^2},$$

$$S=\frac{2\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{(a+b)^2}.$$



119-нжы чызгы.

749. Гой, ABC берлен гөнүбурчлы үчбурчлук болсун (119-нжы чызгы). Шол үчбурчлугың ичинден төверек чызалың. Онда $AC_1=AB_1$; $BC_1=BA_1$; $CB_1=CA_1=r$ болар.

Үчбурчлугың S мейданы ашакдакы формула аркалы аңладылляр:

$$S=pr.$$

Бу ерден

$$r=\frac{m^2}{p}.\qquad p=CB_1+B_1A+$$

$$+BC_1=\frac{m^2}{p}+AC_1+BC_1=$$

$$\frac{m^2}{p}+AB.$$

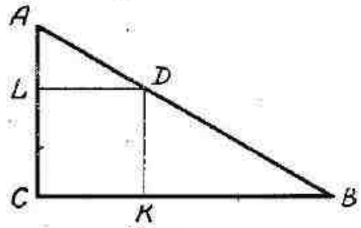
Диймек,

$$AB=p-\frac{m^2}{p}=\frac{p^2-m^2}{p}.$$

Инди катетлери хасапламак кын дәл.

$$\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}.$$

750. Гой, $AD=a$, $BD=b$ болсун (120-нжи чызгы). D нокат аркалы AC ве BC тарапларa параллел гөни чызыклары гечирип, BDK ве ADL үчбурчлуклары аларыс. Гой, $CK=x$ болсун. Онда $CK=KD=DL=LC=x$; $\triangle BDK\backsim\triangle ADL$. Диймек, $\frac{DK}{AL}=\frac{BD}{AD}$ я-да $\frac{x}{AL}=\frac{b}{a}$; $AL=\frac{ax}{b}$. Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хасиети боюнча



120-нжи чызгы.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{b}{a}\quad\text{я-да}\quad\frac{BC^2+AC^2}{AC^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2};$$

$$AC^2=\frac{a^2(a+b)^2}{a^2+b^2};\quad AL=AC-x;\quad AC^2=(AL+x)^2;\quad AC^2=\left(\frac{ax}{b}+x\right)^2.$$

Диймек,

$$\frac{a^2(a+b)^2}{a^2+b^2}=\frac{x^2(a+b)^2}{b^2};\quad x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Гөзленилйән мейдан

$$S=2x^2;\quad S=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

751. Берлен ABC үчбурчлугың BB_1 медианасыны довам эдип, $B_1D=BB_1$ кесими өлчәп гоялың ве D нокады A ве C депелер билен бирлешдирелиң (121-нжи чызгы). AGC үчбурчлукдан $AG+GC>AC$ аларыс.

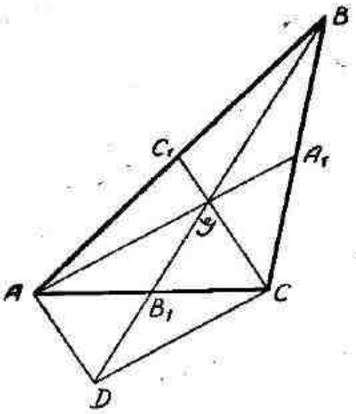
Эдил шонуң ялы, BGC үчбурчлукдан $BG+GC>BC$ аларыс.

Инди AGB үчбурчлукдан ашакдакыны аларыс:

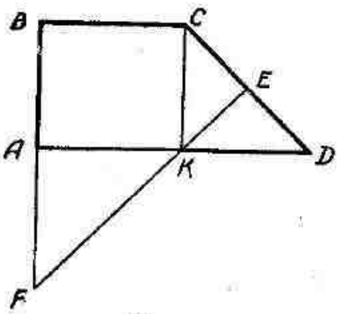
$$AG+BG>AB.$$

Ахыркы үч деңсизликлери члениме-член гошуп,

$$AG+BG+CG>\frac{AB+BC+AC}{2}.$$



121-нжи чызгы.



122-нжи чызгы.

я-да

$$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c>$$
$$>\frac{AB+BC+AC}{2},$$

я-да

$$m_a+m_b+m_c>\frac{3}{4}(AB+$$
$$+BC+AC)$$

аларыс. ш. с. т. э.

Меселәниң икинжи ярымындакы тассыкламаны субут этмек үчин BCD үчбурчлуга гарайлың. Шол үчбурчлукдан $BC+CD>BD$ я-да $BC+$ $+AB>2m_b$ аларыс.

Шоңуң ялы эдип, $AB+$ $+AC>2m_a$ ве $BC+AC>2m_c$ аларыс.

Ахыркы үч деңсизлиги членме-член гошуп, m_a+m_b+ $+m_c<AB+BC+AC$ аларыс. ш. с. т. э.

752. Меселәниң шертине гөрә $\angle ADC=45°$ (122-нжи чызгы) Трапецияның C депесинден AD тарапа перпендикуляр индерелиң. Гой, шол перпендикуляр AD тарап билен K нокатда кесишсин. Онда алнан CKD үчбурчлук гөнүбурчлы деңянлы үчбурчлук болар, ягны $DK=KC$. Диймек, шол үчбурчлугың K депесинден CD тарапына индерилен перпендикуляр шол тарапың ортасындан гечмели. Шейлеликде, CD тарапын E ортасындан оңа галдырылан перпендикуляр ве C депеден AD тарапа индерилен перпендикуляр AD тарапы шол бир K нокатда кесйәрлер.

AKF үчбурчлук гөнүбурчлы деңянлы үчбурчлукдыр, чүнки

$$\angle AKF=\angle DKE=\angle KDE=45°,$$

ягны $AF=AK$.

Гөзленилйән BF кесими тапалың:

$$BF=BA+AF=CK+AK=DK+AK=AD=30\ см.$$

Жогабы: 30 *см.*

753. Гой, берлен трапеция $ABCD$ болсун (123-нжи чызгы). AB ве DC тараплары довам эдип, K нокады аларыс. Меселәниң шертине гөрә

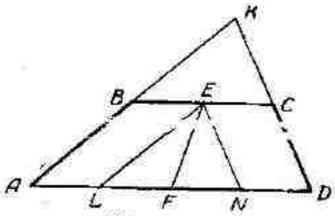
$$\angle AKD=90°.$$

Гой, E ве F нокатлар дегишлиликде BC ве AD эсасларың орталары болсун. E нокат аркалы BA ве CD кесимлере параллел EL ве EN кесимлери гечирелиң. Алнан LEN үчбурчлугың LEN бурчы гөнүдир. Белли болшы ялы, гөнүбурчлы үчбурчлугың гөни бурчуның депесинден чыкан медиана гипотенузаның ярысына деңдир, ягны $EF=LF=FN=\frac{1}{2}LN$. Инди $AL=BE=\frac{b}{2}$ ве $DN=CE=\frac{b}{2}$.

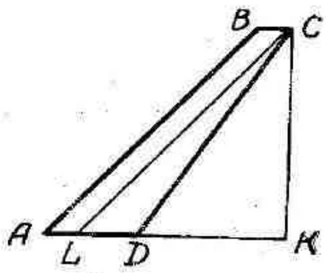
Диймек,

$$LN=AD-AL-DN=a-$$
$$-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=a-b.$$

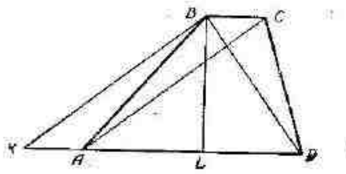
Шейлеликде, $EF=\frac{a-b}{2}$.



123-нжи чызгы.



124-нжи чызгы.



125-нжи чызгы.

754. Гой, $ABCD$ трапецияда $AB:BC:CD:DA=29:3:25:9$ болсун (124-нжи чызгы). Онда $AB=29x$; $BC=3x$; $CD=25x$; $DA=9x$ аларыс. Трапецияның C депесинден $CL\parallel BA$ эдип, CL кесими гечирелиң. Онда $AL=$ $=BC=3x$ ве $DL=AD-AL=$ $6x$ аларыс. DCL үчбурчлугың периметри $6x+29x+25x=60x$ болар. Шол үчбурчлугың мейданы

$$S=\sqrt{30x\cdot 24x\cdot 5x\cdot x}=60x^2.$$

Икинжи тарапдан, шол үчбурчлугың мейданы $S=\frac{1}{2}\cdot DL\cdot$ $\cdot CK$ я-да $60x^2=\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot CK$. Бу ерден $CK=20x$.

$ABCD$ трапецияның мейданы

$$S_1=\frac{AD+BC}{2}\cdot CK=\frac{9x+3x}{2}\cdot 20x=120x^2.$$

Диймек, $120x^2=480$; $x^2=4$; $x=2$.

Шейлеликде, трапецияның тараплары:

$$AB=58\ см;\quad BC=6\ см;\quad CD=50\ см;\quad DA=18\ см.$$

755. Меселәниң шертине гөрә

$$AC = 20\ см,\quad BD = 15\ см \quad \text{ве} \quad BL \perp AD$$

хем-де $BL = 12\ см$ (125-нжи чызгы). B депеден AC диагонала параллел эдип, BK кесимини гечирелиң. Онда $AK = BC$ аларыс. DBL гөнүбурчлы үчбурчлукда

$$DL^2 = BD^2 - BL^2 = 15^2 - 12^2 = 81;\quad DL = 9\ см.$$

KBL гөнүбурчлы үчбурчлукда

$$KL^2 = AB^2 - BL^2 = AC^2 - BL^2 = 20^2 - 12^2 = 32\cdot 8;\quad KL = 16\ см.$$

$ABCD$ трапецияның мейданы $S = \dfrac{AD + BC}{2}\cdot BL$, я-да

$$S = \frac{AD + AK}{2}\cdot BL = \frac{KD}{2}\cdot BL = \frac{KL + LD}{2}\cdot BL = \frac{16 + 9}{2}\cdot 12 = 150\ см^2.$$

Жогабы: 150 $см^2$.

756. $ABCD$ трапецияда (126-нжы чызгы) $BE = BK$; $AE = AL$. Диймек,

$$AB = AL + BK = \frac{AD + BC}{2}.\quad AN = AL - LN = AL - BK = \frac{AD - BC}{2}.$$

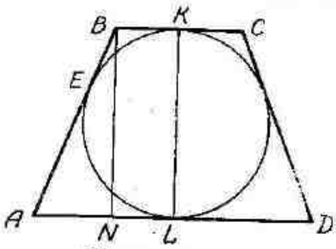
ABN үчбурчлукдан

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{\left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2} =$$

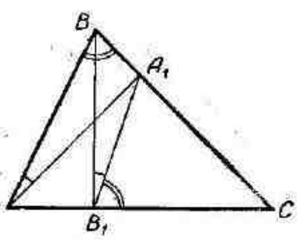
$$= \sqrt{\frac{AD^2 + 2AD\cdot BC + BC^2}{4} - \frac{AD^2 - 2AD\cdot BC + BC^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4AD\cdot BC}{4}} = \sqrt{AD\cdot BC}.$$

Диймек, $BN^2 = AD\cdot BC$ я-да $\dfrac{AD}{BN} = \dfrac{BN}{BC}$. Ш. с. т. э.



126-нжы чызгы.



127-нжи чызгы.

757. Берлен ABC үчбурчлугың A_1B_1C үчбурчлуга меңзеш болмагы үчин A_1BA бурч A_1B_1C бурча дең болмалыдыр. (127-нжи чызгы). Эгер ABA_1B_1 дергбурчлугың AB тарапыны диаметр эдип, төверек чызсак, онда шол төверек A_1 ве B_1 нокатларың үстүнден гечер, чүнки $\angle AA_1B = 90°$ ве $\angle AB_1B = 90°$.

Шол төвереге гаранда BAA_1 ве BB_1A_1 бурчлар эдил шол бир A_1B дуга дaянярлар. Диймек, $\angle BAA_1 = \angle BB_1A$. Инди

$$\angle BAA_1 + \angle ABA_1 = \angle BB_1A_1 + \angle AB_1C = 90°.$$

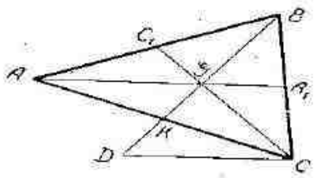
Диймек, $\angle ABA_1 = \angle A_1B_1C$.

Шейлеликде, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C$, ш. с. т. э.

758. ABC үчбурчлугың медианаларыны гечирип, соңра BK медиананың довамында $KD = GK$ кесими өлчәп гойярыс. (128-нжи чызгы). Алнан CGD үчбурчлугың тараплары

$$DG = \frac{2}{3}BK;\quad CG = \frac{2}{3}CC_1;$$

$$AG = \frac{2}{3}AA_1.$$



128-нжи чызгы.

Тараплары ABC үчбурчлугың AA_1, BK, CC_1 медианаларына дең болан үчбурчлугың мейданыны S билен белләсек, CGD үчбурчлугың мейданыны S_1 билен белләсек, онда

$$\frac{S}{S_1} = \frac{9}{4} \quad \text{я-да} \quad S = \frac{9}{4}S_1$$

аларыс.

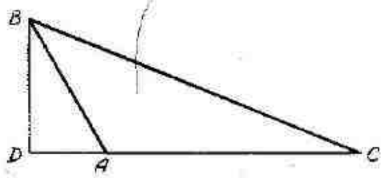
Эгер ABC үчбурчлугың мейданыны S_2 билен белләсек, онда, икинжи тарапдан, $S_1 = \dfrac{1}{3}S_2$ я-да $S_2 = 3S_1$ аларыс.

Шейлеликде,

$$\frac{S_2}{S} = \frac{3S_1}{\frac{9}{4}S_1} = \frac{4}{3}.$$

Жогабы: $\dfrac{4}{3}$.

759. Гой, ABC үчбурчлук (129-нжы чызгы) берлен үчбурчлук болсун. Меселәниң шертине гөрә $AB = a$, $AC = a + d$, $BC = a + 2d$ ве $\angle BAC = 120°$. B депеден CA тарапың довамына перпендикуляр индерелиң. Онда



129-нжы чызгы.

$\angle DBA = 30°$ болар ве $AD = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ болар. Эгер үчбурчлугың күтек бурчуны гаршысында ятан тарапы бaрадакы теоремaны уланcак, онда

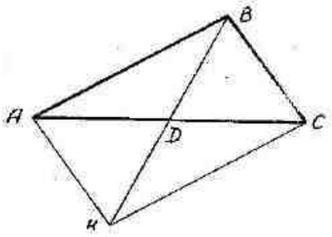
$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AD$, я-да $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot \frac{AB}{2}$ я-да

$$(a + 2d)^2 = (a + d)^2 + a^2 + (a + d)\,a, \text{ я-да } 3d^2 + ad - 2a^2 = 0$$

аларыс. Бу ерден $d = \frac{2}{3}a$.

Диймек, үчбурчлугың бир тарапы a болса, икинҗи тарапы $a + \frac{2}{3}a = \frac{5a}{3}$ ве үчүнҗи тарапы $a + \frac{4a}{3} = \frac{7a}{3}$ болар.

Шейлеликде, үчбурчлугың тарапларының гатнашыгы $\frac{3a}{3} : \frac{5a}{3} : \frac{7a}{3}$ ялы я-да $3:5:7$ ялы болар.



130-нҗы чызгы.

760. Гой, ABC үчбурчлукда BD онуң AC тарапа гечирилен медианасы болсун (130-нҗы чызгы). BD кесими довам эдип, $BD = DK$ кесими өлчәп гоялың. K нокады A ве C депелер билен бирлешдирелиң. Нетиҗеде, алнан $ABCK$ дөртбурчлук параллелограм болар. Белли болшы ялы, параллелограмың диагоналларының квадратларының җеми онуң дөрт тарапының квадратларының җемине дендир, ягны $AC^2 + BK^2 = AB^2 + BC^2 + CK^2 + KA^2$ я-да $b^2 + (2m_b)^2 = c^2 + a^2 + c^2 + a^2$, я-да $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$. Эдил шонуң ялы эдип, $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$ тапарыс.

Шейлеликде,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

аларыс.

761. Белли болшы ялы,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

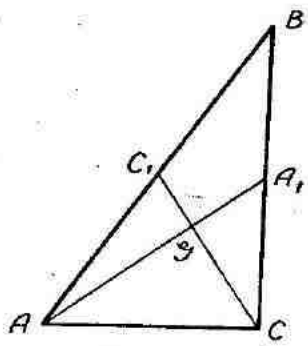
Шу деңликлериң ики бөлегини-де квадрата гөтерип ве шол деңликлери членме-член гошуп,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)$$

я-да $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

аларыс.

Шейлеликде, $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$ аларыс.



131-нҗи чызгы.

762. Гой ABC үчбурчлук берлен үчбурчлук болсун (131-нҗи чызгы). Меселәниң шертине гөрә $BC = a$, $AB = c$ ве $\angle AGC = 90°$.

AGC үчбурчлугың AC тарапыны тапмак үчин Пифагоруң теоремасыны уланарыс:

$AG^2 + CG^2 = AC^2$, я-да $\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = AC^2$, я-да $4m_a^2 +$

$$+ 4m_c^2 = 9AC^2.$$

Эмма

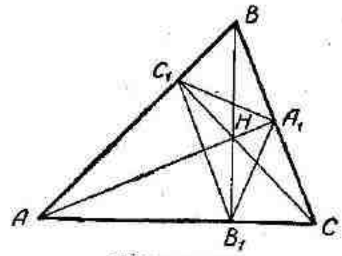
$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Диймек,

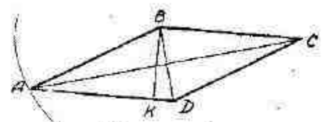
$9 \cdot AC^2 = a^2 + 4b^2 + c^2$, я-да

$9b^2 = a^2 + 4b^2 + c^2$, я-да

$5b^2 = a^2 + c^2$; $b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{5}}$.



132-нҗи чызгы.



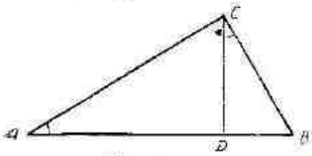
133-нҗи чызгы.

763. Эгер AB тарапы диаметр эдип төверек чызсак, онда шол төверек A_1 ве B_1 нокатларың үстүнден гечер (132-нҗи чызгы), чүнки $\angle BA_1A = 90°$ ве $\angle AB_1B = 90°$. Инди $\angle BAA_1 = \angle BB_1A_1$, чүнки олар эдил шол бир дуга даянярлар. $\angle BAA_1 + \angle ABA_1 = 90°$ ве $\angle C_1CB + \angle ABC = 90°$. Диймек, $\angle BAA_1 = \angle C_1CB$. Эгер BC тарапы диаметр эдип төверек чызсак, онда шол төверек C_1 ве B_1 нокатларың үстүнден гечер, чүнки $\angle BC_1C = 90°$ ве $\angle CB_1B = 90°$. Инди $\angle BCC_1 = \angle BB_1C_1$ болар, чүнки олар эдил шол бир дуга даянярлар.

Шейлеликде, $\angle BAA_1 = \angle BB_1A_1 = \angle C_1CB = \angle BB_1C_1$, ягны $\angle BB_1A_1 = \angle BB_1C_1$, ш. с. т. э.

764. Берлен ромбуң B депесинден опун AD тарапына бейиклик гечирелиң (133-нжи чызгы). Онда $BK=\frac{1}{2}AB$ аларыс, чүнки $\angle BAK=30°$.

$ABCD$ ромбуң мейданыны, биринжи тарапдан $S=AD\cdot BK=AD\cdot\frac{AB}{2}$ ялы, икинжи тарапдан $S=AC\cdot OD=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ ялы хасапламак мүмкиндир. Диймек, $AD\cdot AB=AC\cdot BD$. Эмма $AD=AB=a$. Онда $a^2=AC\cdot BD$ я-да $\frac{AC}{a}=\frac{a}{BD}$, ш. с. т. э.



134-нжи чызгы.

765. Гой, ABC үчбурчлук берлен гөнүбурчлы үчбурчлук (134-нжи чызгы), ве CD гөни бурчуң депесинден чыкан бейиклик болсун. Чызгыдан гөрнүши ялы, $\angle BCD=\angle DAC$, чүнки оларың хер бири эдил шол бир ACD бурчы $90°$ доядурярлар. Диймек, $\triangle ADC \backsim \triangle CDB$, онда $\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{CD}$ аларыс. Бу ерден $CD^2=AD\cdot DB$; $\triangle ACD \backsim \triangle ACB$, диймек, $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

$\triangle DCB \backsim \triangle ACB$, диймек, $\frac{DB}{BC}=\frac{BC}{AB}$. Шу ахыркы ики деңликден

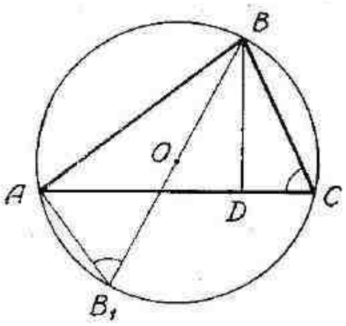
$$AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{b^2}{c},\quad BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{a^2}{c}$$

аларыс.

Инди

$$CD^2=AD\cdot BD=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{a^2}{c} \text{ я-да } CD=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

766. Гой, ABC үчбурчлук берлен үчбурчлук болсун (135-нжи чызгы). Шол үчбурчлугың BD бейиклигини гечирелиң. Сонра үчбурчлугың дашындан чызылан теверегиң BB_1 диаметрини гечирелиң. B_1 нокады A нокат билен бирлешдирип, ABB_1 гөнүбурчлы үчбурчлук аларыс. Шол үчбурчлук билен BDC үчбурчлук меңзешдирлер, чүнки $\angle AB_1B=\angle ACB$ (олар эдил шол бир дуга даянярлар).



135-нжи чызгы.

Үчбурчлукларың меңзешликлеринден

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BB_1}{BC} \text{ я-да}$$

$$BD=\frac{AB\cdot BC}{BB_1}=\frac{c\cdot a}{2R},$$

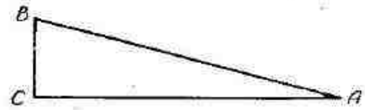
ABC үчбурчлугың мейданы $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}b\cdot BD$. BD бейиклигиң бахасыны иң ахыркы деңликде гоюп, $S=\frac{1}{2}b\cdot\frac{ac}{2R}=\frac{abc}{4R}$ я-да $R=\frac{abc}{4S}$ аларыс.

Шейлеликде, $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

767. Гой, ABC гөнүбурчлы үчбурчлугың $AB=c$, $\angle BAC=15°$ болсун (136-нжы чызгы). Онда $BC=c\cdot\sin 15°$ ве $AC=c\cdot\cos 15°$. Шу деңликлери член-член көпелдип, $BC\cdot AC=c^2\cdot\sin 15°\cdot\cos 15°$ аларыс.

ABC үчбурчлугың мейданы

$$S=\frac{BC\cdot AC}{2}.$$

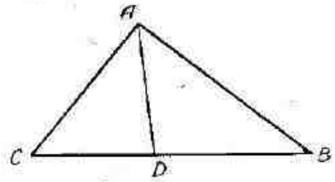


136-нжы чызгы.

Диймек,

$$S=\frac{c^2\cdot\sin 15°\cdot\cos 15°}{2}=$$
$$=\frac{c^2\cdot 2\sin 15°\cdot\cos 15°}{4}=$$
$$=\frac{c^2\cdot\sin 30°}{4}=\frac{c^2}{8}.$$

Жогабы: $S=\frac{c^2}{8}$.



137-нжи чызгы.

768. Үчбурчлугың ички бурчуның биссектрисасының хасиети барадакы теореманы уланып, $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$ (137-нжи чызгы) аларыс.

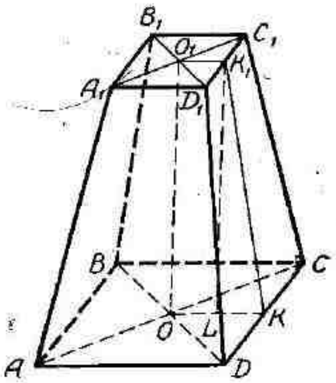
Эгер $AC=b$; $AB=c$; $CD=n$; $DB=m$, билен белгилесек, онда $\frac{n}{m}=\frac{b}{c}$ аларыс. Шу деңлигиң хер бөлегине 1 гошуп,

$$\frac{m+n}{m}=\frac{b+c}{c} \text{ я-да}$$

$$\frac{a}{m}=\frac{b+c}{c}$$

аларыс. Бу ерден $m=\frac{ac}{b+c}$.

Инди $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$ пропорциядан $\frac{m+n}{n}+\frac{b+c}{b}$ аларыс. Бу ерден $n=\frac{bc}{b+c}$.



138-нжи чызгы.

769. Меселәниң шертине гөрә $ABCD$ квадратың мейданы 324 *см²*, $A_1B_1C_1D_1$ квадратың мейданы 16 *см²*, AA_1C_1C трапецияның мейданы 88 *см²* дендир (138-нжи чызгы).

Диймек, $DC = 18$ *см*, $D_1C_1 = 4$ *см*.

AA_1C_1C трапецияның мейданы

$$S = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot OO_1,$$

эмма $AC = 18\sqrt{2}$ *см*, $A_1C_1 = 4\sqrt{2}$ *см*. Диймек, $88 = \frac{18\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot OO_1$, бу ерден $OO_1 = \frac{88}{11\sqrt{2}}$ я-да $OO_1 = 4\sqrt{2}$ *см*. Инди $LK = OK - OL = 9 - 2 = 7$; $LK = 7$ *см*.

K_1LK үчбурчлукдан

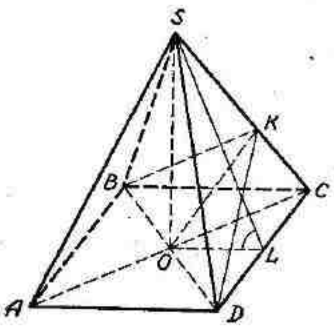
$(K_1K)^2 = (LK)^2 + (K_1L)^2$ $(K_1L = OO_1)$, я-да $(K_1K)^2 = 7^2 + (4\sqrt{2})^2$;

$$(K_1K)^2 = 81; \quad K_1K = 9 \text{ см}.$$

Кесик пирамиданың гапдал үсти

$$S_{\text{гапд.}} = \frac{DC + D_1C_1}{2} \cdot K_1K \cdot 4 = \frac{18 \cdot 4}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 396.$$

Диймек, $S_{\text{гапд.}} = 396$ *см²*.



139-нжы чызгы.

770. Гой, $DL = x$ болсун (139-нжы чызгы), онда $OD = x\sqrt{2}$ болар.

OKD үчбурчлукдан $OD^2 + OK^2 = KD^2$ я-да $2x^2 + \left(\frac{KD}{2}\right)^2 = KD^2$, я-да $KD^2 = \frac{8x^2}{3}$ аларыс.

DKC үчбурчлукдан $KC^2 = DC^2 - KD^2$ я-да

$$KC^2 = (2x)^2 - \frac{8x^2}{3}; \quad KC^2 = \frac{4x^2}{3};$$

$$KC = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

DSK үчбурчлукдан

$SD^2 = SK^2 + DK^2$, я-да

$$SD^2 = (SC - KC)^2 + \frac{8x^2}{3},$$

я-да

$$SD^2 = \left(SD - \frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8x^2}{3}; \quad SD^2 = SD^2 - \frac{4x \cdot SD}{\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^2}{3};$$

$$\frac{4x}{\sqrt{3}} \cdot SD = 4x^2; \quad SD = x\sqrt{3}.$$

OSD үчбурчлукдан $SD^2 = OD^2 + OS^2$, я-да

$(x\sqrt{3})^2 = (DL^2 + OL^2) + H^2$, $3x^2 = x^2 + x^2 + H^2$; $H^2 = x^2$; $H = x$.

Шейлеликде, $DL = OL = OS$. Диймек, OSL үчбурчлукда $OS = OL$.

Инди OSL үчбурчлукдан $OS^2 + OL^2 = SL^2$, я-да $2 \cdot OL^2 = SL^2$; $SL^2 = 2x^2$; $SL = x\sqrt{2}$.

DSC үчбурчлугың мейданы

$$S_1 = \frac{1}{2} DC \cdot SL = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x\sqrt{2}; \quad S_1 = x^2\sqrt{2}.$$

Меселәниң шертине гөрә

$$\frac{18\sqrt{2}}{4} = x^2\sqrt{2}; \quad x^2 = \frac{9}{2}.$$

Пирамиданың эсасының мейданы

$$S_2 = 4x^2 = 4 \cdot \frac{9}{2} = 18.$$

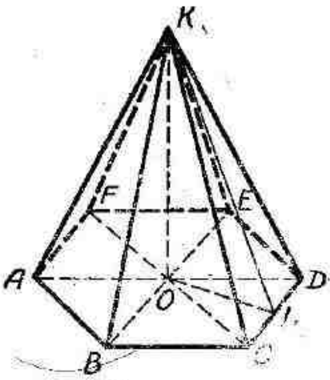
Җогабы: 18 *см²*.

771. Эгер KCD үчбурчлугың мейданыны S билен белгилесек (140-нжы чызгы), онда меселәниң шертине гөрә OCD үчбурчлугың мейданы $\frac{S}{2}$ болар. Диймек,

$$S = \frac{1}{2} CD \cdot KL$$

ве $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} CD \cdot OL$.

Ахыркы ики деңлиги членме-член бөлүп, $\frac{KL}{OL} = 2$ я-да $KL = 2 \cdot OL$ аларыс.



140-нжы чызгы.

OLC үчбурчлукдан $OL^2 + CL^2 = OC^2$, я-да $OL^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = CD^2$ я-да $OL^2 = \frac{3 \cdot CD^2}{4}$, бу ерден $CD = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot OL}{3}$.

Инди OKL үчбурчлукдан $OK^2 + OL^2 = KL^2$, я-да $H^2 + OL^2 = 4 \cdot OL^2$, я-да $OL = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Диймек, $CD = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} H$.

Шейлеликде,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OL$$

деңликден

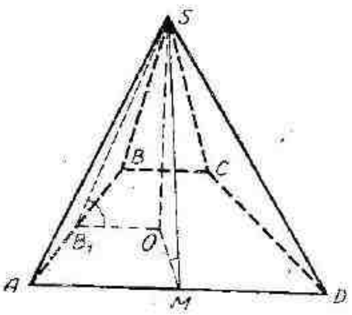
$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} H \cdot \frac{H}{\sqrt{3}} \text{ я-да } S = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot H^2$$

аларыс.

Пирамиданың долы үсти $6S + 3S = 9S$. Диймек, гөзленилйән үст

$$9 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} H^2 = \frac{6}{\sqrt{3}} H^2 = 2\sqrt{3} H^2.$$

Жогабы: $2\sqrt{3} H^2$.



141-нжи чызгы.

772. Пирамиданың эсасындакы икигранлы бурчлар бири-бирине дең болany себәпли, O нокат трапецияның тарапларындан дең узаклыкда ятыр (141-нжи чызгы). Башгача айданымызда, O нокат $ABCD$ трапецияның ичинден чызылан төверегиң меркезидир.

Төверегиң дашындан чызылан дөртбурчлугың хасиетине гөрә

$$AD + BC = AB + CD \text{ я-да}$$

$$AD + 13 = 40 + 25; \quad AD = 52.$$

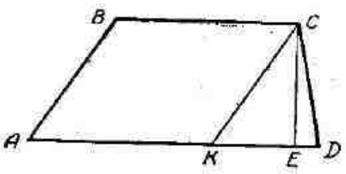
$ABCD$ трапецияның мейданыны тапмак үчин $CK \parallel AB$ эдип, CK кесими гечирелин (142-нжи чызгы). KCD үчбурчлугың тараплары:

$$CK = 20 \text{ см}, \quad CD = 25 \text{ см},$$

$$KD = AD - BC = 52 - 13 = 39 \text{ см}.$$

Шол үчбурчлугың мейданы

$$S_{KCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{52 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 27} = 468 \text{ см}^2.$$



142-нжи чызгы.

Шол үчбурчлугың мейданыны ашакдакы ялы хем хасапламак мүмкиндир:

$$S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CE, \quad (\text{бу ерде } CE \perp KD),$$

я-да

$$468 = \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot CE; \quad CE = 24 \text{ см}.$$

Диймек, $ABCD$ трапецияның мейданы

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CE = \frac{13 + 52}{2} \cdot 24 = 780. \quad S_{ABCD} = 780 \text{ см}^2.$$

Инди пирамиданың гапдал үстүни хасаплалың:

$$S_{\text{гапд. үст}} = l \cdot \frac{13 + 25 + 40 + 52}{2} = 65 \cdot l,$$

бу ерде l — пирамиданың апофемасыдыр.

Диймек,

$$l^2 = h^2 + r^2; \quad l^2 = 5^2 + 12^2; \quad l = 13 \text{ см}.$$

$$S_{\text{гапд. үст}} = 65 \cdot 13 = 845 \text{ см}^2.$$

Шейлеликде, пирамиданың долы үсти

$$S_{\text{долы үст}} = 780 + 845 = 1625;$$

Жогабы: 1625 $см^2$.

773. ADD_1A_1 ромбуң (143-нжи чызгы) мейданы

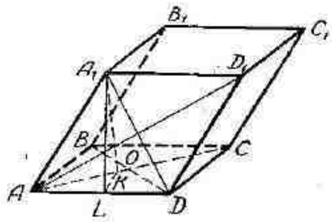
$$S_1 = \frac{1}{2} AD_1 \cdot A_1D = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24.$$

$$S_1 = 24 \text{ см}^2.$$

Диймек, параллелепипедиң эсасының мейданы $S_{ABCD} = S_1 = 24 \text{ см}^2$.

ADD_1A_1 ромбуң A_1L бейиклигини тапалың: $\frac{1}{2} AD \cdot A_1L = 12$ боланы себәпли,

$$A_1L = \frac{24}{5} \text{ см}.$$



143-нжи чызгы.

Диймек,

$$\triangle AKL \sim \triangle AOD.$$

$$\frac{AL}{KL} = \frac{AO}{OD} \text{ я-да } \frac{AL}{KL} = \frac{4}{3},$$

эмма

$$AL = \sqrt{AA_1^2 - A_1L} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}.$$

AA_1 кесими $AA_1 = AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ деңликден тапярыс.

Инди $KL = \frac{3 \cdot AL}{4}$ деңликден $KL = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$ тапярыс.

Параллелепипедиң A_1K бейиклигини тапалың:

$$A_1K = \sqrt{A_1L^2 - KL^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 - \left(\frac{21}{20}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5} + \frac{21}{20}\right)\left(\frac{24}{5} - \frac{21}{20}\right)} = \sqrt{\frac{117}{20} \cdot \frac{75}{20}} = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Диймек,

$$A_1K = \frac{3}{4}\sqrt{39} \text{ см}.$$

Параллелепипедиң гөврүми

$$v = S_{ABCD} \cdot A_1K = 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{39} = 18\sqrt{39}.$$

Жогабы: $18\sqrt{39}$ $см^3$.