TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Gurbansähedow Gurbansähet

MATEMATIK MODELLERI EHM-DE HASAPLAMAK

Önümçiligi we tehnologik prosessleri awtomatlaşdyrmak
hünäri üçin

Aşgabat – 2010

Giriş

XXI – asyrda Türkmenistanyň Altyn asyra üstünlikli barmagyň möhüm şertleriniň biri hem tehnikany ösdürmek we öňdebaryjy tehnologoýalary ornaşdyrmakdan ybarat. Şu maksat bilen ýurdumyzda 2020–njy ýyla döwür üçin ylmy-tehniki we tehnologiki ösüşiň Maksatnamasy işlenip düzüldi.

Ýurdumyzyň Prezideti bu ugurdaky syýasaty ýokary halkara derejesindäki tehnologiýalaryň gazananlarynyň önümçilige ornaşdyrmagyny we öz tehnologiýalarymyzyň ösdürilmegini talap edýär.

Geljekde 2020-njy ýyla çenli ylym tarapyndan çözülmeli meseleler ykdysady binýady ösdürmegiň eseasynda halkyň hal-ýagdaýynyň ýokary derejesini üpjün etmäge gönükdirilen durmuş syýasatyndan gelip çykýar.

Öňde goýlan maksada laýyklykda ýurdumyzda ylmy-tehniki syýasat şu esaslardan amala aşyrylar:

- Ýurdumyzyň ykdysadyýetiniň esasy pudaklarynda dünýä ylmyň we tejribesiniň gazananlaryny giňden ulanmak;
- Ýurdumyzyň ylmy tehniki mümkinçilikleriniň esasynda geçirilýän düýpli we amaly barlaglaryň netijesini çalt depginler bilen önünçilige ornaşdyrmak.

Ylymy- tehniki taýdan ösüş maksatnamasyny dürmuşa geçirmek aşakdaky esasy wezipeleriň çözülmegini talap edýär:

- Ylymy mümkinçilikleriň ykdysadyýeti we durmuş pudaklaryny ösdürmegiň ileri tutulýan ugrularyndan jemlenmegi, Türkmenistanyň ýerli şertlerini we aýratynlyklaryny göz öňünde tutup pudaklarynyň anyk wezipeleriniň çözülmegini;
- Ýokary okuw jaýlarynda ylmy- guminitar barlaglaryň ösdürlendiginiň, ylmy mümkinçilikleriniň doly ulanmagyny;
- Türkmenistanyň ykdysadyýetiniň batly ösüşini üpjün etmek we onuň öňde baryjy tehnologiýalar boýunça maglumat esasynda döretmek üçin dünýädäki gazanylan iň täze zatlaryň giňde ulanylmagy

- Ylmy tehnika we öňde baryjy tehnologoýa babatynda daşary ýurtda we halkara guramlar bilen hyzmatdaşlygy giňeltmegi;
- Türkmenistanyň ýokary derejede ösen dünýewi demokratik döwlete öwürmek barada öňde goýlan wezipeleri çözmäge ukyply, Türkmenistanyň Prezidentine jany- teni bilen hyzmat etmäge taýar ýokary hünärli işgärleri taýarlamak.

Garassyzlygyň ýyllary içinde ylmy-tehniki ugurda ylmy dolandyrmagyň düzümini kämilleşdirmäge, ýurduň sosial-ykdysady ösüşiniň möhüm, ileri tutulýan wezipeleri çözmäge ylmy edaralary ugrukdyrmaga gönikdirilen çuňňur özgerişler boldy.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedow ýaş nesle dünýä derejesinde bilim bermek, hünär öwretmek barada alada edýär, bilim işgärlerine bu babatda anyk görkezmeler, tabşyryklar berýär.

Beýik galkynyşlar zamanamyzda möhüm şertleriniň biri hem, tehnikany ösdürmek we öňdebaryjy tehnologiýalary ornaşdyrmakdan ybaratdyr. Şu maksat bilen ýurdumyzda 2010-2020 njy ýyla çenli döwür üçin ylmy – tehniki we tehnologiki ösüşiň maksatnamasy işlenilip düzüldi.

Bize häzirki zaman tehniki enjamlaryndan, kompýuterlerden baş çykarýan ýaşlary taýarlamak gerekdir” diýip adalatly bellenýar. Bu meseläni çözmekde ýaşlara kompýuter tilsimatynyň esaslaryny öwretmegiň ähmiýeti uludyr. Hormatly perezidentimizin talaplary esasynda biziň institutymyzda okuw maksatnamalary düzülende talyplaryň önümçilikde wajyp meseleleri çözmeklige çekilmeleri olaryň täze tilsimat taslamalary düzmekligi, dünýäde gazanan tilsimat netijeleri önümçilige ornaşdyrmaklyga gatnaşmagy, bazar gatnaşyklary şertlerde önümçiligi gurnamaklygy we ýöretmegi başarmagy göz öňünde tutuldy.

Şeýlelikde, geljekki hünärmenler okuwda alan bilimlerini durmuşda ulanmak ukybyna eýe bolarlar. Institutyň uçurymlaryna şeýle başarnygy toplamak üçin, hormatly Prezidentimiziň belleýşi ýaly, olaryň türkmen ykdysadyýetiniň ösüşini biziň milli baýlyklarymyz bolan nebitiň, gazyň, pagtanyň we beýleki önümleriň gymmatyny, olaryň dünýä bazaryndaky ornuny bilmekleri gerek. Talyplar bilen geçirilýän sapaklar bu gymmatlyklar barada giňişleýin düşünjeler berer.

Halk hojalygynyň pudaklary üçin iň täze tilsimaty gözlemekde we önümçilige ornaşdyrmakda kömek bermek üçin Dünýä ylym, bilim, habar beriş torynyň kömegi bilen institutyň mugallymlary we talyplary bilim ulgamyndaky dünýä ülüňlerine gabat gelýän okuw, ylmy barlag işleriniň gurnalyşy, häzirki zaman bilim tilsimatyny, bilim ulgamynda öňdebaryjy tejribäni öwrenýärler. Institutymyzda hünär öwredilişini hasaba almak bilen nebit we gaz, himiýa senagatyndaky, gurluşykdaky,energetikadaky täze tilsimatlar we enjamlar, kompýuter tilsimaty ulgamyndaky, ykdysadyýetdäki täze işläp taýýarlamalar boýunça maglumatlar toplamak işleri alnyp barylýar.

Bu ulgamyň maglumatlarynyň esasynda institutda hünärmenleri taýýarlamagyň esasy ugurlary boýunça elektron maglumat banklary döredildi, kitapça görnüşinde neşir edilip, olar talyplaryň we mugallymlaryň hyzmatynda goýuldy.

Senagatyň her bir pudagynyň ugry babatda dünýäniň gazananlaryny, tejribesini öwrenmek, täze tilsimaty önümçilige ornaşdyrmak, türkmeniň Altyn asyrdaky inženerleriň orny bilen baglanyşykly soraglar biziň talyplarymyzyň arasynda uly gyzyklanma döredýär. Hormatly Prezidentimiziň ylmy täzeçe guramak baradaky görkezmelerinden ugur alyp, ylmy mümkinçilikleri, talyplaryň ylma bolan hyjuwlaryny göz öňünde tutup, kafedralaryň köpüsinde ylmy toparlar döredildi. Bu toparlar Türkmenistanyň şertlerinde tehnika we tilsimaty bilen baglanyşykly ylmy barlaglaryň ýollaryny anyklamaga kömek edýär.

I B A P

Koşiniň formulasy.

1. Koşiniň formulasy. Ortalyk baha barada teorema.

Teorema 1. Goý, analitiki köp baglanşykly meýdanda *f(z)* funksiýa berlen bolsun we $\Omega \subset G$ käbir meýdany çäklendirýän düzüji ýa-da ýönkeý *l* kontur berlen bolsun. Onda Ω meýdana degişli islendik içki *z* nokat üçin Koşiniň formulasy dogrudyr.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (1)$$

Subudy. Ω meýdandan merkezi z nokatda bolan r radiusly töweregi ýok edeliň. Alnan Ω^* meýdanda integral asty funksiýanyň sanawjysy we maýdalawjysy ζ degişlilikde analitiki, maýdalawjy hiç wagt nola öwrülmeýär. Şonuň üçin integral astynadaky funksiýa Ω^* meýdanda analitiki. Koşiniň teoremasy boýunça köp baglanşykly meýdandan alarys

$$\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\bar{l}_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

Bu ýerde l_r - r radiusyň töweregi, çyzyk töwerek sagat dikiniň ugry boýunça aýlanýandygyny görkezýär. (1) integralyň häsiýetini hasaba alyp indikini alarys,

$$\int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{l_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (2)$$

l_r töwerekde $\zeta - z = re^{j\varphi}$, we $d\zeta = jre^{j\varphi} d\varphi$ deňlemeler dogry. Onda

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{jre^{j\varphi} d\varphi}{re^{j\varphi}} = f(z). \qquad (3)$$

(2) we (3) formulalardan indiki gelip çykýar

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (4)$$

(4) deňlemäniň sag tarapyny modul boýunça bahalandyralyň:

$$\left|\frac{1}{2\pi j}\int_{l_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\max\left|f(\zeta)-f(z)\right|\frac{2\pi r}{r} = \max_{l_r}\left|f(\zeta)-f(z)\right|.$$

Ω meýdanda *f(z)* funksiýa üznüksiz bolany üçin, r →0 bolanda $\max_{l_r}\left|f(\zeta)-f(z)\right| \to 0.$ deňdir. Ýöne (4) deňlemäniň çep tarapy *r* bagly däl, şonuň üçin

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{l}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = f(z).$$

Koşiniň formulasy analitiki funksiýanyň esasy häsiýetleriniň birini gurnaýar. Formuladan görnüşi ýaly *l* konturda *f(z)* analitiki funksiýany bilip, şol kontur bilen çäklenen Ω meýdanyň islendik nokadynda onuň bahasyny kesgitläp bolýar. Eger *z* merkezi nokatly *R* radiusly töwerek görnüşinde *l* kontur berilse , onda $\zeta - z = \mathrm{Re}^{j\varphi}$ we (1) formula indiki görnüşe geler.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z+\mathrm{Re}^{j\varphi})d\varphi \qquad (5)$$

ýa-da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi r}\int_{c_R} f(\zeta)ds.$$

(5) formula orta bahanyň formulasy diýilýär we töweregiň merkezinde f(z) funksiýanyň analitiki bahasy onuň töwerekdäki orta arifmetiki bahasyna deň.

2. Parametrlere bagly integrallar.

Goý, $f(z,\zeta)$ funksiýa *z* we ζ kompleks üýtgeýjileriň funksiýalary bolsun. Bu funksiýa *G* meýdana degişli *z* üýtgeýjiniň bahasy üçin we *l* kese degişlu bolan ζ üýtgeýji üçin kesgitlenen. G meýdanyň we l kesäniň ýerleşişi dürli bolup bilýär. Aşakdaky integrala seredeliň:

$$\int_{l} f(z,\zeta)d\zeta \qquad (6)$$

Eger $f(z,\zeta)$ funksiýa *z* boýunça üznüksiz bolsa hem-de $z \in G$ we $\zeta \in l$ bahalar üçin ζ çäklendirlen bolsa , onda bu integral bar we käbir *z* funksiýany kesgitleýär:

$$F(z)=\int_l f(z,\zeta)d\zeta.$$

Indiki teoremalarda seredilýän parametre bagly bolan integrallaryň häsiýetlerini subutsyz getireris.

Teorema 2. Eger $f(z,\zeta)$ funksiýa $z\in G$ we $\zeta\in l$ islendik bahalar üçin z we ζ kompleks üýtgeýjileriň üznüksiz funksiýalary bolsalar, onda (6) integral G meýdanda z üýtgeýjiniň üznüksiz funksiýasy bolup durýar.

$$\lim_{z\to z_0}\int_l f(z,\zeta)d\zeta=\int_l f(z_0,\zeta)d\zeta \qquad (7)$$

Teorema 3. Goý, $f(z,\zeta)$ G meýdanda $\zeta\in l$ bahada z analitiki funksiýa bolsun. $f(z,\zeta)$ funksiýa we onuň z boýunça önümi $\frac{\partial f}{\partial z}$ $z\in G$ we $\zeta\in l$ islendik bahalar üçin z we ζ kompleks iki üýtgeýjileriň üznüksiz funksiýalary bolup durýar. $F(z)=\int_l f(z,\zeta)d\zeta$ funksiýa G meýdanda z analitiki funksiýa bolup durýar, *F'(z)* önüm antegral asty hasaplama arkaly hasaplanyp bilner.

$$F'(z)=\int_l \frac{\partial f(z,\zeta)}{\partial z}d\zeta. \qquad (8)$$

Getirlen teoremalar (6) integraly hakyky üýtgeýjili funksiýalar we bu integrallaryň häsiýetleriniň ulanylmagynyň parametrlerine bagly bolan integrallara deňlemek arkaly subut edilip bilner.

3. Ýokary tertipli önümler.

Eger *f(z)* funksiýa G meýdanda analitiki funksiýa bolsa onda ol bu meýdanda ýokary tertipli önüme eýedir.

Teorema 4. Eger *f(z)* funksiýa G meýdanda analitiki bolsa we G meýdanda ýapyk bolsa , onda ol G meýdanyň her bir nokadynda ähli tertipli önümlere eýe bolar. *n*-nji önüm hem şu aşakdaky formula bilen berilýär.

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2nj}\int_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \qquad (9)$$

bu ýerde *l* – položitel ugurda gidýän G meýdanyň araçägi.

Subudy. Matematiki induksiýa metody arkaly subudyny getireliň.

(9) formula n=1 bolanda hakykydyr. Nokat $z\in G$ bolsun. f(z) funksiýa G meýdanda analitiki we üznüksiz bolany üçin, Koşiniň formulasy we önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_l\left[\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right]f(\zeta)d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\Delta z\to 0}\int_l\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta$$

Integralyň astyndaky $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}$ funksiýa, eger $z \in G$ we $\zeta \in l$ bolsa Δz we ζ üýtgeýjileriň üznüksiz funksiýasy bolup durýar. Integralyň belgisi bilen predele geçilende

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta.$$

n=1 üçin (9) formula subut edildi. (9) formula k tertipli önüm üçin hakyky diýip hasaplalyň we ol k+1 tertipli önüm üçin hakyky bolar.

$$f^{(k+1)}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^{(k)}(z+\Delta z) - f^{(k)}(\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{k!}{2\pi j}\lim_{\Delta z \to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_l \left[\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^{(k+1)}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{(k+1)}}\right] f(\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{k!}{2\pi j}\lim_{\Delta z \to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_l \left\{\frac{(\zeta - z)^{k+1} - \left[(\zeta - z)^{k+1} - (k+1)(\zeta - z)^k \Delta z + o(\Delta z)\right]}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}}\right\} f(\zeta)d\zeta.$$

Integral astyndaky funksiýa Δz we ζ üýtgeýjileriň üznüksiz funksiýalary bolup durýar. Integralyň belgisi arkaly predele geçip bolýar.

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi j}\int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}}\,d\zeta.$$

n=k üçin (9) formulany hakyky diýip kabul etsek , onda onuň *n=k+1* üçin hakykylygy subut edildi diýsek bolýar. Ýokarda n=1 üçin (9) formula subut edildi. Bu ýerden hem islendik *n* üçin (9) formula hakyky bolýar.

(9) formuladan Koşiniň deňsizligini alýarys. Aşakdaky belgilenmäni girizeliň: M=max |*f(z)*|; R- *z* nokatdan G meýdanyň çägine çenli aralyk, s- G meýdanyň *l* araçäginiň uzynlygy. Modul boýunça (9) deňligiň iki tarapyny hem bahalandyryp, alarys

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \frac{n!}{2n}\left|\int_l \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right| \le \frac{n!Ms}{2\pi R^{n+1}}. \qquad (10)$$

(10) formula Koşiniň deňsizligi bolýar.

Eger *f(z)* funksiýa R radiusly meýdanda analitiki bolsa onda R radiuly tömerek hökmünde G meýdany kabul etsek töweregiň merkezinde bolan z nokat üçin alarys

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M\,2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n} \qquad (11)$$

(11) deňsizlik töwerekleýin meýdan üçin Koşiniň deňsizligini häsiýetlendirýär.

4. Moreriň teoremasy.

Analitiki funksiýanyň islendik tertipli önüminiň bardygy baradaky 4-nji teoremany ulanyp Koşiniň esasy teoremasyna ters bolan teoremany subut edeliň.

Teorema 5. Eger baglanşykly G meýdanda *f(z)* funksiýa üznüksiz bolsa we G meýdana degişli bolan islendik ýapyk l kontur boýunça bu funksiýanyň integraly nola deň bolsa onda *f(z)* funksiýa G meýdanda analitikdir.

Subudy. Ýokarda görkezilşi ýaly teoremanyň şerti ýerine ýetende $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ integral z funksiýanyň analitiki funksiýasy bolup durýar. Bu ýagdaýda $F'(z)=f(z)$. Öňki teorema degişlilikde funksiýanyň ikinji önümi hem bar: $F(z):F''(z)=f'(z)$. Şeýlelikde *f(z)* funksiýa G meýdanda analitiki.

Funksional hatarlar.
Sanly we funksional hatarlar.

1. Sanly kompleks hatarlar.

Sanly kompleks hatarlar diýlip indikilere aýdylýar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (1)$$

bu ýerde $z_n=a_n+jb_n$ – kompleks sanlar. $S_n=z_1+...+z_N=\sum_{n=1}^{N} z_n$ jem hataryň bölekleýin jemi diýilip aýdylýar.

Eger (1) bölekleýin jem yzygiderliginiň predeli bar bolsa:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S \qquad (2)$$

Bu ýagdaýda S hataryň jemi bolýar.

z_n kompleks sanlaryň a_n we b_n maddy we hyýaly böleklerinden duran hatara seredeliň:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ we } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (3)$$

(1) hatar diňe (3) hatara ýygnanýar eger, diňe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, $S=\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + jS_{2.}$

(1) hataryň ýygnanmagy üçin islendik $\varepsilon>0$ üçin ε bagly bolan bütin položitel N san gerek, ähli n>N we islendik m sna üçin deňsizlik ýerine ýetmeli.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} z_k\right| < \varepsilon$$

hatarlar ýönekeý sanly hatarlar bolup durýar, we bu hatarlaryň ýygnanmagy üçin matematiki analizden sanly hatarlaryň gabat gelmekleriniň alamatlaryny ulanyp bolýar. položitel hatarlaryň gabat gelmekleriniň alamatlarynyň birini mysal edip getireliň. Položitel hatar bolsun

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0). \qquad (4)$$

(2) hataryň ýygnanmagy üçin şu aşakdaky kriteriýalar dogrudyr:

1. **Dalamberiň nyşany.** B Eger $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = q$ bolsa, onda *q<1* bolanda (4) hatar ýygnanýar. *q >1* bolanda hatar dargaýar.
2. **Koşiniň nyşany.** Eger $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ bolsa, onda *q<1* bolanda (4) hatar ýygnanýar, *q>1* bolanda hatar dargaýar.
3. **Raabeniň nyşany.** Eger $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_n + 1} - 1\right) = p$ bolsa, onda p>1 bolanda (4) hatar ýygnanýar, p<1 bolanda hatar dargaýar.

Eger z_n moduldan düzülen hatar ýygnansa onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty, \qquad (5)$$

(1) hatar absolýut ýagnanýan hatar bolýar.

(3) hataryň ýygnanýandygyny barlamak üçin ýokarda görkezilen sanly hatarlaryň ýygnanma nyşanlaryndan ulanyp geçirip bolýar. Hataryň ýygnanmagy bilen absolýut ýygnanmagynyň arasyndaky arabaglanşygy aşakdaky teorema gurnaýar.

Teorema.1. Eger (1) hatar absolýut ýygnansa onda ol ýygnanýar.

Subudy. Koşiniň kriteriýasyna laýyklykda (5) hataryň ýygnanmagyndan, islendik $\varepsilon > 0$ we bütin položitel *m* san üçin bütin položitel M san bar, n>N üçin onuň jemi $\sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k| < \varepsilon.$ deň. Ýöne $\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} z_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k| < \varepsilon,$ şonuň üçin Koşiniň kriteriýasyna laýyklykda (1) hatar ýygnanýar.

2. Funksional hatarlar.

G meýdanda $\{f_n(z)\}$ funksialaryň tükeniksiz yzygiderligi kesgitlenen bolsun. Funksional hatar diýlip aşakdaka aýdylýar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \qquad (6)$$

(3) funksional hatar G meýdanda ýygnanýar, eger islendik fiksirlenen z-de (6) hatardan emele gelen sanly hatar gabat gelse.

$\{f_n(z)\}$ funksialaryň yzygiderliginiň deň derejeli ýygnanmagy diýen düşünjäni girizeliň. $\{f_n(z)\}$ funksialaryň yzygiderligine G meýdanda *f(z)* funksialaryň deň derejeli ýygnanmagyna aýdylýar. Onuň üçin G meýdanda $|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetmeli. $\{f_n(z)\}$ funksialaryň yzygiderliginiň deň derejeli ýygnanmagynyň z kompleks üýtgeýjisiniň häsiýetleri funksialaryň yzygiderliginiň gabat gelmeginiň häsiýetleri bilen gabat gelýär. Bu häsiýetleri görkezeliň:

G meýdanda deň derejeli ýygnanýan f(z) predel $\{f_n(z)\}$ funksiýalaryň üznüksiz yzygiderligi bu meýdanda üznüksiz funksiýa bolup durýar.

Eger $\{f_n(z)\}$ üznäksiz funksiýalaryň yzygiderligi *l* egride *f(z)* ýygnanýan bolsa onda aşakdaky predel gatnaşyk dogry bolýar:

$$\lim_{n\to\infty}\int_l f_n(z)dz=\int_l \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz=\int_l f(z)dz.$$

$\{f_n(z)\}$ funksiýanňy yzygiderliginiň deň derejeli ýygnanmagy diýen düşünje hataryň deň derejeli ýygnanmagy diýen düşünje bilen baglanşykly. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funksional hatar G meýdanda deň derejeli ýygnanýan hatar diýilýär. Ýokarda görkezilen häsiýetlere laýyklykda deň derejeli ýygnanýan hataryň jemi G meýdanda üznüksiz funksiýa bolup durýar. Kompleks üýtgeýji funksiýa üçin indiki alamat dogrudyr:

4.Weýerştraassyň nyşany.

Eger (6) funksional hatar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$ G meýdanda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ san hatarynyň $a_n>0$ položitel agzalary bilen mažorirlenýän bolsa , onda G meýdanda $|f_n(z)|<a_n$ deňsizlik dogrudyr.

Weýerştrassyň teoremasy. Analitiki funksiýadan düzülen hataryň jemi hemişe analitiki funksiýa bolmaýar. Indiki teorema haýsy şertlerde hataryň jemi analitiki funksiýa bolýandygyny görkezýär.

Teorema.2. *f(z)* funksiýadan düzülen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$ hatar G meýdanda analitiki bolsun, her bir Ω meýdanda deň derejeli ýygnanýar. Bu ýagdaýda hataryň jemi G meýdanda analitiki funksiýa bolup durýar.

Subudy. f(z)= $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$ G meýdanda ýygnanýan hataryň funksiýasy bolýandygy görkezildi. *l*-ýapyk kontur öz içinde Ω meýdany saklaýar. Teoremanyň şertine laýyklykda $f_n(z)$ G meýdanda analitiki funksiýa bolup durýar. Koşiniň teoremasyna laýyklykda $\int_l f_n(z)dz=0$ alarys. Koşiniň formulasyny göz öňünde tutup $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$ hataryň her bir agzalaryny ignorirleýäris.

$$\int_l f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z)dz = 0$$

Şeýlelikde *f(z)* – G meýdanda üznüksiz funksiýa we integral islendik ýapyk kontur boýunça nola deň. Teorema 5 laýyklykda f(z) funksiýa bu ýagdaýda G meýdanda analitiki funksiýa bolup durýar.

Koşi – Rimanyň şerti.

$z=z_0$ nokatda $f(z)=u+jv$ funksiýanyň önüminiň bar bolmagynyň zerur we ýetrlik şertini bereliň, şeýle hem $f(z)$ funksiýanyň analitik şertini bereliň.

Teorema 1.

$f(z)=u+jv$ funksiýanyň z_0 nokadyň käbir ýaýlasynda kesgitlenen bolup,bu nokatda önümiň bolmagy zerur hem ýeterlik bolar ýaly:

1) $u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalar x we y boýunça $z=z_0$ nokatda differensirlenýän bolmaly;

2) $z=z_0$ nokatda Koşi – Rimanyň şerti ýerine ýetmeli:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ we } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

Subutnama. Ilki bilen Koşi – Rimanyň şertiniň zerurlygyny subut edeliň.Goý, $f(z)$ funksiýa $z=z_0$ nokatda önümi bar bolsun, şeýle hem predel bar bolsun,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (3)$$

Bu predel Δz-ň nola ymtylmak usulyna bagly däldir. Goý $\Delta z=\Delta x$ bolsun, onda

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [(u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + j[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{j\Delta y} =$$

$$= \frac{du}{dx} + j\frac{dv}{dx}. \qquad (4)$$

Goý,indi $\Delta z=j\Delta y$ bolsun,onda

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0)]}{j\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u\, x_0, y_0)] + j[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{j\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{j}\left(\frac{du}{dy} + j\frac{dv}{dy}\right) = \frac{dv}{dy} - j\frac{du}{dy}. \qquad (5)$$

Şeýle hem (3)-nji predel Δz-ň nola ymtylma şertine bagly däldir,onda hakyky we hyýaly böleklerini (4) we (5)-de deňläp alarys:

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \text{ we } \frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}.$$

Teoremanyň zerurlyk şerti subut edildi.

Indi Koşi – Rimanyň ýeterlik şertini subut edeliň.

Goý,$u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalar x we y boýunça differensirlenýän bolsun we Koşi – Rimanyň şertini kanagatlandyrýan bolsun.Bu ýagdaýda $f'(z)$ önüm z=z_0 nokatda bar.

$u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalaryň differensirlenmeginden alarys:

$$\Delta w=\Delta u+j\Delta v=\frac{du}{dx}\Delta x+\frac{du}{dy}\Delta y+j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x+\frac{dv}{dy}\Delta y\right)+o(\Delta z),$$

bu ýerde $o(\Delta z)$ – tükeniksiz kiçi bolup Δz-e seredeniňde ýokary tertipli kiçidir.

$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ gatnaşyga seredeliň:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{du}{dx}\Delta x+\frac{du}{dy}\Delta y+j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x+\frac{dv}{dy}\Delta y\right)}{\Delta x+j\Delta y}+\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Koşi – Riman şerti boýunça alarys:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{du}{dx}\Delta x-\frac{dv}{dx}\Delta y+j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x+\frac{du}{dx}\Delta y\right)}{\Delta x+j\Delta y}+\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}=$$
$$=\frac{\frac{du}{dx}(\Delta x+j\Delta y)+j\frac{dv}{dx}(\Delta x+j\Delta y)}{\Delta x+j\Delta y}+\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Indi $\Delta z\to 0$ predele geçeliň:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{du}{dx}+j\frac{dv}{dx}=w'(z_0),$$

bu predel bardyr we $\Delta z\to 0$ usulyna bagly däldir.Şeýlelik bilen Koşi – Riman şertiniň ýeterlik şerti ýerine ýetýär.

Koşi – Riman şertini ulanyp alarys:

$$f'(z)=\frac{du}{dx}+j\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}-j\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}-j\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}+j\frac{dv}{dx}. \quad (6)$$

Subutsyz Koşi – Riman şertini f (z) funksiýa üçin getireliň, eger z-trigonometrik formada berilen bolsa.

Goý,

$$f(z) = f[r(cos\varphi + jsin\varphi)] = u(r,\varphi) + jv(r,\varphi).$$

z_0=r_0 (cosφ_0+$j$sinφ_0) nokatda önümiň bar bolmagy üçin aşakdaky şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir:

1) u (r,φ) we v (r,φ) funksiýalar r we φ boýunça differensirlenýän bolmaly;
2) z_0 nokatda Koşi – Rimanyň şerti aşakdaky görnüşde ýerine ýetmeli;

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi}; \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi}. \qquad (7)$$

1-nji mysal.

Funksiýanyň analitikligini kesgitläliň:

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + j2xy.$$

bu funksiýa hakyky we hyýaly bölegi: $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$ bolsun.u we v funksiýalar x we y boýunça differensirlenýän bolsun,olaryň hususy önümleri:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dv}{dy} = 2x, \frac{du}{dy} = -2y, \frac{dv}{dx} = 2y.$$

Şeýlelikde,Koşi – Rimanyň şerti z-kompleks tekizliginiň ähli nokatlary üçin ýerine ýetmeli.Şeýlelikde,f (z)=z^2 funksiýa kompleks tekizliginiň ähli ýerinde analitikdir.

2-nji mysal.

f (z)=|z|=r funksiýanyň analitikligini kesgitlemeli.

Bu funksiýa üçin $u(r,\varphi)=r$, $v(r,\varphi)=0$ üçin $\frac{du}{dr} = 1, \frac{dv}{d\varphi} = 0$ hususy önümleri hasaplalyň.(7)-Koşi – Rimanyň şerti ýerine ýetmeýär,onda f (z)=|z| analitik däldir.

I I   B A P

1. San matritsalary we olaryň üstündäki amallar.

1.esasy düşünjeler we kesgitlemeler.

m-sany setirden we *n*-sany sütünden ybarat bolan tablisa gönüburçly gönüburçly matritsa diýip aýdylýar. Matritsalar, umuman baş latyn harplary bilen belgilenýär. Mysal üçin, *A, B, C* we ş.m. harplar bilen belgilenýär.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{vmatrix} = [a_{ij}] \quad (1)$$

Bu tablisada indeksleriň 1-njisi setiriň nomerini görkeňýär; indeksleriň 2-njisi bolsa, şol elementiňýerleşýän sütünininiň nomerini görkeňýär. Mysal üçin, a_{ij}-element, tablisanyň i-nji setiriniň j-nji sütüninde ýerleşýändir. Matritsanyň $a_{ij}(i = \overline{1,m}, j = \overline{,1n})$–elementleri hakyky ýa-da kompleks sanlar sanlar bolup bilerler.

Eger, matritsada *m=n* bolsa, ýagny, matritsanyň setirleriniň sany bilen sütünleriniň sany deň bolsa, onda bu matritsa kwadrat matritsa diýilip aýdylýar. Bu matritsa aşakdaky görnüşde berilýär.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{n1}b_{n2}...b_{nn} \end{vmatrix} = [b_{ij}] \quad (2)$$

Eger, ölçegleri deň bolan 2-sany *A* we *B* - matritsalarda *A*-matritsanyň degişli elementi *B*-matritsanyň degişli elementine deň bolsa, onda bu matritsalara özara deň matritsalar diýlip aýdylýar. Ýagny, eger, *A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]*-matritsalar üçin,

$$a_{ij} = b_{ij}, (i = \overline{,m}; j = 1, \overline{n})$$

bolsa, oňa

$$A = B$$

bolar.

Eger, $A-[a_{ij}]$- matritsanyň setirleriniň orny bilen, degişlilikde sütünleriniň ornuny çalyşsak, ýagny, $[a_{ij}]$ bolsa, onda alnan $A^T-[a_{ij}]$ matritsa $A-[a_{ij}]$ matritsanyň transponirlenen matritsasy diýlip aýdylýar.
Kesgitlemeden görnüşi ýaly, (1)-matritsanyň transponirlenen matritsasy.

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21}...a_{m1} \\ a_{12}a_{22}...a_{m2} \\ .... \\ a_{1n}a_{2n}...a_{mn} \end{vmatrix} = [a_{ij}] \quad (3)$$

görnüşe eýe bolar.

(3)-nji matritsadan görnüşi ýaly, A^T-matritsanyň ölçegi *(n*m)*-e deňdir.

Matritsalaryň üstündäki algebraik operasiýalara seredip geçeliň.

<u>1⁰</u>. Goý ölçegleri deň bolan $A-[a_{ij}]$we $B-[a_{ij}]$ $(i=\overline{,m}; j=1,\overline{n})$ - matritsalar berlen bolsun. Onda bu matritsalaryň jemi, ýa-da tapawudy:

$$C = A \pm B = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{m1}b_{m2}..._{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11}a_{12} \pm b_{12}...a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21}a_{22} \pm b_{22}...a_{2n} \pm b_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \pm b_{m1}a_{m2} \pm b_{m2}...a_{mn} \pm b_{mn} \end{vmatrix} = [a_{ij} \pm b_{ij}] \quad (4)$$

<u>2⁰</u>. *A=[a_{ij}]*-matritsany λ-sana köpeltmek üçin, onuň her bir elementini köpeltmelidir. Ýagny:

$$C = \lambda * A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}...\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}...\lambda a_{2n} \\ .... \\ \lambda a_{m1}\lambda a_{m2}...\lambda a_{mn} \end{vmatrix} = [\lambda a_{ij}] \quad (5)$$

(4)-we (5)-nji formulalardan görşümiz ýaly, matritsany hemişelik sana köpeldenimizde matritsalary biri-biriniň üstüne goşanymyzdaýa-da aýyranymyzda, alnan C-matritsanyň ölçegi üýtgemeýär, ýagny şol *(m*n)*-ölçegliligine galýar.

3^0. Iki sany matritsany biri-birine köpeltmek üçin, köpeldilýän matritsalaryň 1-njisiniň sütünleriniň sany bilen köpeldilýän matritsalaryň 2-njisiniň setirleriniň sany deň bolmaly.

Ýagny, eger $A=[a_{ij}],(i=\overline{1,m_1};\ j=\overline{1,n_1})$ we $B=[b_{ij}],(i=\overline{1,m_2};\ j=\overline{1,n_2})$ matritsalar berlen bolsa, onda bu matritsalary biri-birine köpeltmek üçin

$$n_1=m_2=n$$

bolmaklygy hökmanydyr.

($n_1 \neq m_2$ -bolan ýagdaýynda bu matritsalary biri-birine köpeldip bolmaýar).

Onda:

$$C=A*B\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m_1 1}a_{m_1 2}...a_{m_1 n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n_2} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n_2} \\ .... \\ b_{n1}b_{n2}...a_{nn_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2}...\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn_2} \\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}...\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kn_2} \\ .... \\ \sum_{k=1}^{n}a_{m_1}b_{k1}\sum_{k=1}^{n}a_{m_1 k}b_{k2}...\sum^{n}a_{m_1 k}b_{kn_2}\end{pmatrix} \quad (6)$$

(6)-njy formuladan görnüşi ýaly, $C=[c_{ij}],(i=\overline{1,m_1};\ j=\overline{1,n}\ )$ matritsanyň c_{ij}-elementleri aşakdaky gatnaşyk boýunça kesgitlenýär:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},(i=\overline{1,m_1};\ j=\overline{1,n_2}) \quad (7)$$

Ýokardaky aýdylanlardan şeýle netijä gelip bolýar.

(m_1/n)-ölçegli A-matritsany (n*n_2)-ölçegli B-matritsa köpeldenimizde, alnan *C*-matritsanyň ölçegi *(m_1*n_2)*-deňdir.

Umumylygy berkitmek üçin aşakdaky bir mysala seredip geçeliň.

Mysal 1.

Goý aşakdaky:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1\end{pmatrix} \text{ we } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Matritsalar berlen bolsun.

Bu matritsalary *C=A*B*-köpeltmek hasylyny tapmak talap edilýän bolsun. Onda (6)-njy formula esasynda:

$$C=\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot3&2\cdot2+3\cdot4&2\cdot1+3\cdot2\\5\cdot1+1\cdot3&5\cdot2+1\cdot4&5\cdot1+1\cdot2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2+9&4+12&2+6\\5+3&10+4&5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&16&8\\8&14&7\end{pmatrix}$$

Şeýlelikde:

$$C=\begin{pmatrix}11&16&8\\8&14&7\end{pmatrix}$$

Käbir halatlarda matritsalaryň köpeltmek hasylyndan alnan matritsanyň transponirlenen matritsasyny tapmak talap edilýär.

Aşakdaky deňligiň dogrudygyny subut edip görkezeliň:

$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T \quad (8)$$

Goý, $A\ -[a_{ij}]\quad B\ -[a_{ij}]$bolsun. Onda (7)-nji formula esasynda:

$$A\cdot B=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\right]$$

Bolar. Onda (3)-formula esasynda:

$$(A\cdot B)^T=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\cdot b_{ki}\right] \quad (*)$$

A we B-matritsalaryň transponirlenen matritsasy:

$$B^T=[b_{ji}] \text{ we } A^T=[a_{ji}]\text{-bolar.}$$

Bu transponirlenen matritsalar üçin (7)-nji formulany ulanarys:

$$B^T\cdot A^T=\sum_{k=}^{n}b_{ki}\cdot a_{ik} \quad (**)$$

Görşümiz ýaly, *(*)* we *(**)*-formulalaryň sag taraplary deňdir. Şonuň üçin hem:

$$(A\ \cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$

1. Matritsalaryň häsiýetleri.

Matritsalaryň käbir häsiýetlerine seredip geçeliň:

1⁰. Matritsalary goşmak operasiýasy kommutatiw häsiýete eýedir:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad (9)$$

2⁰. Matritsalary goşmak operasiýasy assosiatiw häsiýete eýedir:

$$A+(B \cdot C) = (A \cdot B)+C \qquad (10)$$

Şu ýokardaky seredilip geçilen matritsalaryň 1-nji we 2-nji häsiýetlerinden şeýle netijä gelip bolar:

Eger birinji n-sany matritsa berlen bolsa, onda bu matritsalary islendik tertipde, ýagny tertibini üýtgedip, ýaýyň ornuny üýtgedip goşup bolýar.

3⁰. $A=[a_{ij}]$-matritsa üçin şeýle bir ýeketäk X-matritsa bar bolsun:

$$A+X=A \qquad (11)$$

Gatnaşyk ýerine ýetýändir.

Bu matritsa **nol matritsa** diýilip aýdylýar we onuň ähli elementleri nola deňdir.

$$X=0=\begin{pmatrix} 0 & 0... & 0 \\ 0 & 0... & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0... & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

4⁰. Käbir A-matritsa üçin, şeýle bir ýeketäk Y-matritsa bar bolsun:

$$A+Y=0 \quad (13)$$

Gatnaşyk ýerine ýetýändir.

Bu Y-matritsanyň her bir elementi A-matritsanyň ters alamatly elementine deňdir. Ýagny:

$Y=\lfloor -a_{ij} \rfloor$-bolar.

Kesgitlemeden:

$$+Y = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11}-a_{12}...-a_{1n} \\ -a_{21}-a_{22}...-a_{2n} \\ .... \\ -a_{m1}-a_{m2}...-a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = 0$$

Bu ýagdaýda *Y*-matritsa *A* bilen bilelikde we *A*-matritsanyň ters matritsa diýilip aýdylýar.
Görşümiz ýaly:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11}-a_{12}...-a_{1n} \\ -a_{21}-a_{22}...-a_{2n} \\ .... \\ -a_{m1}-a_{m2}...-a_{mn} \end{pmatrix} = [-a_{ij}] \quad (14)$$

Ölçegleri deň bolan 2-sany *A* we *B* – matritsalaryň tapawudy: *A-B*-diýip:
B+C=A gatnaşygy kanagatlandyrýan *C-[c_{ij}]*-matritsa aýdylýar. Iki matritsanyň tapawudy *A* we *(-B)*-matritsalaryň jemine deňdir. Ýagny:

$$C = A + (-B)$$

Hakykatdanda:

$$B + [A + (-B)] = B + [(-B) + A] = [B + (-B)] + A = 0 + A = A$$

Şeýlelikde:

$$B + C = A$$

Bu bolsa talap edilýän gatnaşykdyr.

5^0. *a* we *b* hemişelik sanlar hem-de *A*-matritsa üçin, aşakdaky gatnaşyk adalatladyr:

$$a(b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A = b(a \cdot A) \quad (15)$$

6⁰. Ölçegleri deň bolan *A* we *B* matritsalar hem-de a-hemişelik san üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$a(A+B) = a\cdot A + a\cdot B \quad (16)$$

7⁰. *a* we *b* – hemişelik sanlar hem-de *A*-matritsa üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$(a+b) = a\cdot A + b\cdot A \quad (17)$$

8⁰. islendik matritsany 1-e köpeltmek ol ýene-de şol öňki matritsany berýär. Ýagny:

$$1\cdot A = A \quad (18)$$

9⁰. (m_1*n) – ölçegli *A*-matritsa we $(n*n_2)$-ölçegli *B*-matritsa hem-de *a*-hemişelik san üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$a\cdot(A\cdot B) = (a\cdot A)\cdot B \quad (19)$$

10⁰. Matritsalary köpeltmek operasiýasy assosiatiw häsiýete eýedir (matritsalary köpeldeniňde ýaýyň ornuny erkin üýtgedip bolýar). Ýagny:

$$A(BC) = (AB)C \qquad (20)$$

(bu häsiýeti ýerine-ýetirmek üçin *A*-matritsanyň ölçegi: m_1*n_1; *B*-matritsanyň ölçegi n_2*n_3-e deň bolmalydyr).

11⁰. n^*n-ölçegli islendik kwadrat matritsalar üçin ýeketäk *E*-matritsa bar bolsun, ol aşakdaky gatnaşygy kanagatlandyrýandyr:

$$AE = EA \quad (21)$$

Bu ýokardaky (21)-nji deňligi kanagatlandyrýan E- matritsanyň baş diagonalynda ýerleşýän elementleriň ählisi 1-e deň bolup, galan ähli elementleri nola deňdir. Ýagny:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0... & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{..........................} \\ 0 & 0 & 0... & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

(22)-gatnaşyk boýunça berlen E-matritsa **birlik matritsa** diýilip aýdylýar.

E-birlik matritsanyň skalýar matritsasy diýip, onuň esasy baş diagonalynda ýerleşýän elementleriň ählisi birmeňzeş elemente deň bolup, galan ähli elementleri nola deň bolan matritsa aýdylýar. Ýagny, aşakdaky görnüşde berlen matritsa E-birlik matritsanyň skalýar matritsasy diýilip aýdylýar:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0... & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0... & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot E \quad (23)$$

12^0. Matritsalary köpeltmek operasiýasy: matritsalary goşmak operasiýasyna görä distributiwlik häsiýetine eýedir. Ýagny:

$$(A+B)\cdot C = AC + BC \quad (24)$$

$$C(A+B) = CA + CB \quad (25)$$

Matritsalaryň häsiýetiniň 4^0-njisinden peýdalanyp, köpeltmek operasiýasy matritsalaryň aýyrmak operasiýasyna görä hem distributiwlik häsiýetini saklaýandyr. Ýagny:

$$(A-B)C = AC - BC \quad (26)$$

$$C(A-B) = cA - cB \quad (27)$$

13^0. (m_1*n_1)-ölçegli A-matritsa we (n_1*n_2) – ölçegli B-matritsa hem-de λ-hemişelik san üçin, aşakdaky gatnaşyk ýerine-ýetýändir:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad (28)$$

Şy ýokardaky aýdylanlardan şeýle bir sorag ýüze çykýar, “ýagny matritsalary köpeltmekoperasiýasy kommutatiw häsiýete mahsusmy?” diýen soragpeýda bolýar. Ýok ol kommutatiw häsiýete eýe däldir.

Hakykatdan-da, goý, aşakdaky matritsalar berlen bolsun:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Onda

$$A*B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 2\\ 3\cdot 2+4\cdot 3 & 3\cdot 1+4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 18 & 11\end{pmatrix}$$

$$B*A=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 4\\ 3\cdot 1+2\cdot 3 & 3\cdot 2+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 14\end{pmatrix}$$

Görşümiz ýaly:

$$A*B \neq B*A$$

Goý, aşakdaky *n*1*-ölçegli *X*-matritsa berlen bolsun:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix} \quad (29)$$

Onda bu *X*-matritsanyň transponirlenen X^T=-matritsasynyň ölçegi *(1*n)*-e deň bolar we ol aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$X^T=(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (30)$$

Şeýlelikde, bir sütünli matritsany transponirläp bir setirli matritsany alarys. Bu görnüşdäki matritsalara **arifmetiki wektor** diýilip aýdylýar.

3. n-nji tertipli kesgitleýjiler.

(n*n)-ölçegli kwadrat matritsa seredeliň:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1}\, a_{n2}\ldots\ldots & & a_{nn}\end{pmatrix} \quad (1)$$

Görşümiz ýaly, bu matritsa n^2-sany elementlerden ybaratdyr.

Kesgitleýji üçin aşakdaky belgileýji girizeliň:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\dots\dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\dots\dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Onda kesgitleýji aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\dots\dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_n \\ j_1 j_2 \dots j_n}} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} \quad (3)$$

Bu ýerde: S-san $i_1, i_2,\dots, i_n$-indeksleriňkiden düzülip orun üýtgetmeleriň inwersiýalaryň sany, t-bolsa $j_1, j_2,\dots,j_n$-indeksleriň üstünde geçirilen inwersiýalaryň sany. Ýagny:

$$S = [i_1, i_2, \dots, i_n],$$
$$t = [j_1, j_2, \dots j_n]$$

Käbir mysallara seredip geçeliň:

<u>Mysal№1</u>

Aşakdaky 2-nji tertipli kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11}a_{22} + (-1)^{0+1} a_{12}a_{21} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \quad (4)$$

<u>Mysal№2.</u>

Aşakdaky 3-nji tertipli kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{0+2} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{2+0} a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+(-1)^{0+3} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)_{0+1} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{2+3} a_{23}a_{32}a_{11} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Diýmek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (5)$$

4. Kesgitleýjileriň häsiýetleri

1⁰. Eger, kwadrat matritsanyň setirleri bilen sütünleriniň ornuny çalyşsak, onda bu matritsalaryň kesgitleýjileri deňdirler. Ýagny, başga sözler bilen aýdanymyzda, kwadrat matritsanyň kesgitleýjisi bilen, oňa degişli bolan transponirlenen matritsanyň kesgitleýjisi deňdir:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2\ldots} & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n\ldots} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiler deňdirler:

$$D = \Delta$$

2⁰. Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiriniň elementleriniň ählisi nola deň bolsa, onda ol kesgitleýjiniň özi hem nola deň.

3⁰. Eger kesgitleýjiniň islendik 2-sany setiriniň ornuny çalyşsak, onda alnan bu kesgitleýji bilen başdaky berlen kesgitleýji bilen absalýut ululygy boýunça deňdirler, alamaty boýunça biri-birine tersdir. Ýagny, aşakdaky matritsalar berlen bolsa

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2\dots} & a_{kn} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots & a_{kn} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2\dots} & a_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Onda, bu kesgitleýjiler üçin

$$\Delta=-D$$

<u>4</u>

<u>4^0</u>. Eger, käbir matritsanyň haýsy hem bolsa 2-sany setirleriniň elementleri öz aralarynda biri-birleri bilen degişlilikde deň bolsalar, onda bu kesgitleýji nola deň.

<u>5^0.</u> Eger-de, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiriniň elementleriniň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda bu umumy köpeldijini kesgitleýjiniň öňüne çykaryp bolýar.

Hakykatdanda,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ ma_{k1} & ma_{k2}\cdots & ma_{kn} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\dots ma_{kj_k}\dots a_{nj_n} =$$

$$=m*\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\dots ma_{kj_k}\dots a_{nj_n} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ ma_{k1} & ma_{k2}\cdots & ma_{kn} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>6^0</u>. Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa, 2-sany setiri özaralarynda biri-birleri bilen proporsional bolsalar, onda, bu kesgitleýji nola deňdir. Bu häsiýet, 4^0 we 5^0-nji häsiýetlerden gelip çykýar.

<u>7^0.</u> Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa, bir i-nji setiriniň her bir elementi 2-sany goşulyjy elementler görnüşinde berlen bolsalar, onda bu kesgitleýjini şol bir ölçegli 2-sany kesgitleýjiniň jemi görnüşinde özgerdip bolýar. Bu kesgitleýjileriň 1-njisiniň i-nji setirinde goşulyjylaryň 1-nji elementi, 2-nji kesgitleýjiniň i-nji setirinde bolsa, goşulyjylaryň 2-nji elementi ýerleşdirilendir. Galan setirleriniň elementleri bolsa, başdaky berlen kesgitleýjiniň elementlerine deňdir.

Hakykatdanda:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{kj_k} + c_{kj_k}) \dots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n} + a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{kj_k} \dots a_{nj_n}) =$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} \dots & c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8^0. Eger kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setirini hemişelik sana köpeldip degişlilikde başga bir setiriniň üstüne goşulsa, ol kesgitleýjiniň bahasyny üýtgedip bilmeýär.

Hakykatdan-da, goý, D-kesgitleýjiniň k-nji setirini m-hemişelik sana köpeldip i-nji setiriniň üstüne goşalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} + ma_{k1} & a_{i2} + ma_{k2} \ldots & a_{in} + ma_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + mD_1$$

Kesgitleýjileriň 6^0-njy häsiýetine görä $D_1=0$ (sebäbi onuň 2-sany setiriniň elementleri özaralarynda deňdirler).

Şeýlelikde:

$$\Delta = D_1$$

***8^0*.**-nji häsiýetden şeýle netije gelip çykýar: ýagny, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiri başga bir setiriniň çyzykly kombinasiýasy bolsa, onda ol kesgitleýji nola deňdir.

6. Minorlar we algebraik doldurgyçlar.

Aşakdaky berlen n-nji tertipli kwadrat kesgitleýjä seredeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjide erkin k-njy setiri we k-njy sütüni *($1 \leq k \leq n$)*-alalyň. Bu setirler bilen sütünleriň kesişmesinden emele gelen elementlerden k-njy tertipli kesgitleýji düzüp bolýar. Oňa Δ-kesgitleýjiniň k-njy tertipli minory diýilip aýdylýar we ol M-harpy bilen belgilenýär. Galan beýleki elementlerinden *(n-k)*-tertipli kesgitleýjini düzüp bolýar. Oňa Δ-kesgitleýjiniň doldurgyç minory diýilip aýdylýar we ol $\overline{\mathrm{M}}$ harp bilen belgilenilýär.

Umumylygy berkitmek üçin, aşakdaky bir mysala seredip geçeliň:

Mysal: aşakdaky kesgitleýjiniň 2-nji we 4-nji setirleri üçin Δ-kesgitleýjiniň minoryny we doldurgyç minoryny hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Onda kesgitlemä görä, bu ýagdaýda 2-4-nji setirler we 1-3-nji sütünler üçin Δ-kesgitleýjiniň minory we doldurgyç minory aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Goý, a_{ij}-element Δ-kesgitleýjiniň käbir elementi bolsun (görnüşi ýaly, 1-nji tertipli minor kesgitleýjiniň elementidir.

Kesgitleýjiniň i-setiri bilen j-sütüninden düzülen $\overline{M}$- doldurgyç minoryna seredeliň. Eger-de bu doldurgyç minory $(-1)^{i+j}$-hemişelik sana köpeltsek,
Onda:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M} \quad \text{bolar.}$$

A_{ij}-ululyga kesgitleýjiniň algebraik doldurgyjy diýilip aýdylýar.

Umumylygy berkitmek üçin bir mysala seredip geçeliň:

Mysal: aşakdaky kesgitleýjiniň A_{21}-algebraik doldurgyjyny tapmak talap edilýän bolsun:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Onda kesgitleýjä görä:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{13})$$

Teorema: islendik kesgitleýjiniň şol kesgitleýjiniň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini oňa degişli bolan algebraik doldurgyjyna köpeldip jemlesek ol başdaky kesgitleýjä deňdir. Ýagny, eger

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýji berlen bolsa, onda:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (6)$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{\alpha j}A_{\alpha j} \qquad (7)$$

Teorema: eger n-nji tertipli kesgitleýjiniň islendik setiriniň elementlerini degişlilikde başga bir setiriniň algebraik doldurgyjyna köpeldip jemlesek, ol nola deňdir. Ýagny:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j) \quad (8)$$

Hakykatdan-da:

Aşakdaky kesgitleýjä seredeliň:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu Δ-kesgitleýjiden başga-da, aşakdaky Δ-kesgitleýjä seredeliň:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots & a_{jn} \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Görşümiz ýaly Δ-kesgitleýjiniň j-nji setiri i-nji setiri bilen gabat gelýär.

Şonuň üçin hem, kesgitleýjileriň 4^0-nji häsiýetine görä

$$\Delta=0$$

Δ-kesgitleýjiniň i-nji setiriniň algebraik doldurgyjyny B_{ij}-bilen belgiläliň; Δ-kesgitleýjiniň i-nji setiriniň algebraik doldurgyjyny bolsa A_{ij}-bilen belgiläliň.
Δ-kesgitleýji üçin (6)-njy formulany ulanalyň:

$$\Delta = a_{i1}B_{j1} + a_{i2}B_{j2} + \ldots + a_{in}B_{jn} = 0$$

Δ we Δ kesgitleýjiler özaralarynda biri-birleri bilen diňe j-nji setiri boýunça tapawutlanýarlar. Şonuň üçin hem,

$$A_{j1} = B_{j1}, A_{j2} = B_{j2}, \ldots, A_{jn} = B_{jn}$$

Şeýlelikde:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

Ýokarda aýdylanlardan başga-da, aşakdaky gatnaşyk dogrudyr:

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0 \qquad (9)$$

6. Kesgitleýjiniň tertibini kemeltmek usulyndan peýdalanyp hasaplanyşy

Kesgitleýjini haýsy hem bolsa bir setiriniň ýa-da sütünininiň elementleri boýunça dargadyp, kesgitleýjiniň tertibini kemeldip bolýar. Käbir mysallara seredip geçeliň:

1-nji mysal.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

bu kesgitleýjini 1-nji setir boýunça dargadalyň:

$$D = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (12+4-2-32) - 2\cdot(8+3-1-24) - 3\cdot(4+36-32-6) = -18+28-6 = 4$$

$$D = 4$$

Bu kesgitleýjini 3-nji sütün boýunça dargatsak hasaplama prosesi has ýönekeýleşýär. Sebäbi, onuň 1-nji we 3-nji elementleri nola deň. Bu ýagny:

$$D = 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(8+4+27-24-3-12) - (2+6+12-18-4-2) = 4$$

$$D = 4$$

Indi bolsa kesgitleýjini üçburçluk görnüşe getirip (çözeliň) hasaplalaýň:

Eger kesgitleýjiniň baş diagonalynyň haýsy hem bir tarapyndaky elementler (diagonalyň aşak ýa-da ýokary ýüzünji elementler) nola deň bolsa, onda bu kesgitleýjini aňsatlyk bilen hasaplap bolýar. Bu kesgitleýjä **üçburçluk formadaky kesgitleýji** diýilip aýdylýar.

Bu ýagdaýda kesgitleýji: baş diagonaldaky elementleriň köpeltmek hasylyna deňdir.

2-nji mysal. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplalyň:

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Onda kesgitleýjiler 7^0-häsiýetine görä, bu D-kesgitleýjini aşakdaky görnüşde özgerdip bolýar:

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \text{Formula}$$

Bu kesgitleýjileriň 1-njisi üçin: kesgitleýjileriň 8^0-häsiýetinden peýdalanarys, ýagny, 2-3-4-nji häsiýetlerinden 1-nji setiri aýyryp ýazarys;

Kesgitleýjileriň 2-njisi üçin bolsa, ýene-de 7^0-häsiýetden peýdalanarys:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Bu ýokardaky kesgitleýjileriň 2-njisiniň 1-nji setirinden umumy köpeldijisi a-y daşyna çykaralyň; kesgitleýjileriň 3-njisinden bolsa, 1-nji setirinden umumy köpeldiji a-y we 2-nji setirinden umumy köpeldiji b-i daşyna çykaryp bolýar. Onda:

$$D = bcd + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjileriň 3-nji we 4-nji sütünlerinden 2-nji sütüni aýyryp alarys:

$$D = bcd + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \left|\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{Bmatrix}\right|$$

Bu kesgitleýjileriň ilkinji 2-sanysyny kesgitleýjileriň üçburçluk formasyndan peýdalanyp, soňky 3-njisinden bolsa 4-nji sütüninden 3-nji sütünini aýyryp alarys:

$$D = bcd + acd + abc \cdot (1+d) + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= bcd + acd + abc + abcd + abd = bcd + acd + abc + abd + abcd$$

7. Rekurent gatnaşyklaryň üsti bilen kesgitleýjileriň hasaplanyşy

Käbir halatlarda kesgitleýjileri rekurent formulalaryň üsti bilen aňsat hasaplap bolýar. Mysal üçi aşakdaky kesgitleýjini hasaplalaýň:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Bu kesgitleýjä **Wandermondyň** kesgitleýjisi diýilýär. Bu kesgitleýjiniň 1-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 2-nji sütüniniň üstüne goşalyň.
Onda

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1^2 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 \ldots & a_2^{n-1} \\ \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indi bolsa *(*)* Wandermondyň kesgitleýjisiniň 2-nji sütünini *(-a_1)*-köpeldip 3-nji sütünininiň üstüne goşalyň. Onda

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 \ldots & a_2^{n-1} \\ \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_n a_1 \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 (a_2 - a_1) \ldots & a_2^{n-1} \\ \\ 1 & a_n - a_1 & a_n (a_n - a_1) \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indi bolsa *(*)*-Wandermondyň kesgitleýjisiniň 3-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 4-nji sütünininiň üstüne goşalyň:

$$V \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1). & a_2^3 - a_2^2 a_1 \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^3(a_n - a_1) \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^2(a_n - a_1) \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bu prosessi (n-1) –nji sütüne çenli dowam etdirip, alarys:

$$V_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1). & a_2^2(a_2 - a_1) \ldots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^2(a_n - a_1) \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \quad (**)$$

Gysgaça aýdylanda *(*)*-Wandermondyň 1-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 2-nji sütünininiň üstüne goşup; 2-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 3-nji sütünininiň üstüne goşup; 3-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 4-nji sütünininiň üstüne goşup we ş.m. *(n-*

1)-nji sütünini *(-a₁)*-e köpeldip n-nji sütüniniň üstüne goşup *(**)*-kesgitleýjini alarys.

Bu V_n-kesgitleýjini 1-nji setiri boýunça dargadyp (ýagny tertibini kemeldip), alarys:

$$V_n \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1)... & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1)... & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1)... & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)...(a_n-a_1)\cdot V_{n-1}$$

(bu ýerde V_{n-1}-kesgitleýji Wandermondyň a_2, a_3, a_4,...,a_n-elementlerden düzülen (n-1)-nji tertipli kesgitleýjisidir.

V_n-kesgitleýji üçin ýerine ýetirilen prosessi V_{n-1}-kesgitleýji üçin hem gaýtalap:

$$V_{n-1} = (a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)...(a_n-a_2)*V_{n-2}$$

Bu prosessi analitik usulda dowam etdirip; netijede Wandermondyň kesgitleýjisi:

$$V_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)...(a_n-a_1)...(a_3-a_2)(a_4-a_2)...(a_n-a_{n-1})$$

Ýa-da

$$V_n = \prod_{n \geq i \rangle k \geq 1} (a_1-a_k)$$

8. Matritsanyň rangy. Ters matritsa we onuň häsiýeti

Goý, *n*-ölçegli kwadrat *A*-matritsa berlen bolsun. Bu matritsanyň *k*-sany setirinden we k-sany sütüninden düzülen k-nji tertipli minoryna seredeliň.

Eger *A*-matritsanyň haýsy hem bolsa bir r-nji tertipli minory nola deň bolman, galan *(r+1)*-nji tertipden başlan ähli minorlary nola deň bolsa, onda bu r-sana *A*-matritsanyň rangy diýilip aýdylýar we ol

$$r = rangA$$

matritsanyň ähli elementleri nola deň bolan ýagdaýynda rang nola deň bolup bilýär, galan ýagdaýlarda ol noldan tapawutlydyr. Görşümiz ýaly, kesgitleýjisi nola deň bolmadyk kwadrat matritsanyň rangy onuň ölçegine deňdir. Ýagny:

$$r=n$$

Teorema: eger A-matritsada nola deň bolmadyk r-sany minory bar bolup, bu minory gurşap alan ähli *(r+1)*-nji tertipli minorlary nola deň bolsa, onda bu matritsanyň rangy nola deňdir.

Matritsanyň rangyny hasaplamak üçin, "gurşap alma" usulyndan peýdalanmak amatlydyr:

Ilki bilen nola deň bolmadyk r-nji tertipli minory tapmaly. Soňra bolsa, şol minora birikdirip, gurşap alan *(k+1)*-nji tertipli minorlary hasaplalaýň. Soňra gurşap alan ähli *(k+2)*-nji tertipli minorlary hasaplamaly. Bu prosessi nola deň bolmadyk r-nji tertipli minor tapylýança dowam etdirmelidir, ony ony gurşap *(r+1)*-nji tertipli minorlaryň ählisi bolsa nola deňdir. Nola deň bolmadyk soňky minoryň r-nji tertibi bolsa, bu matritsanyň rangy bolar.

Aşakdaky bir mysala seredip geçeliň:

Mysal: aşakdaky matritsanyň rangyny hasaplamak talap edilýän bolsun:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1-nji tertipli minor nola deň däl. Sebäbi $1\neq0$

Ony gurşap alan 2-nji tertipli minor (A-matritsanyň çep tarapynda ýerleşen) bolsa nola deň. Sebäbi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Bu ýokarda görkezilen 1-nji tertipli minory 2-nji setiri we 3-nji sütüni goşalyň. Onda gurşap alan minor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-4=-3\neq0$$

Indi bolsa gurşap alan 3-nji tertipli minory hasaplalaýň:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Görşümiz ýaly *A*-matritsanyň 2-nji tertipli minory nola deň däl. Ony gurşap alan ähli 3-nji tertipli minorlar bolsa nola deň. Şonuň üçin hem bu matritsanyň rangy:

$$r = rangA = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

<u>Kesgitleme:</u>

(*n*n*)-ölçegli *A*-kwadrat matritsa üçin:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (10)$$

Gatnaşygy kanagatlandyrýan A^{-1}-matritsa A-matritsanyň ters matritsasy diýilip aýdylýar. (bu ýagdaýda A^{-1}-matritsanyň ölçegi hem *n*n*-deňdir)

<u>Kesgitleme:</u>

Transponirlenen A^T-matritsanyň algebraik doldurgyjyndan düzülen *A*-matritsa, başdaky berlen *A*-matritsa özara otnositel birikdirlen matritsa diýilip aýdylýar: ýagny, eger

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} bolsa, onda A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots & A_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n1} & A_{n2} \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: eger, berlen *n*n*-ölçegli *A*-kwadrat matritsanyň ters matritsasy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Hakykatdan-da. (subudy)

Goý, *A*-matritsa üçin 2-sany A^{-1} we A_1-ters matritsalar bar bolsun. Onda ters matritsanyň kesgitlemesinden.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E; \quad AA_1 = A_1 A = E;$$

Soňky gatnaşygy çep tarapdan iki gapdalyny hem A^{-1}-e köpeldeliň:

$$A^{-1}(AA_1) = A^{-1} = E;$$

Ýa-da

$$A^{-1}(AA_1) = A^{-1} \quad (*1)$$

Matritsalaryň häsiýetlerinden peýdalanyp:

$$A^{-1}(AA_1) = (A^{-1}A)A_1 = EA_1 = A_1 \quad (*2)$$

*(*1)* we *(*2)*-formulalary özara deňeşdirip, alarys:

$$A^{-1} = A_1$$

<u>Kesgitleme:</u>

Eger, kwadrat matritsanyň kesgitleýjisi nola deň bolsa, onda bu matritsa aýratyn matritsa diýilip aýdylýar. Tersine ýagdaýda bu matritsa aýratyn däl matritsa diýilip aýdylýar.

Teorema. *(n*n)*-ölçegli *A* we *B*-kwadrat matritsalaryň köpeltmek hasylynyň kesgitleýjisi bu matritsalaryň kesgitleýjileriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Ýagny:

$$|AB| = |A||B| \quad (12)$$

Subudy.

Goý, *(n*n)*-ölçegli *A* we *B*-matritsalar berlen bolsunlar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2}\dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsalaryň köpeltmek hasyly.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2}\dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu ýerde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \, (i_1 j = \overline{1_1 n}) \quad (13)$$

Bu matritsalaryň köpeltmek hasylynyň kesgitleýjisine seredeliň.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k2} \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k2} \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k2} \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kn} \end{vmatrix}$$

Bu soňky kesgitleýjide: kesgitleýjiniň 7^0-nji häsiýetinden peýdalanyp hem-de her bir setiriň umumy köpeldijisini kesgitleýjiniň öňüne geçirip alarys:

$$|AB| = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_1} b_{k_1 2} \ldots & a_{1k_1} b_{k_1 n} \\ a_{2k_2} b_{k_2 1} & a_{2k_2} b_{k_2 2} \ldots & a_{2k_2} b_{k_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nk_n} b_{k_n 1} & a_{nk_n} b_{k_n 2} \ldots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} = \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & b_{k_1 n} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} \ldots & b_{k_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & b_{k_n n} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiniň 3^0-nji häsiýetinden peýdalanyp alarys:

$$|AB| = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu ýerde: $t = [k_1 k_2 \ldots k_n]$

Aşakdaky */B/*-kesgitleýjini, ýagny:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjini jem belgisiniň öňüne geçirip we (3)-formuladan peýdalanyp alarys:

$$|AB| = |B| \sum_{k_1,k_2...k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} = |B||A| = |A||B|$$

Teorema: (*).

Berlen *(n*n)*-ölçegli *A*-kwadrat matritsa diňe azan däl matritsa (adaty) bolan ýagdaýynda bu matritsanyň ters matritsasy *(A*$^{-1}$*)*-bardyr.

Subudy:

Ilki bilen *A*-matritsa bagly bolan *A*-matritsany dňzeliň, hem-de ikisiniň köpeltmek hasylyny

$$AA = |b_{ij}|, ((\overline{i,j}) = 1,2,...,n) \quad (14)$$

Matritsalary biri-birine köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden peýdalanalyň.

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} \quad (15)$$

(6) we (8)-gatnaşyklardan:

$$b_{ij} = \begin{cases} |A|, hacandai = j \\ 0, hacandai \neq j \end{cases}$$

$$AA = \begin{vmatrix} |A| & 0... & 0 \\ 0 & |A|... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0... & |A| \end{vmatrix} = |A|E \quad (16)$$

Şu usuly peýdalanyp:

$$AA = |A|E$$

Bolýandygyny subut edip görkezip bolýar.
Şerte görä:

$$|A| \neq 0$$

Şonuň üçin hem, soňky iki deňligiň iki tarapyny hem

$$\frac{1}{|A|} - e$$

köpeldip, alarys:

$$\frac{1}{|A|}(AA) = A(\frac{1}{|A|}A) = E$$

$$\frac{1}{|A|}(AA) = (\frac{1}{|A|}A) = E$$

Bu alnan soňky gatnaşyklar, berlen azan däl (adaty) *A*-matritsa üçin oňa ters bolan A^{-1}-matritsanyň bardygyny görkezýär:

$$A_{-1} = \frac{1}{|A|}A \quad (17)$$

Goý, onda *(n*)*-ölçegli A-matritsa azan (adaty däl) matritsa bolsun. Ýagny */A/=0* bolsun. Bu ýagdaýda, *A*-matritsanyň A^{-1}-ters matritsasy bar diýip kabul edeliň. Onda kesgitleme esasynda

$$AA^{-1} = E$$

Bolmaly. Ýöne, bilşimiz ýaly: */E/≠0* ýagny E-matritsa azan däl (adaty) matritsadyr.

Ýokarda subut edilen *(*)*-teorema esasynda soňky gatnaşyk diňe, *A* we A^{-1}-matritsalar azan däl (adaty) matritsalar bolan ýagdaýy üçin dogrudyr. Emma, mälim bolşy ýaly, biz başda *A*-matritsany azan (adaty däl) matritsa diýip kabul edip aldyk. Bu alnan gapma – garşylyk, azan amatritsanyň (adaty däl) ters matritsasynyň ýokdugyny subut edip görkezýär.

Indi bolsa,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (18)$$

Gatnaşygyň dogrudygyny subut edip görkezeliň. (bu ýerde *A* we *B*-matritsalar deň ölçegli, *(n*n)*-ölçegli kwadrat matritsalardyr.

Onuň üçin bolsa,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$$

Gatnaşygy subut edip görkezmeli bolýarys:

Matritsalary köpeltmek hasylynyň assosistiw häsiýetinden peýdalanyp alarys:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) - A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

Görşümiz ýaly, (18)-gatnaşyk adalatlydyr.

<u>Kesgitleme:</u>

*(n*n)*-ölçegli A-kwadrat matritsanyň bütin-otrisatel *(-k)*-derejesi diýip A^{-1}-ters matritsanyň özüne *k*-gezek köpeldilmegine aýdylýar: ýagny

$$A^{-k} = \frac{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}{k}$$

I I I   B A P

Çyzykly ulgamyň durnuklylygy.

1. Bir agzaly ulgamyň durnuklylygy:

Differensal deňlemeleriň çyzyklyulgamyna seredeliň.

$$\frac{dx_i}{dt} = di_1(t)x_1 + ... + d_{in}(t)x_n + f_i(t)(i = 1,2,...,n) \quad (1)$$

Bu ýerde $d_{ij}(t), f_i(t)$ - ýarym interwalda tükeniksiz funksýa $[b \le t \langle \infty]$
Wektorly forma ulgamynda (1) deňlemäni indiki görnüşde ýazyp bolar:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (2)$$

Bu ýerden

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t)...a_{1n}(t) \\ a_{n1}(t)...a_{nn}(t) \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Bir agzaly ulgam (2) ulgama baglylykda şu görnüşe eýe bolýar.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3)$$

Bu ulgam triwal $x \equiv 0$ çözgüdinde bolýaröndürjilikli çözgidiň durnuklylygy triwal çözgüdiniň durnuklylygy indiki teorema bilan baglydyr;

Teorema 1. Dürli bir agzaly çözgödi çyzykly differensal deňlemeleriň durnukly haçanda triwalçözgüdi durnukly bolanda.

Subutnama. Ilki bilen teoremanyň şertlerini subut edeliň. Goý triwal çözgüdi $x(t) \equiv 0$ durnuklylygy bolsun. Bu bolsa ε > 0 hemmesi üçin σ > 0 bolýar, dürli çözgütler üçin $x =$ ζ(t), t=t_0 –da deňagramsyzlygy $\|\zeta(t_0)\| \angle \delta$ kwantlanmaýar, $\|\zeta(t)\| \angle \varepsilon$ deňagramsyzlygy t≥t_0 belgilenmeler üçin adalatly bolýar.

Goý x = ψ(t) – öndürjilikli çözgüdi bolsun. Onuň durnuklylygny subut edeliň. x = φ(t) üsti bilen öndürjilikli çözgüdini kanagatlandyrýan t=t_0 şertinde

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| \angle \delta \quad (4)$$

x = ψ(t) durnuklylygyny aňlatýan triwal çözgüdiniň durnuklylyk güýji $\|\psi(t_0)-\varphi(t_0)\|\angle\varepsilon$

Teoremanyň hökmanlylyk şertiniň subutnamasyny ýerini ýetiriliň. Goý x=ψ(t) çözgüdi dürnukly bolsun. Şonda triwal çözgidiniň durnuklylygny görkezeliň. Durnukly çözgide φ(t) öndürjilikli çözgidi üçin $t=t_0$ – da $\|\psi(t_0)-\varphi(t)\|\angle\delta$ deňlemesiniň kanagatlylygy $t\geq t_0$ – da $\|\psi(t_0)-\varphi(t)\|$ deňsizliginde adalatly bolýar.

$$\|[\|\xi(t)+\psi\|]-\psi(t)=\|\xi(t)\|\|\angle\varepsilon \quad (5)$$

Şu subut edilenlerem teorema üçin mahsusdyr. Biziň indiki subut etmesiz seretjek teoremamyz onuň çözgidi bilen çäklendirilen durnukly bir agzaly çyzykly sistemasy.

Teorema 2. Çyzykly sistemanyň differensal deňlemesi durnuklydy haçanda onuň her bir çözgidi $t\geq t_0$ üçinçäklenende. Egerde onuň herbir çözgidi asimptit durnukly bolsa bir agzaly çyzyky sistema differensal seňlemede asimptotiki durnuklylyk diýilip atlandyrylýar.

Teorema 3. Bir agzaly çyzykly ulgamyň differensal deňleme asimptotiki durnukly haçanda durnukli triwal çözgidi bolanda.

Üçünji teoremada seredip:

1. asimptotiki çyzyky biragzaly durnukly bolan ulgam bütünlikde durnukuly bolanda.
2. Egerde biragzaly çyzykly deňlemäniň asimptotiki deňlemäniň iň bolmanda bir çözgidi bolsa onda onda galan çözgitlerem asimptotiki durnuklydyr.

2.Biragzaly bolmadyk durnukly ulgam.

indiki seretjek teoremamyz durnukly bir agzaly bolmadyk çözgütde differensal deňleme ulgamynda durnukly çözgitde çyzykly bir agzaly çyzykly ulgamyň arasynda aragatnaşygy dikeltýär.

Teorema 4. Çyzykly bir agzaly sistemada differensal durnukly bolýar haçanda bir agzaly deňlemesine gatnaşanlarynda.

Subutnama. Teoremanyň ýerlikli şertini subut edeliň. Goý (3) bir agzaly deňleme durnukly bolsun. Bu ýagdaýda (2) bir agzaly bolmadyk deňlemäniňemdurnukly bolmaýandygy görünýär, şeýle hem onuň dürli çözgütlerinde-de durnukly bolmaýar.

Goý (2) ulgamyň käbir çözgüdi x=ψ(t) bolsun. Onuň durnuklylygyny barlalayň, $\|\psi(t)-\varphi(t)\|$ kadaly dürliligine seredeliň, bu ýerde $\varphi(t)$ deňsiligi kanagatlandyrýan başlangyç $\varphi(t_0)$ –da (2) ulgamyň kä bir beýik çözgüdi

$$\|\psi(t)-\varphi(t_0)\|\angle S \quad (6)$$

$\psi(t)-\varphi(t_0)$ bir agzaly ulgamyň (2) deňlemede kä bir dürli çözgütlerinde bir agzaly bolýar. Teoremanyň şerti boýunça (3) bir agzaly deňlemesi durnukly bolýar. Şeýle hem (6) deňagramlylygy ýerine ýetirýär, $t \geq t_0$ hemmesi üçin $\|\psi(t)-\varphi(t)\| \angle \varepsilon$ deňsizlidi adalatly we x=ψ(t) biagzaly bolmadyk ulgam deňlemesinde çözgüdiniň durnuklydygyny aňlatýar.

Teoremanyň analogiki hökmany şertini subut edilýär.

Hemişelik koýeffisentde ulgamyň çyzykly durnuklylygy: hemişelik koýeffisentde differensal deňlemäniň çyzykly biragzaly ulgamyň durnuklylygyna seredeliň.

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (7)$$

Bu ýerde $\begin{bmatrix} a_1,..., & a_{1n} \\ a_{1n},..., & a_{nn} \end{bmatrix}$ - hemişelik koýeffisentde kwadrat matrissasy. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$ - näbelli funksýada wektpr sütüni.

Goý $\lambda_1,....,\lambda_n$ – det (A-λE)=0 häsýetli deňlemede dürli kökler, şeýle hem $e_1,...,e_k$ elementar bölejiklerinde maksimal görkezijistepen.

$$x = \sum_{i=1}^{k} P_1(t) e^{\lambda} i^t \qquad (8)$$

Barlyk we birlik teoremasy.

1.Biragzaly deňlemeler üçin barlyk we birli teoremasynyň çözgüdi.

Teoremada gurnalan barlyk we birlik meselesiniň çözgidinde Koşşiniň deňlemeleri üçin

$$x' = f(t,x) \qquad (1)$$

Aýdalyň f(t,x) funksýa Ğ ýapyk oblasda x boýunça Lipşsanyň şertinde kanagatlansyn, egerde (t,x_1), (t,x_2) Ğ ýokary jübüt nokadynda deňsizli adlatly

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad (2)$$

Bu ýerde L=const – hemişelik Lipşisa.

x boýunça f=(t,x) fuksýasynyň deňsizlik şertinde Lipşisa şertiniň güýçlidigini göreris. x boýunça f=(t,x) fuksýasynyň deňsizliginden Lipşisa şertini ýerine ýetirmeýär, adatça indiki teoremadan görnişi ýaly egerde x boýunça f=(t,x) Lipşisa şertini kanagatlandyrýan bolsa x deňsizligine degişli.

Trorema 1. Egerde f(t,x) funksýasy t boýunça G oblastynda üzniksiz bolsa we x üýtgemesinde Lipşisa şertini kanagatlandyrýan bolsa t,x üýtgemesini jeminde boýunça üzniksizdir.

Subutnama. f(t,x) funksýasyny artykmaçlygyny şeýle düzeris:

$$f(t+\Delta t, x+\Delta x) - f(t,x) = [f(t+\Delta t, x+\Delta x) - f(t, x+\Delta x)] + [f(t, x+\Delta x) - f(t,x)].$$

Lipşisa şertini yzarlap, deňsizli ýerine ýetirilýär

$$\left| f(t, x+\Delta x) - f(t,x)\right| \le L\left|\Delta x\right|$$

$L\left|\Delta x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ deňsizliginiň ýerine ýetirilmegi üçin ε>0 dürli sanlaryny Δx edip saýlap bolýar. Δx arkykmaçlygyny şertendireris. Onda /Δt/<δ şertinde adalatly bolmagy üçin (f,x) funksýasynyň deňsizlik güýjini t boýunça δ>0 sanlary bilen belgilemek bolar.

$$\left| f(t, x+\Delta x) - f(t,x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

we şonuň bilen biyzygiderlikde

$$\left| f(t, x+\Delta x) - f(t,x)\right| \le \varepsilon$$

Koşşiniň başlangyç meselesinde barlyk webirlik teoremasyna geçeliň.

Teorema 2. Goý f(t,x) funksýasy G ýapyk oblastynda berilaen bolsun, t boýunça üzniksiz we Lipşissiň şertini kanagatlandyrsyn. Onda barbolan t_0 nokadyny saklaýan we (1) deňligiň ýeketäk çözgidi başlangyç şerlerini kanagatlandyrýan t osynda Δ şeýle interwaly görkezmek bolar

$$\xi(t_0) = x_0 \qquad \textbf{(3)}$$

Subutnama. Dowam edeliň, koşşiniň meselesiniň çözgidinde $\xi(t) \equiv f(t\xi(t))$ torždeswosynda (1) deňligiň çözgidine ýüzlenýän x=ζ (t) funksýasy bolýar. Bu torždeswony başlangyç şerde integrirläris;

$$\xi(t) = x_0 + \int_t^t f(t, \xi(t) dt) \quad (4)$$

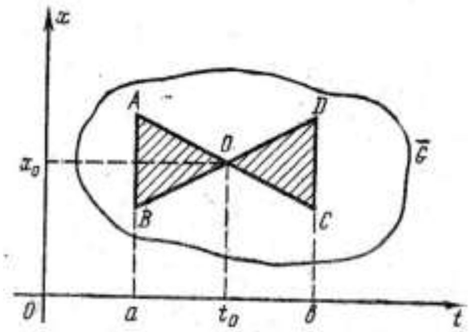
Bu ýagdaýda Koşşiniň meseleleriniň ýokary çözgidinde ζ(t) (4) integrirleme deňlemesini kanagatlandyrýar. Tersine (4) integrirleme deňlemesiniň üznüksiz çözgidinde (1) deňligi we (3) başlangyç şerlerini kanagatlandyrýar. Hakykatda (4) differensal deňligini çykyş deňlikde şeýle alarys

$$\xi^{/}(t) = f(t\xi(t))$$

(4) deňlikde $t=t_0$ goýup $\xi(t_0) = x_0$ taparys (3) başlangyç şerti kanagatlanýar. Şeýle ýagdaýda (4) integral deňlemesi (1) differensal deňlemesinde we (3) başlangyç şertinde ekwiwalentli bolýar.

Ýokarda subut edilen teorema 1 f(t,x) funksýasy t,x argumentiniň jemi boýunça üznüksiz funksýa bolýar.

(4) integral deňlemäniň çözgidini yzygiderli golaýlama metody boýunça kesgitläris. O nokadynyň üsti bilen t_0,x_0 koordinatlary bilen iki göni – bir burçly +M koýeffisentli çyzygyny geçireris (surat 13). Beýleki burçlaryny –M koýeffisentli (göni BD we AC). t_0 nokadynyň saklaýan t osynda bir-iki sany [a,b] kesimlerini alarys. Şeýlelikde G oblastyna degişli bolan wertikal t=a we t=b wektorlarynda AOB we DOC üçburçlygy alarys. G oblastyna degişli bolan nula golaýlaşma görnüşinde (4) deňlik çözgüdindiň üznüksiz önümünde ζ(t) funksýasyny alarys.



Surat 1.

(4) deňlemäniň sag tarapynda $\xi(t)$ funksýasyna derek $\xi_0(t)$ funksýasyny goýup alarys.

$$\xi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \xi_0(t))\, dt.$$

ζ_1 (t) grafiki funksýalarynyň ştrihlenen oblastlarynydan çykmaýanlygy aýdyň görkezilen. Hakykatynda

$$|\xi_1(t) - x_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, \xi_0(t))|\, dt \leqslant M\,|t - t_0|,$$

ζ_1 (t) funksýasynyň grafigi göni çäklenmede AC we BD oblastynda ýerleşdirilen.

ζ_1 (t) funksýasy (4) deňlemäniň çözgidine birinji golaýlaşmasy bolup durýar. Çözgüdiniň iknji golaýlaşma hökmünde şunu alarys

$$\xi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \xi_1(t))\, dt.$$

ζ_2 (t) funksýasy [a,b,] kesiminde kesgitlenen we indiki baha adalatly bolýar: $/\zeta_2(t)-x_0/\leq M/t-t_0/$. Çözgüde golaýlaşma prosesini doam etmek bolýar. n – golaýlaşmasy üçin indiki alarys

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \xi_{n-1}(t))\, dt,$$

Indi bolsaçykyş predelinde bolan yzygiderlige seredeliň

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n(t) = \xi(t) \qquad (5)$$

we ζ(t) funksýasynyň predelinde (4) deňlemäniň iskom çözgidi bolýar. $\{\xi_n(t)\}$ çykyş yzygiderliginde [a,b] kesiminde deňdir. Hakykatda eger bu bu yzygiderlikden hatara geçýär

$$\xi_n(t) = \xi_1(t) + [\xi_2(t) - \xi_1(t)] + [\xi_3(t) - \xi_2(t)] + \dots + [\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)],$$

$\xi_n(t)$ -da bölekleýin summa hatarynda bolýar.

$$\xi_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [\xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)]. \qquad (6)$$

(6) hatar deňlemesinde gidýänini görkezdeliň. ζ_1(t) funksýasynda [a,b] kesiminde üznüksiz funksýasynda bolýar we şonuň üçin bu kesim çäklenýär, $|\xi_1(t)| < c$. Analitiki ýagdaýynda $|\xi_2(t)| < c$, onda $|\xi_2(t) - \xi_1(t)| \le |\xi_2(t) + \xi_1(t)| < 2c$ we

$$|\xi_3(t) - \xi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, \xi_2(t)) - f(t, \xi_1(t))]\, dt \right| \leqslant \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(t, \xi_2(t)) - f(t, \xi_1(t))|\, dt \right|.$$

alarys.

G oblasda $\xi_2(t)$ we $\xi_1(t)$ funksýalary degişli bolýar,şonuň üçin integraly aşagyndaky süýşmesi sag gapdaldaky Lipişsiň deňsizligine çalyşyp bolýar.

$$|\xi_3(t) - \xi_2(t)| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |\xi_2(t) - \xi_1(t)|\, dt \right| < 2cL\,|t - t_0| \leqslant \leqslant 2cL\,(b-a) = 2cm,$$

bu ýerde m=L(b-a).

Analitiki şeýle alarys;

$$|\xi_4(t) - \xi_3(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(t, \xi_3(t)) - f(t, \xi_2(t))|\, dt \right| < < L \left| \int_{t_0}^{t} |\xi_3(t) - \xi_2(t)|\, dt \right| < 2cmL\,(b-a) = 2cm^2.$$

Kä bir bahalarda şunu taparys. Şeýle ýagdaýda funksýanal çilenleriň hatarynda (6) san hatarlarynyň çilenlerinde možorlanýar.

$$c+2c+2cm+2cm^2+\dots+2cm+\dots$$

Indi bolsa, ζ(t) (4) integral deňlemesiniň kanagatlanmasyny göreliň. Çözgide golaýlaşmada n – ýazalyň

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \xi_{n-1}(t))\, dt \qquad (7)$$

we n→∞ predeline geçiliň ζ(t) grafikli funksýasy ştrihlenen oblasda degişli bolup durýar, onda integral düşünjesi indiki görnüşi alar $\int_{t_0}^{t} f(t,\xi(t))dt$ üýtgeme bahasy.

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(t, \xi(t))\, dt - \int_{t_0}^{t} f(t, \xi_{n-1}(t))\, dt \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |\xi(t) - \xi_{n-1}(t)|\, dt \right|.$$

$\xi(t)$ funksýasynyň yzygiderlikde deňölçeglik güýji gaçýar.

$$\left| \int_{t_0}^{t} |\xi(t) - \xi_{n-1}(t)|\, dt \right| \to 0$$

n→∞; yzygiderlikde

n→∞-de (7) deňlik predeline geçip $\xi(e) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)$ $\xi(t)$ funksýasy (4) deňligiň çözgidinde üzniksiz bolýar.

Alynan çözgidiň ýeketäkdigini subut edeliň. Subutnamany garşylyk metodynda geçireris. Aýdalyň, (4) integral deňlemesinde $\xi(t)$ we $\psi(t)$ iki çözgitli [a,b] kesimlerinde ýerine ýetireris. Süýşmesine baha bereliň

$$|\xi(t) - \psi(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, \xi(t)) - f(t, \psi(t))]\, dt \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(t, \xi(t)) - f(t, \psi(t))|\, dt \right| < L \left| \int_{t_0}^{t} |\xi(t) - \psi(t)|\, dt \right| \leq$$
$$\leq L \max_{[a,b]} |\xi(t) - \psi(t)|\, (b-a),$$

Onda

$$\max_{[a,b]} |\xi(t) - \psi(t)| \leq L(b-a) \max_{[a,b]} |\xi(t) - \psi(t)|. \qquad (8)$$

Ýönekeý L(b-a)<1, şonuň üçin (8) deňsizlik haçanda $\xi(t) \equiv \psi(t)$ bolanda (4) deňlemäniň çözgüdi ýeketäk bolar.

Şeýle bolanda, egerde f(t,x) funksýasyG oblasda ýapyk üzniksiz bolsa we x boýunçň Lişissiň şerlerini kanagatlandyrýan bolsa, $t=t_0$ – x_0 belgilenmesini kabul edýän (1) deňligiň ýeketäk çözgidi bolýar.

1. **Kadaly deňlemeler üçin bar bolan we ýeterlik çözgütli teorema.**

Goý kadaly deňlemer ulgamy bolan

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

ýa-da wektor formasynda bolan

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{10}$$

Umumy çözgütde (9) G oblasda n funksýanyň jemi diýip atlandyrylýar.

$$x_i = \xi_i(t, c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$x_1,\ldots,x_n$ üýtgemeleri boýunça G oblada Lipşisteň şertini $f(t,x_1,\ldots,x_n)$ funksýasy kanagatlanýar diýip aýdalyň, egerde L>0 hemişelik sany bar bolsa, onda dürli jübüt nokatlar üçin $(t,x_1,\ldots,x_n)$ we $(t,x_1,\ldots,x_n)$ G bar bolan deňsizlikde ýerine ýetirilýär.

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_i| \tag{11}$$

Teorema 3. (9) kadaly berilen bolsun, t boýunça $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ funksýasy üznüksiz we G oblastyň kä bir ýereinde $x_1,\ldots,x_n$ boýunça Lipşisiň şertini kanagatlandyrsyn. Onda barlyk we ýeketäk çözgütde.

$$x_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(9) umumy nagyt şertinde ganagatlanýar

$$\xi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

Kä bir Δ kesgidinde t_0 nokadyny saklaýar.

Iki sany kemçiligine seredeliň:

1. t_0 nokadyny saklaýan Δ kesiminde bar bolan ýeketäk çözgidini tasyklaýar. Ikinji ýalňyşlykdaky teorema 2 ýerleşdirilen analogiki G oblastyň merkezine çenli Δ kesim predelinde dowamly bolar.
2. Egerde $f(t,x_1,\ldots,x_n)$ funksýasy G oblastynyň aýdyň x_i boýunça hsusy önüminde çäklenmesi bolýar.

Adalatly baglanşygyndan yzarlap

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(t, x_1 + \theta(x_1 - \bar{x}_1), \ldots, x_n + \theta(x_n - \bar{x}_n))}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i),$$

bu ýerde 0≤θ≤1.

E D E B I Ý A T L A R

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. Основы вычислительной техники и программирования. В.В. Стрыгин. Л. С. Щарев.
10. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы. С. В. Якубовский. Н. А. Барканов. Л. И. Ниссельсон и др. Под ред. С. В. Якубовского. М. 1985.
11. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральный микросхем. Справочник. Под ред. В. А. Шахнова. М. 1988.
12. Применение интегральных микросхем в электронной вычислительной технике. Справочник. Р. В. Данилов. С. А. Ельцова. Ю. п. Иванов и др. под ред. Б. Н. Файзулаева. Б. В. Тарабрина. М. 1987 г.

M A Z M U N Y