TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

B. Kömekow, O. Annaorazow, H. Geldiýew,
A. Öwezow

ANALITIKI GEOMETRIÝA

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat – 2010

B. Kömekow, O. Annaorazow, H. Geldiýew, A. Öwezow

Analitiki geometriýa. – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda analitiki geometriýa dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

Giriş

Analitiki geometriýa matematikada esasy orun tutýar. Bu okuw kitabynda ilkibaşda analitiki geometriýanyň esasy düşünjeleri beýan edilýär. Onda nazary maglumatlary berkitmek üçin anyk mysallar işlenip görkezilýär. Soňra çyzykly algebranyň esaslary getirilýär we köpsanly mysallar işlenip görkezilýär.Okuw kitaby matematik talyplara niýetlenendir.

1.Wektorlar algebrasynyň elementleri.
Wektorlar.
Wektorlaryň kesgitlemesi.

Göni çyzygyň kesimi iki sany deňhukukly nokatlaryň – uçlaryň kömegi bilen berilýär. Emma nokatlaryň tertipleşdirilen jübüti arkaly kesgitlenen ugrukdyrylan kesime-de garamak bolardy. Ýokarda agzalan nokatlaryň haýsysynyň ilkinji /başlangyç/, haýsysynyň ikinji /ahyrky / bize belli bolmaly.

KESGITLEME: Ugrukdyrylan kesime /şeýle hem nokatlaryň tertipleşdirilen jübütine/ **wektor** diýip at berilýär. Wektorlaryň toparyna başlangyjy we ahyry gabat gelýän we nul wektor diýip atlandyrylýan wektory hem goşjakdyrys.

Kesimiň ugry strelkanyň kömegi bilen bellenýär. Wektoryň harply belgisiniň ýokarsynda strelka goýulýar. Meselem: $\overrightarrow{AB}$ /şu ýazgyda wektoryň başlangyjyny görkezýän harp ilki ýazylýar/. Kitaplarda wektoryň belgisini strelkadan başga garamtyk harp bilen hem aňladylýar. Nol wektory $\vec{0}$ ýa-da 0 bilen belgiläris.

Wektoryň başlangyjy bilen ahyrynyň arasyndaky uzaklyga onuň uzynlygy / şeýle hem onuň moduly , obsolýut ululygy / diýilýär. Wektoryň uzynlygy $|\vec{a}|$ ýa-da $|\overrightarrow{AB}|$ görnüşde belgiläris.

Eger wektor bir göni çyzykda ýerleşen bolsa ýa-da parallel göni çyzyklarda ýerleşen bolsa, ýagny gysgaça aýdanymyzda, şu wektorlaryň hemmesine parallel bolan göni çyzyk bar bolsa, onda şu wektorlara **kollinear** wektorlar diýilýär.

Eger wektorlar bir tekizlikde ýerleşen bolsa ýa-da parallel tekizliklerde ýerleşen bolsa, gysgaça aýdylanda, eger şu wektorlaryň hemmesine parallel bolan tekizlik bar bolsa, onda bu wektorlara **komplanar** wektorlar diýilýär.

Nul wektoryň belli bir kesgitlenen ugry ýok, şonuň üçinem ony islendik wektora kollinear diýip hasaplaýarlar. Onuň uzynlygy, elbetde, nula deňdir.

KESGITLEME: Eger iki wektor kollinear bolsa, olar bir tarapa ugrukdyrylan bolsa we olaryň uzynlyklary deň bolsa, onda bu iki wektora **deň wektorlar** diýilýär.

Bu kesgitlemeden aşakdaky gelip çykýar:biz islendik A' nokady alyp, käbir berlen AB wektora deň bolan $\overrightarrow{A'B'}$ wektory gurup bolýar / özünem diňe bir wektor/ ýa-da käwagt aýdylyşy ýaly $A'B'$ wektory A' nokada göçürip bolýar.

Wektoryň üstünde çyzykly amallar.

Wektorlaryň üstündäki çyzykly operasiýalara wektorlary goşmak we wektory sana köpeltmek girýär.Olaryň kesgitlemelerini ýatlalyň.

KESGITLEME: Goý, bize $\overrightarrow{a}$ we $\overrightarrow{b}$ wektorlar berlen bolsun. Olara deň bolan $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BÇ}$ wektorlary guralyň ýagny $\overrightarrow{a}$ wektoryň ahyryny we $\overrightarrow{b}$ wektoryň başlangyjyny erkin B nokada geçireliň. Şonda $\overrightarrow{AÇ}$ wektora $\overrightarrow{a}$ we $\overrightarrow{b}$ wektorlaryň jemi diýilýär we $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ bilen belgilenýär.

BELLIK:B nokadyň deregine başga bir B'- nokady alan bolsak, onda biz jem hökmünde başga $\overrightarrow{AÇ}$ wektora deň bolan $\overrightarrow{AÇ'}$ wektory alardyk.

Iki wektoryň jemini olara degişli edýän amala **wektorlary goşmak** diýilýär.

KESGITLEME: Eger $\overrightarrow{B}$ wektor aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan, ýagny:

I. $\overrightarrow{|b|} = |\alpha| * \overrightarrow{|a|}$

II. $\vec{b}$ wektor $\vec{b}$ wektora kollinear.

III. Eger $\alpha>0$ bolanda $\vec{b}$ we $\vec{a}$ wektorlar bir tarapa ugrukdyrylan, eger- de $\alpha > 0$ bolanda, olar garşylykly taraplara ugrukdyrylan bolsa, onda $\vec{b}$ wektora $\vec{a}$ wektoryň **α sana köpeltmek hasyly** diýilýär. Elbetde $\alpha=0$ bolsa, onda $\vec{b}=\vec{0}$ bolýandygy I-nji şertden gelip çykýar.

$\vec{a}$ wektoryň α sana köpeltmek hasyly $\alpha*\vec{b}$ bilen belgi-lenilýär. Wektorlaryň üstündäki çyzykly operasiýalaryň esasy häsiýetlerini sanap geçeliň.

I. Wektorlary goşmak kommutatiwdir, ýagny islendik iki $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar üçin $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ deňlik ýerine ýetýär.

2. Wektorlary goşmak assosiatiwdir, ýagny $\vec{a}, \vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar üçin $/\vec{a}+\vec{b}/+\vec{c}=\vec{a}+/\vec{b}+\vec{c}/$ deňlik ýerine ýetýär.

3. Islendik $\vec{a}$ wektoryň üstüne $\vec{0}$ wektor goşulanda $\vec{b}$ wektor üýtgemeýär: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Şu ýerde bir kesgitlemäni ýatlalyň: **Eger iki wektoryň jemi nol wektora deň bolsa, onda ol wektorlara garşylykly wektorlar diýilýär.**

4. Islendik $\vec{a}$ wektor üçin /-1/ $\vec{a}$ wektor garşylyklydyr, ýagny $\vec{a}$/-1/$\vec{a}=\vec{0}$

5. Wektory sana köpeltmek assosiatiwdir, ýagny islendik $\vec{a}$ wektor üçin $/\alpha\,\beta/\vec{a}=\alpha/\beta\,\vec{a}/$ deňlik ýerine ýetýär.

6. Wektory sana köpeltmek sanlary goşmaga görä distributiwdir, ýagny islendik α we β sanlar üçin we islendik $\vec{a}$ wektor üçin $/\alpha + \beta/\vec{a} = \vec{a} + \beta * \vec{a}$ deňlik ýerine ýetýär.

7. Wektory sana köpeltmek wektorlary goşmaga görä distributiwdir, ýagny islendik α sana we islendik $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar üçinα $./\vec{a} + \vec{b}/ = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ deňlik ýerine ýetýär.

8. Wektory birlik sana köpeltmek ony üýtgetmeýär, ýagny $I.\vec{a} = \vec{a}$;

$\vec{a}$ wektora garşylykly bolan wektor $\overrightarrow{-a}$ bilen belgilenýär. $\vec{a}$ wektora we $\vec{b}$ wektora garşylykly bo;an $\overrightarrow{-b}$ wektoryň jemine, ýagny $\vec{a} + /\overrightarrow{-b}/$ ýa-da gysgaça $\vec{a} - \vec{b}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ **wektorlaryň tapawudy** diýilýär.

Goşmak amalyna ters bolan we iki wektora olaryň tapawudyny degişli edýän amala **wektorlary aýyrmak** diýilýär:iki wektoryň $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ jemi boýunça we goşulyjylaryň biri bolan $\vec{b}$ wektor boýunça biz ikinji goşulyjyny tapyp bilýäris, ýagny

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$$

Aýyrmak amaly goşmagyň üsti bilen kesgitlenenligi sebäpli, ony mundan beýläk aýratyn amal hasp etjek däldiris. Şeýle hem wektory α≠0 sana bölmegi aýratyn kesgitläp durmarys, çünki ony α^{-1} sana köpeltmek bilen çalşyryp bolýar.

Çyzykly operasiýalary ulanyp, sana köpeldeliň wektorlardan jem düzüp bilýäris:$\alpha_1 \vec{b_1} + \alpha_2 \vec{b}_2 + \cdots\cdots + \alpha_k \vec{b_k}$ şu görnüşdäki aňlatmalara **wektorlaryň çyzykly kombinasiýalary** diýilýär.Çyzykly kombinasiýa girýän sanlara ol kombinasiýanyň **koeffisientleri** diýilýär.

Çyzykly operasiýalaryň ýokarda sanalyp geçilen häsiýetleriň kömegi bilen çyzykly kombinasiýalardan düzülen aňlatmalary

algebranyň adaty düzgünleri arkaly özgerdip bolýar, ýagny skobkalary açmak, meňzeşçlenleri toparlamak, käbir çleni garşylykly alamaty bilen deňligiň beýleki bölegine geçirmek we şuňa meňzeş operasiýalary ýerine ýetirip bolýar.
Wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy aşakdaky öz-özünden düşnükli häsiýetlere eýedir,eger $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,.......,$\vec{a_n}$ wektorlar kollinear bolsa, onda olaryň islendik çyzykly kombinasiýasy şol wektorlara kollineardyr,eger $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,.......,$\vec{a_k}$ wektorlar komplanar bolsa, onda olaryň islendik çyzykly kombinasiýasy olar bilen komplanardyr. Bu häsiýet $\alpha\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora kollinearlygyndan we wektorlaryň jeminiň şol wektorlaryň tekizliginde ýerleşýändiginden , hatda goşulyjylar kollinear bolanda, olar bilen bir göni çyzykda ýerleşýändiginden gelip çykýar.

KESGITLEME:Göni çyzykda islendik nul däl wektora **bazis** diýip bolýar.

Tekizlikde belli bir tertipde alnan iki sany özara kollinear däl wektora **bazis** diýilýär.Giňişlikde belli bir tertipde alnan üç sany komplalar däl wektora **bazis** diýilýär.

BELLIK: Tekizlikdäki bazisiň wektorlary nul wektor bolup bilmeýär, çünki olaryň biri nul-wektor bolaýsa, olar kollinear bolardy.Şeýle hem giňişligiň bazisiniň ikisi kollinear bolup bilmez, çünki şeýle bolanlygyna olaryň üçüsi hem komplanar bolardy.

Eger wektor birnäçe wektoryň çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladylan bolsa, onda ol wektor berlen wektorlar boýunça dagydylan diýilýär.Köplenç wektoryň bazis wektorlary boýunça dagytmasyna
garalýar.

KESGITLEME: Eger $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,$\vec{a_3}$ wektorlar giňişlikde bazis wektorlary bolsa we $\vec{a}=\alpha_1\vec{b_1}+\alpha_2\vec{b_2}+\alpha_3\vec{b_3}$ bolsa, onda $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sanlara $\vec{a}$ wektoryň berlen bazisdäki **kompanentalary** / ýa-da kosdunatalary /diýilýär. Wektoryň tekizlikdäki we göni çyzykdaky kompanentalary edil ýokardaky ýaly kesgitlenilýär. Wektoryň komponentalaryny harply belgilenmäniň yzyndan skobkalarda ýazýarlar. **MESELEM:**$\vec{a}$/1,0,1,/ ýazgy $\vec{a}$ wektoryň giňişlikde berlen käbir bazisde kompanentalarynyň degişlilikde I-e, 0-a we I-e deňdigini aňladýar.

1-nji Teorema : Käbir göni çyzyga parallel bolan her bir wektor şol göni çyzykdaky bazis boýunça dagadylyp bilner.

Subudy: Bu tassyklama aşakdakyny aňladýar . Nul däl $\vec{e}$(göni çyzykdaky bazis) wektora kolleniýar bolan her bir $\vec{e}$ wektor üçin α san tapylyp, $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{e}$ deňlik ýerine ýeter. Şeýle san $\vec{a}$ we $\vec{e}$ wektorlaryň birmeňzeş ugrukdyrylandygyny ýa-da olaryň garşylykly ugrukdyrylandygyna baglylykda ýa $\vec{a}/\vec{e}$ sana ýa-da $\vec{a}:\vec{e}$ sana deň bolar.

2-nji teorema: Haýsydyr bir tekizlige parallel bolan wektory şol tekizlikde alnan bazis boýunça çyzykly kombinasiýa dagydyp bolar.

SUBUDY: Bu tassyklamanyň manysy aşakdakydan ybarat. Özara kollinear däl iki sany $\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar bilen komplanar $\vec{a}$ wektor üçin /$\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar şol iki tekizlikde bazis mele getirýärler / $\vec{\alpha_1}$ we $\vec{a_2}$ sanlar tapylyp, $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ deňlik ýerine ýeter. Bu sanlary görkezmek üçin berlen wektorlaryň /$\vec{a}$,$\vec{a_1}$,we $\vec{a_2}$ / üçüsiniň hem başlangyçlaryny bir 0 nobatda ýerleşdireris we $\vec{a}$ wektoryň A ahyryndan $\vec{a_2}$ wektora parallel bolan AP göni çyzygy geçireris.

Onda wektorlary goşmagyň kesigtlemesinden alarys: $\vec{OA}=\vec{OP}+\vec{PA}$, özünem $\vec{OP}$ wektor bolsa $\vec{a_1}$ wektora kollinear,$\vec{PA}$ wektor bolsa, $\vec{a_2}$

wektora kollinear./Hususy halda $\vec{OP}$ we $\vec{PA}$ wektorlaryň islendiginiň nul wektor bolmagy mümkin/.Indi $\vec{OP}$we $\vec{PA}$ wektorlar üçin 1-nji teoremanyň tassyklamasyndan peýdalanýarys:

$\vec{OP}=\propto_1 \vec{a_1}$ we $\vec{PA}=\propto_2 \vec{a_2}$ bu ýerden $\vec{OA}=\propto_1 \vec{e_1}+\propto_2 \vec{e_2}$

ýa-da $\vec{a}=\propto \vec{e_1}+\propto_2 \vec{e_2}$

3-NJI TEOREMA: Her bir wektory giňişlikde alnan bazis boýunça dagydyp bolar.

SUBUDY: Bu teoremanyň tassyklamasy aşakdaky ýalydyr.Her bir $\vec{a}$ we komplanar däl $\vec{a_1}$,$\vec{a_2}$,we $\vec{a_3}$ wektorlar üçin α_1,α_2 we α_3 sanlar tapylyp:

$\vec{a}=\alpha_1 \vec{\propto_1}+a_2 \vec{\propto_2}+a_3 \vec{\propto_3}$ deňlik ýerine ýetýär.

Teoremany subut etmek üçin dört wektoryň hemmesiniň başlangyçlaryny bir 0 nokatda ýerleşdireliň. Soňra $\vec{a}$ wektoryň A ahyryndan $\vec{a_3}$ wektora parallel bolan AP göni çyzygy geçirýäris.Onda $\vec{OA}=\vec{OP}+\vec{PA}$ bolar, özünem $\vec{PA}$ wektor $\vec{a_3}$ wektora kollinear.$\vec{OP}$ wektor bolsa,$\vec{a_1}$ we $\vec{a_2}$ wektorlar bilen komplanardyr.Ýokarda subut edilen 1-nji we 2-nji teoremalaryň esasynda alarys:$\vec{PA}=\alpha_3 \vec{e_3}$ we $\vec{OP}=\alpha_1 \vec{e_1}$ + $\alpha_2 \vec{e_2}$, onda

$\vec{OA}=\alpha_1 \vec{e_1}+a_2 \vec{e_2}$ + $a_3 \vec{e_3}$ ýa-da $\vec{a}=\alpha_1 \vec{e_1}+\alpha_2 \vec{e_2}+\alpha_3 \vec{e_3}$

4-NJI TEOREMA:Ýokarda getirelen üç teoremanyň üçüsinde hem kompanentalar birbahaly kesgitlenýärler.

Bu tassyklamany garşylykly guman etmek usuly bilen subut edeliň,ýagny käbir $\vec{a}$ wektor giňişlikde alnan bazis boýunça dürli iki görnüşde dagydylypdyr diýip guman edeliň: $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ we $\vec{a}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3}$.

Birinji aňlatmadan ikinji aňlatmany çlenme –çlen aýryp alarys:

$$(\alpha_1-\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e_2}+(\alpha_3-\beta_3)\vec{e_3}=0$$

Eger şu tapawutlaryň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolsa, onda biz bazis wektorlarynyň birini beýleki ikisi boýunça dagydyp bileris.Mysal üçin: eger $\alpha_1-\beta_{1\neq0}$ bolsa, onda alarys:$\vec{e_1}=\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}\vec{e_2}-\frac{\alpha_3-\beta_3}{\alpha_1-\beta_1}\vec{e_3}$. Bu bolsa,bazis wektorlarynyň komplanar däldigine garşy gelýär.Alnan gapma-garşylyk bolsaher bir wektoryň şol bir bazis /giňişlikde/ boýunça dagytmasynyň ýeke-täkdigini subut edýär.Göni çyzygyň bazisi, tekizligiň bazisi boýunça-da, dagytmagyň ýeke-täkdigi edil giňişlikdäki ýaly subut edilýär.

Ahyrky teoremanyň subutyna göz aýlasak,biz onuň aşakdaky sözlemiň hem subutydygyny seljereris.

TEOREMA: Deň wektorlaryň bir meňzeş kompanentalary bardyr.

Analitik geometriýada wektorlar baradaky geometrik tassyklamalar şu wektorlaryň kompanentalarynyň üstünde geçirilýän hasaplamalara getirilýär.Aşakdaky iki sözlem öz kompanentalary bilen berlen wektorlaryň üstünde çyzykly operasiýalary nähilli ýerine ýetirilýändigi görkezýär.

SÖZLEM: Wektory sana köpeltmek üçin onuňkompanentalarynyň her birini sana köpeltmek gerek.Hakykatdan-da, eger $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ bolsa, onda

$\lambda\vec{a}=\lambda(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3})=(\lambda\alpha_1)\vec{e_1}+(\lambda\alpha_2)\vec{e_2}+(\lambda\alpha_3)\vec{e_3}$.

SÖZLEM: Iki wektor goşulanda olaryň degişli kompanentalary goşulýarlar.Hakykatdan hem, eger $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}$ we $\vec{b}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3}$ bolsa, onda

$\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$
$+\alpha_3\vec{e_3})+(\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\beta_3\vec{e_3})=(\alpha_1+\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2+\beta_2)\vec{e_2}+(\alpha_3+\beta_3)$
$\vec{e_3}$.

2.WEKTORLARYŇ ÇYZYKLY BAGLYLYGY.

Eger birnäçe wektoryň çyzykly kombinasiýasynyň ähli koeffisientleri nula deň bolsa,onda oňa **triwial çyzykly kombinasiýa** diýilýär.Elbetde, islendik wektorlardan düzülen triwial göni çyzykly kombinasiýa nul wektora deňdir. Çyzykly kombinasiýanyň iň bolmanda bir koeffisirnti nuldan tapawutly bolsa, onda oňa **triwial däl** çyzykly kombinasiýa diýilýär.

KESGITLEME: Eger $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_n}$ wektorlaryň nula deň bolan dik triwial däl çyzykly kombinasiýasy bar bolsa, onda olara **çyzykly bagly wektorlar** diýilýär.Başgaça aýdylanda eger $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2},.........\vec{\alpha_n}$ sanlar bolup, $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+.........\alpha_k\vec{a_k}=0$ we $\alpha_1^2+\alpha_2^2+......\alpha_k^2\neq0$ bolsa, onda $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlara çyzykly bagly gektarlar diýilýär.

Garşylykly halda, ýagny $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlaryň diňe triwial çyzykly kombinasiýasy nula deň bolsa, onda ol wektorlara **çyzykly bagly däl wektorlar** diýilýär.Eger wektorlar çyzykly bagly däl bolsa, onda , $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+.........\alpha_k\vec{a_k}=0$ deňlikden $\alpha_1=\alpha_2=........=\alpha_n$ gelip çykýar.

Çyzykly baglylyk düşünjesiniň aşakdaky häsiýetlerini belläp geçeliň.

Eger $\vec{a_1}, \vec{a_2},.........\vec{a_k}$ wektorlaryň arasynda nul wektor bar bolsa, onda olar çyzykly baglydyrlar.Hakykatdan-da,olaryň çyzykly kombinasiýasynda nul wektorlaryň koeffisientinil-e deň diýip, beýleki wektorlaryň koeffisientlerinihula deň diýip kabul etsek, onda bu çyzykly kombinasiýa triwial däl, emma nula deň bolar.

Eger $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots\ldots \vec{a}_k$ wektorlaryň çyzykly bagly ulgamyna bir ýa-da birnäçe $b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$, wektorlar goşulsa, onda täze alnan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots\ldots \vec{a}_k, b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$ ulgama hemçyzykly bagly bolar.Hakykatdan-da, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots\ldots \vec{a}_k$, wektorlaryň nula deň bolan triwial däl çyzykly kombinasiýasyna $b_1, b_2, \ldots\ldots b_j$ wektorlaryň her birini nula köpeldip goşsak, ýene-de nula deň bolan triwial däl çyzykly kombinasiýanyalarys.

TEOREMA: Berlen wektorlaryň ulgamynyň çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň biriniň beýleki wektorlaryň çyzykly kombinasiýasyna dagydylmagy zerur hem ýeterlikdir.

SUBUDY: Goý, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots\ldots \vec{a}_k$, wektorlar çyzykly bagly bolsun,ýagny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n$ koeffisientler tapylyp, $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots\ldots\ldots \alpha_k \vec{a}_k$ bolsun we iň bolmanda olaryň biri, meselem, α_1 nuldan tapawutly bolsun. Bu halda , $\vec{a}_1$ wektor $\alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasydyr. Hakykatdan-da,biz ony $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \ldots\ldots\ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{a}_k$ görnüşde aňladyp bileris.

Tersine, goý indi berlen wektorlaryň biri, mysal üçin $\vec{a}_1$ wektor beýleki wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladyp bolsun,ýagny $\vec{a}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 \boldsymbol{\alpha}_3 + \ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\alpha}_k$ bolsun.

Bu ýerden $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots\ldots \vec{a}_k$ wektorlaryň $-1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ koeffisientli çyzykly kombinasiýanyň nula deňdigi görnüp dur. Bu çyzykly kombinasiýanyň triwial deňligi sebäpli, $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_k}$ ewktorlar çyzykly baglydyr.

Çyzykly baglylyk düşünjesine degişli ýene-de birnäçe tassyklama garalyň.

Teorema:Özara kollinear iki wektor çyzykly baglydyr. Tersine,çyzykly bagly iki wektor hemişe kolleneardyr.

Hakykatdan-da, goý bize iki sany kollinear bolan wektor berlen bolsun.Olaryň nul wektor bolmagy hem mümkin, onda tassyklamanyň dogrudygy görnüp dur, olaryň biri nul däl wektor bolmagy mümkin, onda ikinji wektor onuň üsti bilen aňladylýar. Iki halda hem wektorlar çyzykly baglydyrlar.

Tersine,ýokarda subut edilen tassyklama görä çyzykly bagly iki wektoryň biri beýlekisiniň üsti bilen çyzykly aňladylýar,diýmek olar kollineardyrlar.

TEOREMA: Islendik komplanar üç wektor çyzykly baglydyr we tersine, çyzykly bagly üç wektor komplanardyr.

SUBUDY: Goý, üç sany komplanar wektor berlen bolsun.Olaryň haýsydyr ikisine garalyň.Eger olar kolinear bolsalar, onda olar özara çyzykly baglydyr, şeýle hem olar üçünji wektor bilen çyzykly bagly bolarlar.Eger-de alnan iki wektor kollinear däl bolsa, onda üçünji wektoryolaryň üsti bilen aňladyp bolar we şoňa görä-de çyzykly bagly bolarlar.

Tersine, çyzykly bagly üç wektoryň biri beýleki ikisiniňüsti bilen aňladylýar, diýmek, ol beýleki iki wektor bilen komplanardyr / eger beýleki iki wektor kollinear bolsa, onda ol üçünji wektor hem olara kolinear bolar./

TEOREMA: Her bir dört wektor çyzykly baglydyr.

Hakykatdan-da,berlen dört wektoryň islendik üçüsine garalyň.Eger olar komplanarlar bolaýsa, onda olar özara çyzykly baglydyr we dördünji wektor bilen hem çyzykly bagly ulgamy düzerler. Eger-de olar komplanar däl bolsa, onda dördünji wektor olaryň çyzykly kombinasiýasyna dagydylýar, bu bolsa olaryň çyzykly baglydygyny görkezýär.

3.KORDINATALAR ULGAMLARY. KORDINATOLARYŇ DEKART ULGAMY.

Giňişlikde 0-nokady fiksirläp, M nokada garalyň. $\overrightarrow{OM}$ wektora 0 nokada görä M nokadyň **radius-wektory** diýilýär. Eger giňişlikde, 0 nokatdan başga, käbir bazis hem saýlanyp alnan bolsa, onda M nokada sanlaryň tertipleşdirilen üçlügini – M nokadyň radius-wektorynyň kompanentalaryny – degişli edip bolar.

KESGITLEME: Nokadyň we bazisiň toplumyna **koordinatalaryň** giňişlikdäki **dekart ulgamy** diýilýär.Bu nokada **kordinatalar başlangyjy** diýip at berilýär, koordinatalar başlangyjyndan bazis wektorlarynyň ugry boýunça geçýän göni çyzyklara koordinata oklary diýilýär.Olaryň birinjisinie **obsissalar oky**, ikinjisine **ordinatalar oky** diýilýär, üçünjisine bolsa **oplikatalar oky** diýilýär. Koordinatalar oklarynyň üstünden geçýän tekizliklere koordinatalar tekizlikleri diýilýär.

KESGITLEME:M nokadyň kordinatalar başlangyjyna görä radius-wektorynyň kompanentalaryna M nokadyň garalýan koordinatalar ulgamyndaky **koordinatalary** diýilýär.Şonda birinji koordinata **obsissa,** ikinjisine **ordinata,** üçünjisine bolsa **aplikata** diýilýär.

4.KOORDINATALARYŇ GÖNÜBURÇLY DEKART ULGAMY.

Koordinatalaryň dekart ulgamlary käbir ýörüte alnan ulgamlaryna - gönüburçly dekart ulgamlaryna – görä seýrek ulanylýar.

KESGITLEME. Eger bazisiň wektorlary jübüt – jübütden ortogonal bolup , olaryň uzynlyklary birlige deň bolsa , onda bu bazise ortonormirlenen bazis diýilýär. Bazisi ortonormirlenen koordinatalaryň dekart ulgamyna koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamy diýilýär. Geljekde biz koordinatalaryň diňe gönüburçly dekart ulgamyndan peýdalanjakdyrys. Bu ulgamda bazis wektorlaryny **i , j** we **k** harplar bilen belgilejekdiris. Olara ortlar diýip at berilýär. Giňişlikde her bir radius-wektoryň

$\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$ dagytmasy bardyr.

Tekizlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyna görä nokadyň koordinatalary hem edil ýokardaky ýaly tapylýar.

Giňişlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyna $/o, i, j, k/$ garalyň we şol ulgamda A hem B iki nokady alalyň , goý, olaryň koordinatalary degişlilikde $x_1, y_1, z_1,$ we x_2, y_2, z_2 bolsun.

Goý öňümizde $\overrightarrow{AB}$ wektoryň dagytmasyny tapmak meselesini goýalyň.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ bolýandygy çyzgydan görüner. $\overrightarrow{OB}$ we $\overrightarrow{OA}$ radius-wektorlaryň dagytmasyny ýazalyň: $\overrightarrow{OB} = x_2$ i + y_2 j + $+x_3$ k $\overrightarrow{OA}=x_2$ i + y_1 j $+z_1$ k. Bazis boýunça dagydylan wektorlary aýyrmak /goýmak/ düzgüni boýunça ýazarys:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1)\,i+(y_2-y_1)\,j+(z_2-z_1)\,k$$

Şeýlelikde, aşakdaky tassyklama subut edildi. Wektoryň komponentalaryny /koordinatalaryny/ tapmak üçin onuň ahyrynyň koordinatalaryndan başlangyjynyň degişli koordinatalaryny aýyrmak gerek.

5.KESIMI BERLEN GATNAŞYKDA BÖLMEK.

AB kesimde ony $\lambda > O$ gatnaşykda bölýän, ýagny $\frac{|AM|}{|MB|}=\lambda$ şerti kanagatlandyrýan, M nokadyň koordinatalaryny tapalyň. Ýokardaky şerti wektor görnüşde şeýle ýazyp bolar:

$$\overrightarrow{AM}=\lambda * \overrightarrow{MB}$$

A we B nokatlaryň koordinatalaryny degişlilikde $/x_1, y_1, z_1, /$ we $/x_2, y_2, z_2/$ bilen, M nokadyň koordinatalaryny bolsa $/x_0, y_0, z_0/$ bilen belgiläp, biz / i / deňligiň iki bölegini-de bazis boýunça dagydarys, özünem $\overrightarrow{AM}$ we $\overrightarrow{MB}$ wektorlaryň komponentalaryny ýokarda subut edilen tassyklama esasynda taparys:

$$\overrightarrow{AM}=/\,x_0-x_1\,/\,i+/\,y_0-y_1/\,j+/\,z_0-z_1\,/\,k \quad \text{we}$$

$$\overrightarrow{MB}=/\,x_2-x_0\,/\,i+/\,y_2-y_0\,/j+/\,z_2-z_0\,/\,k$$

Onda / i / deňlik aşakdaky görnüşe eýe bolar:

(x_0-x_1) I + $(y_0-y_1)j$ + $(z_0-z_1)k=\lambda$ ((x_2-x_0) i + $(y_2-y_0)j$+ $(z_2-z_0)k$)

Bu ýerden iki wektoryň deňligi esasynda alarys:

$$x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0)\,,$$
$$y_0-y_1=\lambda\,(y_2-y_0)\,,$$
$$z_0-z_1=\lambda\,(z_2-z_0)\,.$$

Bu ulgamy çözüp tapýarys:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,,\quad y_0=\frac{y^{1+\lambda y_2}}{1+\lambda}\,,\quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad /\,2\,/$$

Bu formulalara kesimi berlen gatnaşykda bölmegiň formulalary diýilýär. Eger biz / 2 / formulalarda λ sany otirsatel etsek, onda / 1 / deňlikden görnüşi ýaly M /x_0, y_0, z_0 / nokat bary bir şol AB göni çyzykda ýatýar, emma M nokat AB kesimden daşarda ýerleşýär, M nokat AB kesimi / λ / gatnaşykda bolar. Şonuň üçin hem / 2 / formulalar has umumyrak meseläniň çözülişini berýärler. Has takygy, şol formulalaryň kömegi bilen kesimi berlen gatnaşykda içki nokat bolup hem, daşky nokat bolup hem bolýan hallarynda ol nokadyň koordinatalaryny tapmak bolýar.

Tekizlikde kesimi berlen gatnaşykda bolmak meselesi edil giňişlikdäki ýaly çözülýär, ýöne bu halda bazis iki wektordan ybarat we şonuň üçinem / 2 / formulalardan diňe iki sanysy alynýar.

Eger M nokat AB kesimiň ortasy bolsa, onda λ=i bolýar we / 2 / formulalar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\,,\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\,,\; z_0=\frac{z_1+Z_2}{2}$$

Bu formulalara kesimi deň ýarpa bölmegiň formulalary diýilýär.

6.KOORDINATALARYŇ POLÝAR ULGAMY.

Koordinatalaryň dekart ulgamy nokadyň käbir geometrik obraza görä ýagdaýyny kesgitlemegiň ýeke-täk usuly däldir. Munuň üçin koordinatalar sistemalarynyň dürli-dürli görnüşleri ulanylyp bilner. Şu ýerde biz olaryň birnäçesini beýan edýäris.

Tekizlikde koordinatalaryň polýar ulgamy ýygy-ýygydan ulanylýar. Ol ulgamy bermek üçin polýus diýip atlandyrylýan

O nokatdan çykýan P şöhle alýarlar. M nokadyň ýagdaýy iki san bilen fiksirlenýär: olaryň biri $r = \overrightarrow{|OM|}$ radius, beýlekisi bolsa polýar ok bilen $\overrightarrow{OM}$ wektoryň arasyndaky φ burçdyr. φ burça **polýar burç** diýilýär. Biz ony radianlarda ölçäris we polýar okdan sagat strelkasynyň tersine bolan ugur boýunça hasaplarys.

Polýusda $r = 0$, emma φ kesgitsiz galýar. Başga nokatlar üçin $r > 0$ we burç 2π sana kratny bolan goşulyjynyň takyklygy bilen kesgitlenýär. Bu aýdylanlara şeýle düşünmeli. Mysal üçin, sanlaryň (r ; φ) , (r ; φ+2π) we umuman (r; $\varphi + 2kl$), bu ýerde k- islendik bitin san, jübütleri şol bir M nokadyň polýar koordinatalaryny aňladýarlar.

Käbir halatlarda polýar burçuň üýtgeýiş oblastyny belli bir şertler bilen çäklendirýärler, meselem, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ýa-da $-\pi \le \varphi \le \pi$.

Goý, bize koordinatalaryň polýar ulgamy we sanlaryň / r; φ / jübüti berlen bolsun, bu ýerde r - otrisatel däl san. Biz bu jübüte polýar koordinatalary M Y sanlar bolan M nokady degişli edip bileris. Hakykatdan-da, eger r>0 bolsa, onda ol jübüte uzynlygy r bolan we polýar ok bilen φ burçy düzýän radius-wektorly M nokady degişli edýäris. Şunlukda, eger r-r_1 we φ-φ_1=2πk, bu ýerde k- bitin san bolsa, onda / r; φ / we /r_1; φ_1/ jübütlere şol bir nokat degişli bolýar.

Tekizlikde koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamyny alalyň, özünem koordinatalar başlangyjyny polýusda ýerleşdirýäris we uzynlyklary 1-e deň bolan wektorlaryň/ / $\overrightarrow{i_1}$ =i,$\overrightarrow{i_2}$=j/ birini polýar okuň ugry boýunça ugrukdyrýarys, beýlekisini bolsa ol oka $\frac{\pi}{2}$ burç boýunça ugrukdyrýarys. Suratdan görnüşi ýaly, nokadyň dekart koordinatalary şol nokadyň polýar koordinatalary arkaly aşakdaky formulalar bilen aňladylýar: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

7.SILINDRIK KOORDINATALAR.

Giňişlikde silindrik koordinatalar aşakdaky ýaly girizilýär.Fiksirlenen φ tekizlikde käbir O nokady we çykýan OX şöhläni alýarys. Mundan başga-da O nokadyň üstünden φ tekizligine perpendikulýar bolan oz oka garalyň. Goý M giňişligiň islendik nokady bolsun, onuň φ tekizlige proeksiýasyny N bilen belgiläliň , M nokadyň oz oka proeksiýasy M_2 bolsun. Sanlaryň r, φ we z üçligine M nokadyň silindrik koordinatalary diýilýär, bu sanlaryň ilkinji ikisi /r we φ/ O polýusa we OX polýar oka görä N nokadyň α tekizlikdäki polýar koordinatalarydyr. $r,$ φ we z silindrik koordinatalary bolan M nokady M/r ; $\varphi; z$ / bilen belgileýärler.

"Silindrik koordinatalar" diýen at $r = const$ koordinataly üstüň silindr bolýandygy sebäpli ýüze çykypdyr, ýagny şol bir r koordinataly üstüň silindr bolýandygy sebäpli ýüze çykypdyr, ýagny şol bir r koordinataly nokatlaryň köplügi gönüçyzykly emelegetirijileri oz oka parallel bolan silindrik üsti emele getirýär. Eger gönüburçly dekart ulgamynyň oklaryny suratda görkezilişi ýaly edip alsak, onda M nokadyň x, y, z dekart koordinatalary şol nokadyň r, φ, z silindrik koordinatalary bilen aşakdaky formulalar arkaly aňladylýar:

$x = r\ \cos\varphi\ ,\ \ y = r\ \sin\varphi,\ \ z = z.$

8.SFERIK KOORDINATALAR.

Sferik koordinatalary girizmek üçin giňişlikde umumy O başlangyjy bolan, özara perpendikulýar $ox,$ $oy,$ we oz üç oka garalyň. O nokatdan alalyň, N nokat M nokadyň Oxy tekizlige proeksiýasy bolsun, r san M nokadyň O nokatdan uzaklygy bolsun. Mundan başga-da θ burç ugrukdyrylan $\overrightarrow{OM}$ kesimiň oz ok bilen emele getirýän burçy, φ x burç bolsa ox oky o N şöhle bilen gabat gelýänçä sagat strelkasynyň tersine aýlamaly burç diýeliň. θ we φ burçlara degişlilikde giňlik / şirota/ we uzynlyk /dogota/ diýýärler.

$r,\ \theta\ we\ \varphi$ sanlara M nokadyň sferik koordinatalary diýilýär. $r = const$ üste/ sferik üst diýilýär.

Giňişligiň nokatlarynyň we sferik koordinatalaryň /r; $\theta;\ \varphi$/ üçlükleriň arasyndaky degişliligiň özara birbahaly bolmagy üçin adatça r we φ ululyklary aşakdaky çäklerde üýtgeýär diýip hasap edýärler: $0 \leq r \leq +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,
O koordinata bolsa kesgitlenişine laýyklykda O we X sanlaryň arasynda ýerleşýär.

Eger koordinatalaryň gönüburçly dekart ulgamynyň oklaryny suratda görkezilişi ýaly alsak, onda M nokadyň x, y, z dekart koordinatalary onuň r, φ, θ sferik koordinatalary bilen aşakdaky formulalar arkaly aňladylýar:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \ , \ y = r\sin\theta\sin\varphi \ , \ z = r\cos\theta.$$

9.IKI WEKTORYŇ SKALÝAR KÖPELTMEK HASYLY.

Iki wektoryň arasyndaky burç deregine umumy başlangyjy bolan we berlen wektorlara deň wektorlaryň arasyndaky burçy kabul edýärler. Käbir hallarda burç ölçenende haýsy wektordan we haýsy ugra ölçeg geçirilýändigini görkezýärler. Eger şeýle görkezme bolmasa, onda iki wektoryň arasyndaky burç $\pi -$den uly bolmazlyk şert bilen alynýar. Eger iki wektoryň arasyndaky burç göni bolsa, onda ol wektorlara **ortogonal wektorlarlar** diýilýär.

KESGITLEME. Iki wektoryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyna deň bolan sana şol wektorlaryň **skalýar köpeltmek hasyly** diýilýär. Eger köpeldijileriň iň bolmanda biri nula deň bolaýsa, onda olaryň arasyndaky burç kesgitsiz galýar, bu halda skalýar köpeltmek hasyly kesgitleme boýunça nula deň hasap edilýär.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly /$\vec{a}$, $\vec{b}$/ bilen belgilenýär, şeýlelik bilen, biz ony şeýle ýazyp bileris:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi,$$

Bu ýerde φ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçdyr. Skalýar köpeltmek hasylyň aşakdaky häsiýetleri aýdyň görnüp dur:

I Skalýar köpeltme kommutatindir, ýagny islendik $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlar üçin

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

deňlik adalatlydyr.

2. Islendik $\vec{a}$ wektor üçin $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

3. Eger köpeldijiler ortogonal bolsa ýa-da iň bolmanda olaryň biri nul wektor bolsa, onda şu halda we diňe şu halda olaryň skalýar köpeltmek hasyly nula deňdir.

4. Ortanormirlenen bazisiň wektorlary aşakdaky deňlikleri kanagatlandyrýar:

$(i, i) = (j, j) = (k, k) = 1,$

$(i, j) = (j, k) = (k, i) = 0.$

TEOREMA. Eger bazis ortonormirlenen bolsa, onda islendik $\vec{a}$ wektoryň komponentalary $\alpha_1 = (\vec{a}, i)$, $\alpha_2 = (\vec{a}, j)$, $\alpha_3 = (\vec{a}, k)$ formulalar arkaly tapylýarlar.

Bu deňlemede a,b, R^2 hemişelikler degişlilikde töweregiň merekezinde kordinatlary we onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulyklar bolsa töweregiň erkin M nokadyň kordinatlary hususy halda eger kordinatalr başlangyjy töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we |2| deňleme has ýönekeý görnüşi alar: $x^2+y^2=R^2$

Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler) merkezi c/a;b/ nokat radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede oklary açyp alarys. $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/

ýa-da $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

bu ýerde D=2a,E=-2b, $F=a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edildi. /3/ deňleme ikinji derejeli deňlemedir. Şeýlelikde töwregiň üýtgeýän kordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyr emma her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlenmeýänligi bellemek gerek.

Hakykatdanda /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris, töweregiň deňlemesinde kordinatalaryň kwadyratlanyň koefissenyleri özara deň bu deňlemeleriň kordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär.

Tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /x^2 we y^2 çleneleriň koeffisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňleme töweregi kesgitleýär sebäbi ony x^2-yň koeffisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolar.

Ellips kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan bärden iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik san bolup takyklygyň nokatlar köpligine ellips diýilýär bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly.Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän göjni çyzygy absissalar oky hökmünde Kabul ederis ol okda F_1-den F_2 –ä tarap ugry polažitel diýip Kabul ederis F_1 F_2 nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny kordinatalar başlangyjy deregine Kabul edeliň fokuslaryň arasyndaky $F_1 F_2$ uzynlygy 2c bilen belgiläliň. Onda F_1 we F_2 nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Ellipsiň erkin N nokadynyň kordinatalary. X we y bilen belgiläliň. F_1M we F_2M kesimleriň uzynlyklarynyň formulasy boýunça aňladalyň:

$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

Ellipsiň kesgitlemesine görä kordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir. Ellipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /1/ deňlemede radikallary ýok etmek gerek. Radikallaryň birini sag bölege geçirýäris.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Indi d=$\sqrt{(v-x_0)^2+(v-y_0)^2}$ formula buýunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzynlygy tapmak galýar, ýagny

$$d=\sqrt{\left(x_0-A\cdot\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(y_0-B\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{A^2\left(\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2+B^2\left(\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+c)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Göni çyzygyň polýar kordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň x cosα +ysinα -p=0 tekizlikde kordinatalaryň göni burçly dekart sistemasy bilen polýar kordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berýän formylalary ýazylan. x=r cosα y=rsinα

Üýteýän x we y ulylyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goýýarys: r cosφcosα +rsinφsinα -p=0 ýa-da

r·(cos φcosα + sinφsinα)-p=0 bu ýerden r·cos(φ - α)-p=0

bu bolsa göni çyzgyň polýar koordinatalardaky deňlemesidir.

Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriýasy

Üýtgeýän x we y ulylyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinji çlenleri /x^2,xy we y^2/ birinji derejeli çleni /azat çleni/ saklaýar. Şuňa laýyklykda ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ýalyýazyp bolar. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Bu ýerde A,B,C koffisentleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A,B,C,D,E,F koefissentleriň dürli bahalarynda bu deňlemeäniň haýsy çyzyklary kesgitlenýändigi baradaky sowada indiki bölümde garaljak. Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ýörite görnüşlerine garap geçeliň.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesime şeýle-de şol kesimiň uzynlygyna töweregiň radiusy diýilýär.

R radiusyň töweregiň deňlemesini düzeliň.

Kordinatalar oklaryny erkin saýlap alalyň onda töweregiň c merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x.y bilen belgiläliň töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan häsiýeti analitiki aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden onuü islendik M nokadynyň C merkezinden uzakdygynyň hemişelik ululygy we onuň töweregiň R radiusyna deňdigi ýagny CM=R bolýandygy gelip çykýar.

Cm ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp biz /I/ deňligi M nokadyň öýtgeýän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys:

$\sqrt{(x-y)^2+(y-b)^2}=R$ /I/. Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip biz töweregiň deňlemesini ýady ýazarys:

$(y-b)^2+(y-b)^2=R^2$ /2/

Bu deňlemede a,b, R hemişelikler degişlilikde töweregiň merkeziniň kordinatalary w onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulylyklar bolan töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalary. Hususy halda eger

kordinatalar başlangyç töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we /2/deňleme has ýünekeý görnişi alýar. $x^2+y^2=R^2$
Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler merkezi C/a;b/ nokatda radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede nokatlary açyp alarys:
$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/ ýa-da $x^2+y^2+Dx+ey+F=0$ /3/
bu ýerde D=2a, E=-2b, $F= a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edlildi. Deňleme ikinji derejeli deňlemedir şeýlelikde töweregiň üýtgeýän koordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyrň emme her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlemeýändigi bellemek gerek. Hakykatdan-da /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris. Töweregiň deňlemesinde koordinatalryň kwadratlarynyň koeffisenleri özara deň bu deňlemä koordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /x^2 we y^2 çlenleriniň koefisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňlem töweregi kesgitleýär sebäbi ony x^2 iň koefisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolýar.

Ellips kesgitlemefokuslar diýip atalandyrylýan birden iki nokada çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik san bolan tekizligiňnokatlar köplügine eddipo diýilýär /bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly/.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän göni çyzygy absissalar oky hökmünde kabul ederis ol okda F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny koordinatalar başlangyjy deregine kabul edeliň. Fokuslaryň arasyndaky F_1, F_2 uzaklygy 2c bilen belgiläliň. Onda F_1 we F_2 nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Elipsiň erkin N nokadynyň kordinatalaryny x we y bilen bagalalyň. F_1M we F_2M kesimleriň uzynlyklaryny iki nokadyň arasyndaky uzynlygyň formulasy boýunça aňladalyň.

$$F_1M=\sqrt{(x-y)^2+y^2} \qquad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

elellipsiň kesgitlemesine görä F_1M+F_2M jem hemişelik ulylyk ony 2b bilen belgiläp alarys $F_1M+F_2M=2a$ ýa-da

$$\sqrt{(x-y)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Bu deňleme alnan koordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir.

Ellipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /I/ deňlemede redikallary birini sag bölege geçirýäris:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Iki bölegide kwadrata göterip alar

$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$

ýa-da $-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2}+y^2$, ýagny $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2}+y^2$

Ýene-de deňlemäniň iki bölegini de kwadrata göterip alarys:
$c^2x^2+2a^2cx+a$□$=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$ ýa-da c^2x^2+a□$=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$,
ýagny $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.
Bu deňlemäniň iki bölegini-de $a^2(a^2-c^2)$ bölup alarys:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (2)$$

$0<a$ bolany sebäpli $a^2-c^2>0$. Ony b^2 bilen belgilemek kabul edilen.
Onda ellipsiň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (3) bu ýerde $b^2=a^2-c^2$. (4)

/3/ deňlemä ellipsiň kanonik deňlemesi diýilýär.
Indi ellipsiň formasynyň derňewine girişeliň. Bu derňewi ýerine ýetirmek,/3/ deňlemeden ugur alynsa, aňsatdyr.
1/ Ellipsiň Simmetriasy. Ellipsiň /3/ deňlemesinde uýtgeýän xwe y koordinatalar diňe kwadratlarda görýärler, şonuň uçin eger käbir /x,y/ nokat ellipse degişli bolsa,onda /-x,y/, /x,-y/ we /-x,-y/ nokatlar hem ellipse degişli bolar.Diýmek, koordinatalar oklary ellipsiň simmetriýa oklary bolup hyzmat edýärler.
Özünde fokuslar saklaýan ellipsiň okuna Fokal ok diýip at berilýär.
Simmetrik oklarynyň kesişme nokadyna,ýagny simmetrik merkezine, ellipsiň merkezi diýilýär./3/ deňleme bilen berlen ellips uçin fokal ok Ox oky bilen gabat gelýär,koordinatalar başlangyjy bolsa ellipsiň merkezi bolup hyzmat edýär.
2/Ellipsiň simmetrik oklary bilen kesişme nokatlary. Ellipsiň simmetrik oklary bilen kesişme nokatlaryna onuň depeleri diýilýär../3/ deňleme bilen berlen ellipsiň depeleri onuň koordinatalar oklary bilen kesişýän nokatlardadyr,çünki bu halda koordinatalar oklary onuň simmetrik oklary bolup hyzmat edýär. /3/ deňlemede

y=0 diýip alsak, ellipsiň Ox oky bilen kesişme nokatlarynyň abssissalary taparys:

$\frac{x^2}{a^2}$=1, bu ýerde $x^2=a^2$ we $x=\pm a$.

x=0 gumän edip, biz ellipsiň ordinatalar oky bilen kesişme nokatlarynyň taparys:$\frac{y^2}{b^2}$=1, bu ýerde $y^2=b^2$ we $y=\pm b$, Diýmek aşakdaky nokatlar ellipsiň depeleridir: A_1(a;0) A_2(-a;0), B_1(0;b) B_2=(0;-b), $b^2=a^2-c^2$ (c>0) bolany sebäpli b<a şoňa görä-de A_1, A_2 kesime, şeýle hem onuň 2b uzynlygyna ellipsiň uly oky diýilýär,B_1, B_2 kesime /we onuň 2b uzynlygyna/ bolsa ellipsiň kiçi oky diýilýär.

a we b uzynlyklara degişlilikde ellipsiň uly we kiçi ýarym oklary diýilýär.

3/ Ellipsiň Formasy. Ellipsiň formasyny aýdyňlaşdyrmak uçin $x\geq 0$ we $y\geq 0$ hallara garamak ýeterlikdir, sebäbi biz ýokarda ellipsiň koordinatalar oklaryna görä simmetrik ýerleşendigine göz ýetiripdik. /3/ deňlemeden $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ýa-da $x\leq a$ bolandygy görünýär,ýagny x ululyk 0-dan a-b çenli üýtgäp bilýär.

Ýene-de şol deňlemeden x ululyk 0-dan a çenli artanda ululygyň b-dan 0-a çenli kemelýändigi görünýär.Şeýlelik bilen, ellips aşakdaky suratda görkezilen ýaly formadadyr.

Ellipsiň F_1 we F_2 fokuslaryny hem-de 2b uly okuny bilip, ony mehaniki gurmak gaty aňsatdyr. Uzynlygy 2b deň bolan ,onuň uçlaryna F_1 we F_2 nokatlarda berkitmegi, soňra oňa F_1 M F_2 görnüşi berip, M nokady hereketlendirmek arkaly ellips gurular /M nokatda galamyň ujy ýerleşdirilýär/.

a=b/c=0 bolanda /3/ deňleme $x^2+y^2=a^2$ görnüşi alar we ol merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan b radiusly töweregi kesgitleýär. Şoňa görä-de töwerege deň ýarym okly ellips ýaly garamak bolar.

Giperbola. Kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan berlen iki nokatdan uzaklyklarynyň, tapawudy hemişelik san bolup tekizligiň nokatlar köplügine Giperbola diýilýär. /Bu hemişelik san polojitel hem-de fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan kiçi bolmaly/.

Bu hemişelik ululygy 2b, fokuslaryň arasyndaky uzaklygy bolsa 2c bilen belgiläliň.Koordinatalar sistemasyny /oklary/ edil ellipsdäki ýaly edip saýlap.Goý, M(x;y) nokat giperbolanyň erkin nokady bolsun.

Giperbolanyň kesgitlemesine görä ýazarys:

F_2M-F_1M=$\pm$2a /1

Bu deňligiň sag böleginde, F_2M> F_1M bolsa,goýmak alamatyny almaly.Eger-de F_2M=$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ we F_1M=$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ bolany sebäpli,/1/aňlatmany aşakdaky ýaly ýazarys. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$-$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$=$\pm 2a$ /2/

Bu deňleme giperbolanyň saýlanyp alnan koordinatalar sistemasyndaky deňlemesidir. /2/ deňlemäni radikallardan boşadyp, onuň ýönekeý görnüşe getirip bolýar. Radikallaryň ikinjisini sag bölege göçürýäris:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

Indi deňligiň iki böleginide kwadrata göterýäris:

$x^2+2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$

ýa-da $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Bu alnan deňligiň iki böleginide ýene kwadrata göterýäris: $c^2x^2-2a^2cx+a$□$=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$ ýa-da $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

2b<2c bolany sebäpli $c^2-b^2>c$ bolýar,ony b^2 bilen belgilemek adat bolupdur, şoňa görä-de alýarys: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

Bu deňligiň ähli çlenlerini a^2b^2 bölýäris:

$\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$=1,   /3/   bu ýerde $b^2=c^2-a^2$ /4/

/3/ deňlemä giperbolanyň kanonik deňlemesi diýilýär.
Indi giperbolanyň formasyny derňemäge geçeliň.
1/ Giperbolanyň Simmetriýasy. Giperbolanyň /3/ deňlemesi üýtgeýän ululyklary diňe kwadratda saklaýar, şoňa görä-de koordinatalar oklary giperbolanyň simmetriýa oklary bolup hyzmat edýär.

Giperbolanyň özünde fokuslary saklaýan simmetriýa okuna onuň fokal oky diýilýär. Giperbolanyň simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna simmetriýa merkezine – Giperbolanyň merkezi diýilýär. /3/ deňleme bilen berlen giperbola uçin fokal ok bolup Ox oky, merkezi bolup koordinatalar başlangyjy hyzmat edýär.

2/ Giperbolanyň simmetriýa oklary bilen kesişme nokatlary.
Giperbolanyň simmetriýa oklary bilen kesişme nokatlaryny, ýagny onuň depelerini tapalyň.

3/ deňlemede y=0 diýip kabul edip, giperbolanyň absissalar oky bilen kesişme nokatlarynyň absissalaryny taparys:

$\frac{x^2}{a^2}$=1,   bu ýerden $x^2=a^2$ we $x=\pm a$.

Diýmek, A_1/a;0/ we A_2/-a;0/ nokatlar giperbolanyň depeleridir, olaryň arasyndaky uzaklyk 2a deň. Giperbolanyň Oy oky bilen kesişme nokatlaryny tapmak uçin /3/ deňlemede x=0 diýip gümän edeliň, onda $-\frac{y^2}{b^2}$=1 ýa-da $y^2=-b^2$,

bu ýerden $y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm b\sqrt{-1}$;

biz Oy oky bilen kesişme nokatlarynyň ordinatalary üçin hyýaly bahalar aldyk, bu bolsa Oy oky giperbolany kesmeýär diýildigidir. Ýokarda aýdylanlara laýyklykda giperbolany kesýän simmetrik okyna onuň hakyky fokal oky diýilýär, ony kesmeýän simmetrik okyna bolsa giperbolanyň hyýaly oky diýilýär. /3/ deňleme bilen berlen giperbola üçin hakyky ok bolup Ox ok, hyýaly ok bolup ordinatalar oky hyzmat edýär.

Giperbolanyň A_1 we A_2 depelerini birleşdirilýän A_1A_2 kesime we onuň 2b uzynlygyna giperbolanyň hakyky oky diýilýär. Eger giperbolanyň hyýaly simmetrik okunda onuň 0 merkezinde iki tarapa

OB_1 we OB_2 kesimleri alyp goýsak, onda B_1B_2 kesime we onuň 2b uzynlygyna giperbolanyň hakyky we hyýaly ýarymoklary diýilýär.

3/ Giperbolanyň Formasy. Giperbolanyň formasy derňelende üýtgeýän koordinatalaryň otrisatel däl bahalaryna garamak ýeterlikdir, sebäbi bu egri çyzyk koordinatalar oklaryna görä simmetrik ýerleşendir. /3/ deňlemeden $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ gelip çykýar, şoňa görä-de x ululyk a-dan ∞ çenli üýtgeýär. x ululyk a-dan ∞ çenli artanda y ululyk 0-dan ∞ çenli artýar. Egri çyzygyň formasy suratda şekillendirlişi ýaly bolýar. Ol $x=\pm a$ göni çyzyklar bilen çäklenen zolakdan daşarda ýerýeşýär we iki bölekden-şahadan ybarat. Bu şahalaryň biri üçin $F_2M > F_1M$ we $F_2M - F_1M = 2a$ /sag şaha/ bolýar, beýleki şaha uçin $F_1M > F_2M$ we $F_1M - F_2M = 2a$ /çep şaha/ bolýar.

4/Giperbolanyň Asimptotalary. Giperbolanyň görnuşini has aýdyň göz öňune getirmek uçin onuň bilen jebis baglanyşykly bolan iki sany göni çyzyga, ýagny asimptotalar diýlip atlandyrylýan göni çyzyklara garalyň.

x we y ululyklary polojitel diýip hasaplap, giperbolanyň /3/ deňlemesini y ululyga görä çözeliň: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$-1,

bu ýerden $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ /3/

/3/ deňlemäni $y=\frac{b}{a}x$ göni çyzygyň deňlemesi bilen degşirip göreliň. Şonuň uçin bu göni çyzykdaky N(x;y) we giperboladaky M (x;y) nokatlary alarys. Bu nokatlaryň abssisalary şol bir x sandyr, bu nokatlary özara degişli nokatlar diýýärler.

$Y > y$ bolýandygy görnüp dur, Y-y tapawut M we N nokatlaryň arasyndaky uzaklygy aňladýar, ýagny MN=Y-y.
Dangyjynda ahyry bolsa ol göni çyzygyň kordinatalar oky bilen kesişme nokadynda bolmaly.

Göni çyzygyň Ox oka ýapgytlyk burçyny φ bilen ol göni çyzygyň Oy okdan kesip alýan OB kesiminiň ululygny bolsa b bilen belgiläliň. Goý M/x;y/ ol göni çyzygyň erkin nokady bolsyn M nokat göni çyzyk boýunça hereket edende onuň x we y kordinatalary üýtgäp özara käbir şert arkaly a baglanşykda bolýarlar. Ol şert nämeden ybartka. Şony anyklalyň.

Üýtgeýän x we y ulylyklar bilen hemişelik b we k=tgφ ulylyklaryň arasyndaky baglanşyk suratda şekillendirlen hal üçin ýagny göni çyzygyň koordinatalar oklaryna görä ýerleşişi ýörite saýlanyp alnanda çyzgydan geo-göni alynýar.

Hakykatdan-da PM=PO$_1$+OM. Emma PM=y PQ=OB=B Qm bolsa BOM göni burçly üçburçlykdan aňsat tapylýar: OM=BQ·tgφ =x·tgφ=kx. Bu tapylan bahalary /I/ deňlikde goýup alarys.

Y=kx+b

Bu deňlemäni diňe şol göni çyzygyň nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Eger nokat göni çyzygyň degişli bolmasa onda ol deňlik ýerine ýetmez Şeýlelik bilen alnan /2/ deňleme göni çyzygyň deňlemesidir.

Göni çyzyň /2/ görnüşli deňlmäni göni çyzygyň kofisentli deňlemesi diýilýär.bu berlen göni çyzyk Oy oka parallel däl diýlen şerte /2/ deňlemäni aldyk. Eger göni çyzyk Oy oka parallel balaýsa onuň deňlemesi nähili boalrka?

Goý bu göni çyzygyň Ox oky bilen kesişme nokadynyň absisasy a bolsun elbetde bu göni çyzygyň islendik nokadynyň absisasy a deň bolar. Eger nokat göni çyzyga degişli bolmasa onuň absisasy a-deň bolar. Diýmek bu göni çyzygyň deňlemesi x=a bolar.

Şeýlelikde eger göni çyzygyň Oy oka paralel bolmasa onuň deňlemesi /2/ görnüşde ýazylyp bilner. Egerde ol ordinatalar ordinatalar okuna parallel bolsa onda onuň deňlemesi /3/ görnüşde bolar. /2/ we /3/ deňlemeleriň üýtgeýän x we y ulylyklara görä birinji derejeleri deňleme bolýandygy sebäpli biz aşakdaky tasyklamany subut etdik: kordinatalaryň dekart sistemasynda her bir göni çyzygyň birinji derejeli deňlem bilen aňladylýar hususan eger göni çyzyk kordinatalar başlangyjyndan geçse onda b=0 we şu hili göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar.

Y=kx

Eger çyzyk Ox oka parallel bolsa onda onuň k burç koefisenti nula deň bolar. Ýagny k=o we göni çyzygyň deňlemesi

Y=b /5/

Görnüşde bolar.

10.GIPERBOLANYŇ DIAMETRLERI. ÇATYRYK DIAMETRLER.

Simmetriýa oklary koordinatalar oklary bilen gabat gelýän giperbolanyň

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

deňlemesine we **k_1** burç koeffisientli parallel hordalaryň sistemasyna garalyň. Şu ýerde geçirilmeli hasaplamalar we tassyklamalar ellipse garanyňdaky hasaplamalar we tassyklamalar bilen doly gabat gelýär, şeýle netijä gelinýär: giperbolanyň parallel hordalarynyň ortalary bir göni çyzykda ýatýarlar, ol göni çyzygyň deňlemesi

$$y = \frac{b^2}{a^2\, k_1} x \qquad (2)$$

görnüşde alynýar we ol ellipse garalan mahalda alnan

$$y = -\frac{b^2}{a^2\, k_1} x$$

göni çyzygyň deňlemesinden minus alamaty plýus alamaty bilen çalşyrmak arkaly alynýar (giperbolanyň deňlemesi ellipsiň deňlemesinden we **b^2** ýanyndaky alamat bilen tapawutlanýar). Edil ellipse garalan wgtdaky ýaly, giperbolanyň ordinatalar okuna parallel hordalaryň ortalary absissalar okunda ýatýarlar (giperbola **O_x** oka görä simmetrik figuradyr).

Şeýlelikde, giperbolanyň ähli diametrleri merkezden geçýän göni çyzykalrdyr. Giperbolanyň diametriniň burç koeffisientini **k_2** bilen belgiläp alarys: $k_2 = \dfrac{b^2}{a^2\, k_1} \qquad (3)$

Ýa-da

$$k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3')$$

Parallel hordalaryň ortalarynyň üstünden geçýän diametre şol hordalara çatryk diametr diýip atlandyrmagy şertleşeliň. **(3)** ýa-da **(3')** şert parallel hordalaryň $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientini we olara çatyryk diametriň $\mathbf{k_2}$ burç koeffisienti bilen baglanyşdyrýan formuladyr. **(3')** şertiň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientlere görä simmetrik bolany sebäpli, aşakdaky netijä gelýäris: eger $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli parallel hordalara çatryk bolsa, onda $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli parallel hordalara çatrykdyr. Şeýlelik bilen, biz biri beýlekisine parallel hordalary iki ýarpa bölýän diametrler jübütini alýarys. Olara çatryk diametrler ýa-da **(3')** formula arkaly aňladylýan baglanyşykda bolýarlar.

Şeýlelikde giperbolanyň çatryk diametrleriniň tükeniksiz köp jübüti bar. Her bir diametre oňa çatryk bolan diametr degişlidir.

Koordinatalar oklary (simmetrik oklar) çatryk diametrleriň

jübütini berýärler, olar özara perpendikulýardyrlar. Şu hili iki diametre giperbolanyň esasy diametrleri diýilýär.

(3) şertden görnüşi ýaly, çatryk iki diametriň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientleriniň birmeňzeş alamatlary bolýar, ýagny diametrler şol bir çärýeklerde bolýarlar we assimptotadan dürli taraplarda ýerleşýärler. Eger $(\mathbf{k_1})<\frac{b}{a}$ bolsa, onda $(\mathbf{k_2})>\frac{b}{a}$ bularyň biri giperbolany iki nokatda kesýär, beýlekisi bolsa giperbolany kesmeýär.

(3) şertden görnüşi ýaly, $\mathbf{k_1}$ $(\mathbf{k_1>0})$ ulalanda $\mathbf{k_2}$ koeffisient položitelliginde galyp, kiçelýär. Bu bolsa giperblanyň diametri sagat diliniň tersine aýlananda, onuň bilen çatryk bolanda diametriň garşylykly ugry boýunça (sagat diliniň ugruna) aýlanýandygyny görkezýär.

Şonda bir diametriň burç koeffisienti $\frac{b}{a}$ sana ymtylsa, onda oňa çatryk_diametriň burç koeffisienti hem şol $\frac{b}{a}$ sana ymtylýar.

11.ELLIPS, GIPERBOLA WE PARABOLA GATLAGYNYŇ ÇYZYKLARYŇ GATLAGYNYŇ DEŇLEMELERI.

Matematiki analiziň kursundan belli bolşy ýaly, $y=f|x|$ ýa-da **F(x, y)=0** deňleme bilen berlen egri çyzygyň $M|x_0 - y_0|$ nokadyna geçirilen galtaşýan çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolýar:

$$y-y_0=k|x-x_0|$$

“Tekizlikde göni çyzyk” atly bölümden belli bolşy ýaly, bu deňleme berlen ugur boýunça berlen nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesidir.

Differensial hasaplamanyň kursunda funksiýanyň proizwodnysynyň geometrik manysy aýdyňlaşdyrylanda, $y=f|x|$ ýa-da **F(x, y)=0** formula bilen berlen funksiýanyň $M|x_0 - y_0|$ nokatda hasaplanylan proizwodnysy $y=f|x|$ ýa-da **F(x, y)=0** deňleme bilen berlen egri çyzygy **M** nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentidigi görkezilýär, ýagny ;

$$k = y_0^{I} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} .$$

Indi agzalan egri çyzyklaryň her birine galtaşýan çyzygyň deňlemesini düzmesini getirip çykarmak bilen meşgullanalyň.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipse $|x_0 - y_0|$ nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini düzmeli. Ellipsiň berlen deňlemesini differensirläliň:

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy = 0,$$

Bu ýerden. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$

Diýmek,

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Indi **k** ululygyň tapylan bahasyny ýokardaky deňlemede goýarys:

$$y\text{-}y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Bu alnan deňligiň iki bölegini-de $\frac{y_0}{b^2}$ sana köpeldýäris:

$$\frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = -\frac{x_0}{a^2}(x - x_0)$$

Ýa-da

$$\frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$|x_0; y_0|$ nokadyň ellipse degişli bolany sebäpli ahyrky deňlemäniň sag bölegi 1-e deň we şoňa görä-de galtaşma çyzygyň deňlemesi gutarnykly görnüşde aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ deňleme bilen giperbola $|x_0; y_0|$ nokatda geçirilen galtaşma çyzygyň deňlemesini düzmeli.

Gözlenýän deňlemäni getirip çykarmak üçin ellips bolan haldaky hasaplamalary doly gaýtalaýarys, ýagny ilki bilen giperbolanyň deňlmesini differensirleýäris:

$$\frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{b^2}dy = 0,$$

Bu ýerden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

Soňra galtaşma çyzygyň **k** burç koeffisientini taparys:

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \ .$$

Indiki **k**-nyň bahasyny galtaşmanyň deňlemesinde goýýarys:

$$y\text{-}y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Ýa-da

$$\frac{y_0y - y_0^2}{b^2} = \frac{x_0x - x_0^2}{a^2}$$

Bu ýerden

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$|x_0 - y_0|$ nokat giperbolada ýatany sebäpli, ahyrky deňlemäniň sag bölegi 1-e deň, ýagny;

$$\frac{x_0\,x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

3. $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ deňleme bilen berlen parabola $|x_0 - y_0|$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini düzmeli.

Parabolanyň berlen deňlemesini differensirläliň: $2ydy = 2pdx,$
Bu ýerden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Indi galtaşma çyzygyň **k** burç koeffisientini tapýarys: $k = \frac{P}{y_0}$.

K koeffisiýentiň tapylan bahasynyň galtaşmanyň deňlemesinde ornuna goýýarys:

$$y - y_0 = \frac{P}{y_0}|x - x_0|$$

Ýa-da

$$y_0 y\text{-}y_0^2 = Px - Px_0. \, emma \; y_0^2 = 2Px_0,$$

Şoňa görä

$$y_0 y - 2Px_0 = Px - Px_0.$$

Bu ýerden parabola galtaşmanyň deňlemesini gutarnykly görnüşde alýarys:

$$y_0 y = P(a + x_0).$$

12.ELLIPS - TÖWEREGIŇ PROÝEKSIÝASY HÖKMÜNDE.

Goý, bize ellips öz kanonik deňlemesi bilen berlen bolsun:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b).$$

Indi şu ellipsiň daşyndan çyzylan töweregiň $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ deňlemesine garalyň.

Eger ellipsiň M_1 nokadynyň we töweregiň M_2 nokadynyň şol bir absissasy bar bolsa we olar $\mathbf{O_x}$ okdan bir tarapda ýatýan bolsalar, onda olara <u>ellipsiň we töweregiň nokatlary </u>diýip at bereris. Olaryň umumy absissasyny x bilen, ordinatalaryny bolsa y we Y bilen belgilesek, ellipsiň we töweregiň deňlemelerinden aşakdaky deňlemeleri alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$$

Bu deňlikleri özara deňeşdirip alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{Y^2}{a^2}$$

Ýa-da bu deňlemäni y^2 görä çözüp alarys: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}Y^2,$

Bu ýerden $y = \frac{b}{a}Y.$

$\frac{b}{a} < 1$ bolany sebäpli, biz $\frac{b}{a} = \cos\varphi$ diýip kabul edip bileris, onda degişli nokatlaryň ordinatalaryny baglanyşdyrýan formulany aşakdaky ýaly ýazyp bileris:

$$y = Y\cos\varphi$$

Ahyrky formuladan görnüşi ýaly ugrukdyrylan $\mathbf{PM_1}$ kesimiň proýeksiýasy hökmünde garamak bolardy, eger $\mathbf{PM_1}$ we $\mathbf{PM_2}$ kesimleriň arasyndaky burçy φ diýip kabul edilse, munuň üçin bolsa töwerek bilen ellipsi biri-biri bilen φ burç astynda kesişýän tekizliklerde ýerleşen diýip kabul etmek ýeterlik.

Şeýlelik bilen, ellipsiň her bir nokadyna töweregiň degişli nokadynyň ortonogonal proýeksiýasy hökmünde garamak bolar.

13.ELLLIPSIŇ PARAMETRIK DEŇLEMELERI.

Goý, bize merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan a radiusly töwerek berlen bolsun:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Eger töweregiň erkin M nokadyny şu suratda görkezilişi ýaly alsak, onda onuň koordinatalaryny t parametr arkaly aşakdaky görnüşde aňladyp bolar.

$$X = a\cos t, \quad Y = a\sin t.$$

Bu deňlemelere <u>töweregiň parametrik </u>deňlemeleri diýýärler.

Geçen punktdaky belgilemeleri sakalasak, onda ellipsiň $M_1(x; y)$ we töweregiň $M(X; Y)$ degişli nokatlaryň arasyndaky baglylygy şeýle ýazyp bolar:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Indi töweregiň parametrik deňlemelerinden X we Y bahalaryny ýokardaky deňlemelerde goýsak , alarys:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,. \end{cases}$$

Bu deňlemelere ellipsiň parametrik deňlemeleri diýilýär.

Göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesi

Geçen punkutlaryň birinde merkezi berlen A / x_1 ; y_1 /nokatda bolan göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesine garalypdy. Kä mahallarda çogdumyň merkezi göniden – göni berilmeỳär, şonda ol çogduma girỳän göni çyzyklaryň iki sanaysy bilen kesgitlenỳär, ỳagny bu halda çogdumyň merkezini berlen göni çyzyklaryň deňlemelerini bilelikde çözüp tapỳarlar. Emma göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesiniň başga görnişinden peỳdalanalyň, onda berlen göni çyzyklaryň çogdumynyňmerkeziniň koordinatalaryny tapmak hem bolỳar. Goỳ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \; we \; A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

göni çyzyklar käbir (x_1 ; y_1) nokatda kesişỳän bolsun. Aşakdaky deňlemäni düzỳäris:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad /1/$$

bu ỳerde λ - erkin parameter. λ parametriň islendik bahasynda /1/ deňleme göni çyzygy kesgitleỳär, sebäbi ol üýtgeỳän x we y ululyklara görä birinji derejeli deňlemedir. Bu göni çyzygyň (x_1 ; y_1) nokadyň üstünden geçỳändigini görkezmek kyn däl.Hakykatdan-da, / x_1 ; y_1 / nokadyň göni çyzyklaryň ikisine-de degişlidigi sebäpli

$$A_1x + B_1y_1 + C_1 \equiv 0 \; we \; A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \equiv 0$$

bolar, bu ỳerden

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + \lambda\,(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) \equiv 0$$

gelip çykar. Diỳmek, iki göni çyzygyň kesişme nokadynyň koordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrỳar.

Şeỳlelik bilen, /1/ deňleme merkezi / x_1 ; y_1 / nokatda bolan çogdumyň göni çyzyklaryny kesgitleỳär.

Indi /1/ deňlemeden ⋏ parametriň degerli bahasynda göni çyzyklaryňçogdumynyň islendigininiňdeňlemesini alyp bolỳandygyny ỳa-da bolmaỳandygynyaỳdyňlaşdyrmak galỳar.

Goỳ, /α ; β / tekizligiň / x_1 ; y_1 / nokatdan tapawutly erkin nokady bolcun. /1/ deňleme bilen kesgitlenỳän göni çyzyk kordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrỳan nokadyň ỳstỳnden geçer, ỳagny $A_1\alpha + B_1\beta + C_1 + \curlywedge(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0$ şert ỳerine ỳetse, onda /1/ deňleme bilen kesgitlenỳän göni çyzyk /α ; β / nokadyň üstünden geçer. Bu ỳerden

$$\curlywedge = -\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}$$

gelip çykỳar. Biz /1/ deňlemeden tekizligiň saỳlanyp alnan erkin nokadynyň ỳstỳnden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini alỳarys.

⋏ parametri haçanda /α ; β / nokat $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Göni çyzyga degişli bolanda saỳlap almak mümkin däl. /bu halda parametric kesgitleỳän formulanyň manysy ỳokdur/. Diỳmek, /1/ deňleme çogdumyň bir göni çyzygyndan /berlen göni çyzyklaryň **ikinjisinden/ özgesini ⋏ - niň dürli bahalarynda kesgitleỳär. Bu** agzalan göni çyzygyň deňlemesini

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

deňlemeden $\mu = 0$ bolanda alarys.

/1/ görnüşli deňlemä göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesi diỳilỳär.

Berlen iki nokadyň üstünden geçỳän göni çyzygyň deňlemesi.

Goỳ, bize A/ x_1 ; y_1 / we B/ x_2 ; y_2 / nokatlar berlen bolsun. Bu nokatlaryň üsyünden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini düzeliň.

A/ x_1 ; y_1 / nokadyň üstünden geçỳän göni çyzyklaryň çogdumynyň deňlemesini aşakdaky ỳaly ỳazalyň

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad , \qquad /1/$$

Bu Yerde k – erkin parametrdir. Indi şu çogdumyň göni çyzyklaryň içinden

B/ x_2 ; y_2 / nokadyň üstünden geçỳänini saỳlap almak üçin k parametri B/ x_2 ; y_2 / nokadyň koordinatalary /1/ deňlemäni kanagatlandyrar ỳaly edip, saỳlap alalyň, ỳagny $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ (2) bolsun.

/2/ deňlikden k parametriň bahasyny kesgitläp, ony /1/ deňlemede ornuna goỳmak gerek. Başgaça aỳdylanda, /1/ deňlemeden we /2/ deňlikden k parameteri ỳok etmek gerek. Munuň üçin /1/ deňlemäni /2/ deňlige çlenme-çlen bölmek ỳeterlikdir. Şeỳlelik bilen, biz A/ x_1 ; y_1 / we B/ x_2 ; y_2 / nokatlaryň ỳstỳnden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini aşakdaky görnüşde alarys:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad /3/$$

Eger berlen A we B nokatlar OX oka parallel göni çyzykda ỳatsa $/y_2 - y_1 = 0/$ ỳa-da OY oka parallel göni çyzyga degişli bolsa $/x_2 - x_1 = 0/$, onda göni çyzygyň deňlemesi degişlilikde $y = y_1$ ỳa-da $x = x_1$ görnüşde bolỳar.

<u>BELLIK.</u> /3/ deňlemeden göni çyzygyň burç koeffisientini onuň iki nokadynyň koordinatalary arkaly aňladỳan formulany alarys:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Üç nokadyň bir göni çyzyga degişlilik şerti

Goỳ, bize üç sany A/ x_1 ; y_1 /, B/ x_2 ; y_2 / we C/ x_3 ; y_3 / nokat berlen bolsun. A we B nokatlaryň üstünden geçỳän göni çyzygyň deňlemesini /3/ görnüşde ỳazỳarys:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ,$$

C nokat haçanda onuň koordinatalary göni çyzygyň deňlemesini kanagatlandyaranda we diňe şonda ol göni çyzyga degişli bolar. Şeỳlelik bilen, gözlenilỳän şert aşakdaky ỳaly ỳazylỳar

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} .$$

Indi $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ formula boỳunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzaklygytapmak galỳar, ỳagny

$$d = \sqrt{\left(x_0 - A * \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(x_0 - B * \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{A^2 \left(\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + B^2 \left(\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Göni çyzygyň polỳar koordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň $x \cos \propto + y \sin \propto - \rho = 0$ tekizlikde koordinatalaryň göniburçly dekart sistemasy bilen polỳar koordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berỳän formulalary ỳazalyň:

$x = r \cos \propto$, $y = r \sin \propto$ Üỳtgeỳän x we y ululyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goỳarys: $r \cos \varphi \cos \propto + r \sin \varphi \sin \propto - \rho = 0$

ỳa-da

$$r(\cos \varphi \cos \propto + \sin \varphi \sin \propto) - \rho = 0,$$

bu ỳerden $$r * \cos(\varphi - \propto) - \rho = 0.$$

Bu bolsa göni çyzygyň polỳar koordinatalaryndaky deňlemesidir.

Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriỳasy.

Üỳtgeỳän x we y ululyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinli derejeli çlenleri /x^2, xy we y^2/, birinji derejeli çlenleri /x we y/ we nul derejeli çleni /azat çleni/saklaỳar. Şuňa laỳyklykda

ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ỳaly ỳazyp bolỳar: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$
Bu ỳerde A, B, C koeffisientleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A, B, C, D, E, F koeffisientleriň dürli bahalarynda bu deňlemäniň haỳsy çyzyklary kesgitleỳändigi baradaky sowala indiki bölümde garaljak.

Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ỳörite görnişlerine garalyp geçiljek.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diỳip atlandyrylỳannokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine <u>töwerek</u> diỳilỳär. Töweregiň islendik nokadyny ohuň merkezi bilen birleşdirỳän kesime, şeỳle-de şol kesimiň uzynlygyna, töweregiň <u>radiusy</u> diỳilỳär.

R radiusly töweregiň deňlemesini düzeliň.

Koordinatalar oklaryny erkin saỳlap alalyň. Onda töweregiň C merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x,y bilen belgiläliň. Töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan umumy häsiỳeti analitik aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden onuň islendik M nokadynyň C merkezden uzaklygynyň hemişelik ululykdygy we onuň töweregiň R radiusyna deňligi, ỳagny $CM=R\quad /1/$ bolỳandygy gelip çykỳar.

CM ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp, biz /1/ deňligi M nokadyň üỳtgeỳän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R \qquad /1'/$$

Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip, biz töweregiň deňlemesini aşakdaky ỳaly ỳazarys:

Şeýlelikde, ellipsiň özara parallel hordalarynyň ortalarynyň koordinatalary özara çyzykly baglanyşykdadyrlar. Diýmek, parallel hordalarynyň ellipsiniň ortalary $y=-\frac{b^2}{a^2k_1}x$ (7) göni çyzykda ýatýarlar.

Bu ýokarda göçüren tassyklamamyzda garalýan hordalaryň k_1 burç koeffisienti bar diýip çaklapdyk, ýagny olar O_y oka parallel däldirler. O_y oka parallel hordalaryň hem ortalary bir göni çyzykda –

abossissalar okunda (ellipsiň O_x oka görä simmetrik ýerleşýändigi sebäpli) ýatýarlar.

Şeýlelikde, ellipsiň parallel hordalarynyň ortalary göni çyzykda ýatýarlar. Ellipsiň parallel hordalarynyň üstünden geçýän göni çyzyga onuň diametri diýilýär. Ellipsiň ähli diametrleri merkezden geçýär. Diametriň burç koeffisientini k_2 bilen belgiläp alarys.

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1} \quad (8)$$

Ýa-da

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad (8')$$

Ellipsiň parallel hordalarynyň ortalaryndan geçýän diametrine şol hordalara çatyryk diametr diýip at bermegi şertleşeliň. (8) we (8’) şertler parallel hordalaryň we olara çatyryk bolan diametriniň burç koeffisientlerini baglanyşyrýar. (8’) şertiň k_1 we k_2 ululyklara görä simmetrik bolany sebäpli, ýagny k_1 bilen k_2 -niň orny çalşylanda, onuň üýtgemeýändigi sebäpli, bu ýerden aşakdaky netijäni alarys: eger k_2 burç koeffisientli diametr k_1 burç koeffisientli hordalary çatyryk bolsa, onda $\mathbf{k_1}$ burç koeffisientli diametr $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientli hordalara çatyryk bolar.

Şeýlelik bilen, her biri beýlekisine parallel bolan hordalary iki ýarpa bölýän diametrleriň jübütini alýarys. Ellipsiň bu hili iki diametrine onuň çatyryk diametrleri diýilýär.

Olaryň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisientleri **(8)** we **(8’)** şertler bilen baglanyşyklydyr.

Şeýlelikde, ellipsiň özara çatyryk diametriniň tükeniksiz köp jübti bardyr, her bir diametre oňa çatyryk bolan diametr degişlidir. Hususy halda, koordinatalar oklary (simmetriýa oklary) ellipsiň çatyryk diametrleriniň jübütini berýärler. Ellipsiň bu iki çatyryk diametrleri özara perpendikulýar bolýarlar. Şu hili diametrlere ellipsiň esasy diametrleri diýýärler.

(8) şertden ellipsiň çatyryk diametrleriniň arasyndaky burçuň göni burçdan tapawutlydygy gelip çykýa $(b \neq a)$. Eger-de $b = a$ bolaýsa, onda ellips töwerege öwrülýär we **(8’)** şert iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şertine öwrülýär: $\mathbf{k_1k_2=-1}$. Şeýlelikde, töweregiň islendik çatyryk diametri özara perpendikulýardyr, ýagny töweregiň islendik diametri esasy diametrdir (simmetrik okudyr).

(8) şertden ellipsiň çatyryk iki diametriniň $\mathbf{k_1}$ we $\mathbf{k_2}$ burç koeffisentleri dürli alamatly bolýarlar, ýagny çatyryk diametrler çatyk çärýeklerde geçýärler. $\mathbf{k_1(k_1>0)}$ ulalanda $\mathbf{k_2}$ burç koeffisient absolýut ululygy boýunça kemelýär, ýagny ol hem algebraik ulalýar. Bu bolsa ellipsiň bir diametri sagat diliniň tersine aýlananda oňa çatyryk bolan diametriň hem şol tarapa aýlanýandygyny görkezýär.

14.PARABOLANYŇ DIAMETRLERI.

$y^2=2PX$ kanonik deňleme bilen berlen parabola garalyň. **K** burç koeffisientli parallel hordalaryň sisteamsyny alýarys. Bu hordalaryň ortalarynyň nähili ýerleşendigini anyklalyň. Bu hordalaryň islendiginiň uçlaryny M_1 $(x_1;\ y_1)$ we M_2 $(x_2;\ y_2)$ bilen, onuň ortasyny bolsa M (X; Y) bilen belgiläliň. M_1 we M_2 nokatlaryň parabola degişli bolany sebäpli, olaryň koordinatalary parabolanyň deňlemesini kanagatlandyrmaly, ýagny;

$$y_1^2 = 2px_1 \qquad (1)$$

$$y_1^2 = 2px_2 \qquad (2)$$

Başga tarapdan, M_1 M_2 göni çyzygyň burç koeffisienti **K** bolany sebäpli, aşakdaky deňligi ýazyp bileris:

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3)$$

Ahyrda, M nokat M_1 M_2 kesimiň ortasy bolany sebäpli aşakdakylary ýazarys:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (4)$$

Bu (1-4) bäş gatnaşykdan 4 sany kömekçi $\mathbf{x_1, x_2, y_1, y_2}$ ululyklary ýok edeliň. Şu maksat bilen (2) deňlikden (1) deňligi çlenme-çlen aýryp taparys:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

Ýa-da

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \qquad (5)$$

Indi **(3)** deňlikden $\mathbf{y_2-y_1}$ tapawudyň $\mathbf{k(x_2-x_1)}$ bahasyny **(4)** deňlikleriň ikinjisinden bolsa $\mathbf{y_1+y_2}$ jemiň **2y** bahasyny tapyp, olary **(5)** deňlikde ornuna goýýarys:

$$k(x_2-x_1)2y=2p(x_2 - x_1)$$

ahyrky deňlemäni $\mathbf{2(x_2-x_1)}$ ululyga $\mathbf{(x_2-x_1 \neq 0}$, çünki garalýan hordalaryň **k** burç koeffisienti bar, diýmek, olaryň ordinatalar okuna parallel däl**)** gysgaldyp alarys:

$$KY=P \text{ ýa-da } Y=\frac{p}{k}\ (k \neq 0) \qquad (6)$$

Şeýlelik bilen parabolanyň parallel hordalarynyň ortalary $Y=\dfrac{p}{k}$ göni çyzykda ýatýarlar.

Biz garalýan hordalar ordinatalar okuna parallel däl diýip guman edipdik. Ordinatalar okuna parallel bolan hordalaryň ordinatalary hem bir göni çyzykda absissalar okunda ýatýarlar (çünki **OX** ok parabolanyň simmetriýa oky bolup hyzmat edýär). Şeýlelikde, parabolanyň özara parallel hordalaryň ortalary bir göni çyzykda ýatýarlar. Bu göni çyzyga parabolanyň diametri diýilýär. Berlen ugur boýunça ugrukdyrylan özara parallel hordalaryň ortasyndan geçýän diametri şol hordalara çatryk diametr diýip atlandyrmagy şertleşeliň.

$y=\dfrac{p}{k}$ deňlemeden görnüşi ýaly, parabolanyň ähli diametrleri absissalar okuna (parabolanyň simmetrik okuna) paralleldirler.

Üýtgeýän iki ululykly birinji derejeli
Deňlemäniň geometrik manysy.

Geçen punktlarda kordinatalaryň dekart sitemasynda her bir göni çyzygy birinji derejeli deňlem bilen aňladyp bolýandygna göz ýetiripdik. Indi tersin soraga garamak tebigydyr ýagny üýtgeýän x we y ulylyklara görä birinji derejejeli islendik deňleme göni çyzygy kesgitleýärmikä? Bu sowala jogap bermek üçin birinji derejeli deňlemäniň umumy görnüşine garalyň we /x,y/ kordinatalary şu deňlemäni kanagatlandyrýan tekizligiň nokatlar köpligine göniçyzygyny görkezeris.

X we y görä birinji derejeli umumy deňlemä aşakdaky görnüşde bolar. Ax+By+c=0 /6/

Bu ýerde A,B,C – erkin sanlar. ýöne üýtgeýän x we y ululyklaryň a e b kofisentleri bir wagtda nula deň bolup bilmez, çünki A=B=0 bolaýsa onda /6/ deňleme özünde üýtgeýän ululyk saklamaz we ol deňleme bolup bilmez.

B≠0 güman edip /6/ deňlemäni y ulylyga çözeliň. Alarys:

$Y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ ýa-da $-\frac{A}{B}=k$ we $-\frac{C}{B}=B$

belgileri girizip alarys:

Y=kx+b /2/ deňlemäniň k burç koefisentli e ordinatalar okunda b ulylykly kesimi kesip alýan göni çyzygyň deňlemesidigini görüpdik biz ýokarda geçirilen tasyklamalarda B koffisent nuldan tapawutly diýipguman edipdik . eger B=0bolaýsa onda /6/ deňlem aşakdaky görnüş alarys:

Ax+C=0.

Bu halda şu deňlemäni x ulylga görä çözüp alarys :

$x=-\frac{C}{A}$ ýa-da $\frac{C}{A}=a$

Belgilemäni girzip alarys: x=a /3/

Emma biz şu deňleäniň Oy oka parallel bolup göni çyzygyň deňlemesidigini görüpdik.

Şeýllik bilen punktyň başynda goýlan sowal çözüldi : üýtgeýän x we y ulylklara görä islendik birinji derejeli deňlemäniň göni çyzygy kesgitlenýänigne göz ýetirdik. Şu alnan netijä görä /6/ deňleme göni çyzygyň umumy deňlemesi iýilýär.

Ax+By+C=0 görnüşli göni çyzygyň umumy deňlemesini derňemek.

Biz Ax+By+C=0 /6/

Görnüşli birinji derejeli umumy deňlemäniň göniçyzygy kesgitleýändigini gördük. Indi şu deňlemäniň gönü çyzygy kesgitleýändigini gördük. Indi şu deňlemäniň bir ýa-da iki kofisenti nula deň bolanda göni çyzyň kordinata oklaryna görä nähili ýagdaýa eýe boljakdygyna göz ýetireliň:

I. C=0 bu halda /6/ deňlem aşakdaky görnüşi alar: Ax=By=0 we ol kordinatalar başlangyjyndan gelýän göni çyzygy kesgitleýär, çünki X=0 we Y=0 bolanda bu deňleme kanagatlandyrylýar.
2. A=0 /6/ deňleme aşakdaky görnüşi alar:
By+C=0 ýa-da Y=B bu ýerde $B = -\frac{C}{B}$.
Bu göni çyzygyň ähli nokady üçin ordinata hemişelik baha eýedir ýagny güni çyzyk ox oka parallel bolar we ondan b uzaklykda ýerleşer eger b polažitel bolsa onda ol ox okdan aşakda ýerleşer
3. B=o /6/ deňleme Ax+C=0 Ýa-da $B = \frac{C}{A}$ belgileme girizilse x=a görnüşi alar we oy oka parallel bolan göni çyzygy kesgitlär.
4. C=0, B=0 /6/ deňleme Ax=0 ýa-da X=0 görnüşi alar we ol oy oky bilen gabat gelýän göni çyzygy kesgitleýär.
5. C=0, A=0 bu halda /6/ deňleme y=o görnüşi alýar. Göni çyzyk Ox oky bilen gabat gelýär.

Göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesi.

Biz eýýäm kordinata oklaryna görä göni çyzygyň ýagdaýyny dürli usullar bilen kesgitläp bolýandygyny aýdypdyk. Göni çyzygyň beriliş usullar bilen kesgitläp bolýandygyny aýdypdyk. Güni çyzygyň beriliş usullaryna baglylykda biz onuň deňlemesiniň dürli görnüşlerini alarys. Koordinata oklarynyň ikisini-de kesýän we kordinatalar başlangyjyndan geçmeýän göni çyzyga garalyň. Göni çyzyk ox we oy oklarda kesip alýan kesimleriniň degişlilikde a we b ulylyklaryny görkezip onuň ýagdaýyny kesgitläp bolar. Bu göni çyzygyň deňlemesini tapalyň. Şu hili göni çyzygyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazyp bolar: Ax+By+C=0 /I/
Bu ýerde A,B,C koefisentleriň her biri nula deň däldir. Indi bu deňlemäniň koefisentlerini tapalyň. /ýagny olary a we b parametrler arkaly aňladalyň/.

M /a;c/ nokadyň berlen göni çyzyga degişlilii sebäpli onuň kordinatalary /I/ deňlemäni kanagatlandyrýar: Ab+C=0
Bu ýerde $A = -\frac{c}{a}$ /2/ N/C;B/ nokadyň kordinatalary hem /I/ deňlemäni kanagatlandyrmaly ýagny B_B+C=0, bu ýerden

$B = -\frac{c}{b}$ /3/ /2/we/3/deňliklerden a we b bahalaryny /I/

deňlemede ornuna goýup alarys $\frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y + c = 0$

Bu deňlemäniňähli çlenlerini C sana bölüp /şerte görä c≠0/ alarys.

Göni çyzygy onuň deňlemesi boýunça gurmak.

Göni çyzygy gurmak üçin çyzgyda onuň iki sany nokadyny görkezmek ýeterlik.

Hakykatdan hem, $Y\text{-}y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ bu ýerden $MN = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x}-a)(x+\sqrt{x}-a)}{x+\sqrt{x}-a} = \frac{b}{a}\frac{x-x+a}{x+\sqrt{x}-a} = \frac{ab}{x+\sqrt{x}-a}$.

Bu formuladan görnüşi ýaly, x ululyk artanda MN uzaklyk kemelýär we x tükeniksizlige ymtylanda MN uzaklyk nula ymtylýar. Bu ýerden M nokat giperbola boýunça birinji çärýekde hereket edip, tükeniksizlige daşlaşanda onuň $y = \frac{b}{a}x$ göni çyzykdan uzaklygy nula ymtylýar diýen netije gelip çykýar. Edil şunuň ýaly ýagdaý nokat üçünji çärýekde bolup, tükeniksizlige daşlaşanda-da bolup geçýär(bu giperbolanyň nokatlarynyň koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik ýerleşendiginden gelip çykýar).

Ahyrda, giperbolanyň Oy oka görä simmetrikliginden $y = \frac{b}{a}x$ ikinji göni çyzykdan giperbola çenli M N yzaklyk M nokatdan ikinji we dördünji çärýeklerde bolup, hereket edende we ol tükeniksizlige daşlaşanda kemelip, nula ymtylýar diýen netijäni alýarys.

Bu iki göni, çyzyga giperbolanyň asimptotalary diýýärler. Ýokarda gprşümiz ýaly, olaryň seňlemeleri aşakdakylardyr:

$y = \frac{b}{a}x$ we $y = -\frac{b}{a}x$ /S/

Ýokarda aýdylanlardan aşakdaky netije gelip çykýar. Asimptotalar bir tarapy ox oka parallel we 2a deň, beýleki tarapy oy oka parallel we 2b deň bolan gönüburçlugyň dioganallarynda ýerleşýärler, ýokardaky agzalan gönüburçlugyň merkezi, elbetde, koordinatalar başlangyjynda bolar.

Giperbolany çyzmak üçin ilki onuň asimptotalaryny çyzmak maslahat berilýär.

DEŇTARAPLY GIPERBOLA. b=a bolan halda giperbola deňtaraply giperbola diýýärler. Onuň deňlemesi/3/ deňlemeden alynýar. Ol aşakdaky ýaly bolar:

$$x^2 - y^2 = a^2 .$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, deňtaraply giperbolanyň asimptotalaryň burç koefisientleri $\pm$ 1=0 deň bolar . Diýmek, deňtaraply giperbolanyň asimptotalary özara perpendikulýardyr we olar giperbolanyň simmetriýa oklarynyň arasyndaky burçlary ýarpa bölýärler.

PARABOLA KESGITLEME. Fokus diýip atlandyrylan, berlen nokatdan we direktrisa diýlip atlandyrylýan berlen göni çyzykdan deň deňlikden
duryan tekizligiň nokatlar köplügine parabola diýýärler. (Elbet-de berlen
nokat berlen göni çyzyga degişli däl diýlip çak edilýär).

Parabolanyň deňlemesini düzmek üçin Ox oka derek fokusyň üstünden geçýän we direktrisa perpendikulýar bolan göni çyzygy kabul edýäris. F fokusdan direktrisa geçirilen perpendikulýar kesimiň O ortasyny koordinatalar başlangyjyny deregine alýarys, bu kesimiň uzynlygyny P bilen belgiläliň. Şonda F fokusyň koordinatalary $(\frac{p}{2};o)$ bolar.

Parabolanyň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x we y bilen belgiläliň. Şonda M nokatdan direktrisa geçirilen perpendikulýaryň N esasynyň koordinatalary $(-\frac{p}{2};y)$ bolar. Kesgitleme boýunça FM=NM bolany sebäpli, iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyny ulanyp, saýlanyp alnan koordinatalar sistemasynda parabolanyň deňlemesini alýarys:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$$

Bu deňlemäni ýönekeý görnüşe getirmek üçin, bu deňligiň iki bölegini-de kwadrata göterýäris. Şonda alarys:

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$$

ýa-da

$$x^2-px+\frac{p}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p}{4}$$

bu ýerden $y^2=2px$ (I)

Bu alnan deňlemä parabolanyň kanonik deňlemesi diýilýär.

Parabolanyň formasyny derňemek üçin, şu (I) deňlemede x ululygyň otrisatel bahalary alyp bilmeýändigini, ýagny parabolanyň ähli nokatlarynyň ordinatalar okundan sagda ýerleşýändigini bellemek gerek. X ululygyň her bir bahasyny y ululygyň iki bahasy degişlidir, şonda olar ululygy boýunça özara deň we alamatlary boýunça garşylyklydyr; ýagny bu egri çyzyk absissalar okuna görä simmetrik ýerleşendir. X ulullygyň bahasynyň artmagy bilen y ordinata absolýut ululygy boýunça artýar, öziňem x ululyk çäksiz artanda, (y) hem çäksiz artýar.

Parabolanyň bir sany simmetriýa oky bolýar, parabolanyň simmetriýa okuna onuň oky diýilýär. Parabolanyň simmetriýa oky bilen kesişme nokadyna parabolanyň depesi diýilýär. (I) deňleme bilen berilen parabolanyň depesi bolup, koordinatalar başlangyjy hyzmat edýär.

BELLIK. Garalan egri çyzyklaryň üçüsi hem / ellipo, giperbola we parabola / koordinatalaryň dekart sistemasynda ikinji derejeli deňleme bilen aňladylyp biliner.

15.ELLIPSIŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY

Biziň bilişimiz ýaly, fokuslar diýip atlandyrylýan, berlen iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik bolan tekizligiň nokatlar köplügine ellips diýilýär. Ellipsiň erkin M nokadyndan onuň çep F_2 we sag F_1 fokuslaryna çenli belgiläp, ýokarda ýap-ýaňyja ýatlan kesgitlemämize görä, aşakdaky deňligi ýazyp bileris :

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad / I /$$

Başga tarapdan, iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasyndan peýdalanyp alarys :

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

bu ýerde x we y ululyklar ellipsiň erkin M nokadynyň koordinatlarydyr, c ululyk bolsa F_1 F_2 fokus uzaklygyň ýarysydyr. Ahyrky iki deňligi kwadrata getirip we birini beýlekisinden aýyryp alýarys:

$$r^2 - r^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2$$

skobkalary açyp we meňzeş çlenleri toparlap alýarys:

$$r^2 - r^2 = 4\,cx. \quad /2/$$

/1/ we /2/ deňlemelerden r_1 we r_2 ululyklary gözlenilýän hasap edip, ahyrkylary tapýarys. Şu maksat bilen /2/ deňligi

$$(r^2 - r^2)(r^2 + r^2) = 4cx$$

Görnüşde ýazyp, /1/ deňlikden peýdalanýarys, şonda alarys:

$$r^2 - r^2 = 2\frac{c}{a}x$$

Alnan deňlemäni /I/ deňleme bilen bilelikde çözüp, r_1 we r_2 tapýarys;

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x$$

Ahyrky formulalara girýän $\frac{c}{a}$ ululyga ellepsiň ekspentrisigiti diýilýär, biz ony E bilen belgileýäris. $E = \frac{c}{a}$ ululyk 2c fokus uzaklygynyň 2a uly oka gatnaşygydyr, özüňem $o < E < 1$ sebäbi $o < c < a$ /töwerek üçin c=o we E=o/.

Şeýlelik bilen, biz r_1 we r_2 fokal radiuslar üçin aşakdaky formulalary aldyk:

$$r_1 = a - Ex, \qquad r_2 = a + Ex$$

Ordinatalar okuna parallel bolan $x = l(l > a)$ göni çyzyga garalyň we birinjiden, ellipsiň erkin M /x;y/ nokadyndan onuň F_1 sag fokusuna çenli a_1 uzaklygy tapalyň. Soňra şu uzaklyklaryň gatnaşygyny hasaplaýarys.

d=l-x bolany sebäpli $\frac{r}{d} = \frac{a-Ex}{l-x} = E\,\frac{\frac{a}{E}-x}{l-x}$

Eger $l=\frac{a}{E}$ bolsa, onda ýazylan $\frac{r1}{d1}$ gatnaşyk E sana deň bolan hemişelik baha eýe bolar.

Ellipsiň simmetrik figuralygy esasynda şeýle netijäni çep fokus we $x=-\frac{a}{E}$ göni çyzyk üçin alyp bolýar.

Ellipsiň fokal okuna perpendikulýar bolan we onuň merkezinden $\frac{a}{E}$ uzaklykdan geçýän bu iki göni çyzyga <u>ellipsiň direktrisalary</u> diýilýär. Biziň ýokarda aýdyňlaşdyryşymyz ýaly, olar aşakdaky ajaýyp häsiýete eýedirler: ellipsiň islendik nokadyndan fokusy we degişli direktrisa çenli uzaklyklarynyň gatnaşygy E sana deň bolan hemişelik ululykdyr.

16.PARABOLANYŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY

Geçen punktdaky belgilemeleri saklap, giperbolanyň kesgitlemesi esasynda alýarys:

$$r_2-r_1=\pm 2a, \qquad /I/$$

bu ýerde plýus alamaty giperbolanyň sag şahasyna, minus alamaty bolsa onuň çep şahasyna degişli. Başga tarapdan, edil geçen punktdaky ýaly, tapýarys:

$$r_2^2-r_1^2=4cx, \qquad /2/$$

/1/ we /2/ deňlemelerden r_1 we r_2 ululyklary taparys. Munuň üçin /2/ deňligi aşakdaky ýaly göçüreris:

$$(r_2-r_1)(r_2+r_1)=4cx.$$

Ahyrda, bu deňlemäni /1/ deňleme bilen çözüp, r_1 we r_2 ululyklar üçin aňlatmalary alarys:

$r_1=-a+\frac{c}{a}x,$ /sag şaha/ $\qquad r_1=a-\frac{c}{a}x,$ /çep şaha/

$r_2=a+\frac{c}{a}x.$ $\qquad r_2=-a-\frac{c}{a}x$

Ahyrky formulalara girýän $\frac{c}{a}$ ululyga <u>giperbolanyň akssentrisiteti</u> diýilýär, ony E bilen belgilemegi şertleşeliň. Elbetde, $E=\frac{c}{a}$ ululygyň 2c fokus uzaklygynyň 2a hakyky oka gatnaşygydygy görnüp dur, özüňem indi E>1, sebäbi c$>a$.

Bu ýerden ortonormirlenen bazisde wektorleriň komponentlarynyň wektoryň uzynlygynyň şol wektoryň bazis wektorlar /koordinata oklary/ bilen emele getirýän burçlarynyň kosinuslaryna köpeltmek hasylyna deňligi gelip çykýar. Aşakdaky häsiýet skalýar köpeltmek hasylyň çyzykdadygy diýen ada eýedir.

Islendik $\vec{a},\vec{b},$ we $\vec{c}$ hem-de α,β sanlar üçin

$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{c})+\beta(\vec{b},\vec{c})$ deňlik ýerine ýetýär.

Hususy halda $(\alpha\vec{a},\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{c})$ we $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$...

Skalýar köpeltmäniň kommutatiwlik häsiýetinden peýdalanyp, biz bu ýerden aşakdaky toždestwony alýarys:

$$(\vec{a},\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=\beta(\vec{a},\vec{b})+\gamma(\vec{a},\vec{c}).$$

17.Skalýar köpeltmek hasyly köpeldijileriň koordinatalarynyň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize $\vec{a}=\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$ we $\vec{b}=\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k$ wektorlar berlen bolsun. Skalýar köpeltmek hasylyň birinji köpeldiji boýunça çyzyklylygyndan peýdalanyp alýarys:

$$(\vec{a},\vec{b})=(\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k,\vec{b})=\alpha_1(i,\vec{b})+\alpha_2(j,\vec{b})+\alpha_3(k,\vec{b}) \qquad (2)$$

Skalýar köpeltmek hasylyň ikinji köpeldiji boýunça çyzyklylygyndan peýdalanýarys:

$$(i,\vec{b})=(i,\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k)=\beta_1(i,i)+\beta_2(i,j)+\beta_3(i,k)=\beta_1;\ /3/$$

$$(j,\vec{b})=(j,\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k)=\beta_2,/4/;\ (k,\vec{b})=(k,\beta_1 i+\beta j+\beta_1 k)=\beta_1;/5/$$

/3/, /4/ we /5/ deňlikleri göz öňünde tutup, /2/ deňligi aşakdaky ýaly ýazarys $(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$ /6/ Biz aşakdaky teoremany subut etdik,

TEOREMA. Eger bazis ortonarmirlenen bolsa, onda öz koordinatalary bilen berlen iki wektoryň okalýar köpeltmek hasyly şol wektoryň bir atly /degişli/ koordinatalarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

Eger /6/ formulada $\vec{b}=\vec{a}$ diýip guman etsek, onda aňlarys:

$$/\vec{a},\vec{a}/=\alpha_1\cdot\alpha_1+\alpha_2\cdot\alpha_2+\alpha_3\cdot\alpha_3 \text{ ýa-da}$$

$$/\vec{a}/^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$$

ýagny ortonormirlenen bazisde $\vec{a}$ wektoryň uzynlygy

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$ /7/ formula boýunça kesitlenýär.

Ortonormirlenen bazisde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektoryň arasyndaky burçuň kosinusy şol wektorlaryň komponentalaryň üsti bilen aşakdaky formula boýunça aňladylýar:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}$$

18.Iki nokadyň arasyndaky uzynlyk

Eger iki nokadyň göni burçly dekart sistemasyndaky koordinatalary berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky uzaklygy aňsat hasaplap bolar. Hakykytdan hem, goý, A we B nokatlaryň göni burçly koordinatalary, degişlilikde, $/x_{19}y_{18}z/$ we $/x_2,y_2,z_2/$ bolsun, onda $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)i+\left(y_2-y_1\right)j\left(z_2+z_1\right)K,$ bu ýerde /7/ formula esasynda alarys:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_2\right)^2}.$$

19.Wektorlar üçlüginiň orientasiýasy.

Goý, iki sany orta normirlenen i,j,k we i',j',k' bazis berlen bolsun. Hereketiň kömegi bilen bu iki bazisi bir-biri bilen gabat getirip bolarmyka? Elbetde, göçürme we aýlama esasynda i' wektory i wektory bilen gabat getirip bolar. Şonda i' wektory perpendikulýar bolan j' we k' wektorlaryň tekisligi i wektora pependikulýar bolan j we k wektorlaryň tekizligi bilen gabat geler. Soňra şu tekizlikde aňlamak arkaly j' we j wektorlary gabat geler edip bolar. Şondan soňra k' we k wektorlary kollinýar bolýarlar. Olar ýa-ha gabat gelerler, bu halda bazisler gabat gelýärler, ýa-da olar /wektorlar/ garşylykly ugrukdyrylýarlar. Bu halda bazisleri gabat getirmek mümkin däl.

Bu tassyklamadan görnüşi ýaly, eger iki bazis gabat gelýän bolsa, onda her bir üçünji bazis ýa birinji bazis bilen, ýa-da ikinji bazis bilen gabat gelýär.

Şeýlelik bilen, ähli ortonormirlenen bazisler iki klasa bölünýärler. Şol bir klasa degişli bazisler özara gabat gelýärler, dürli klasyň bazisleri bolsa özara gabat gelmeýärler. Haçanda j wektor bilen, k wektor ýakaryk ugrukdyrylan ýagdaýda i wektoryň saga ýa-da çepe ugrukdyrylandygyna baglylykda bazis sag bazis ýa-da çep bazis diýilýär.

Bir klas diňe sag bazislerden, beýleki klas bolsa diňe çep bazislerden ybarat. Şu kesgitleme islendik bazis üçin aşakdaky gärnüşde berilýär.

Kesgitleme. Eger üçünji wektoryň ahyryndan birinji wektordan ikinji wektora iň kiçi burça aýlanma sagat strelkasynyň tersine görünýän bolsa, onda komplanar däl wektorlaryň tertipleşdirilen üçlügine saga orientirlenen üçlük ýa-da ýöne sag üçlük diýilýär.

Garşylykly halda üçlüge çepe orientirlenen üçlük ýa-da çep üçlük diýilýär. /üçlügiň wektorlarynyň hemmesiniň başlangyjynyň gabat gelýän haly göz öňünde tutlýar/.

Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly.

Kesgitleme. Goý, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun. Şu wektorlaryň kömegi bilen aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan $\vec{c}$ wektory guralyň:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi,$ bu ýerde φ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç;

2. $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň her birine ortagonal bolmaly;

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlar sag üçlügi emele getirmeli.

Şu usul bilen gurlan $\vec{c}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly diýeris we $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ bilen belgiläris.

Eger köpeldijileriň iň bolmanda biri nul wektor bolaýsa, onda olaryň wektor köpeltmek hasyly kesgitlemä görä nul wektor diýip kabul edilýär.

Kollinear däl iki wektoryň wektor köpeltme hasylynyň modulynyň şol wektorda gurlan parallelogramyň meýdanyna san taýdan deňligi kesgitlemeden gelip çykýar /elbetde, wektoryň umumy başlangyjy bar diýip çak edilýär/.

Köpeldijiler kollinear bolanda we diňe şonda wektor köpeltmek hasyl nula deň bolýar.

Wektor köpeltmek hasyly antikommutatiwdir, ýagny $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

Ortanormirlenme bazisiň wektory üçin aşakdaky deňlikller ýerine ýetýär:

$$[i,j]=k,[j,k]=i,[k,i]=j,[j,i]=-k,$$
$$[i,k]=-j,[k,j]=-i,[i,i]=[j,j]=[k,k]=0.$$

Wektor köpeltmek hasylyň ýene bir häsiýetini ýatlap geçeliň. Islendik $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$, islendik λ we μ sanlar üçin

$$\left[\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\mu\left[\vec{b},\vec{c}\right]$$

deňlik ýerine ýetýär.

Wektor köpeltmek hasyly köpeldijileriň koordinatalarynyň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize ortonormirlenen bazisiň wektory boýunça dagydylan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berilen bolsun:

$$\vec{a_1}=\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k,\quad \vec{b}=\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k.$$

Onda alarys:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k,\vec{b}\right]=\alpha_1\left[i,\vec{b}\right]+\alpha_2\left[j,\vec{b}\right]+\alpha\left[k,\vec{b}\right]. \qquad (1)$$

$$\left[i,\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},i\right]=-[\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k,i]=-\beta_1[i,i]-\beta_2[j,i]-\beta_3[k,i]=\beta_2 k-\beta_3 j \quad (2)$$

$$\left[j,\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},j\right]=-[\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k,j]=-\beta_1[i,j]-\beta_2[j,j]-\beta_3[k,j]=-\beta_1 k+\beta_3 i \quad (3)$$

$$\left[k,\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},k\right]=-[\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k,k]=-\beta_1[i,k]-\beta_2[j,k]-\beta_3[k,k]=\beta_1 j-\beta_2 i. \quad (4)$$

/2/, /3/ we /4/ deňlikleri göz öňünde tutup /2/ deňligi aşakdaky ýaly ýazarys: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha_1(\beta_2 k-\beta_3 j)+\alpha_2(-\beta_1 k+\beta_3 i)+\alpha_3(\beta_1 j-\beta_1 i).$

Sag bölekde skobkalary açyp, i, j we k wektorlary boýunça toparlamany ýerine ýetirýäris:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)i-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)j+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Skobkalardaky aňlatmalary ikinji tertipli kesgitleýjiler gönüşinde ýäzarys: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}k$ /5′/

Bu aňlatmany birinji setiriň elementleri boýunça dagadylan üçünji tertipli kesgitleýji hökmünde edip bolar:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix} \qquad /5/$$

Üçburçlugyň /parallelogramyň/ meýdanyny onuň depeleriniň koordinatalaryň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize giňişlikde üç sany $A_1/x_1,y_1,z_1/$, $A_2/x_2,y_2,z_2/$, we $A_3/x_3,y_3,z_3/$ nokat berlen bolsun.

Onda $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k,$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(x_3-x_1)i+(y_3-y_1)j+(z_3-z_1)k.$$

$\overrightarrow{A_1A_2}$ we $\overrightarrow{A_1A_3}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny /5/ formula boýunça aňladalyň:

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Indi bu wektoryň yzynlygyny tapýarys:

$$\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}$$

Üçburçlugyň meýdanyny

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|.$$

formula boýunça tapýarys. Eger A_1, A_2, A_3 nokatlar bar tekizlige degişli bolan, onda

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Gatyşyk köpeltmek hasyl.

$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$ sana gatyşyk köpeltmek hasyl diýilýär we ol $/\vec{a},\vec{b},\vec{c}/$ bilen belgilenýär.

TEOREMA. $\vec{a},\vec{b}$ *we* $\vec{c}$ komplenar däl wektorlaryň gatyşyk köpeltmek hasylynyň moduly şol wektorlarda gurlan parallelepipediň göwrümine deňdir. Eger $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ üçlük sag üçlük bolsa, onda ol köpeltmek hasyl položiteldir, eger üçlük çep üçlük bolsa ol otrisateldir.

Hakykatdan-da, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlarda gurlan parallelopipediň göwrümi parallelopipediň esasynyň $\left|\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right|$ meýdanynyň $/\vec{a}/\cdot/\cos\theta/$ beýikligine köpeltmek hasylyna deňdir. Bu ýerde c burç $\vec{a}$ we $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektorlaryň arasyndaky burçdyr. Şoňa görä-de biz aşakdaky gatnaşygy ýazyp bileris:

$$\upsilon=/\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cdot/\vec{a}//\cos\theta/=/\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)/=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

Şeýlelikde, teoremanyň birinji tassyklamasy subut edildi, gatyşyk köpeltmek hasylynyň alamaty $\cos\theta$ ululygyň alamaty bilen gabat gelýär, şonuň üçinem gatyşyk köpeltmek hasyl, eger $\vec{a}$ wektor bilen $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektoryň ugry $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň tekizliginden bir tarapa ugukdyrylan bolsa, položiteldir, ýagny $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar sag üçlügi düzýän bolsa, onda gatyşyk köpeltmek hasyl položiteldir. Edil şunuň ýaly, eger $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar çep oryentirlenen üçlük bolsa, gatyşyk köpeltmek hasylyň otrisateldigi görkezilýär.

Eger i,j,k ortonormirlenen sag bazis, onda $(i,j,k)=L$

TEOREMA. Köpeldijiler kopleanar bolanda we diňe şonda gatyşyk köpeltmek hasyl nula deňdir.

Hakykatdanda, $/\vec{a},\vec{b},\vec{c}/=/\vec{a}/\ \ /\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cos\theta$, bu ýerde burç $\vec{a}$ we $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektorlaryň arasyndaky burç.

$/\vec{a}/\cdot/\left[\vec{b},\vec{c}\right]/\cdot/\cos\theta/=0$ deňlik haçanda aşakdaky şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetende mümkindir:

$a)\ /\vec{a}/=0$. Bu halda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlaryň komplanardygy görnüp dur.

$b)/\left[\vec{b},\vec{c}\right]/=0$. Bu halda $\vec{b}$ we $\vec{c}$ kollenear, şoňa görä-de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar komplanardyr.

$w)\ \cos\theta=0$. Bu halda $\vec{a}$ wektor $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ wektora ortagonal, ýagny $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar bilen komplenardyr.

Tersine tassyklama edil ýokardaky ýaly subut edilýär: eger $\vec{a},\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar komplenar bolup, $a)$ we $b)$ hallar ýerine ýetmese, onda $w)$ hal amala aşar.

Gatyşyk köpeltmek hasyly köpeldijileriň komponentalarynyň üsti bilen aňlatmak.

Goý, bize üç sany wektor berlen bolsun: $\vec{a}=\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$,

$\vec{b}=\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k,$ $\qquad\qquad \vec{c}=\gamma_1 i+\gamma_2 j+\gamma_3 k.$

$\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny ýazalyň:

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} k$$

Wektorlary okalýar köpeltmek düzgüni boýunça alarys:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\alpha_1-\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}\alpha_2+\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\alpha_3=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Parallelepipediň /piramidanyň / göwrümini onuň depelerineň koordinatalary arkaly aňlatmak.

Goý, bize bir tekizlikde ýatmaýan dört sany nokat berlen bolsun:

$A_1/x_1,y_1,z_1/,$

$$A_2\,/\,x_2, y_2, z_2\,/,$$
$$A_3\,/\,x_3, y_3, z_3\,/,$$
$$A_4\,/\,x_4, y_4, z_4\,/.$$

A_1 depeden çykýan A_1A_2, A_1A_3 we A_1A_4 wektorlary ýazalyň:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k,$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1)i + (y_3 - y_1)j + (z_3 - z_1)k,$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1)i + (y_4 - y_1)j + (z_4 - z_1)k.$$

Indi bu üç wektoryň gatyşyk köpeltmek hasylyny ýazýarys:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Bilişimiz ýaly bu sanyň moduly parallelepipediň göwrümine aňladýar. Şu parallelepipedi /prizmanyň/ deň ululykly alty sany piramida bölüp bolýar, şoňa görä-de $A_1A_2A_3A_4$, piramidanyň göwrümini aşakdaky formula bilen berip bolar:

$$V_{lip} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Tekizlikde göni burçly dekart koordinatalary özgertmek.

Goý, bize tekizlikde koordinatalaryň iki sany göni burçly dekart sistemasy berlen bolsun, olaryň biri 0 başlangyç we i,j bazis wektorlar, beýlekisi bolsa $0'$ başlangyç we i', j' bazis wektorlar arkaly kesgitlenýär diýeliň.

Öňümizde şeýle meseläni goýýarys: tekizligiň erkin M nokadynyň koordinatalary koordinatalaryň birinji sistemasyna görä x we y koordinatalaryny nul nokadyň koordinatalaryň ikinji sistemasyna görä koordinatalary arkaly aňlatmaly. x we y koordinatalaryň $\overrightarrow{OM}$ wektoryň i,j bazis boýunça dagytmsynyň koordinatalary bilen gabat gelýändigini şeýle hem x' we y' koordinatalaryň $\overrightarrow{OM}$ wektoryň i', j' bazis boýunça dagytmasynyň koordinatalary bilen gabat gelýändigini belläliň, ýagny biz aşakdakylary ýazyp bileris:

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj, \qquad /1/ \qquad \overrightarrow{OM} = x'i' + y'j'. \qquad /2/$$

Eger ikinji sistemanyň $0'$ başlangyjynyň birinji sistema görä koordinatalaryny a we b bilen belgilesek, onda $\overrightarrow{OO} = ai + bj.$ $/3/$ Tekizligiň islendik wektoryny i,j bazis boýunça dagydyp bolýandygy sebäpli, $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ sanlar tapylyp, aşakdaky gatnaşyklary ýazyp bolar

$$\left.\begin{aligned} i' &= \alpha_{11} i + \alpha_{12} j, \\ j' &= \alpha_{21} i + \alpha_{22} j. \end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

Wektorlary goşmagyň düzgüni boýunça alarys:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad /5/$$

/2/ deňligiň sag böleginde i', j' wektorlaryň bahalaryny /4/ deňliklerden alyp goýýarys, soňra /5/ deňlige /1/, /2/ we /3/ deňliklerden $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OO'}$ we $\overrightarrow{O'M}$ wektorlaryň bahalaryny goýýarys, ahyrda-da goşulyjylary i we j wektorlary boýunça toparlara bölýäris:

$$xi + yj = \left(a + \alpha_{11} x' + \alpha_{21} y'\right) i + \left(b + \alpha_{12} x' + \alpha_{22} y'\right) j. \qquad /6/$$

Wektory bazis boýunça dagytmagyň ýeke-täkdigi sebäpli /6/ deňlikden koordinatalary özgertmegiň fomulalatyny alýarys:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \alpha_{11} x' + \alpha_{21} y', \\ y &= b + \alpha_{12} x' + \alpha_{22} y'. \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Biz aşakdaky ajaýyp netijä geldik: eger tekizlikde iki sany erkin dekart sistemasy alnan bolsa, onda tekizligiň islendik n nokadynyň birinji sistema görä koordinatalary nul nokadyň beýleki sistema görä koodinatalarynyň çyzykly funksiýalarydyr.

Indi alanan /7/ formulalaryň geometrik interpretasiýasyna geçeliň. Munuň üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçyň kosinusyny $\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ bilen belgilemegi şertleşeliň. /4/ deňlikleriň her birini ilki i wektora, soňra j wektora skolýar köpeldip we $/i,i/ = /j,j/ = 1,\ /i,j/ = 0$ göz öňünde tutup alarys:

$$\alpha_{11} = \cos\left(i', \wedge i\right), \alpha_{12} = \cos\left(i', \wedge j\right),$$
$$\alpha_{21} = \cos\left(j', \wedge i\right), \alpha_{22} = \cos\left(j', \wedge j\right)$$

Ýokardaky surat şekillerinden hala garalyň. Onda

$$\alpha_{11}=\cos\varphi,\ \alpha_{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,\ \alpha_{21}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi,$$

$$\alpha_{22}=\cos\varphi.$$

Şeýlelik bilen, tekizlikde koordinatalary özgetrmegiň formulalary aşakdaky görnüşi alýar:

$$\left.\begin{aligned} x&=a+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\ y&=b+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad /$$

$/7'/$ sistemany x' we y' görä çözüp, biz islendik M nokadyň ikinji sistema görä x' we y' koordinatalaryny nul nokadyň birinji sistema görä x we y koordinatalary arkaly aňladýan ters formulalaryny alarys:

$$\left.\begin{aligned} x'&=(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi,\\ y'&=-(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad /8$$

Koordinatalary özgertmegiň umumy /7/ formulalary iki sany özgertmä dagaýar. Bularyň biri sistemany diňe parallel göçürmä degişlidir, beýlekisi bolsa sistemany diňe 0 başlangyjyň daşynda φ burça aýlamaga laýyk gelýär.

Hakykatdan hem, $/7'/$ formulalarda bolsa aýlanma burçy nula deň diýip hasap etsek, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ deňlemede a,b, R^2 hemişelikler degişlilikde töweregiň merekezinde kordinatlary we onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulyklar bolsa töweregiň erkin M nokadyň kordinatlary hususy halda eger kordinatalr başlangyjy töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we |2| deňleme has ýönekeý görnüşi alar: $x^2+y^2=R^2$. Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler) merkezi c/a;b/ nokat radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede oklary açyp alarys. $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/ ýa-da $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, bu ýerde D=2a,E=-2b, $F=a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edildi. /3/ deňleme ikinji derejeli deňlemedir. Şeýlelikde töwregiň üýtgeýän kordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyr emma her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlenmeýänligi bellemek gerek. Hakykatdanda /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris, töweregiň deňlemesinde kordinatalaryň kwadyratlanyň koefissenyleri özara deň bu deňlemeleriň kordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär.

Tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /x^2 we y^2 çleneleriň koeffisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňleme töweregi kesgitleýär sebäbi ony x^2-yň koeffisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolar.

Ellips kesgitleme. Fokuslar diýip atlandyrylýan bärden iki nokada çenli uzaklyklarynyň jemi hemişelik san bolup takyklygyň nokatlar köpligine ellips diýilýär bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmaly.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän göjni çyzygy absissalar oky hökmünde Kabul ederis ol okda F_1-den F_2 –ä tarap ugry polažitel diýip Kabul ederis F_1 F_2 nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny kordinatalar başlangyjy deregine Kabul edeliň fokuslaryň arasyndaky F_1F_2 uzynlygy 2c bilen belgiläliň. Onda F_1 we F_2 nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Ellipsiň erkin N nokadynyň kordinatalary. X we y bilen belgiläliň. F_1M we F_2M kesimleriň uzynlyklarynyň formulasy boýunça aňladalyň: $F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Ellipsiň kesgitlemesine görä kordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir. Ellipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /1/ deňlemede radikallary ýok etmek gerek. Radikallaryň birini sag bölege geçirýäris.

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ =2a- $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Indi d= $\sqrt{(v-x_0)^2+(v-y_0)^2}$ formula buýunça M we N nokatlaryň arasyndaky uzynlygy tapmak galýar, ýagny

$$d=\sqrt{\left(x_0-A\cdot\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(y_0-B\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{A^2\left(\frac{Ax_0-1By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2+B^2\left(\frac{Ax_0+By_0+c}{A^2+B^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+c)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

20.Göni çyzygyň polýar kordinatalardaky deňlemesi.

Göni çyzygyň normal deňlemesini alalyň $x\cos\alpha$ +ysinα -p=0 tekizlikde kordinatalaryň göni burçly dekart sistemasy bilen polýar kordinatalaryň sistemasy arasyndaky baglanşygy berýän formylalary ýazylan. X=r $\cos\alpha$ y=rsinα
Üýteýän x we y ulylyklaryň bu bahalaryny göni çyzygyň normal deňlemesinde goýýarys: r $\cos\varphi\cos\alpha$ +rsinφ sinα -p=0 ýa-da r·(cos φ cosα + sinφ sinα)-p=0 bu ýerden r·cos(φ - α)-p=0 bu bolsa göni çyzgyň polýar koordinatalardaky deňlemesidir.

Ikinji tertipli egri çyzyklaryň elementar teoriýasy

Üýtgeýän x we y ulylyklara görä ikinji derejeli umumy deňleme özünde ikinji çlenleri /x^2,xy we y^2/ birinji derejeli çleni /azat çleni/ saklaýar. Şuňa laýyklykda ikinji derejeli umumy deňlemäni aşakdaky ýalyýazyp bolar. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
Bu ýerde A,B,C koffisentleriň iň bolmanda biri nuldan tapawutly bolmaly. A,B,C,D,E,F koefissentleriň dürli bahalarynda bu deňlemeäniň haýsy çyzyklary kesgitlenýändigi baradaky sowada indiki bölümde garaljak. Şu bölümde ikinji derejeli deňlemeleriň käbir ýörite görnüşlerine garap geçeliň.

Töwerek. Kesgitleme. Merkez diýip atlandyrylýan nokatdan deň daşlaşan tekizligiň nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän kesime şeýle-de şol kesimiň uzynlygyna töweregiň radiusy diýilýär.

R radiusyň töweregiň deňlemesini düzeliň.
Kordinatalar oklaryny erkin saýlap alalyň onda töweregiň c merkeziniň koordinatalary a we b bolar. Töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalaryny x.y bilen belgiläliň töweregiň ähli nokatlaryna mahsus bolan häsiýeti analitiki aňladalyň. Töweregiň kesgitlemesinden onuü islendik M nokadynyň C merkezinden uzakdygynyň hemişelik ululygy we onuň töweregiň R radiusyna deňdigi ýagny CM=R bolýandygy gelip çykýar.

Cm ululygy C we M nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde kesgitläp biz /I/ deňligi M nokadyň öýtgeýän koordinatalarynyň üsti bilen aňladarys: $\sqrt{(x-y)^2+(y-b)^2}=R$ /I/
Ahyrky deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip biz töweregiň deňlemesini ýady ýazarys: $(y-b)^2+(y-b)^2=R^2$ /2/

Bu deňlemede a,b, R hemişelikler degişlilikde töweregiň merkeziniň kordinatalary w onuň radiýusy üýtgeýän x we y ulylyklar bolan töweregiň erkin M nokadynyň koordinatalary. Hususy halda eger kordinatalar başlangyç töweregiň merkezinde alynsa onda a=b=0 bolar we /2/deňleme has ýünekeý görnişi alýar. $X^2+y^2=R^2$
Bu ýerden /2/ we /2'/ deňlemeler merkezi C/a;b/ nokatda radiusy R-e deň bolan töweregiň /2/ deňlemesiniň bardygyny görýäris. /2/ deňlemede nokatlary açyp alarys: $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$ /3/ Ýa-da$x^2+y^2+Dx+ey+F=0$ /3/ bu ýerde D=2a, E=-2b, F= $a^2+b^2-R^2$ diýip kabul edlildi. Deňleme ikinji derejeli deňlemedir şeýlelikde töweregiň üýtgeýän koordinatalara görä ikinji derejeli deňlemesi bardyrň emme her bir ikinji derejeli deňlemäniň töweregi kesgitlemeýändigi bellemek gerek. Hakykatdan-da /3/ deňlemeden aşakdakylary görýäris. Töweregiň deňlemesinde koordinatalryň kwadratlarynyň koeffisenleri özara deň bu deňlemä koordinatalaryň köpeltmek hasyly /xy/ girmeýär tersine eger şu iki şert ýerine ýetse /x^2 we y^2 çlenleriniň koefisentleriniň özara deňligi xy çleniň deňlemede ýoklygy/ onda umuman aýdylanda ol deňlem töweregi kesgitleýär sebäbi ony x^2 iň koefisentine bölüp /3/ görnüşe getirip bolýar.

Ellips kesgitlemefokuslar diýip atalandyrylýan birden iki nokada çenli uzaklyklaryň jemi hemişelik san bolan tekizligiňnokatlar köplügine eddipo diýilýär /bu hemişelik san fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolmady/.

Ellipsiň deňlemesini düzmek üçin berlen F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän göni çyzygy absissalar oky hökmünde kabul ederis ol okda F_1 we F_2 nokatlary birleşdirýän kesimiň ortasyny koordinatalar başlangyjy deregine kabul edeliň. Fokuslaryň arasyndaky F_1, F_2 uzaklygy 2c bilen belgiläliň. Onda F_1 we F_2 nokatlaryň kordinatalary degişlilikde /c;0/ we /-c;0/ bolar. Elipsiň erkin N nokadynyň kordinatalaryny x we y bilen bagalalyň. F_1M we F_2M kesimleriň uzynlyklaryny iki nokadyň arasyndaky uzynlygyň formulasy boýunça aňladalyň.

$$F_1M = \sqrt{(x-y)^2 + y^2} \qquad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elellipsiň kesgitlemesine görä F_1M+F_2M jem hemişelik ulylyk ony 2b bilen belgiläp alarys $F_1M+F_2M=2a$

Ýa-da $\sqrt{(x-y)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

Bu deňleme alnan koordinatalar sistemasynda elipsiň deňlemesidir.

Elipsiň deňlemesi iň ýönekeý görnüşi alar ýaly /I/ deňlemede redikallary birini sag bölege geçirýäris:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

21.Ikinji teripli egrileriň umumy deňlemesi we olaryň kanonik görnüşe getirlişi.

Indi ikinji tertipli algebraik deňlemä $Ax^2+bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0$ seredeliň.

Bu algebraik deňlemä ikinji tertipli egrileriň umumy deňlemesi hem diýilýär. Ikinji tertipli egrilik deňlemesiniň köpüsinde B,d we E koefisentlerinde ikä bölinen bolup girýärler. Şonuň üçin ikinji tertipli umumy algebraik deňlemäni

$Ax^2+2Bxy+Cy^22Dx+2Ey+F=0$ /2.1/

görnüşde ýazmak amatly. Bu ýerde B,D we E koeffisenler degişli koeffisenleriň ýarysyny aňladýandyr, ondan başgada A,B,C koeffisenler bir wagtyň özünde nola deň däldir $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ meselem eger $x^2+3xy+2y^2+5x+4y+1=0$

deňleme berlen bolsa onda $A=1,\ B=\frac{3}{2},\ C=2,\ D=\frac{5}{2},\ E=2,\ F=1$

bolar. Eger $Ac-b^2\neq 0$ bolsa /2.1/ deňlemäni paralel göcürmäniň we yzygiderli öwürmäniň kömegi bilen $A'x''^2+Cy''^2+F'=0$ /2.2/ görnişe getirip bolar.

Subudy. Ilki Oxy kordinatalar sistemasynyň başlangyjy $O,(x_0,y_0)$ nokada ýetireliň. Täze sistemany Oxy bilen belgiläp

$$\left.\begin{aligned} x &= x+x_0 \\ y &= y+y_0 \end{aligned}\right\}$$ /2.3/ alarys.

Ondan /2.1/ deňlemämiz

$A(x'+x_0)^2+2B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+2D(x'+x_0)+2E(y'+y_0)+F=0$

görnüşde bolar. Ýönekeý özgertmelerden soňra bolsa /2.1/ deňlemämizi $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$ /2.4/

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde. $D'=Ax_0+By_0+D, E'=Bx_0+Cy_0+E,$ $F'=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy^2 2Dx_0+2Ey_0+F.$

bu ýerde x_0 we y_0 häzirlikçe näbelli sanlardyr.

Täze sistemanyň $/x_0;y_0/$ kordinat başlangyjyny tapmak üçin D' we E'-leri nola deňläliň

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{aligned}\right\} \qquad /2.5/$$

sistema alnar. Lemmanyň şertine görä $AC+B^2\neq 0$ diýmek /2.5/ Sistemanyň $x_0;y_0$ sanlara görä-ýeketäk çözüwi bardyr. Soňra /2.5/ şerti göz öňünde tutyp /2.5/-den

$Ax'^2+2Bx'y+Cy'^2+F=0$ *ǀ2.6/* deňligi alarys.

Indi bolsa $O'x'y'$ kordinatlar sistemasyny käbir $\propto$-a burça öwrip görä krodinatalar $O'x''y''$ sistema alallyň.

$$\left.\begin{aligned} x' = x''\cos\propto - y''\sin\propto \\ y'' = x''\sin\propto - \cos\propto \end{aligned}\right\} \qquad /2.7/$$

x' we y' bahalaryny */2.7/* deňlikde goýalyň

A($x''\cos\propto$-$y''\sin\propto)^2$+2B ($x''\cos\propto$-$y''\sin\propto$) ($x''\sin\propto+y''\cos\propto$)+c($x''\sin\propto+y''\cos\propto)^2$+F=0

Onda birnäçe özgertmelerden soň

$x''^2(A\cos^2\propto+2B\cos\propto\sin\propto+C\sin^2\propto)^2+y''^2(A\sin^2\propto$-$2B\sin\propto\cos\propto\cos^2\propto)+x''y''(A\sin\propto\cos\propto+\ +B(\cos^2\propto$-$\sin\propto)+C\sin\propto\cos\propto)+F=0$

bu ýerden $\lambda=A\cos^2\propto+2B\cos\propto+C\sin^2\propto$

$C'=A\sin^2\propto$-$B\sin\propto\cos\propto+C\cos'\propto$

$B'=-A\sin\propto\cos\propto+B(\cos^2\propto$-$\sin^2\propto)+C\sin\propto\cos\propto$

Göz öňinde tutyp soňky deňlikden alarys

$A'x''^2+2B'x''y''+c'y''^2F'=c$ */2.8/*

Indi */2.8/ d*Deňlemedäki x'' y''-iň koffisenti nol bolar ýaly $\propto$ burçy saýlalyň.

Diýmek B'=0 bu ýerden $2B\cos\propto=(Ac)\sin\propto$ */2.9/*

Eger-de A=C bolsa onda $\cos\propto=0$ ýa-da $\propto=$ eger-de A≠C bolsa onda /2.8/ sag we çep tarapyny $\cos 2\propto$ bölmek bilen alarys

$2B=(A-C)tg^2\propto$ Bu ýerden $\propto$-ni tapalyň $\propto=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2B}{A-C}$

$\propto$-ni bu bahalarynda */2.9/* deňlik $A'x'^2+c'y''^2+F'=0$ görnüşinde bolar

Teorema susbut edildi.

I tertipli egrileriň klafikasiýasy

/2.1/ deňlemäniň uly çilenelriniň A,B,C koefisentleri kordinat okyny parallel göçürmede öýtgemän diňe kordinata öwrümde öýtgeýändigini subut edilen temadan gelip çykýar.

Ýöne $AC-B^2$ aňlatma hiç bir ýagdaý-da öýtgemän öňkiligine galýar. Beýle ýagdaý bolsa onuň kordinatalaryň üýtgemekligine bagly däldigini görkezýär. Hakykatdan-da şeýledigini barlalyň. Onuň üçin bolsa-da ýene-de öňden belli deňliklerinden

$A=A\cos^2\propto+2B\cos\propto+C\sin^2\propto$

$C'=A\sin^2\propto-B\sin\propto\cos\propto+C\cos'\propto$

$B'=-A\sin\propto\cos\propto+B(\cos^2\propto-\sin^2\propto)+C\sin\propto\cos\propto$

Onda $A'C'-I^2=(A\cos^2\propto+2B\sin^2\cos\propto+C\sin^2\propto)\cdot=(A\cos^2\propto-2B\sin^2\propto+C\sin^2\propto)-[(C-A)\,\mathrm{Sin}\propto dx+\ B\cos\text{-}\sin^2]^2$

Skopkalarymyzy açyp ýönekeýleşdirenmizden soňra

$A'C'-B'^2-AC(\cos^2\propto+\sin^2\propto)^2-B^2(\cos^2\propto+\sin^2\propto)^2AC-B^2$ alarys

Bu $AC-B^2$ ululyga ikinji tertipli egriniň $AC-B^2$ ululygyň alamatyna baglylykda tertipli egriler üç görnüşde bölünýär.

Eger

1. $AC-B^2>0$
2. $AC-B^2<0$
3. $AC-B^2=0$

bolsa onda /2.1/ deňlemä ikinji tertipli egrileriň degişli optik giporbolik we parabilik deňlemesi diýilýär.

Indi bolsa egrileriň dürli görnüşlerine garap geçeliň. Munuň üçin bolsa biz ýene-de bize öňden belli bolan aňlamadan peýdalanarys. Ýagny $A'=A\cos^2\propto+2B\cos\propto\sin\propto+C\sin^2\propto$

$C'=A\sin^2\propto-2B\sin\propto\cos\propto+C\cos^2\propto$ *Ýa-da*

$A=A\cos^2\propto(A+2Btg\propto+ctg\propto)$

$C'=\sin^2\propto(A-Bctg^2+Cctg\propto)$

I.Eliptik görnüş

Eger $AC-B^2>0$ bolsa A' we C' –iň alamaty meňzeş bolar bia A'>B we c'>0diýip alalyň.

a/ A'>0, c'0 we F'>0, onda $\frac{x'}{A^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$alarys bu bolsa elipsiň kanonik deňlemesidir b/ eger A'>0, B'>0 we F'=0 bolsa onda $a^2x^2+b^2y^2=0$ bolar bu deňlemäni diňe x=o, y=o kordinat başlangyjynyň kordinatalary kanagatlandyrýar.

Bu ýagdaýda ol deňlemä doreýän elipsiň deňlemesi diýilýär.

2. görnüş

Eger $AC-B^2<0$ bolsa onda A'>0we C dürli alamatly bolar onda biz

A'<0 we c'<0 bolsun onda $\frac{a^2}{a^2}-\frac{y}{8^1}=1$ bolar bu bolsa

giperbolanyň deňlemesidir.

c / A'>0, C'<0 we F'<0 bolsun onda $a^2x^2-b^2y^2=0$ deňlemäni alarys ýa-da (ax-by)(ax+by)=0 almak bolar.

Bu deňleme bolsa özara kesişýän iki gönini kesgitleýär. Bu ýagdaý-da deňlemä giperbolanyň deňlemesi hem diýilýär.

22.PARABOLIK GÖRNÜŞ.

Eger $AC-B^2=0$ diýsek onda A'=0 ýa-da C'=0 bolsa onda subut edilen temanyň esasynda ikinji tertipli egriniň umumy deňlemesini aşakdaky görnüşde

$A'x''^2+Cy''^2+2E'y''^2+2D'x''+F'=0$ ýazmak bolar.

Goý, A≠0 bolsun onda onda ýokardaky deňlemäni şeýle görnüşde

$A[y^2+\frac{2E}{C}y+\left(\frac{E}{C}\right)^2]+2Dx+F-\frac{F^2}{C}=0$ bu ýerden

$F''=-\frac{F^2}{C}$ ýazmak bolar.

Kordinatalar başlangyjyny (0;-$\frac{E}{C}$) nokatlar boýunça Oy okuň

parallel göçürip täze x'=x, y'=y+$\frac{E}{C}$ kordinatalara geçip

$Cy'^2+2Dx'+F''=0$ Indi bölek aşakdaky ýagdaýlara seredeliň;

Goý D≠0 bolsun onda $Cy'^2+2D(x'+\frac{F''}{2D})=0$ deňlemäni alarys

Eger kordinat başlangyjyny (-$\frac{F''}{2D}$,0) nokadyna geçirip $x''=x'+\frac{F''}{2D}$

y''+y diýsek onda soňky deňlemeden Cy''+2Dx''=0

deňlemäni alarys ýa-da y''=2-px'' alarys

Deňleme parobalanyň kanonik deňlemesidir goý D=0 bolsun onda $Cy'^2+F''=0$ deňlemäni alarys.

Eger-de C-iň we F''' alamatlary dürli bolsa onda $\frac{F''}{C}=0^2$ belläp soňky deňlemeden $(y'-a)(y'+a)=0$ alarys.

Alanan deňleme bolsa özara iki parallel göni deňlemesidir. Eger-de C-iň we F'' alamatlary meňzeş bolsa onda $y'^2+a^2=0$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäni hiç san nokady kordinatalary kanagatlandyrýar Şonuň üçin bu deňlemä iki hyýaly parallel gönüniň deňlemesi diýilýär. Şeýlelikde ikinji tertipli egriniň umumy $Ax^2+2Bxy+Cy^2 2Dx+2Ey+F=0$ kordinat sistemany özgertme bilen aşakdaky sekiz görnüşe getririler.

1. $\frac{2^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3. $a^2x^2+b^2y^2=0$
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
5. $a^2x^2-b^2y^2=0$
6. y^2-2px
7. $y^2=2px$
8. $y^2+a^2=0$

U($\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}$) we (-2;$\frac{\sqrt{15}}{5}$) nokatlary belli boln ellipsiň kanonik deňlemesini ýazmaly.

Çözülşi elipsiň merekeziniň kordinatala başlangyjynda fokuslaryň bolsa absissa ýatanlygy üçin gözlenýän elipsiň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$. $\mu\left(\frac{5}{2}:\frac{6}{4}\right)$we N(-2;$\frac{\sqrt{5}}{5}$) nokatlaryň kordinatalarny ellipsiň deňlemesinde goýup a we b sanlary kesgitleýäris. $\begin{cases} \dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{6}{16b^2}=1 \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{5b^2}=1 \end{cases}$ Bu ýerden $a^2=10$, $b^2=1$. a^2 we b^2

tapylan bahany ellipsiň deňlemesine goýup alarys. $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{1}=1$

2-nji mesele. $25x^2+16y^2=4225$ elipsiň deňleesi berlipdir onuň oklarynyň uzynlyklaryny e fokuslarynyň kordinatalarny tapmaly.

Çüzülşi: ilki ellipsiň umumuy deňlemesini kanonik görnüşde ýazalyň. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Bu ýerden $a^2=169$. $a=13$, $b^2=25$, $b=5$

Indi 2a-ni we 2b-bi tapmaly: $2a=26$ we $2b=10$ bolar.

Indi bolsa kordinatalaryň fokuslaryny kordinatalarny tapmalyň onuň üçin c-ni tapalyň.

$C^2=a^2-l^2=169-25=144$

$C^2=144$ ýa-da $c=\pm12$.

n-ölçegli wektor giňişligi

Çyzykly deňlemeleriň sistemalarynyň umumy nazaryetini gurmak üçin wektor giňişligi düşünjesi zerurdyr.

Analitiki geometriýadan bell i boluşyna görä tekižligiň her bir nokady (koordinatalar oklary belli bolanlarynda özüniň iki sany koordinatalary tekizligiň her bir wektory bolsa özüniň iki sany kompatentalary hakyky sanlaryň iki sanysynyň tertiplişdirilen sistemasy bilen kesgitlenýändir.Şuňa meňzeşlikde üç ölçegli giňişligiň her bir nokady özüniň üç sany koordinatalary bilen ,giňişligiň her bir wektory bolsa özüniň üç sany komponentalary bilen kesgitlenýär.

Ýöne geometriýada ,mehanikada we fizikada üç sany hakyky sanlaryň sistemasynyň berilmegi bilen doly kesgitlenmeýän obýektler hem öwrenilýändirler.Mysal üçin üç ölçegli giňişlikde şarlaryň toplumy öwrenilende şaryň doly kesgitlenen bolmagy üçin onuň merkeziniň koordinatalarynyň we radiusynyň,ýagny dört sany hakyky sanlaryň tertipleşdirilen sistemasynyň berilmegi zerurdyr.

Bu mysaldan görnüşi ýaly n sany hakyky sanlaryň ähli mümkin bolan tertipleşdirilen sistemalarynyňöwrenilmegi ähmiýeti eýedir.

N sany sanlaryň tertipleşdirilen $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ (1) sistemasyna n-ölçegli wektor diýilýärf.Bu ýagdaýda $a_i, I=1,2,\ldots, n$ sanlara α wektoryň kompanentalary diýilip aýdylýar.Eger-de α bilen n -ölçegli $\beta = (b_1, b_2, \ldots b_2)$ (2) wektoryň degişli kompanentalary deň bolsalar bu iki wektorlaryň özleri hem deň hasap edilýärler.

(1) we (2) wektorlaryň jemi diýilip her bir kompanentasy olaryň degişli komponentalarynyň jemine deň bolan

$$\alpha+\beta =(a_1+b_1 , a_2+b_2 , \ldots a_n+b_n) \quad (3)$$

wektora aýdylýar. Wektorlary goşmak amalynyň orunçalşyrma we utgaşdyrma häsiýetlerine eýedigi bu kesgitlemeden görünýändir.

Nul wektor diýilýan $0 = (0 , 0 , \ldots 0)$ (4)
wektorlar goşulanda nulyň ornyny tutýandyr.
Hakykydan hem

$$\alpha+0=(a_1 +0, a_2 +0 , \ldots a_n+0)=(a_1, a_2, \ldots a_n)=\alpha$$

Al wektorya garşylykly diýilip

$$-\alpha= (-a_1,- a_2, \ldots - a_n) \ (5)$$

wektora aýdylýar.$\alpha+(-\alpha)=0$ deňlik aýandyr. Şeýle hem goşmak amal;yna ters aýyrmak amalynyňbaradygy hem aňsatlyk bilen görkezilip biliner.Hakykyatdan hem (1) we (2) wektorlaryň tapawudy bolup

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{wektor ,ýagny}$$

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1 \ a_2-b_2 \ldots a_n -b_n) \ (6)$$

wektor hyzmat eder.

α wektoryň k sany köpeltmek hasyly diýilip

$$k\alpha=(k a_1, k a_2, \ldots k a_n) \ (7)$$

wektora aýdylýar. Bu kesgitlemeden $k(\alpha \pm \beta)=k\alpha \pm k\beta$ (8), $(k \pm l)\alpha=k\alpha \pm l\alpha$ (9)

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha \quad (10)$$

$$1*\alpha=\alpha \quad (11)$$

$$0*\alpha=0 \quad (12)$$

$$(-1)\alpha=-\alpha \quad (13)$$

$$k*0=0 \quad (14)$$

EDEBIÝATLAR

1.Aleksandrow P.S. Leksii po analatiçeskoý geometrii. M.Nauka. 1968.

2.Ilin W.A, Poýenak E.G. Analatiçeskaýa geometriýa. M.Nauka. 1981.

3.Beklemişew D.B. Žure analatiçeskoý geometrii i lineýnoý algebri. M.Nauka. 1980.

4.Priwalow I.I. Analatiçeskaýa geometriýa. M. Fizmattiz. M.Nauka. 1958.

Mazmuny

Giriş……………………………………………………………….……..11

1.Wektorlar algebrasynyň elementleri…...…12
2.WEKTORLARYŇ ÇYZYKLY BAGLYLYGY…………...............19
3.KORDINATALAR ULGAMLARY. KORDINATOLARYŇ DEKART ULGAMY……………………….…………………………………..….22
4.KOORDINATALARYŇ GÖNÜBURÇLY DEKART ULGAMY……..………………………………………….………..……23
5.KESIMI BERLEN GATNAŞYKDA BÖLMEK……….…….……24
6. KOORDINATALARYŇ POLÝAR ULGAMY……….……….…25
7.SILINDRIK KOORDINATAL……….………………………….26
8.SFERIK KOORDINATALAR……………………..……………27
9.IKI WEKTORYŇ SKALÝAR KÖPELTMEK HASYLY…..…...27
10.GIPERBOLANYŇ DIAMETRLERI. ÇATYRYK DIAMETRLER……………………………………………..……..38
11.ELLIPS, GIPERBOLA WE PARABOLA GATLAGYNYŇ ÇYZYKLARYŇ GATLAGYNYŇ DEŇLEMELERI..………...……40
12.ELLIPS - TÖWEREGIŇ PROÝEKSIÝASY HÖKMÜNDE……....44
13.ELLLIPSIŇ PARAMETRIK DEŇLEMELERI…..........................45
14.PARABOLANYŇ DIAMETRLERI..51
15.ELLIPSIŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY...58
16.PARABOLANYŇ EKSSENTRISITLERI WE DIREKTRISALARY...59
17.Skalýar köpeltmek hasyly köpeldijileriň koordinatalarynyň üsti bilen aňlatmak…..60
18.Iki nokadyň arasyndaky uzynlyk…..61
19.Wektorlar üçlüginiň orientasiýasy…..62
20.Göni çyzygyň polýar kordinatalardaky deňlemesi….....................71
21.Ikinji teripli egrileriň umumy deňlemesi we olaryň kanonik görnüşe getirlişi……………………………….................………..…73
22.PARABOLIK GÖRNÜŞ...……………………….………76
23.Wektorlaryň çyzykly baglanşyklylygy…........................………...80
49.Edebiýat…..…......81

Baba Kömekow, Orazmämmet Annaorazow,

Hajymuhammet Geldiýew, Azatgeldi Öwezow

ANALITIKI GEOMETRIÝA

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby