FUNKSIÝANYŇ EKSTREMUMYNY ULANYP, DEŇSIZLIKLERI SUBUT ETMEK

B.Sultanow, G.Ýolamanow

FUNKSIÝANYŇ EKSTREMUMYNY ULANYP DEŇSIZLIKLERI SUBUT ETMEK

Orta we ýokary okuw mekdepler üçin okuw gollanmasy

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

2024

Begli Sultanow we Gadam Ýolamanow

Funksiýanyň ekstremumyny ulanyp, deňsizlikleri subut etmek. Orta we ýokary okuw mekdepler üçin okuw gollanmasy. −37 sah.

Gollanma matematikanyň esasy düşünjeleriniň biri bolan “Deňsizlikler” baradaky düşünjelerini giňeltmek we kämilleşdirmek isleýän okuwçylara niýetlenendir. Gollanmada umumybilim berýän orta mekdepleriň matematika dersine degişli okuw kitaplarynda hödürlenmedik, has çylşyrymly deňsizlikleriň birnäçesi subut edilip görkezilendir. Gollanmada funksiýanyň ekstremumyny ulanyp, dürli ýyllarda hödürlenen döwlet we halkara bäsleşikleriniň ýumuşlarynyň çözülişleri hödürlenendir. Bu gollanmada hödürlenýän usullar ilkinji nobatda matematikadan ders bäsleşiklerine we giriş synaglaryna taýýarlanýan okuwçylara niýetlenendir.

Bu gollanmada hödürlenýän usullary mugallymlar gyzyklanma sapaklarda, ýokary synp okuwçylary we talyplar bäsleşiklere taýýarlanmakda goşmaça maglumat hökmünde peýdalanyp bilerler.

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
SERDAR BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ
DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Giriş

Gahryman Arkadagymyz
Gurbanguly Berdimuhamedow:

Uly-kiçi her bir işde kaýyldyr ol gullugyna,
Külli türkmen halky üçin ömür janly tildigine,
Alynmyşdyr asmanlaryň keramatly belligine,
Pähim-paýhas ummany Magtymguly Pyragy.

Berkarar döwletiň täze eýýamynyň Galkynyşy döwründe Hormatly Prezidentimiz Gahryman Arkadagly Serdar Berdimuhamedowyň baştutanlygynda ynamly gadamlar bilen ösüşiň täze belentliklerine tarap barýan ýurdumyzda Watanymyzyň gülläp ösmeginiň we halkymyzyň bagtyýar durmuşynyň kepili bolan düýpli özgertmeler üstünlikli durmuşa geçirilýär. Bellenilişi ýaly, häzirki wagtda Arkadagly Gahryman Serdarymyzyň «Watan diňe halky bilen Watandyr! Döwlet diňe halky bilen döwletdir!» diýen parasatly taglymatyna laýyklykda, berk bedenli, sagdyn ruhly, giň dünýägaraýyşly, ruhubelent nesli kemala getirmek babatda alnyp barylýan işler dünýä nusgalykdyr.

Gahryman Arkadagly Serdarymyz türkmen ýaşlarynyň ýiti zehinine, ylmy işlerine, täsin ukyp-başarnyklaryna aýratyn üns çekip: «Ýaşlar mähriban halkymyzyň, eziz Watanymyzyň beýik geljegini gurujylardyr, jemgyýetimiziň işjeň bölegidir. Eziz Diýarymyzyň güýç-kuwwaty, abraý-mertebesi we aýdyň geljegi bolan ýaşlar biziň alyp barýan işlerimize, ýurdumyzyň ösüşlerine öz mynasyp goşantlaryny goşýarlar. Bu günki gün ylym-bilim, sport, medeniýet, sungat ugurlarynda dünýäde uly üstünlikleri gazanýan türkmen ýaşlarynyň döwletimiz tarapyndan özlerine bildirilýän belent ynamy ödeýändiklerine buýsanýarys...» diýip belleýär. Arkadagly Gahryman Serdarymyzyň türkmen ýaşlaryna bildirýän belent ynamy-da, olara bolan çäksiz beýik söýgüsi-de ýurdumyzda Gahryman Arkadagymyzyň esaslandyran ýaşlar syýasatynyň dowamat dowamy bolup, barha rowaçlanýandygyny aýan edýär. Bu bolsa ýaş nesilde ylym-bilimi düýpli özleşdirmäge, gözleg-taslama işlerini ýerine ýetirmäge bolan höweslerini barha artdyrýar.

Deňsizlikler düşünjesi matematikanyň özen düşünjeleriniň biri bolup, olary subut etmegiň dürli usullary bardyr: Koşiniň deňsizligi, Berulliniň deňsizligi, Nýutonyň deňsizligi, Çebişowyň deňsizligi we ş.m. Gollanmamyzda funksiýanyň ekstremumyny ulanmak bilen deňsizlikleri subut etmeklige seredýäris. Deňsizlikleri subut etmeklik käbir ýagdaýlarda belli bir kynçylyklary döredýär. Köp üýtgeýjili funksiýanyň ekstremumyny ulanmak netijesinde, deňsizlikleri subut etmek has ýeňilleşýär, hatda beýleki usullarda subut etmesi kyn ýa-da mümkin bolmadyk deňsizlikleri hem şu usul bilen subut edip bolýar.

Gollanmamyzda umumybilim berýän orta mekdepleriň matematika dersine degişli okuw kitaplarynda hödürlenmedik, dürli derejedäki bäsleşiklerde berlen has kyn, çylşyrymly deňsizlikleriň birnäçesini subut edip görkezdik. Bu gollanmada hödürlenýän usullar ilkinji nobatda matematikadan ders bäsleşiklerine we giriş synaglaryna taýýarlanýan okuwçylara niýetlenendir.

Gollanmadaky subut edilen ähli deňsizlikler öň belleýşimiz ýaly dürli ýyllaryň ders bäsleşiklerinde hödürlenen meseleleriň sanawyndan saýlanyp alyndy. Ýöne deňsizlikleri subut etmekde bu usuly ulanmak üçin, ilki köp üýtgeýänli funksiýalaryň ekstremum bahalaryny tapmagy başarmaly. Ol usullaryň düýp manysyny berýän teoremalar we olaryň subutlary gollanmamyzyň düýp özenini düzýär. Gollanmamyzda getirilen delillere esaslanyp “Funksiýanyň ekstremumyny ulanyp deňsizlikleri subut etmek” atly temany saýlap aldyk.

Gollanma girişden, iki bapdan, birinji bap üç bölümçeden, ikinji bap iki bölümçeden, netijeden, peýdalanylan edebiýatlaryň sanawyndan, goşundylardan ybarat bolup, umumy 37 sahypa.

Girişimizde saýlanyp alynan gollanmanyň temasynyň wajyplygyny we döwrebaplygyny esaslandyrdyk.

Birinji bap “Köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyşy” bolup, onda: köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyşy baradaky teoremalaryň subutlary; deňsizlikleri subut etmekde köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň ulanylyşy; iki näbellili ikinji derejeli funksiýalaryň ekstremum bahalaryny tapmak üçin C++ dilindäki programmanyň düzülişi; ýaly bölümçelere degişli maglumatlar logiki yzygiderlikde beýan edildi.

Ikinji bap “Köp üýtgeýän ululykly funksiýalarda şertli ekstremumy kesgitlemek” diýlip altandyrylýar. Bu bapda “Şertli ekstremumy tapmaklyga degişli teoremanyň subudy” we “Funksiýanyň şertli ekstremumyny ulanyp, deňsizlikleri subut etmek” ýaly soraglara seretdik hem-de degişli mysallaryň çözülişlerini getirmek bilen teswirledik.

Gollanmanyň soňunda öňe sürülýän usulyň ähmiýetli taraplary baradaky netijä geldik.

Peýdalanylan edebiýatlaryň sanawyny ylmy iş ýazmakdan edilýän talaplar esasynda ýazdyk.

Iň soňunda gollanmanyň mazmunynyň, beýanynyň has düşnükli bolmagyny niýetläp degişli goşundylary getirdik.

I Bap. Köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyşy

1.1. Köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyşy baradaky teoremanyň subudy

Ol teoremalar şulardan ybarat:

Teorema 1: Eger funksiýa $z = f(x, y)$ $x = x_0$ we $y = y_0$ nokatlarda ekstremum bahany alýan bolsa, onda funksiýadan *x-a* we *y-a* görä alnan önümleri şol nokatlarda nola deňdir ýa-da funksiýanyň ekstremum bahasy ýokdur. (Subudy: 7-nji goşundy.)

Teorema 2: Eger *M(x₀,y₀)* nokat $z = f(x, y)$ funksiýanyň ekstremum nokady bolsa ýagny, $f'_x(x_0y_0) = 0$ we $f'_y(x_0y_0) = 0$ haçanda $x = x_0$ we $y = y_0$:

1) $f(x, y)$ funksiýa maksimum bahany alýar, haçanda:

$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0\ we\ f''_{xx}(x_0, y_0) < 0.$

2) $f(x, y)$ funksiýa minimum bahany alýar, haçanda:

$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0\ we\ f''_{xx}(x_0, y_0) > 0.$

3) $f(x, y)$ funksiýa minimum we maksimum bahalary kanagatlandyrmaýar, haçanda:

$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0$

4) Eger $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 = 0$ bolsa, onda funksiýanyň ekstremumy ýa bolup biler ýa-da bolup bilmez. (bu şertde köp gözlegi talap edýär).

Subudy:

Teýloryň formulasyny (subudy: 8-nji goşundy) ýazalyň, formulany şeýle özgerdeliň:

$x_0 = a;\ \ y_0 = b;\ \ x = x_0 + \Delta x;\ \ y = y_0 + \Delta y;$ Onda, formula:

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x f'_x(x_0, y_0) + \Delta y f'_y(x_0, y_0) +$

$+\frac{1}{2!}\left[\Delta x^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2\Delta x\Delta y f''_{xy}(x_0, y_0) + \Delta y^2 f''_{yy}(x_0, y_0)\right] + a\Delta p^3$; haçanda

$\Delta p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Şert boýunça $f_x\big(x_{0,}y_0\big) = 0$ we $f_y(x_0, y_0) = 0$ onda:

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\big(x_{0,}y_0\big) = \frac{1}{2!}\left[\Delta x^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2\Delta x\Delta y f''_{xy}(x_0, y_0) +\right.$

$\left.+\Delta y^2 f''_{yy}(x_0, y_0)\right] + a\Delta p^3;$

Goý, $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$; $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$; diýip belgiläliň.

$\left(\frac{\Delta x}{\Delta p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta p}\right)^2 = 1$ bolany üçin $\Delta x = \Delta p \cos y$ we $\Delta x = \Delta p \sin y$ çalşyp bileris.

Δf funksiýada ornuna goýup alarys:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[Acos^2y + 2B\sin y \cos y + Csin^2y] + a\Delta p^3; \quad \textbf{(1)}$$

Goý, $A \neq 0$ bolsun we (1) kwadrat ýaýdaky aňlatmany A-a köpeldip bölüp özgerdeliň:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[\frac{(Acosy + Bsiny)^2 + (AC - B^2)sin^2y}{A} + 2a\Delta p]; \quad (\mathbf{2})$$

1) Goý, $AC - B^2 > 0$ we $A < 0$ bolsun. (2)-nji formulada kwadrat ýaýyň içindäki drobyň sanawjysyndaky iki sany položitel aňlatmalar birlikde ikisi hem nola deň bolup bilmeýär. Birinji ýaý $tgy = -\frac{A}{B}$ emma ikinji ýaý $siny = 0$ bolanda bolýar. (Sebäbi $\frac{A}{B} = 0; A \neq 0$). A<0 bolany üçin drob otrisatel (nola deň bolmadyk). Onda droby -*m*^{2} diýip belgiläliň. Onda (2) $\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[-m^2 + 2a\Delta p]$, bu ýerde m $\Delta p - a$ garaşsyz, $a\Delta p \to 0$ haçanda $\Delta p \to 0$ bolanda. Onda Δp-niň has kiçi bahasynda şeýle bolar: $\Delta f < 0$; $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$. $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nokat (x_0, y_0) nokada has ýakyn. Onda $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ bolar, (x_0, y_0) nokat $f(x, y)$ funksiýanyň maksimumydyr.

2) Goý, $AC - B^2 > 0$ we $A > 0$ bolsun. Onda (2)-nji formulada kwadrat ýaýyň içindäki droby *m*^{2} diýip belgiläp bileris. Onda, $\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[m^2 + 2a\Delta p]$ ýa-da $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ bolar (x_0, y_0) nokat $f(x, y)$ funksiýanyň minimumydyr.

3.1) $AC - B^2 < 0$ we $A > 0$ bolanda:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[\frac{(Acosy + Bsiny)^2}{A} + \frac{(AC - B^2)sin^2y}{A} + 2a\Delta p];$$

kwadrat ýaýyň içindäki droblaryň biri položitel, beýlekisi otrisatel. Eger *siny=0* bolsa $\Delta f > 0$ funksiýa artýar. Eger $tgy = -\frac{A}{B}$ bolsa $\Delta f < 0$ funksiýa kemelýär.

3.2) Eger, $AC - B^2 < 0$ we $A < 0$ bolanda-da, funksiýa 3.1-däki ýaly maksimum we minimum baha alyp bilmeýär.

3.3) $AC - B^2 < 0$ we $A = 0$ bolanda, $(B \neq 0)$ (1)-däki formula şu görnüşinde bolar: $\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[siny(2Bcosy + Csiny) + 2a\Delta p]$; Δf funksiýa y-e görä alamatyny üýtgedýär. Şonuň üçin funksiýa A bagly bolmazdan $AC - B^2 < 0$ bolanda (x_0, y_0) nokatda funksiýa maksimumy hem minimumy hem alyp bilmez.

4) $AC - B^2 = 0$ bolanda bu ýagdaýda (2)-däki formuladan:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(\Delta p)^2[\frac{(Acosy + Bsiny)^2}{A} + 2a\Delta p];$$

bu ýerde drobuň položitel ýa-da otrisateldigini aýdyp bolmaýar.

Eger, $y = arctg(-\frac{A}{B})$ bolsa Δf funksiýa *2a*-nyň bahasy bilen kesgitlenilýär. Onda $AC - B^2 = 0$ bolanda funksiýa maksimum we minimum bahalary ýa alyp biler ýa alyp bilmez, bu ýagdaýda mesele köp derňewi talap edýär.

Şeýlelikde, **teorema 2** dolulygyna subut edildi.

1.2. Deňsizlikleri subut etmekde köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň ulanylyşy

Mysal 1: Deňsizligi subut ediň. (Kolumbiýa 2001ý.)

$3(x+y+1)^2+1 \geq 3xy$ (bu ýerde $x, y \in R$).

Çözülişi:

$z=3(x+y+1)^2-3xy$ funksiýanyň ekstremum bahasyny tapalyň.

1) Funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapalyň.

$z'_x = 6(x+y+1)-3y;$ $z'_y = 6(x+y+1)-3x;$

$\begin{cases} 6(x+y+1)-3y=0 \\ 6(x+y+1)-3x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ x+2y=-2 \end{cases} \Longrightarrow x=y=-\frac{2}{3}$ onda funksiýanyň

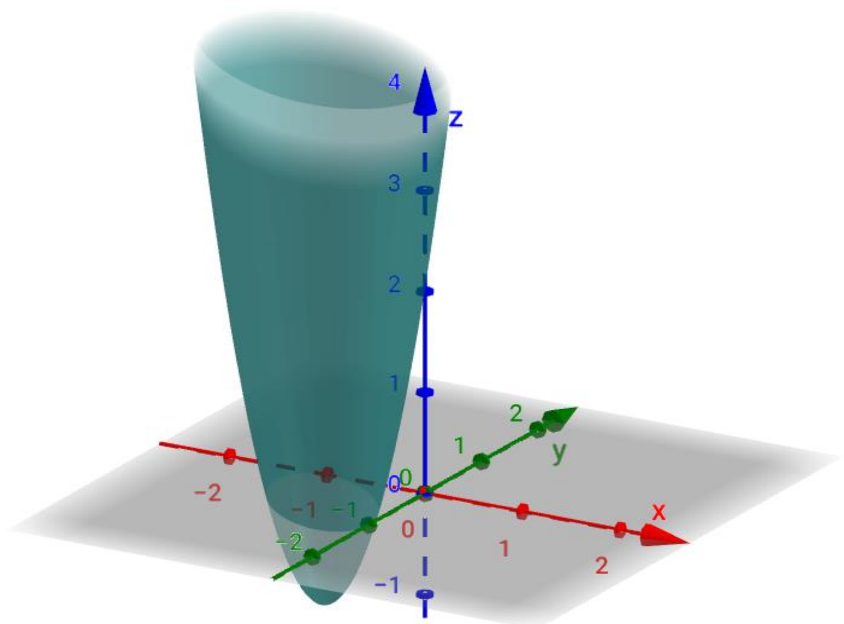
$M(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$ bolan kritiki nokadyny alarys.

2) Funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapyp, kritiki nokadyny derňäliň.

$A=(z''_{xx})_M=6;$ $B=(z''_{xy})_M=3;$ $C=(z''_{yy})_M=6;$

$AC-B^2=27>0$ we $A>0$ onda funksiýa $M(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$ nokatda minimum bahany alýar, ýagny $z_{min}=-1$.

Funksiýanyň grafiginden hem görnüşi ýaly funksiýa $M(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$ nokatda minimum bahany alýar. Onda $z \geq -1 \Longrightarrow 3(x+y+1)^2+1 \geq 3xy$ s.e.ş. deňlik haçanda $x=y=-\frac{2}{3}$ bolanda.



Mysal 2: Deňsizligi subut ediň.

$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ (bu ýerde $x, y \in R$)

Çözülişi:

$z = x^4 + y^4 - 8xy$ funksiýanyň ekstremum bahasyny tapalyň.

1) Funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapalyň.

$z'_x = 4x^3 - 8y;$ $z'_y = 4y^3 - 8x;$

$$\begin{cases} 4x^3 - 8y = 0 \\ 4y^3 - 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^3 \\ \frac{1}{8}x^9 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x(x^8 - 16) = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 = 0 \text{ we}$$

$x_2 = y_2 = \pm\sqrt{2}$. Onda funksiýanyň $M_1(0;0)$ we $M_2(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$ kritiki nokatlaryny alarys.

2) Funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapalyň.

$z''_{xx} = 12x^2;$ $z''_{xy} = -8;$ $z''_{yy} = 12y^2;$

3) Funksiýanyň birinji kritiki nokadyny derňäliň.

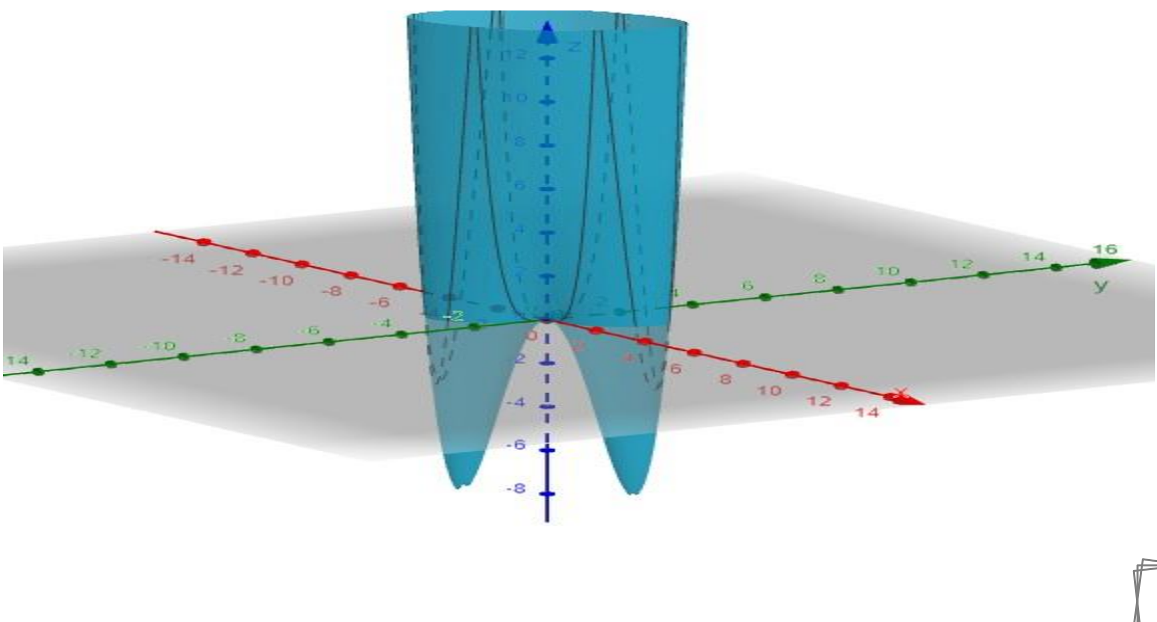
$M_1(0;0)$ nokatda $A = (z''_{xx})_M = (12x^2)_M = 0;$ $B = (z''_{xy})_M = -8;$

$C = (z''_{yy})_M = (12y^2)_M = 0;$ $AC - B^2 = -64 < 0$ we $A = 0$ funksiýa bu nokatda ekstremum bahany alyp bilmez.

4) Funksiýanyň ikinji kritiki nokadyny derňäliň.

$M_2(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$ nokatda $A = (z''_{xx})_M = (12x^2)_M = 24;$ $B = (z''_{xy})_M = -8;$

$C = (z''_{yy})_M = (12y^2)_M = 24;$ $AC - B^2 = 80 > 0$ we $A > 0$ funksiýa bu nokatda minimum bahany alýar, ýagny $z_{min} = -8$.



Funksiýanyň grafiginden hem görnüşi ýaly funksiýanyň minimum bahasy $z_{min} = -8$, bu baha funksiýa $M_2(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$ nokatda ýerine ýetýär. Onda $z \geq -8 \Rightarrow x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ s.e.ş. deňlik haçanda $x = y = \pm\sqrt{2}$ bolanda.

Mysal 3: Deňsizligi subut ediň.

$x^2(1 + y^4) + y^2(1 + x^4) \leq (1 + x^4)(1 + y^4)$ (bu ýerde $x, y \in R$)

Çözülişi:

$z = x^2(1 + y^4) + y^2(1 + x^4) - x^4 - y^4 - x^4y^4$ funksiýanyň ekstremum bahasyny tapalyň.

1) Funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapalyň.

$z'_x = 2x(1 + y^4) + 4y^2x^3 - 4x^3 - 4x^3y^4;$

$z'_y = 4x^2y^3 + 2y(1 + x^4) - 4y^3 - 4y^3x^4;$

$\begin{cases} 2x(1 + y^4) + 4y^2x^3 - 4x^3 - 4x^3y^4 = 0 \\ 4x^2y^3 + 2y(1 + x^4) - 4y^3 - 4y^3x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ we

$\begin{cases} 1 + y^4 + 2y^2x^2 - 2x^2 - 2x^2y^4 = 0 \\ 1 + x^4 + 2y^2x^2 - 2y^2 - 2y^2x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ýokarky deňlikden aşakdaky deňligi aýyryp alarys: $x^4 - y^4 + 2(x^2 - y^2) + 2x^2y^4 - 2y^2x^4 = 0;$

$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2) = 0;$

Birinji ýagdaýdan $x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2 = 0;$ deňlikden görnüşi ýaly $x^2 \neq \frac{1}{2}$ dogrudyr. Onda $y^2 = \frac{x^2+2}{2x^2-1}$ sistemada ornuna goýup alarys:

$1 + x^4 + y^2(2x^2 - 2x^4 - 2) = 0$. Goý, $x^2 = t$ bolsun. $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0;$ $(t - 1)(2t^2 - t + 1) = 0;$ $2t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow D = -7 < 0$ deňlemäniň hakyky köki ýok. Onda $x^2 = y^2 = 1$ bolmaly. Şeýlelikde, bu deňlikden funksiýanyň $M_1(1; 1)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(1; -1)$, we $M_4(-1; -1)$ kritiki nokatlaryny taparys.

2) Funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapalyň.

$z''_{xx} = 1 + y^4 - 6x^2 + 6x^2y^2 - 6x^2y^4;$ $z''_{xy} = 4y^3x + 4x^3y - 8x^3y^3;$

$z''_{yy} = 1 + x^4 - 6y^2 + 6x^2y^2 - 6y^2x^4;$

3) Funksiýanyň kritiki nokatlaryny derňäliň.

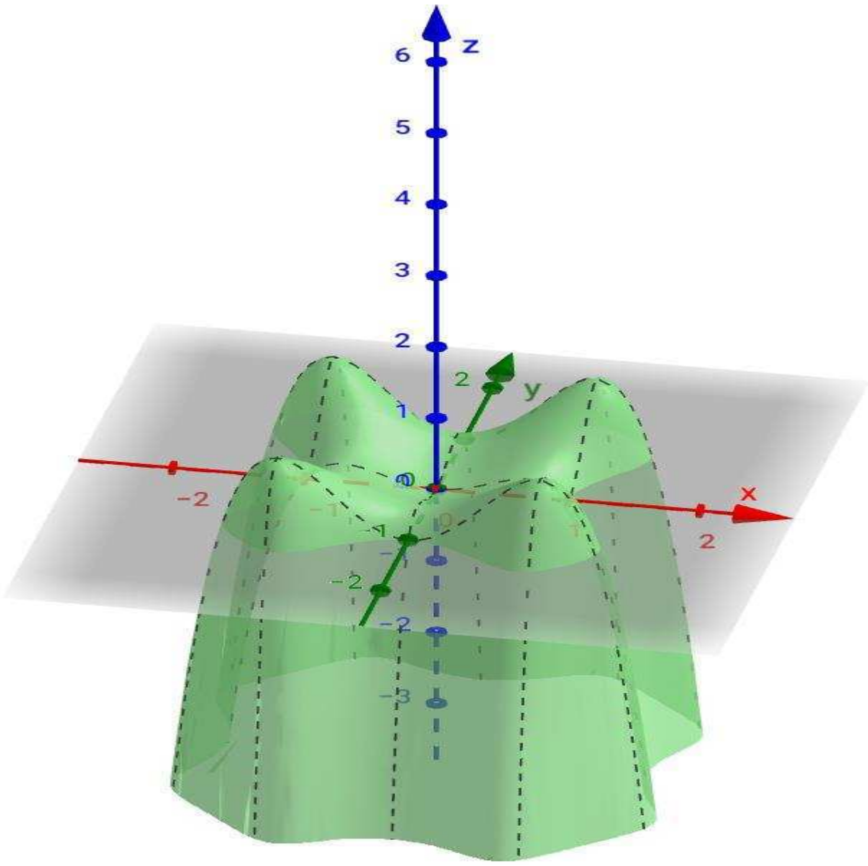
$M_1(1; 1)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(1; -1)$, we $M_4(-1; -1)$ nokatlaryň ählisinde hem $A = (z''_{xx})_{M_i} = (1 + y^4 - 6x^2 + 6x^2y^2 - 6x^2y^4)_{M_i} = -4;$

$B = (z''_{xy})_{M_i} = (4y^3x + 4x^3y - 8x^3y^3)_{M_i} = 0;$

$C = \left(z''_{yy}\right)_{M_i} = (1 + x^4 - 6y^2 + 6x^2y^2 - 6y^2x^4)_{M_i} = -4;$

(bu ýerde $i = 1; 2; 3; 4$ sanlar) deňlikler dogrudyr.

$AC - B^2 = 16$ we $A < 0$, şonuň üçin $M_1(1; 1)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(1; -1)$, we $M_4(-1; -1)$ nokatlaryň ählisinde hem funksiýa maksimum bahany alýar, ýagny $z_{max} = 1$.



Funksiýanyň grafiginden hem görnüşi ýaly funksiýanyň maksimum bahasy $z_{max} = 1$. Onda $z \leq 1 \Rightarrow x^2(1 + y^4) + y^2(1 + x^4) \leq (1 + x^4)(1 + y^4)$ s.e.ş. deňlik, haçanda $x^2 = y^2 = 1$ bolanda.

Mysal 4: Deňsizligi subut ediň. (Всероссийский 1992-1993г.)

$x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$

Çözülişi:

$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ funksiýanyň ekstremum bahasyny tapalyň.

1) Funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapalyň.

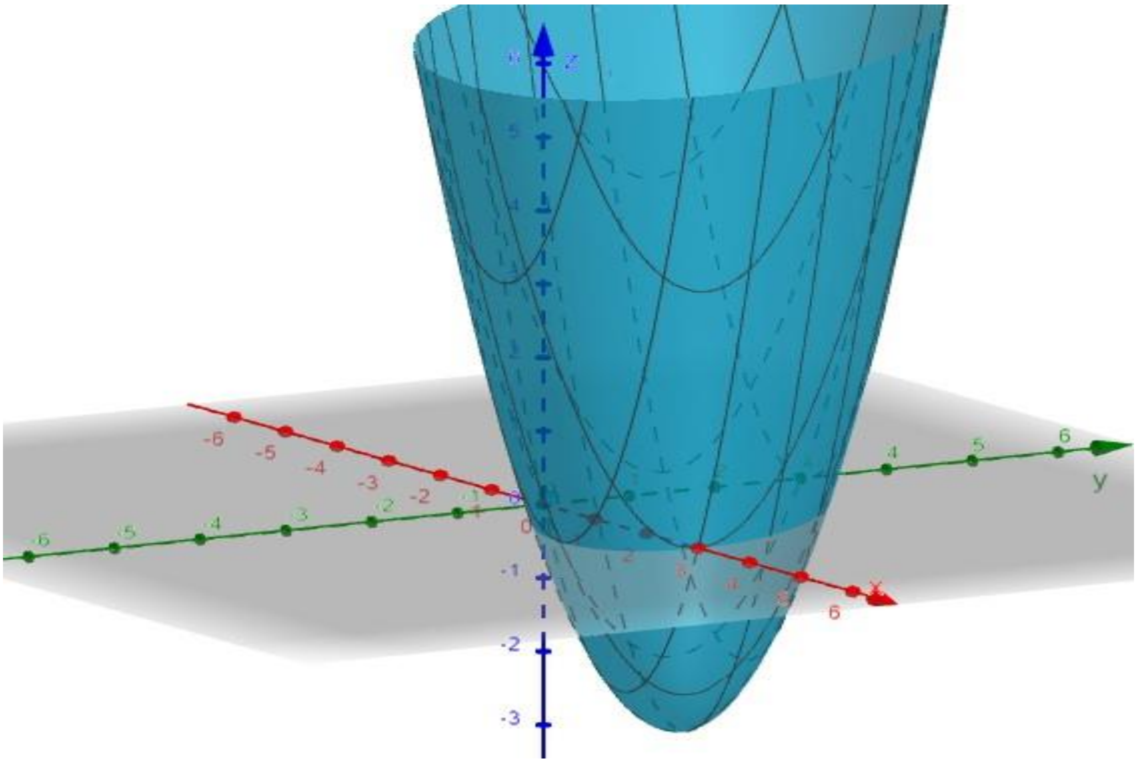
$z'_x = 2x + y - 3;$ $z'_y = 2y + x - 3;$

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y + x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$ onda funksiýanyň $M(1;1)$ kritiki nokadyny alarys.

2) Funksiýanyň ikinji tertipli önümlerini tapyp, kritiki nokadyny derňäliň.

$A = (z''_{xx})_M = 2;$ $\quad B = (z''_{xy})_M = 1;$ $\quad C = (z''_{yy})_M = 2;$

$AC - B^2 = 3 > 0$ we $A > 0$ onda funksiýa $M(1;1)$ nokatda minimum bahany alýar, ýagny $z_{min} = -3$.



Funksiýanyň grafiginden hem görnüşi ýaly, funksiýanyň minimum bahasy $z_{min} = -3$. Onda $z \geq -3 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$ s.e.ş. deňlik, haçanda $x = y = 1$ bolanda.

1.3. Iki näbellili ikinji derejeli funksiýalaryň ekstremum bahalaryny tapmak üçin C++ dilindäki programmanyň düzülişi

$z = f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + r; \quad (a \neq 0,\ c \neq 0)$ bolanda funksiýanyň ekstremumyny tapmagyň C++ dilindäki programmasy.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
int main()
{
    float a, b, c, d, e, r, C1, B1, A1, M, x, y;
    cout << "z=f(x,y) = a*x^2 + b*xy + c*y^2 + d*x + e*y + r funksiyanyn
ekstremum bahalaryny tapmak ucin programma: " << endl<<endl;
    cout<<"Bu yerde 'a' we 'c' den daldir nola"<< endl<<endl;
    cout << "a=";
    cin >> a;
    cout << "b=";
    cin >> b;
    cout << "c=";
    cin >> c;
    cout << "d=";
    cin >> d;
    cout << "e=";
    cin >> e;
    cout << "r=";
    cin >>r;
    cout<<endl;
    A1 = 2 * a;
    B1 = b;
    C1 = 2 * c;
    M = A1 * C1 - B1 * B1;
```

```
    if (M > 0 && A1 > 0) {
        x = (b * e - 2 * c * d) / (4 * a * c - b * b);
        y = (b * d - 2 * a * e) / (4 * a * c - b * b);
        cout << "f(x,y) funksiyanyn minimum bahasy bar:z(min)=" << a * pow(x, 2) + b * x * y + c * pow(y, 2) + d * x + e * y + r <<endl<<endl;
        cout << "hacanda x=" << (b * e - 2 * c * d) / (4 * a * c - b * b) << ", y=" << (b * d - 2 * a * e) / (4 * a * c - b * b) << " bolanda." <<endl<<endl;
    }
    if (M > 0 && A1 < 0) {
        x = (b * e - 2 * c * d) / (4 * a * c - b * b);
        y = (b * d - 2 * a * e) / (4 * a * c - b * b);
        cout << "f(x,y) funksiyanyn maksimum bahasy bar:z(max)=" << a * pow(x, 2) + b * x * y + c * pow(y, 2) + d * x + e * y + r <<endl<<endl;
        cout << "hacanda x=" << (b * e - 2 * c * d) / (4 * a * c - b * b) << ", y=" << (b * d - 2 * a * e) / (4 * a * c - b * b) << " bolanda." <<endl<<endl;
    }
    if (M < 0) {
        cout << "f(x,y) funksiyanyn ekstremum bahasy yok" <<endl;
    }
    if (M == 0) {
        cout << "f(x,y) funksiyanyn ekstremum bahasy ya bolup biler ya-da bolup bilmez" <<endl;
    }
    return 0;
}
```

II Bap. Köp üýtgeýän ululykly funksiýalarda şertli ekstremumy kesgitlemek

2.1. Şertli ekstremumy tapmaklyga degişli teoremanyň subudy

Goý, $u = f(x, y)$ funksiýanyň ekstremumyny tapalyň, haçanda $\phi(x, y) = 0$ bolanda. Bu görnüşli meselelere şertli ekstremum hem diýilýär. Bu meseläni çözmezden öň birnäçe aňlatmalaryň üstünde durup geçeliň.

Goý, $z = f(x, y)$ funksiýada Δx we Δy yzygiderlikde x we y −iň artdyrmasy bolsun. Onda $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ muňa funksiýanyň $x - a$ görä hususy artdyrmasy diýilýär. Funksiýanyň $y - a$ görä hususy artdyrmasy bolsa,
$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ şu bolar. $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ muňa funksiýanyň doly artdyrmasy diýilýär.

Kesgitleme: $z = f(x, y)$ funksiýanyň hususy artdyrmasynyň, ýagny Δz −iň (x −a görä) Δx artdyrma bolan gatnaşygynyň predeliniň Δx nola ymtylandaky bahasyna $z = f(x, y)$ funksiýanyň x −a görä hususy önümi diýilýär.

Başgaça z'_x; $f'_x(x, y)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ şu görnüşde ýazylýar. Ýagny:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_z x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

Doly artdyrmanyň ýazylyşyna görä: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$
$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$. Indi bolsa Lagranžyň teoremasyny ulanalyň: $f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$; bu ýerde $\bar{y}$ ululyk, y we $y + \Delta y$ ululyklaryň aralygynda ýerleşýär. Şuňa meňzeşlikde birinji kwadrat ýaýy hem ýazalyň: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$; bu ýerde $\bar{x}$ ululyk x we $x + \Delta x$ ululyklaryň aralygynda ýerleşýär. Onda:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y};$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{array}\right\}$$ sebäbi, $\bar{x}$ we $\bar{y}$ ululyklar yzygiderlikde x; $x + \Delta x$; y

we $y+\Delta y$ aralyklarynda ýerleşýär. $\Delta x \to 0$ we $\Delta y \to 0$ bolanda $\bar{x}$ we $\bar{y}$ ululyklar yzygiderlikde x −a we y −a ymtylýarlar. Onda:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\varphi_1\\ \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\varphi_2\end{array}\right\}$$ φ_1 we φ_2 nola ymtylýar, haçanda Δx we Δy nola ymtylanda we $\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\varphi_1\Delta x+\varphi_2\Delta y$;

Çylşyrymly funksiýanyň hususy önümi we doly önümi.

Goý, $z=F(u,v)$ we $u=\phi(x,y)$, $v=\theta(x,y)$ bolsun. $\frac{\partial z}{\partial x}$ we $\frac{\partial z}{\partial y}$ −i hasaplalyň. x argumente Δx artdyrma bereliň. Onda u we v hem yzygiderlikde $\Delta_x u$ we $\Delta_x v$ ýaly artdyrmalary alar. Ýokardaky deňlige meňzeşlikde alarys:

$\Delta z=\Delta_x u\,\frac{\partial F}{\partial u}+\Delta_x v\,\frac{\partial F}{\partial v}+\varphi_1\Delta_x u+\varphi_2\Delta_x v$ bu deňligi Δx −a böleliň. Onda :

$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\Delta_x v}{\Delta v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\varphi_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\varphi_2\frac{\Delta_x v}{\Delta v}$ ýokarda belleýşimiz ýaly $\Delta x \to 0$ bolanda $\Delta_x u \to 0$ we $\Delta_x v \to 0$ bolar, φ_1 we φ_2 hem nola ymtylýar. Onda deňlikden Δx nola ymtylandaky predelini alyp, aşakdaky deňligi alarys:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}$ we şuňa meňzeşlikde $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}$;

Birnäçe köp üýtgeýän ululykly funksiýalar hem şuňa meňzeş, meselem:

$w=F(z,u,v,s)$ bu ýerde z,u,v,s ählisi hem x −a garaşly funksiýalar. Onda $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}$ şu görnüşde bolar. Eger $z=F(x,y,u,v)$ funksiýa bu ýerde y,u,v ählisi hem x −a garaşly funksiýalar, onda $\frac{dz}{dx}$ −i tapalyň.

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$; onda $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx}$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{dv}{dx}$; $\frac{\partial x}{\partial x}=1$;

bolany üçin $\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$ muňa doly önüm diýilýär.

Teorema 3: Goý, käbir x −a görä y funksiýa käbir $F(x,y)=0$ deňleme bilen berilsin. Onda $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ şu görnüşde bolar (bu ýerde $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$).

Subudy:

x argumente Δx artdyrma bereliň. Funksiýa y hem Δy artdyrma alar. $F(x,y)=0$

bolany üçin $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$ bolar. Bu deňliklerden $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-$ $-F(x,y)=0$ deňligi alarys. Ýokardaky deňlikden şuny alarys:

$\Delta F = F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\Delta x\frac{\partial F}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial F}{\partial y}+\varphi_1\Delta x+\varphi_2\Delta y.$ $\Delta F=0$ bolany üçin $\Delta x\frac{\partial F}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial F}{\partial y}+\varphi_1\Delta x+\varphi_2\Delta y=0$ bu deňligiň iki bölegini hem Δx –a bölüp $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ –i tapalyň: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\varphi_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\varphi_2}$; $\Delta x\to 0$ bolsa φ_1 we φ_2 ululyklar hem nola ymtylýar. Deňlikden $\Delta x\to 0$ bolandaky predelde alsak: $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$;

Geliň, indi ýokardaky meselä dolanyp geleliň $u=f(x,y)$ funksiýanyň ekstremumyny tapalyň, haçanda $\phi(x,y)=0$ bolanda. Eger, biz $\phi(x,y)=0$ deňlikden y –i x –a görä tapyp bilsek, onda $u=f(x,y)$ funksiýa birnäbellili bolýar. Geliň, $\phi(x,y)=0$ deňligi çözmän funksiýanyň ekstremumyny tapalyň. $\phi(x,y)=0$ bolany üçin y –i hem x –a görä bir funksiýa diýip düşünip bolar. $u=f(x,y)$ funksiýanyň ekstremum bahasyny tapmak üçin, u –nyň x –a görä önümi nola deň bolmalydyr.

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0; \qquad (1)$$

$\phi(x,y)=0$ deňlikden **teorema 3** boýunça $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ alarys. Soňky deňligi näbelli λ kömekçi köpeldijä köpeldip, (1) formulany goşalyň. Onda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\lambda\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Onsoň λ kömekçi köpeldijini $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ bolar ýaly saýlap alalyň. Onda $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ bolar. Şunlukda ekstremum nokatlary üç sany deňlik kanagatlandyrýar. Ýagny:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=0\\ \varphi(x,y)&=0\end{aligned}\right\}$$ bu deňliklerden x, y we λ kömekçi köpeldijini kesgitläp bileris.

Käbir mysallarda $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$ funksiýa döredilýär. Başgaça λ kömekçi köpeldijä $-$ Lagranžyň köpeldijisi hem diýilýär.

Goý, n näbelli ululykly funksiýanyň ekstremum bahasyny tapmaly bolsun. $u=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=0$ funksiýanyň m sany şertli deňligi bolsun ýagny, $\phi_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=0;\quad \phi_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=0,\dots,\ \phi_m(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=0$ bolsun. Onda ýokardaky ýaly funksiýa düzeliň:

$F(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)+\ \lambda_1\phi_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)+$ $+\lambda_2\phi_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)+\cdots+\ \lambda_m\phi_m(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$. Funksiýanyň hususy önümlerini nola deňläp alarys. $\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}+$ $+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0;\ \dots\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\cdots+$ $+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0$; jemi $m+n$ sany deňlemelerden $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ we $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_m$ ululyklary kesgitlemeli. Ýöne ýene bir mesele şu tapylan ululyklarda funksiýa maksimum ýa-da minimum ýa-da ekstremum bahany almanam biler, biz ähli ýagdaýlary açyk ýagdaýda galdyrarys. Bu meseläni esasy kömekçi nazarlar arkaly çözeris.

2.2. Deňsizlikleri subut etmekde şertli ekstremumyň ulanylyşy

Mysal 1: $a, b, c > 0$ we $(a+b)(b+c)(a+c) = 1$ bolsa, subut etmeli.

$ab + bc + ac \leq \frac{3}{4}$ (Ruminýa 2005ý.)

Çözülişi:

Goý, $u = ab + bc + ac$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň maksimum bahasyny tapalyň. Onda kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(a, b, c, \lambda) = ab + bc + ac + \lambda((a+b)(b+c)(a+c) - 1)$ hususy önümlerini tapalyň:

$$\begin{cases} F'_a = c + b + \lambda(c+b)(2a+c+b) = 0 \\ F'_b = a + c + \lambda(a+c)(2b+a+c) = 0 \\ F'_c = a + b + \lambda(a+b)(2c+a+b) = 0 \end{cases}$$ $a, b, c > 0$ bolany üçin,

$a + b \neq 0,\ a + c \neq 0,\ \ b + c \neq 0$ dogrudyr. Onda deňlemeden gysgaldyp alarys:

$$\begin{cases} \frac{1}{2a+c+b} = -\lambda \\ \frac{1}{2b+a+c} = -\lambda \\ \frac{1}{2c+a+b} = -\lambda \end{cases} \Rightarrow$$ $a = b = c$ bolýanlygy düşünikli. $(a+b)(b+c)(a+c) = 1$ deňlikden ýerine goýup alarys: $a = b = c = \frac{1}{2}$ bolar. Meseläniň manysy boýunça hem $a = b = c = \frac{1}{2}$ bolanda funksiýa maksimum bahany alar. Onda $u_{max} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow u \leq \frac{3}{4} \Rightarrow ab + bc + ac \leq \frac{3}{4}$ s.e.ş. deňlik haçanda $a = b = c = \frac{1}{2}$ bolanda ýerine ýetýär.

Mysal 2: $a, b, c > 0$ we $ab + bc + ac + 2abc = 1$ bolsa deňsizligi subut ediň.

$\sqrt{ab} + \sqrt{cb} + \sqrt{ac} \leq \frac{3}{2}$ (Ruminýa 2005ý.)

Çözülişi:

Goý, $\sqrt{ab} = x;\ \sqrt{cb} = y;\ \sqrt{ac} = z;$ bolsun. Onda deňligimiz şu görnüşde bolar: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Subut etmeli zadymyz hem şu görnüşde bolar:

$x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

Goý, $u = x + y + z$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň maksimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(x,y,z,\lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1)$ hususy önümlerini tapalyň.

$$\begin{cases} F'_x = 1 + \lambda(2x + 2yz) = 0 \\ F'_y = 1 + \lambda(2y + 2xz) = 0 \\ F'_z = 1 + \lambda(2z + 2yx) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+yz} = -2\lambda \\ \frac{1}{y+xz} = -2\lambda \\ \frac{1}{z+xy} = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow x + yz = y + xz = z + xy \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-y)(1-z) = 0 \\ (x-z)(1-y) = 0 \\ (z-y)(1-x) = 0 \end{cases}$ bu deňliklerden birini alalyň. $(x-y)(1-z) = 0$ goý, birinji ýagdaý üçin $z = 1$ bolsun we $y + xz = z + xy$ deňlikde ornuna goýup $(x-1)(y-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ bolsun. Onda $x = z = 1$ –i, $x^2 + y^2 + z^2 + +2xyz = 1$ deňlikde ornuna goýanymyzda, $(y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$ bu meseläniň şertini kanagatlandyrmaýar. Onda $x = y$ bolmaly. $(x-z)(1-y) = 0$ bu deňlikden $x = z$ alarys, sebäbi ýokardaky ýaly $x = y \neq 1$. Onda $x = y = z$ bolar. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ deňlikden $2x^3 + 3x^2 = 1 \Rightarrow (x+1)(2x^2 + x - 1) = 0$; $x \neq 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0,\ x_1 = -1 \Rightarrow \emptyset$ onda $x = y = z = \frac{1}{2}$ bolar we funksiýa meseläniň manysy boýunça hem maksimum bahany alar, ýagny $u_{max} = \frac{3}{2} \Rightarrow u \leq \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{cb} + \sqrt{ac} \leq \frac{3}{2}$ s.e.ş. deňlik haçanda $x = y = z = \frac{1}{2}$, $\sqrt{ab} + +\sqrt{cb} + \sqrt{ac} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$ bolanda.

Mysal 3: $a, b, c > 0$ we $a + b + c = 1$ bolsa, deňsizligi subut ediň.

$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$ (Hytaý Halk Respublikasy 2005ý.)

Çözülişi:

Goý, $u = 10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5)$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň minimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(a,b,c,\lambda) = 10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) + \lambda(a + b + c - 1)$ hususy önümlerini tapalyň.

$\begin{cases} F'_a = 30a^2 - 45a^4 + \lambda = 0 \\ F'_b = 30b^2 - 45b^4 + \lambda = 0 \\ F'_c = 30c^2 - 45c^4 + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30a^2 - 45a^4 = -\lambda \\ 30b^2 - 45b^4 = -\lambda \\ 30c^2 - 45c^4 = -\lambda \end{cases}$ Birinji deňlikden ikinjini, ikinjiden üçünjini, birinjiden üçünjini aýralyň:

$$\begin{cases}(a^2-b^2)(3(a^2+b^2)-2)=0\\(c^2-b^2)(3(c^2+b^2)-2)=0\\(a^2-c^2)(3(a^2+c^2)-2)=0\end{cases}\Longrightarrow$$ Birinji ýagdaý üçin,

1). $\begin{cases}a=b\\3(c^2+b^2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1-2a\\a^2+(1-2a)^2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow 15a^2-12a+1=0$ kökleri

$a_1=\frac{12+2\sqrt{21}}{30}\Rightarrow\ c_1=1-\frac{12+2\sqrt{21}}{15}<0$ bu bolup bilmez. Onda $a_2=\frac{12-2\sqrt{21}}{30}\Rightarrow$

$c_1=\frac{3+2\sqrt{21}}{15}$. Onda funksiýa $u_1=10\cdot\left[2\left(\frac{12-2\sqrt{21}}{30}\right)^3+\left(\frac{3+2\sqrt{21}}{15}\right)^3\right]-$

$-9[2\left(\frac{12-2\sqrt{21}}{30}\right)^5+\left(\frac{3+2\sqrt{21}}{15}\right)^5]$ bolar we takmynan hasaplasak $u_1>2$ bolar.

Beýleki ýagdaýlarda hem u –nyň bahasy şol durkuna bolar.

2). $\begin{cases}a^2+c^2=\frac{2}{3}\\a^2+b^2=\frac{2}{3}\\b^2+c^2=\frac{2}{3}\end{cases}$ sag taraplary deň, çep taraplary hem deň bolmaly, onda

$a=b=c=\sqrt{\frac{1}{3}}$ emma, bu $a+b+c=1$ deňligi kanagatlandyrmaz.

3). $a=b=c$ bolmaly $a+b+c=1$ deňlikden $a=b=c=\frac{1}{3}$ onda funksiýa $u_2=1$ bolar. Mysalyň manysy boýunça hem funksiýanyň minimum bahasy $u_2=1$, sebäbi $u_1>2>u_2$ onda $u_{min}=1\Rightarrow 10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1$; s.e.ş. deňlik haçanda $a=b=c=\frac{1}{3}$ bolanda.

Mysal 4: $a,b,c\in R$ we $a+b+c=0$ bolsa, deňsizligi subut ediň.

$a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2+3\geq 6abc$ (Polşa 2004ý.)

Çözülişi:

Goý, $u=f(a,b,c)=a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2-6abc$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň minimum bahasyny tapmaly. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$$\begin{cases}F'_a=2ac^2+2ab^2-6bc+\lambda=0\\F'_b=2ba^2+2bc^2-6ac+\lambda=0\\F'_c=2ca^2+2cb^2-6ab+\lambda=0\end{cases}\Longrightarrow$$ Birinji deňlikden ikinji deňligi, ikinji deňlikden üçünjini, üçünji deňlikden birinji deňligi aýyryp alarys:

$$\begin{cases}(a-b)(c^2-ab+3c)=0\\(c-b)(a^2-cb+3a)=0\\(a-c)(b^2-ac+3b)=0\end{cases} \Rightarrow \text{ 1). } \begin{cases}a=b\neq c\\a^2-cb+3a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-2a\\a^2-cb+3a=0\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3a(a+1)=0.$

$a=0$ bolsa $u_1=0$ bolar. $a=-1$ bolsa $u_2=-3$ bolar.

2). $a=b=c$ bolsa $a+b+c=0$ deňlikden $\Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow u_3=0$ bolar.

3). Eger $a\neq b\neq c$ bolsa

$$\begin{cases}c^2-ab+3c=0\\a^2-cb+3a=0\\b^2-ac+3b=0\end{cases}$$ Birinji deňlikden üçünji deňligi aýyryp alarys:

$c^2-b^2+ac-ab+3c-3b=0 \Rightarrow (c-b)(a+b+c+3)=0 \Rightarrow c=b$ bu şerte garşy bolup bilmez.

Onda mysalyň şertine görä hem funksiýanyň minimum bahasy $u_2=-3$, sebäbi $u_{1,}u_3>u_2$. Onda $u_{min}=-3 \Rightarrow u\geq -3 \Rightarrow a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2+3\geq 6abc$;

s.e.ş. deňlik haçanda $(a,b,c)\in\{(-1,-1,2);(-1,2,-1);(2,-1,-1)\}$ bolanda.

Mysal 5: $p,q,r>0$ we $p+q+r=1$ bolsa deňsizligi subut ediň.

$7(pq+qr+pr)\leq 2+9pqr$ (Beýik Britaniýa 1999ý.)

Çözülişi:

Goý, $u=f(p,q,r)=7(pq+qr+pr)-9pqr$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň maksimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň. $F(p,q,r,\lambda)=7(pq+qr+pr)-9pqr+\lambda(p+q+r-1)$ hususy önümlerini tapalyň.

$$\begin{cases}F'_p=7(q+r)-9qr+\lambda=0\\F'_r=7(q+p)-9qp+\lambda=0\\F'_q=7(p+r)-9pr+\lambda=0\end{cases}\Longrightarrow$$ Birinji deňlikden ikinji deňligi, ikinji deňlikden üçünjini, üçünji deňlikden birinji deňligi aýyryp alarys:

$$\begin{cases}(q-r)(7-9p)\\(p-q)(7-9r)\\(p-r)(7-9q)\end{cases}\Longrightarrow$$ 1). Birinji ýagdaý üçin $q=r\neq p$ bolsa $q=r=\frac{7}{9}$ bolar.

Onda, $p=1-q-r=-\frac{5}{9}$ bu şertimize garşy.

Onda diňe bir ýagdaý bolup bilýär $p = q = r$ bolmaly $p + q + r = 1$ deňlikden $p = q = r = \frac{1}{3}$. Onda meseläniň şertine görä hem $p = q = r = \frac{1}{3}$ bolanda, funksiýa maksimum bahany alar.Onda $u_{max} = 2 \Rightarrow u \leq 2 \Rightarrow 7(pq + qr + pr) \leq 2 + 9pqr$ s.e.ş. deňlik haçanda $p = q = r = \frac{1}{3}$ bolanda.

Mysal 6: $x, y, z \geq 0$ we $x + y + z = 1$ bolanda, deňsizligi subut ediň.

$xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ (Halkara matematika olimpiada 1984ý.)

Çözülişi:

Goý, $u = f(x, y, z) = xy + yz + xz - 2xyz$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň maksimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(x, y, z, \lambda) = xy + yz + xz - 2xyz + \lambda(x + y + z - 1)$ hususy önümlerini tapalyň.

$$\begin{cases} F'_x = y + z - 2yz + \lambda = 0 \\ F'_y = x + z - 2xz + \lambda = 0 \\ F'_z = x + y - 2xy + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - z)(1 - 2y) = 0 \\ (x - y)(1 - 2z) = 0 \\ (y - z)(1 - 2x) = 0 \end{cases}$$

1). Birinji ýagdaý üçin $\begin{cases} x = z \\ x \neq y \end{cases}$ bolsun. Onda $x = z = \frac{1}{2}$; $x + y + z = 1 \Rightarrow y = 0$ bolar. Onda $u_1 = \frac{1}{4}$ bolar.

2). $x = y = z$ bolsun. Onda $x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = \frac{1}{3} \Rightarrow u_2 = \frac{7}{27}$ bolar. Onda meseläniň şertine görä hem, funksiýa $x + y + z = \frac{1}{3}$ bahada maksimum bahany alar, sebäbi $u_2 > u_1$ bolany üçin. Onda $u_{max} = \frac{7}{27} \Rightarrow u \leq \frac{7}{27} \Rightarrow xy + yz +$ $+xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ s.e.ş. deňlik haçanda $x + y + z = \frac{1}{3}$ bolanda.

Mysal 7: $a, b, c > 0$ we $a + b + c = 1$ bolsa, deňsizligi subut ediň.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ (Polşa 1951ý.)

Çözülişi:

Goý, $u = f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň minimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(a, b, c, \lambda) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \lambda(a + b + c - 1)$ hususy önümini tapalyň.

$$\begin{cases} F'_a = -\frac{1}{a^2} + \lambda = 0 \\ F'_b = -\frac{1}{b^2} + \lambda = 0 \\ F'_c = -\frac{1}{c^2} + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \lambda \\ \frac{1}{b^2} = \lambda \\ \frac{1}{c^2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow a = b = c; \ \ a + b + c = 1$$ deňlikden alarys.

Diýmek, $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow u = 9$ bolar. Onda meseläniň şertine görä hem, funksiýa $a = b = c = \frac{1}{3}$ bolanda, minimum bahany alar. Onda $u_{min} = 9 \Rightarrow u \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ s.e.ş. deňlik haçanda $a = b = c = \frac{1}{3}$ bolanda.

Mysal 8: $x, y, z > 0$ we $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ bolsa, deňsizligi subut ediň.

$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$

Çözülişi:

Goý, $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip, funksiýanyň minimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1)$ hususy önümini tapalyň.

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda(2x + 2yz) = 0 \\ F'_y = 2y + \lambda(2y + 2xz) = 0 \\ F'_z = 2z + \lambda(2z + 2xy) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)\big(1 + \lambda(1 - z)\big) = 0 \\ (x - z)\big(1 + \lambda(1 - y)\big) = 0 \\ (z - y)\big(1 + \lambda(1 - x)\big) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

1). Goý, $x = y \neq z$ bolsun. Onda $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ deňlikden $2x^2 + z^2 + 2x^2 z = 1 \Rightarrow (z + 1)(2x^2 + z - 1) = 0;$ 1). $z = -1$ bolsa $u_1 = 2x^2 + 1 \geq 1 > \frac{3}{4};$ 2). $z = 1 - 2x^2$ bolsa, $u_2 = 2x^2 + (1 - 2x^2)^2 = 4x^2 - 2x^2 + 1 = 4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ deňlik haçanda $x = y = -\frac{1}{2};$ $z = \frac{1}{2}$ bolanda.

2). Goý, $x = y = z$ bolsun. Onda $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ deňlikden $2x^3 + 3x^2 = 1 \Rightarrow (x + 1)^2(2x - 1) = 0;$ 1). $x = -1$ bolsa $u_3 = 3;$ 2). $x = \frac{1}{2}$ bolsa $u_4 = \frac{3}{4}$ bolar. Onda meseläniň şertine görä hem, funksiýa minimum bahany alar. Onda $u_3 > u_4 = u_2$ we $u_1 > u_4 = u_2$ dogrudyr. Onda $u_{min} = \frac{3}{4} \Rightarrow u \geq \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$ s.e.ş. deňlik haçanda $(x, y, z) \in \{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\}$ bolanda.

Mysal 9: $a, b, c, d > 0$ we $a + b + c + d = 4$ bolsa, deňsizligi subut ediň.

$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$

Çözülişi:

Goý, $u = f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd$ bolsun we meseläniň şertini üýtgedip funksiýanyň minimum bahasyny tapalyň. Kömekçi funksiýany düzeliň.

$F(a, b, c, d, \lambda) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd + \lambda(a + b + c + d - 4)$ hususy önümlerini tapalyň.

$$\begin{cases} F_a' = 6a + 4bcd + \lambda = 0 \\ F_b' = 6b + 4acd + \lambda = 0 \\ F_c' = 6c + 4abd + \lambda = 0 \\ F_d' = 6d + 4abc + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)(3 - 2cd) = 0 \\ (a - c)(3 - 2bd) = 0 \\ (a - d)(3 - 2bc) = 0 \\ (b - c)(3 - 2ad) = 0 \\ (b - d)(3 - 2ac) = 0 \\ (c - d)(3 - 2ab) = 0 \end{cases}$$

1) Birinji ýagdaý üçin $a = b \neq c = d$ bolsun. Onda $a + b + c + d = 4 \Rightarrow c = 2 - a$ we $b \neq d$ bolany üçin $ac = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow D = -8 < 0 \Rightarrow \emptyset$.

2) $a = b = c \neq d$ bolsun. Onda $d = 4 - 3a$ we $c \neq d$ bolany üçin $ab = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}};\ d = 4 - 3\sqrt{\frac{3}{2}}; \Rightarrow u_1 = 129 - 24\sqrt{6}$.

3) $a = b \neq c \neq d$ bolsun. Onda $\begin{cases} 3 - 2bd = 0 \\ 3 - 2bc = 0 \end{cases} \Rightarrow c = d$ bu şerte garşydyr.

4) $a = b = c = d$ bolsun. Onda $a + b + c + d = 4$ deňlikden $a = b = c = d = 1$ alarys we $u_2 = 16$.

Onda meseläniň şertine görä hem, funksiýa minimum bahany alar. Onda $u_1 > u_2$ bolany üçin $u_{min} = 16 \Rightarrow u \geq 16 \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$ s.e.ş. deňlik haçanda $a = b = c = d = 1$ bolanda.

Netije:

Mekdep matematikasynda deňsizlik düşünjesi we olaryň dürli görnüşleri bilen baglanyşykly ýumuşlar ýerine ýetirilende, okuwçylar deňlemeler baradaky alan bilimlerine esaslanýarlar. Has takygy deňlemeleri çözmegiň emellerini, deňsizlikleri çözmekde, subut etmekde ulanmagyň mümkinçilikleriniň meňzeşliklerinden ugur alynmalydyr.

Çyzykly deňlemeler öwredilenden soň, çyzykly deňsizlikler barada düşünje berilýär. Kwadrat deňlemeler öwredilenden soň, kwadrat deňsizliklere seredilýär. Beýleki görnüşleri hem şeýle yzygiderlikde öwredilýär. Bu yzygiderlik dersiň içki baglanyşygyny berjaý etmek netijesinde ýerine ýetirilip biliner.

Meselem, bir näbellili çyzykly deňsizlikleri çözmekde san deňsizlikleriň umumylaşdyrylan häsiýetleri (düzgünleri) ulanylýar:

- Eger goşulyjy garşylykly alamaty bilen deňsizligiň bir böleginden beýleki bölegine geçirilse, onda oňa deňgüýçli bolan deňsizlik alynar;
- Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir položitel sana köpeldilse ýa-da bölünse onda oňa deňgüýçli deňsizlik alynar;
- Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir otrisatel sana köpeldilse ýa-da bölünse onda oňa deňgüýçli deňsizlik belgisi ters belgi bilen çalşylan ýagdaýda alynar;

Bu düzgünleri okuwçylara taýýar görnüşde çyzykly deňsizlikleri çözmegi öwretmegiň başynda hödürlemek bolar.

Biz hem şu gollanmada mümkin boldugyndan ýokarda mysal getirlen dersiň içki baglanşygyna esaslanan ýagdaýda, matematikany öwretmekde sazlaşygy we miraslylygy saklamaga çalyşdyk. Bu sazlaşygy üýtgeýän bir ululykly funksiýalara degişli düzgünlerine esaslanyp “Köp üýtgeýänli funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyş” we “Köp üýtgeýänli funksiýalarda şertli ekstremum kesgitlemek” ýaly müşgüllikleriň çözülişlerini beýan etdik. Gollanmadaky beýanyny tapan nazary maglumatlara esaslanyp dürli bäsleşiklerde hödürlenen deňsizlikleri subut etdik.

Gollanmada hödürlenýän usullary mugallymlar gyzyklanma sapaklarda, ýokary synp okuwçylary bäsleşiklere taýýarlamakda goşmaça maglumat hökmünde peýdalansa maksadalaýyk bolar.

Peýdalanylan edebiýatlaryň sanawy:

1. Serdar Berdimuhamedow. Ýaşlar – Watanyň daýanjy. – Aşgabat: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2023.

2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ömrümiň manysy. – Aşgabat: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2022.

3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ömrümiň manysynyň dowamaty. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2023.

4. Annaorazow O. we başgalar. Matematikadan olimpiada üçin meseleler. Orta mekdepler üçin okuw gollanmasy.–A.:Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

5. Агаханов Н. Х. и др. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.1– М.: Просвещение, 2008. – 192 с.

6. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы – М.: Просвещение, 2010. – 192 с.

7. Васильев Н.Б. и др. Заочные математические олимпиады. –М.:Наука, 1987.

8. Венгерские математические олимпиады. –М.: Мир, 1976.

9. Морозова Е. А. и Петраков И. С. Международные математические олимпиады. –М.: Просвещение, 1971.

10. Ercole Suppa. Inequalities from around the world. – Rome, 2006.

11. Zdravko Cvetkovski. Inequalities. – Berlin, 2012.

12. www.wikipedia.org

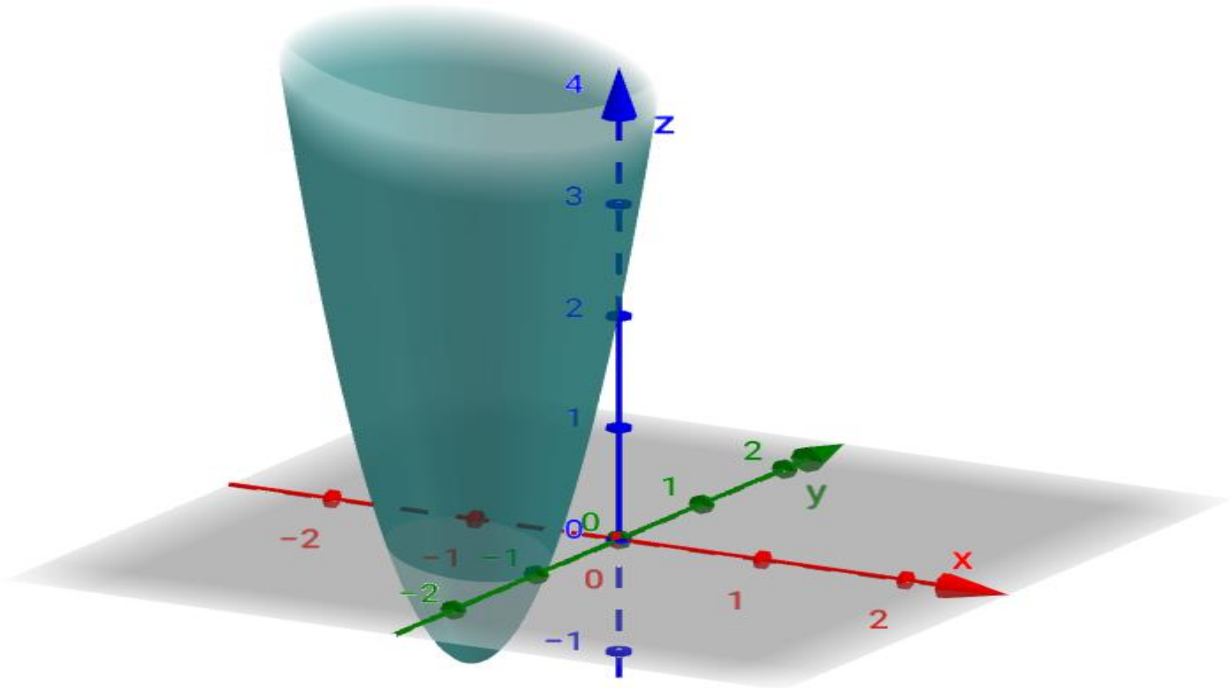
13. https://skysmart.ru

Goşundylar:

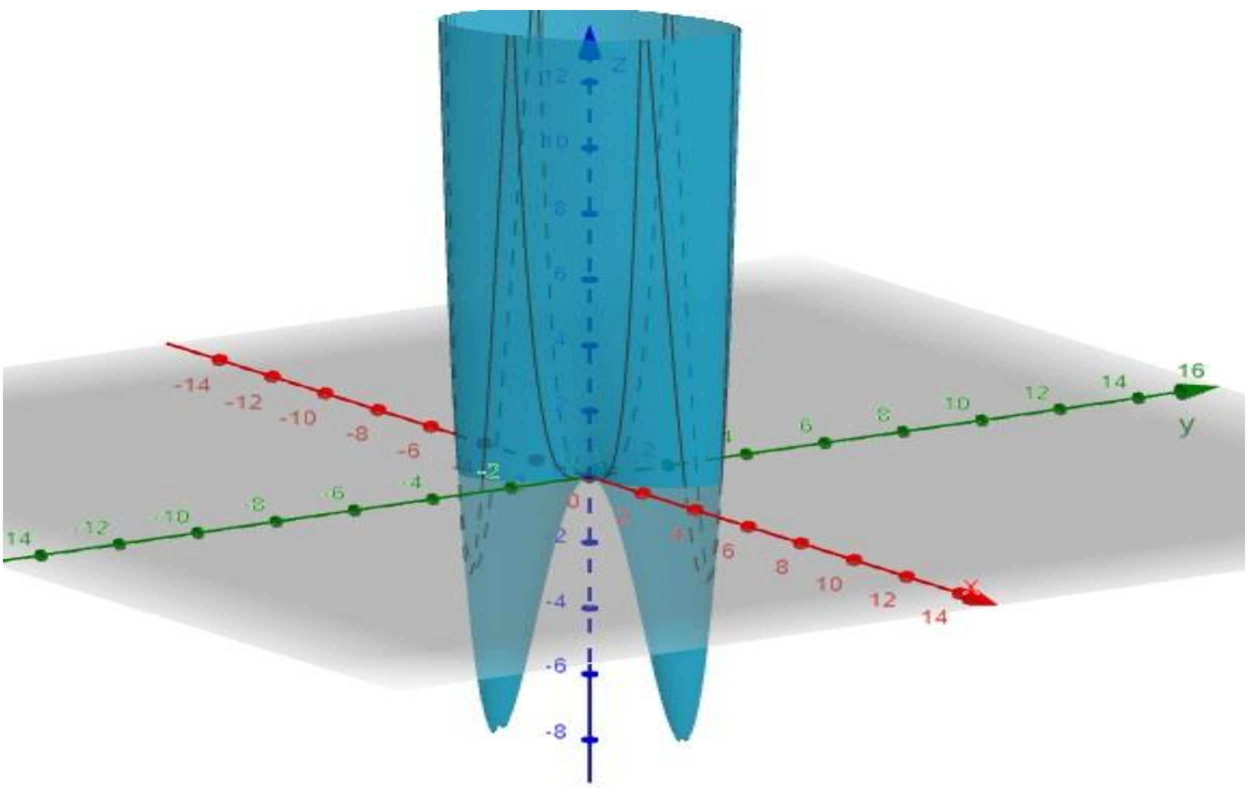
1. Iki näbellili ikinji derejeli funksiýalaryň ekstremum bahalaryny tapmak üçin C++ dilindäki programmma.

2. Funksiýanyň grafigini çyzýan *"Geogebra"* programmasy.

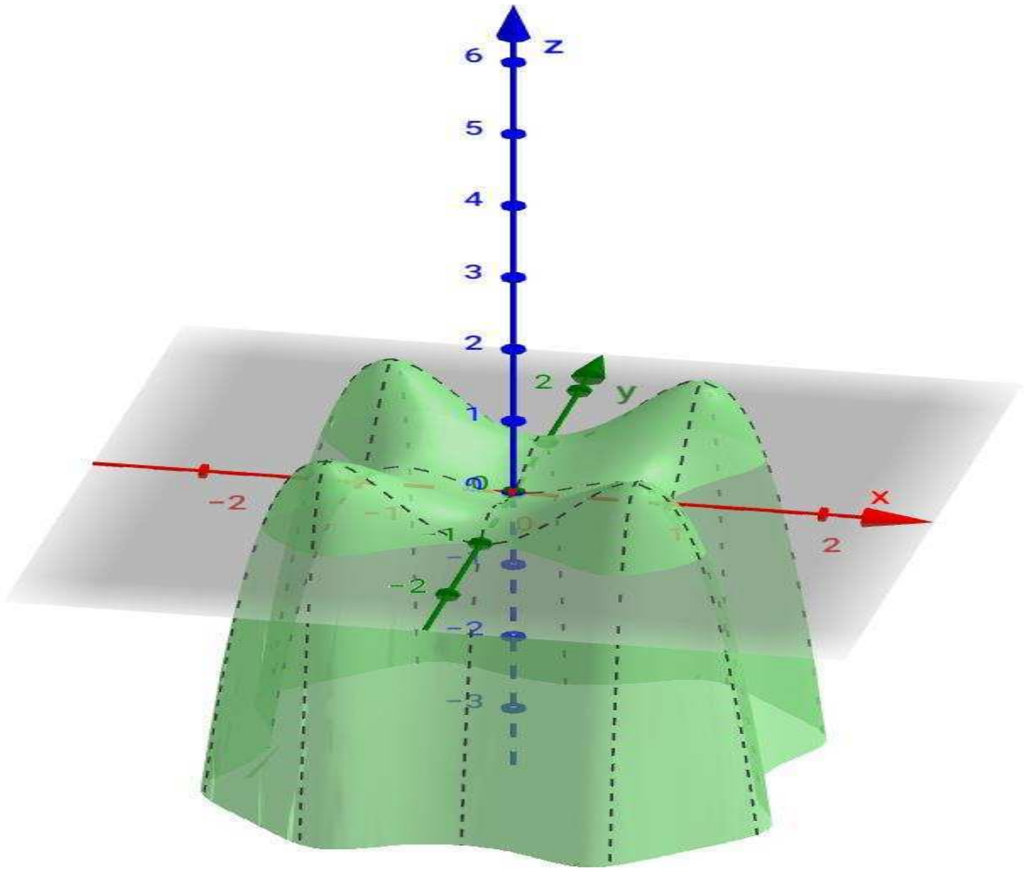
3. **1-nji surat.**



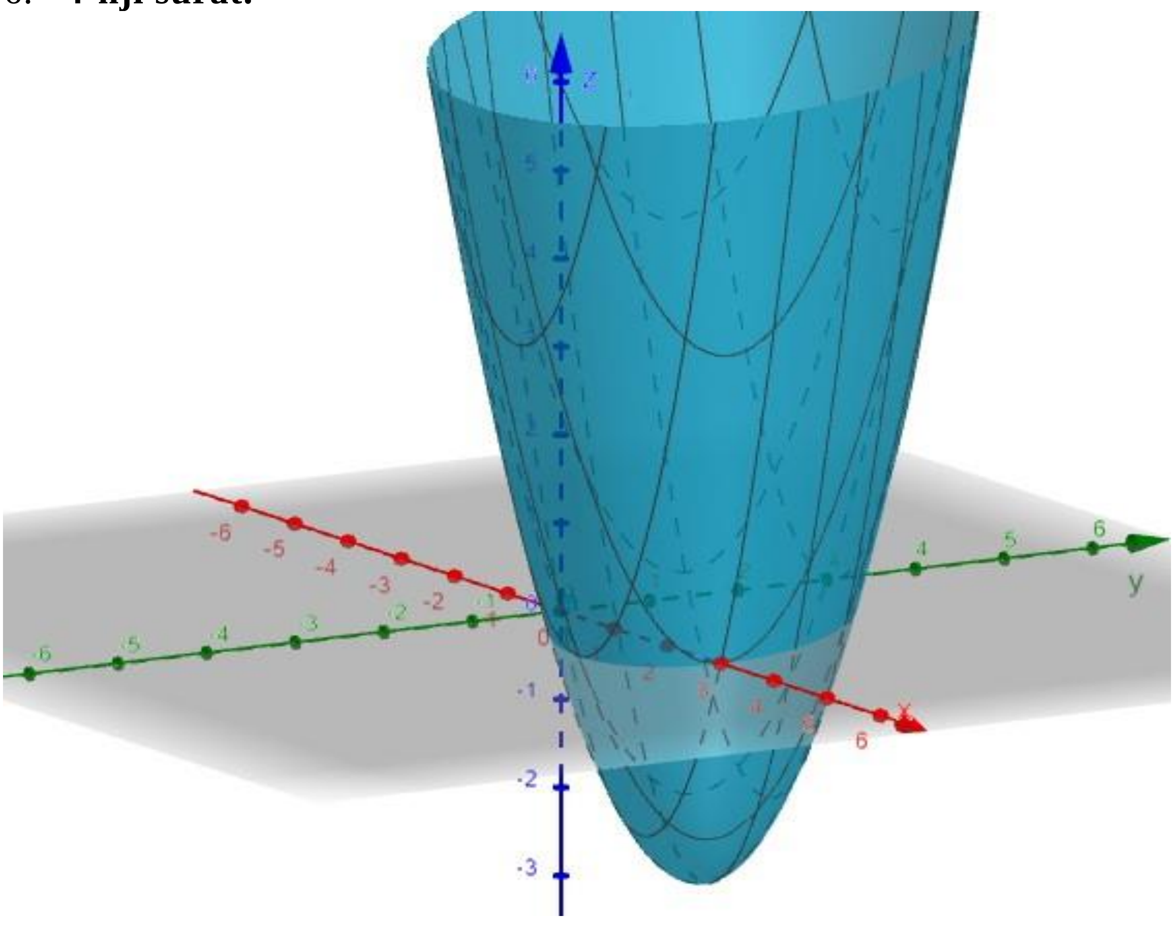
4. **2-nji surat.**



5. **3-nji surat.**



6. **4-nji surat.**



7. Köp üýtgeýän ululykly funksiýalaryň ekstremum nokatlarynyň tapylyşy baradaky teoremalaryň subutlary

8. Teýloryň hatarynyň formulasynyň subudy:

Mazmuny: