TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Gurbansähedow Gurbansähet

OBÝEKTLERI WE DOLANDYRYŞ ULGAMLARYNY MODELLEŞDIRMEK

Önümçiligi we tehnologiki prosessleri awtomatlaşdyrmak
hünäri üçin

Aşgabat – 2010

Giriş

Hemişelik Bitaraplygyny alan Garaşsyz ýurdumyzyň bu günki ýaşlary täze eýýamyň täze ugurlary bilen Altyn asyrymyzy has-da gülletmeli. Bu bolsa biziň gadymy ruhy köklerimizden sapak alyp, şol mirasy ösdürip bilmek bagtyna eýe boldugymyzdyr.

"Ylym bilmekligiň durmuşy özgertmek, durmuşy kämilleşdirmek ukybyna ýetmegidir. Şonuň üçinem bilimiň ylym ýa-da däldigini bir zatdan anyklap bolar: ol durmuşa täsir edip, ony özgerdip, onuň hajatlaryny bitirip bilýärmi ýa-da ýok? Eger bilýan bolsa, ol ylymdyr."

Iň uly baýlyk akyldyr. Iň uly gymmatlyk – ylymdyr. Ylym – adamzada hemişe gerek. Türkmeni maksat-myradyna, altyn ýaşaýşyna ýetirjek ylymdyr. Ylym ýok ýerde akyl bolmaz. Iň güýçli gujur adamzada berlen akyldyr. Ylym diňe iliňkini almak däl, özüňkiňi hem aýan etmekdir. Ylym bilmekligiň göni durmuşa çykýan, bilmekligiň durmuş bilen ýüzbe-ýüz bolýan pursatydyr. Ylym bilen baýlyk ýygnamak pikiri bolmaz. Ylym biziň rysgalymyzy we ruhumyzy artdyrmalydyr. Hakyky ylym-durmuşy herekete getiriji güýje öwrülip bilýän ylymdyr.

Ylym bilmek ýolunuň çürbaşydyr, kämilligidir. Bilim-ilden özüňe almakdyr, sarp etmekdir. Ylym-özüňden ile bermekdir, döretmekdir. Iň oňat ylym-jemgyýete peýda getirýän ylymdyr. Jemgyýete peýdasyz ylym bimanylykdyr. Jemgiýete miwe, netije bermän, ylma güýmenmek sapaksyz iňňe bile eşik tikmek bilen barabardyr.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň ylym bilim taglymaty orän giň we çuňňur many-mazmuna eýe. Ol türkmen jemgyýetini barha ýokary derejelere göterýär. Biz bu galkynyşy ylym-bilim ulgamynda gazanylýan üstünliklerimizde hem görýätis.

Täze galkynyşlar zamanasynda mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň tagallalary bilen ýurdumyzda ylym-bilime, dünýä ylmynyň iň soňky gazananlaryny özleşdirmäge aýratyn ähmiýet berilýär. Hormatly Prezidentimiz öz çykyşlarynda talyp ýaşlaryň ylmy işler bilen meşgullanyp, ylym bilen çynlakaý aragatnaşykda bolmaklygyny, şol bir wagtyň özünde öwrenen ylymlaryny iş tejribesi bilen utgaşdyrmagyny sargaýar.

Täzegalkynyş zamanasynyň ilkinji günlerinden başlap mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedow ýaşlara bilim terbiýe bermekligi hünär öwretmek işleri bilen utgaşykly alyp barmaklyga aýratyn uly üns berdi. Munda Beýik Serdarynyz esasan özbaşdak, Garaşsyz ýurdymyzy dolandyrmak üçin häzirki zaman ösen tilsamatlaryndan oňat baş çykaryp, ösen tehniki enjamlara erkedip, dünýa derejesindäki bäsdeşlige ukyply, ýokary hilli önümleri öndürmegi başarýan her bir ýaş ýigidiň we gyzyň öz kärini ýürekden söýýän, ruhybelent, watansöýüji, hemme taraplaýyn kämil ýaşlar bolup ýetişmekleriniň zerurlygyny göz öňünde tutýar. Munuň şeýledigini Hormatly Prezidentimiz özüniň çykyşlarynda hem yzygiderli nygtap gelýär.

Häzirki zaman dünýänin iň wajyp meseleleriniň biri – ol hem durmuşy-ykdysady, tehnologiki we senagat taýdan ösüşi birmeňzeş derejede döwletleriň arasynda deňhukukly, hyzmatdaşlykly we adalatly gatnaşyklaryň ýola goýulmagydyr.

Öňde baryjy tilsimatly prosesler ylmyň esasynda kämilleşýär. Tebigaty öwrenýan we takyk ylymlaryň – fizikanyň, himiýanyň, biýologiýanyň, matematikanyň gazananlary täze bilim görnüşinde tilsimatly ylymlara, inženerçilik işine ornaşyp, tilsimatly ösüş hökmünde önümçiligi özgerdýär. Önümçilige elektron hasaplaýyş maşynlary (EHM) we awtomatlary ornaşdyrmak, tehniki manyda adamy dolandyryş wezipesinden boşatmaklygy aňladýar. Awtomatlaşdyrylan dolandyryş enjamlary ulanmaklygyň tehniki wezipesini ol maşyna geçirmekligi aňladýar. Tehnologiýa diýen düşünje bilen birmeňzeş bolup, häzirki döwürde adamyň öňünde duran giň göwrümli meseleleri çözmekde ösen tehnikany yzygiderli ulanmaklygy aňladýar. Biz talyp ýaşlar, nesip bolsa ýurdumyzda bina edilen we edilýän senagat kärhanalarynyň dünýä ülňülerine laýyk gelýän, awtomatiki usulda işleýän, ýokary tehniki–tilsimatly enjamlarynyň kompýuterleşdirilmegine öz mynasyp gosandymyzy goşup, täze galkynyşlar zamanasynda gerekli, Watanymyzy dünýä öz hünäri, başarnygy bilen tanatjak Altyn ýaşlar bolup, işlejek, gurjak döretjekdigimize ynandyrýarys.

Hormatly Prezidentimiz ýokary okuw mekdeplerinde ýaşlaryň öwrenýän hünärlerini durmuş bilen gabat getirmegiň örän möhümdigini belläp, ony durmuşa geçirmegiň dogry ýollaryny hem salgy berdi. Şunlukda ýokary okuw mekdeplerinde okaýan talyplaryň nazary bilimler bilen tejribäni utgaşdyryp öwrenmekleri doly ýola goýuldy. Ýokary okuw mekdeplerimizde ýaşlara ylym-bilim bermek işleri dünýä tejribesine laýyk gelýän şertlerde alnyp barylýar.

Talyplaryň okuwda öwrenenlerini tejribede berkitmeklerine mümkinçilik döredilýär. Okuw döwürlerinde geçilýän üznüksiz tejribeler talyplaryň önümçilik hünärlerini iş ýüzünde has gowy özleşdirmekligine mümkinçilik berýär.

Garaşsyz, baky bitarap Türkmenistan döwletiniň ykdysadyýeti garaşsyzlyk ýyllarynda has-da ösdi. Ykdysadyýetiň ösmeginde senagat pudaklaryň uly orny bar. Dürli senagat pudagy ösüşlere we öňe gidişlere barýar. Sement önümçiligini muňa mysal getirmek bolar. Baharly etrabynda dünýä ülňilerine gabat gelýän, döwrebap awtomatiki enjamlar bilen awtomatlaşdyrylan, doly awtomatiki iş tertibinde işleýän sement zawody guruldy.

I BAP

1. Awtomatiki sazlaýyş sistemasynyñ deñlemesi

Sistemadaky aýratyn bloklaryñ biri-birine täsiri arkaly sistemada awtomatiki sazlaýyş işini geçirip bolýar. Sistemadaky aýratyn bloklara mysal edip: ölçeg elementini, ýerine ýetiriji mehanizmleri, sazlaýjy organlary, obýektiñ özüni we ş.m. görkezmek bolar.

Sistemanyñ her bir düwüni belli bir ugur boýunça häsiýetlendirilýär. Ol düwünleriñ hem öz gezeginde girişi bolýar. Umumulygy kiçeltmezden, goý, bu girişe u(t)-signal täsir edýän bolsun.

Bu girişdäki signalyñ netijesinde, düwünde çykyş signaly hem peýda bolýar. Goý çykyşdaky signal: x(t)-bolsun. Umuman, x(t)- we u(t)- funksiýalaryñ arasyndaky özara gatnaşygy aşakdaky erkin n-nji tertipli, çyzykly däl differensial deñleme bilen berip bolýar:

$$F\ (x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{!}, x, u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{!}, u) = 0 \qquad (1)$$

Görşümiz ýaly, (1)-nji gatnaşykdaky:
$F\ (z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+k+2})$ – funksiýa:
$z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n,\ \ z_{n+1},\ \dots,\ z_{n+k+2}$ - argumentlerden bagly funksiýadyr.

Eger (1)-nji deñlemä aşakdaky n-sany başlangyç:
$x(t_0) = x_0,\ x^{!}(t_0) = x^{!}{}_0,\ \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0{}^{(n-1)} = 0$ – şertler berlen bolsa, hem-de, girişdäki u(t)- signalyñ görnüşi mälim bolsa, onda bu (1)-nji deñlemäniñ üsti bilen, çykyşdaky u(t)-signaly tapyp, onuñ gönüşini kesgitläp bolýar. (1)-nji deñlemäniñ üsti bilen, düwüniñ geçiriji funksiýasyndan başga-da düwüniñ dikeldiji prosessini hem kesgitläp bolýar. Düwüniñ çykyşyndaky x_d - bahasy bilen, onuñ girişindäki u_d - dikeldiji bahasynyñ arasyndaky gatnaşygy kesgitlemek üçin , x_d - we

u_d - ululyklaryñ ähli önümlerini nula deñlemek ýeterlikdir. Ÿagny:

$$x_d^{(n)} = x_d^{(n-1)} = \ldots = x'_d = u_d^{(k)} = u_d^{(k-1)} = u'_d = 0 \qquad (2)$$

gatnaşygyñ ýerine-ýetirmegi ýeterlikdir. Onda, (1)-nji deñleme:

$$F(0,0,\ldots,0, x_d, 0,0, \ldots ,0, u_d) = 0 \qquad (3).$$

görnüşe eýe bolar.

Bu (3)-nji deñleme bolsa, dikeldiji: x_d - u_d - ululyklaryñ arasyndaky gözlenýän, talap edilýän baglanyşygy berýär.

(3)-nji deñlemäni x_d - ululuga görä otnositel çözüp, düwüniñ aşakdaky statiki häsiýetnamasyna eýe bolarys:

$$x_d = f(u_d) \qquad (4)$$

Käbir halatlarda, (1)-nji deñleme bilen berlen, iñ bolmanda özünde ýeke bir düwüni bar bolan sistemalarda awtomatiki sazlaýyş işlerini geçirmek kynlaşýar. Has dogrusy sazlaýyş işlerini geçirip bolmaýar. Şonuñ üçin hem, men bu ýyllyk işimde (1)-nji deñlemäniñ hususy haly bolan, çyzykly, z_1, z_2, … , z_n, z_{n+1}, … , z_{n+k+2} - argumentlere görä hemişelik koeffisiýentli, aşakdaky deñlemä seredip geçeris:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = b_0 u^{(k)} + b_1 u^{(k-1)} + \ldots + b_{k-1} u' + b_k u \qquad (5).$$

Eger (1)-nji deñleme boýunça berlen blok (ýa-da sistema) belli bir anyk režim boýunça işlemän, şol režimiñ golaý töwereginde işleýän bolsa, ýagny:

$$F(x_r^{(n)}, \ldots , x'_r, x_r, u_r^{(k)}, u_r^{(k-1)}, \ldots , u'_r, u_r) \equiv 0 \qquad (6).$$

bolsa, onda bu režimiñ töwereginde (1)-nji deñlemäni linearizirläp bolýar. Onuñ üçin, $F(z_1, z_2, \ldots , z_{n+k+2})$ –

funksiýany Δu- we Δx- artdyrmalaryna görä Teýlor hataryna dargatmalydyr. Onda:

$$u(t) = u_r(t) + \Delta u(t), \quad x(t) = x_r(t) + \Delta x(t) \quad (7).$$

bahalary (1)-nji deñlemede ornunda goýalyñ:

$$F(x_r^{(n)}(t)+\Delta x^{(n)}(t),\ x_r^{(n-1)}(t)+\Delta x^{(n-1)}(t),\ \ldots,\ x^!_r(t)+\Delta x^!(t),\ x_r(t)+\Delta x(t)),\ (8)$$

$$u_r^{(k)}(t)+\Delta u^{(k)}(t),\ u_r^{(k-1)}(t)+\Delta u^{(k-1)}(t),\ \ldots,\ u_r^!(t)+\Delta u^!(t),\ u_r(t)+\Delta u(t)) = 0$$

Alnan soñky gatnaşykda (2)-nji deñlikleri göz öñünde tutsak, onda

$$F(\Delta x^{(n)},\ \Delta x^{(n-1)},\ \ldots,\ \Delta x^!, \Delta x,\ \Delta u^{(k)}, \Delta u^{(k-1)},\ \ldots,\ \Delta u^!, \Delta u) = 0$$

bolar.

Bu ýerden:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}\Delta x^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial z_2}\Delta x^{(n-1)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}\Delta x =$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_{n+2}}\Delta u^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial z_{n+3}}\Delta u^{(k-1)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_{n+k+2}}\Delta u \quad (9)$$

Soñky (9)-njy gatnaşykdaky: $\frac{\partial F}{\partial z_i}$- önümler $x_r(t)$- we $u_r(t)$- ululyklar arkaly kesgitlenýär:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}\left[x_r(t), u_r(t)\right], (i = 0,1,2,\ldots,n+k+2) \quad (10)$$

(9)-nji deñleme , Δu, Δx- ululyklara we olaryñ önümlerine görä çyzykly differensial deñlemedir .

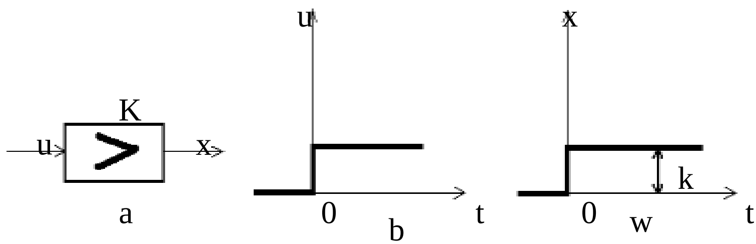
Eger (10)-njy funksiýlar wagta görä ýeterlik derejede örän kiçi mukdarda üýtgeýän bolsalar, onda olary takmynan hemişelik koeffisiýentler bilen çalşyryp bolýar. Şondan soňra biz, çyzykly, hemişelik koeffisiýentli, (5) – görnüşli differensial deñlemäni alarys.

2. Elementar düwünler.

Sazlaýyş sistemasynyñ dinamiki bölümi öwrenilende sazlanýan ululygyñ fiziki tebigaty şeýle hem enjamlaryñ fiziki tebigaty öwrenilmän, dine sazlanýyş prosessiniñ häsiýetine seredilýär.

Ÿagny, bu ýagdaýda, fiziki tebigata bagly dällikde düwünleri aşakdaky toparlara bölüp bolýar:

1^0. Güýçlendiriji düwün. Bu düwüni göniburçlyk görnüşinde (surat N1.a) belgiläliñ. Onuñ u-giriş elementi, x-çykyş elementi bolsun.



N^0 1-nji surat.

u we x- ululyklary biri-biri bilen baglanyşdyrýan kanun boýunça bu düwüniñ görnüşi kesgitlenýär. Güýçlendiriji düwün üçin (kä halatlarda bu düwüne proporsional ýa-da statiki düwün hem diýip aýdylýar) bu kanun aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$x = k \cdot u \qquad (1)$$

bu ýerde k- erkin hemişelik sandyr.

Bu kanun iñ bir ýönekeý kanunlaryñ biridir. Hakykatdan-da, bu kanun şeýle özleşdirmekden ybaratdyr: ýagny, giriş signaly k- hemişelik sana köpeldilýär. Ol k- hemişelik sana güýçlendiriji koeffisiýent diýilip aýdylýar.

Görşűmiz ýaly, t=0 momente çenli u we x- ululyklaryň ikisi hem nula deň. t=0 nokatda bolsa, u- ululyk käbir ahyrky baha çenli artýar. (N^0 1.b.- surat), $t\varepsilon(0;\infty)$- çenli aralykda bolsa, şol ahyrky bahany űýtgetmän saklaýar. Şeýlelikde, görşűmiz ýaly u(t)- funksiýa basgançakly funksiýa bolup hyzmat edýär. Şonuň ýaly hem, (1)- gatnaşyk esasynda x(t)- funksiýa hem (N^0 1.b.- surat) basgançakly funksiýadyr.

(1)- gatnaşykdan görnűşi ýaly, u we x ululyklar islendik ölçegli bolup bilýär. Sebäbi, k- koeffisiýentiň ölçegi aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär:

$$[k]=\frac{[x]}{[u]} \qquad (1^*)$$

(1)-nji gatnaşyk aşakdaky:

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}x+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x+...+a_2x=b_0\frac{d^k}{dt^k}u+...+b_ku$$

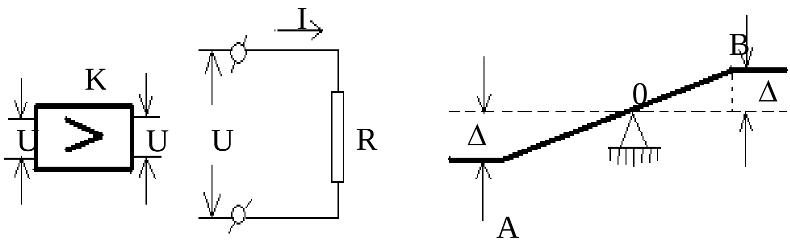
gatnaşygyň hususy deňligidir. Sebäbi bu deňlikde:

$$\begin{cases} a_0=a_1=a_2=...=a_{n-1}=b_0=b_1=b_2=...=b_{k-1}=0 \\ a_n=1, b_n=k \end{cases}$$

ornunda goýmalary geçirip (1)- deňligi alyp bolýar. Bu dűwűniň geçiriji funksiýasy:

W(p) = k – bolar.

Gűýçlendiriji dűwűne degişli käbir mysallara seredip geçeliň. Goý, aşakdaky surat çatgy berlen bolsun.



a) b) w)

N^0 2-nji surat.

1^0. Bu N^0 2.a. suratda hemişelik togy gűýçlendirijiniň çatgysy şekillendirlendir. Goý, u_1- onuň giriş naprýaženiýasy, u_2- onuň çykyş naprýaženiýasy bolsun. u_1 we u_2- ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk:

$$u_2 = k \cdot u_1$$

Diýmek, k- bu dűwűniň gűýçlendiriji koeffisientidir.

2^0. N^0 2.b.- nji suratda bolsa, R- garşylyk şekillendirlendir. Oňa u_2- naprýaženiýa berlendir. Garşylykly zynjyrdaky tok, aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$I = \frac{u_2}{R};$$

Eger, bu dűwűnde u_2- giriş elementi, I- çykyş ululygy diýilip hasap edilse, onda bu dűwűn gűýçlendiriji dűwűn bolar. Bu dűwűn űçin, görşűmiz ýaly $k = \frac{1}{R}$ – bolar.

Bu ýagdaýda k- ölçegli ululykdyr.

3^0. N^0 2.b.- nji suratda ryçagyň suraty şekillendirlendir. Goý, onuň wertikal dűzűjisiniň çep tarapynda Δx_1- giriş elementi ýerleşdirlen bolsun ; Wertikal dűzűjiniň sag tarapynda bolsa Δx_2- çykyş elementi ýerleşdirlen bolsun. Onda, çyzgydan görnűşi ýaly

$$\Delta x_2 = k \cdot \Delta x_1 \text{ - bolar.}$$

Bu dűwűniň 1(t)- funksiýasy:

$$1(t) = \begin{cases} 0, eger, t \langle 0 \\ 1, eger, t \geq 0 \end{cases}$$

2^0. Integrirleýji dűwűn. Bu dűwűn şeýle häsiýetlendirilýär: Ÿagny, çykyş ululygynyň tizliginiň űýtgeýşi giriş ululygyna proporsionaldyr:

$$\frac{dx}{dt} = x^! = k \cdot u \qquad (3)$$

Deňligiň iki tarapyndan hem integral alalyň:

$$x = k \cdot \int_0^\infty u(t)dt + x_0$$

Bu (3)- deňligi almak űçin:

$$a_0 \frac{d^n}{d_t^n} x + a_1 \frac{d^{n-1}}{d_t^{n-1}} x + ... + a_{n-1} \frac{d}{d_t} x + a_n x + b_0 \frac{d^k}{d_t^k} u + ... + b_k \cdot u$$

- deňlemede

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = a_n = b_0 = b_1 = b_2 = ... = b_{k-1} = 0 \\ a_{n-1} = 1, b_k = k \end{cases}$$

ornunda goýmany geçirmeklik ýeterlikdir.

(3) deňligi başgaça $p \cdot x = k \cdot u$ – görnűşde hem ýazyp bolýar. Bu ýerden

$$\frac{x}{u} = \frac{k}{p}$$

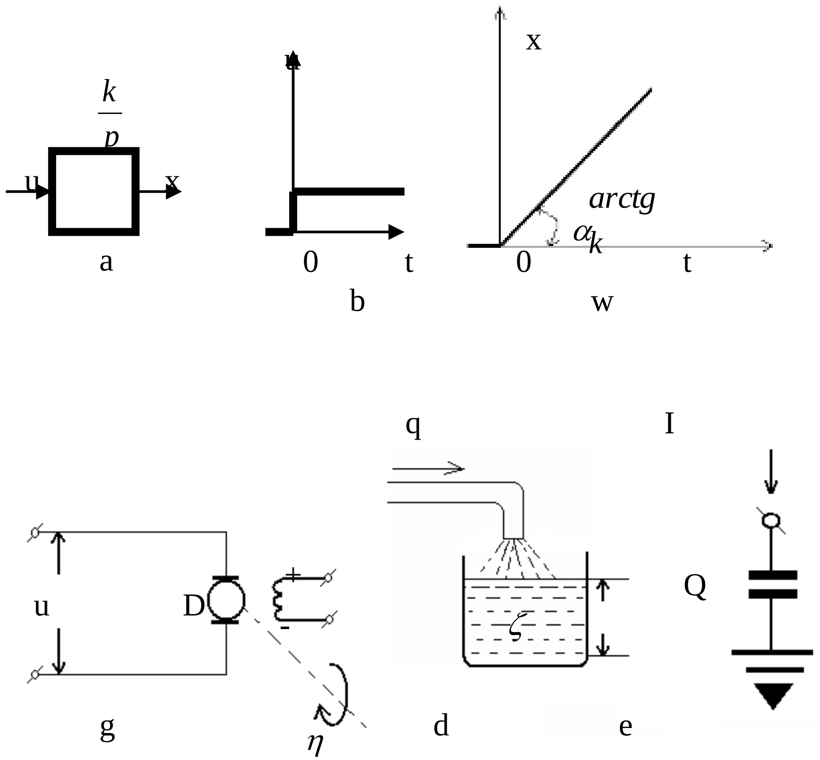
Şeýlelikde, integrirleýji dűwűniň geçiriji funksiýasy:

$$W(p) = \frac{k}{p} \qquad (4)$$

Göşűmiz ýaly, integrirleme operatory differensirleme operatorynyň ters operatorydyr we ol p^{-1}-e deňdir. Bu dűwűn űçin h(t)- funksiýa aşakdaky görnűşde bolar:

$$h(t) = k \cdot t \text{ , haçan-da } t \geq 0 \text{ bolanda.} \qquad (5)$$

Netijede, integrirleýji dűwűniň gejiriji funksiýasy gytaklaýjy göni çyzyk bolýar we koordinatalar başlangyjyndan α - burçy (N^0 3.b.- nji surat) emele getirýär.



N^0 3-nji surat.

Şeýlelikde görşűmiz ýaly, integrirleýji dűwűniň ýeke-täk parametrini eksperiment geçirip, barlag synag arkaly kesgitläp balýar. Ony kesgitlemek űçin bolsa, integrirleýji dűwűniň girişine 1- lik (birlik) täsiri bermeli, hem-de t- okdan α - burçy kesgitlemek ýeterlikdir. Integrirleýji dűwűne mysal edip, elektrik dwigatelini židkost bilen doldurylan gaplar ýa-da elektrik zarýady bilen doldurylan “elektrik sygymy” Q = k·I (N^0 3.g.,d.,e- nji suratlar)- gullyk edip biler.

Şu ýerde bir zady belläp geçmeklik örän möhüm, ýagny, giriş signalynyň islendik hemişelik bahasynda integrirleýji düwün deňagramlylyk ýagdaýyny saklap bilmez.

Islendik, nuldan tapawutly bolan, ýeterlik derejede kiçi bolan hemişelik giriş ululygynyň üsti bilen x(t)- çykyş signalyny ýeterlik derejede uly edip bolýar. Şonuň üçin hem, diňe u- giriş signaly nula deň bolan ýagdaýynda bu integrirleýji düwün özüniň deňagramlylyk ýagdaýyny saklaýar. Eger düwüniň giriş signalyny döredijі täsir hökmünde seredilse, onda bu düwüne astatiki düwün hem diýip aýtsa bolar.

3^0. *Aperiodiki düwün.* Bu düwüniň deňlemesi:

$$T\cdot\frac{dx}{dt}+x=k\cdot u \qquad (6)$$

Bu ýerde: T- aperiodiki düwüniň hemişelik wagty ($T \geq o$); k- aperiodiki düwüniň güýçlendirijisi koeffisiýenti ýa-da geçirijiniň stadiki koeffisiýenti. Ol hemişelik- x_y- çykyş ululygynyň hemişelik- u_y- giriş ululygyna bolan gatnaşygyny görkezýär.

$$k=\frac{x_y}{u_y}$$

Onuň ölçegi:

$$[k]=\frac{[x_y]}{[u_y]}$$

Eger (6)- deňlik bilen ýazylan düwünde T<0 bolsa, onda bu düwüne durnukly däl aperiodiki düwün diýlip aýdylýar.

$\frac{dx}{dt}=p\cdot x$ - belgilemäni girizeliň.

Onda (6)- deňlikden alarys:

$$T \cdot p \cdot x + x = k \cdot u$$

Bu ýerden:

$$(Tp+1) \cdot x = k \cdot u$$

Ÿa-da

$$W(p) = \frac{x}{u} = \frac{k}{Tp+1} \qquad (7)$$

Görşűmiz ýaly, ýokarda seredilip geçilen gűýçlendiriji we integrirleýji dűwűnler aperiodiki dűwűniň hususy ýagdaýy bolýar. Hakykatdan-da, eger (6)- deňlikde T=0- ornunda goýmany girizsek, onda x = k · u- gűýçlendiriji dűwűni alarys ; eger T-ni - ýeterlik derejede uly (∞- diýip alsak) onda (6)- deňlikden T- y bölűp aýyrmaklyk ýeterlikdir.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \frac{k}{T}u \qquad (8)$$

Soňky deňlikde $T \to \infty$ bolanda predele geçip alarys:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \cdot u \qquad \left(k_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{k}{T} \right)$$

Bu bolsa integrirleýji dűwűndir. Aperiodiki dűwűniň geçiş funksiýasyny tapmak űçin, x(0) = 0- başlangyç şerti kanagatlandyrýan

$$T \cdot \frac{dx}{dt} + x = k \cdot 1(t) \qquad (9)$$

deňlemäni çözmelidir.

Şeýlelikde, biz $T \cdot \frac{dx}{dt} + x = k$ - deňlemäni çözmelidiris.

Bu deňlemäniň umumy çözűwi:

$$x(t) = k + c \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

(9)- başlangyç şerti soňky deňlikde ornunda goýalyň:

$$x(0) = k + c = 0;$$

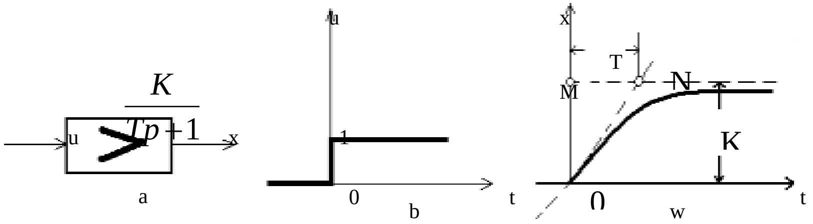
$$c = - k .$$

Şeýlelikde (9)- deňlemäniň çözűwi:

$$x(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \qquad (10)$$

$t \to \infty$ bolanda, soňky (10)- gatnaşyk:

$x_y = k$ - dikeldiji tertip alynýar. T<0 bolanda bolsa, x(t)- funksiýa tűkeniksizlige ymtylýar. Şonuň űçin hem bu ýagdaýda dűwűn durnuksyz bolýar. Aşakdaky №4- nji suratda geçiriji funksiýa görkezilendir.



№4-nji surat.

№4.b.- nji suratdan görnűşi ýaly, aperiodiki dűwűniň geçiriji funksiýasy ýokarda seredilip geçilen beýleki iki dűwűniň geçiriji funksiýasyndan tapawutlanýandyr. Gűýçlendiriji we integrirleýji dűwűnleriň x- çykyş ululygynyň dikeldiji bahasy hemişelikdir; Haçan-da t>0 bolsa, onda u = const bolar. Integrirleýji dűwűnde u = const ≠ 0 bolanda x_y - dikeldiji baha u- ululyga görä proporsional artýar. Hakykatdan-da, (5)- kanun esasynda çykyş ululygynyň tizliginiň űýtgeýşi giriş ululygynyň űýtgeýşine proporsionaldyr. Bu häsiýet bolsa, integrirleýji dűwűnleri özűnde saklaýan bloklar bilen integrirleýji dűwűnleri özűnde saklaýan bloklaryň tapawudyny görkezýär. Eger, x(t)- egrä 0- nokatda galtaşýan göni çyzyk geçirsek we bu galtaşma göni çyzygyň x = x_y = k- asimptota bilen kesişme nokadyny N- bilen belgilesek, onda MN-kesimiň uzynlygy T- hemişelik wagta deň bolar. Diýmek, şeýle netijä gelmek bolýar, T- wagt näçe uly boldugyça, ol şonça-da geçiriji prosessi özűne çekýär we x(t)- egri bolsa ýuwaşlyk bilen özűniň k- dikeldiji bahasyna ymtylýar. T- näçe uly boldugyça, dűwűn şonça-da inersion dűwűn diýilip hasaplanylýar.

Şeýle bir mysala seredip geçeliň:

H(t)- funksiýa özűniň k- predel bahasyndan n% - daşlaşmagy űçin we h(t)- egriniň zolagynyň uzynlygy 2E- deň bolan h(t) = k- gönä öwrűlmegi űçin näçe wagt gerek bolar?

Gözlenýän t_1 - wagt aşakdaky deňlikden kesgitlenýär:

$$k - E = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}\right)$$

$E = \dfrac{n}{100} \cdot k$ - ornunda goýmany girizeliň:

$$k - \frac{n}{100} \cdot k = k\left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}\right)$$

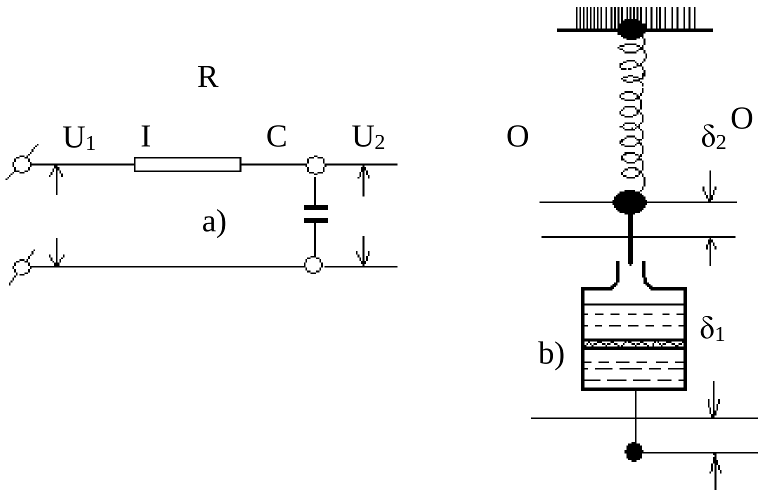
Soňky alnan deňligiň iki tarapyndan hem k- y gysgaldyp, alarys:

$$e^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{n}{100};$$

Deňligiň iki tarapyny hem logaritmläp, alarys: $t_1 = T \cdot \ln\dfrac{100}{n}$

Mysal űçin, eger n=10%- bolsa, onda $t_1 = 2{,}3 \cdot T$ - bolar.

Aperiodiki dűwűne mysal edip, №5.a.- nji suratda görkezilen RC- zynjyry görkezmek bolar:



N^{0} 5-nji surat.

Onuň, giriş elementi hökműnde u_1- napryaženiýa çykyş elementi hökműnde bolsa u_2- napryaženiýa kabul edilendir. Onda u_1- we u_2- napryaženiýalaryň arasyndaky baglanyşyk RC- zynjyrda

$$RC \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$ deňleme boýunça berilýär.

Bu ýerde: T=RC ; k=1.

Eger sygym birligi mkf (mikrofarat)- bolsa, garşylygyň birligi Mom (megaom)- bolsa, onda $[T]$- wagt ölçegi:

$$[T] = [R] \cdot [C] = mkf \cdot Mom = sek.$$ - bolar.

Bulardan başga-da aperiodiki dűwűne mysal edip, ýanyp duran pejiň kamerasynda ýuka jisimi gyzdyryp, ondan alnan jisimiň görnűşini görkezmek bolar. Jisim diňe Bio Bi<0,25 bolan ýagdaýynda ýuka jisim bolup biler. Hakykatdan-da, eger pejiň temperaturasyny Ö(t) (giriş signaly)- bilen belgilesek; ondaky gyzdyrylýan jisimiň gyzdyrylmadan alnan soňundaky temperaturasyny Ö $_n$ (t)- (çykyş signaly) bilen belgilesek, onda q- ýylylyk akymy Nýutonyň ýylylyk geçiriji kanuny boýunça aşakdaky görnűşde kesgitlenýär:

$$q = 2 \cdot (\text{Ö}_n\text{-Ö})$$

Bu ýerde α- koeffisient gyzdyryjy jisim bilen materialyň arasyndaky ýylylyk çalyşmasy. Başga bir tarapdan bolsa, jisimiň temperaturasynyň ýokarlanyş tizligi bu jisimiň q- ýylylyk akymyna proporsionaldyr:

$$\frac{d\theta}{dt} = k \cdot q,$$

Bu ýerde: $k = \frac{1}{c^G}$, we c- ýylyk sygymy ;

G- jisimiň agramy. q- nyň bahasyny soňky deňlikde ornunda goýup alarys:

$$c^G \frac{d\theta}{dt} = \alpha \cdot (\theta_n - \theta)$$

ýa-da:

$$T \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_n;$$

bu ýerde $T \cdot \frac{c^G}{\alpha} -$ hemişelik jisimiň gyzdyrylyşynyň hemişelik wagty diýilip aýdylýar.

Aperiodiki dűwűne mysal edip, bulardan başga-da N ^{0} 5.b.-nji suratda görkezilen gidromehaniki sistemany görkezmek bolýar. $\delta_1 -$ we $\delta_2 -$ ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk:

$$T \cdot \frac{d\delta_2}{dt} + \delta_2 = \delta_1$$

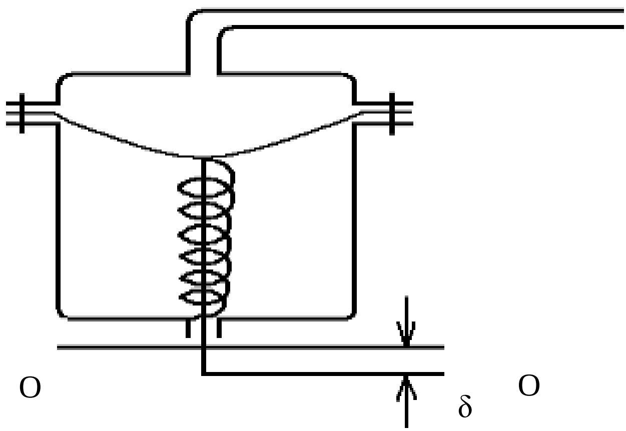
deňleme bilen ýazylýar.

Bu ýerde hemişelik wagtlar: puržiniň maýyşgaklyk koeffisiýentinden, suwuklygyň syzdyryjylyk koeffisiýentinden we porşendäki deşiklilik koeffisientinden bagly. Geçiriji prosessiň h(t)- egrisiniň űsti bilen T- hemişelik wagty aňsat tapyp bolýar. Suratdan görnűşi ýaly T=MN

K- koeffisiýent hem, h(t)- egriniň űsti bilen tapylýar. Ol

$$K=\lim_{t\to\infty} h(t) \text{ - baha deňdir.}$$

Aperiodiki dűwűne mysal edip, aş|akdaky N ^{0} 6 - nji suratda görkezilen membranaly ýerine - ýetiriji mehanizmi görkezmek bolýar. Onuň giriş signaly bolup: P- basyş, çykyş signaly bolup $\delta-$ ştoguň ýerleşdirmesi hyzmat edýär.



N ^{0} 6 - nji surat.

3. Yrgyldyly dűwűn

Yrgyldyly dűwűn aşakdaky deňleme bilen ýazylýar:

$$T_0\frac{d^2x}{dt^2}+T\frac{dx}{dt}+x=k\cdot u \qquad (11)$$

Bu ýerde: T $_0$ - koeffisient wagt kwadratynyň koeffisiýentidir ($[T]=[wagt]^2$), T- wagt ölçegidir $([T]=[wagt])$, k- bolsa, yrgyldyly dűwűniň gűýçlendirijisiniň statiki koeffisientidir. Ol:

$$k = \frac{x_y}{u_y} \text{ - deňdir.}$$

bu ýerde x_y– we u_y– ululyklar degişlilikde giriş we çykyş signallarynyň dikeldiji bahalarydyr.

Yrgyldyly dűwűniň geçiriji funksiýasy:

$$W(p) = \frac{k}{T_0 p^2 + Tp + 1}; \qquad (12)$$

Indi bolsa, bu dűwűniň h(t)- geçiş funksiýasyny tapalyň. Onuň űçin bolsa aşakdaky deňlemäni çözmelidir:

$$\left.\begin{aligned} & T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + T\frac{dx}{dt} + x = k, \\ & x(0) = 0; \frac{dx(0)}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Bu deňlemäni çözmek űçin, ilki bilen bu deňlemä bolan onuň hususy çözűwűni tapalyň. Ÿagny:

$$x_{xyc} = k \text{ - çözűwi tapalyň.}$$

Umumy çözűwi tapmak űçin bolsa, onuň harakteristik deňlemesini dűzeliň:

$$T_0 p^2 + Tp + 1 = 0 \qquad (14)$$

Bu kwadrat deňlemäniň kökleri:

$$p_{1-2} = \frac{-T \pm \sqrt{T^2 - 4T_0}}{2T_0} = -\alpha \pm j\omega;$$

bu ýerde

$$\alpha = \frac{T}{2T_0} > 0; \qquad \omega = \frac{\sqrt{\left|T^2 - 4T_0\right|}}{2T_0} > 0;$$

ω - ululyga yrgyldyly dűwűnde yrgyldynyň hususy ýygylygy diýilip aýdylýar; α – bolsa, yrgyldyly dűwűniň söndűriji koeffisienti diýilip aýdylýar. α – näçe uly boldugyça, geçiş funksiýada yrgyldynyň amplitudasy şonça-da kiçelýär. Yrgyldyly dűwűniň deňlemesi tolgundyryjy gűýçji bar bolan ossilýatoryň deňlemesi bilen gabat gelýär. Goý, ϑ - hemişelik sűrtűlme koeffisientli we ω_0 - hususy ýygylykly ossilýatora haýsy hem bolsa bir f(t) - tolgundyryjy gűýji $(t_0;t)$ - wagt aralygynda täsir edýän bolsun.

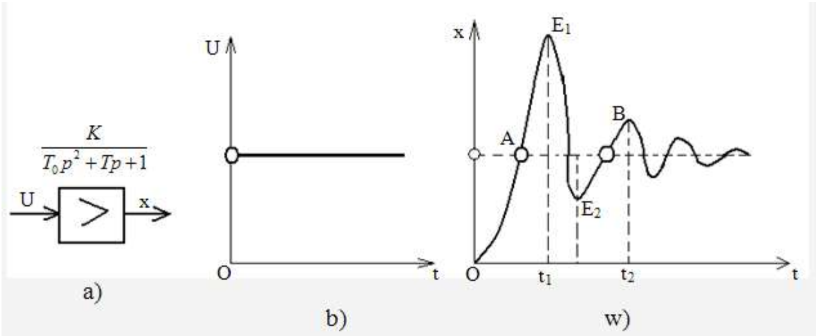
Bu ossilýatory hereketlendirijiniň deňlemesi aşakdaky görnűşde bolar:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\vartheta\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = f(t) \qquad (15)$$

Başlangyç şertler we f(t)=1(t)- çözűw aperiodiki bolýar. Bu ýagdaýda, ýokarda görkezilen deňleme boýunça berlen dűwűn uzakdan dűşnűkli bolýar, hem-de ony yzygider birikdirlen α – sany aperiodiki dűwűn bilen çalşyryp bolýar. Δ<0 bolan ýagdaýynda yrgyldyly dűwűn ýönekeý dűwűn görnűş getirilmeýär. (15) deňlemäniň doly çözűwi:

$$x_{g.r.} = c_1 \cdot e^{\alpha t}\sin\omega t + c_2 \cdot e^{\alpha t}\cos\omega t + k$$

c_1– we c_2– hemişelikler (13)- başlangyç şertler arkaly kesgitlenýär. 1-nji şerti ulanyp: x(0) = k+c_2 = 0; bu ýerden c_2 = - k .



N⁰ 7- nji surat.

(13)- deňlemäniň 2-nji şertini ulanmak űçin doly çözűwi differensirläliň:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot c_1 \cdot e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega c_1 e^{\alpha t} \cos \omega t +$$

$$+ \alpha \cdot c_2 \cdot e^{\alpha t} \cos \omega t + \omega c_2 \cdot e^{\alpha t} \sin \omega t$$

$d_0 = \dfrac{\vartheta}{2\omega_0}$ - ululyga hemişelik söndűriji diýilip aýdylýar. Bu deňlemäniň çözűwi aşakdaky görnűşde ýazyp bolýar:

$$x(t) = A \cdot e^{-\vartheta t} \cos(\omega t + \gamma) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{-\vartheta (t-\tau)} \cdot \sin \omega (t-\tau) d\tau \qquad (16)$$

Bu ýerde A- we γ- ululyklar x(t$_0$) = x$_0$ we $\dfrac{dx(t_o)}{dt} = x_1$; $\omega^2 = \omega_0{}^2 - \vartheta^2$ - başlangyç şertler boýunça kesgitlenýär.

$$\vartheta = \frac{T}{2T_0}; \qquad \omega_0{}^2 = \frac{1}{T_0};$$

Eger $t_0 = 0$ we $x(o) = A\cos\gamma$ - bolsa, onda:

$$x(t) = -A \cdot e^{-\vartheta t} \cdot \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \gamma) - \vartheta A \cdot e^{-\vartheta t}\cos(\omega t + \gamma)$$

we

$$x(0) = -A \cdot \frac{1}{\omega}\sin\gamma - \vartheta A \cdot \cos\gamma$$

bolar.

Yrgyldyly dűwűn űçin:

$$\Delta = T^2 - 4T_0 < 0$$

ýa-da

$2\sqrt{T_0}$ >T – diskriminantyň otrisatellik şerti ýerine ýetmelidir. Şeýlelikde, harakteristik deňlemäniň kökleri kompleks bolýar we deňlemäniň çözűwi bolsa, hakykytdan-da "yrgyldyly" bolýar.

$T^2 - 4T_0 \geq 0$ - bolan ýagdaýyn-da

onda, alarys:

$$\frac{dx(0)}{dt} = \omega c_1 - \alpha \cdot k = 0 \ ;$$

bu ýerden:

$$c_1 = k\frac{\alpha}{\omega} \ ;$$

Şeýlelikde, gözleýän h(t)- funksiýa aşakdaky görnűşe eýe bolýar:

$$h(t) = k + k \cdot \frac{\alpha}{\omega}e^{\alpha t} \cdot \sin\omega t - k \cdot e^{\alpha t}\cos\omega t =$$

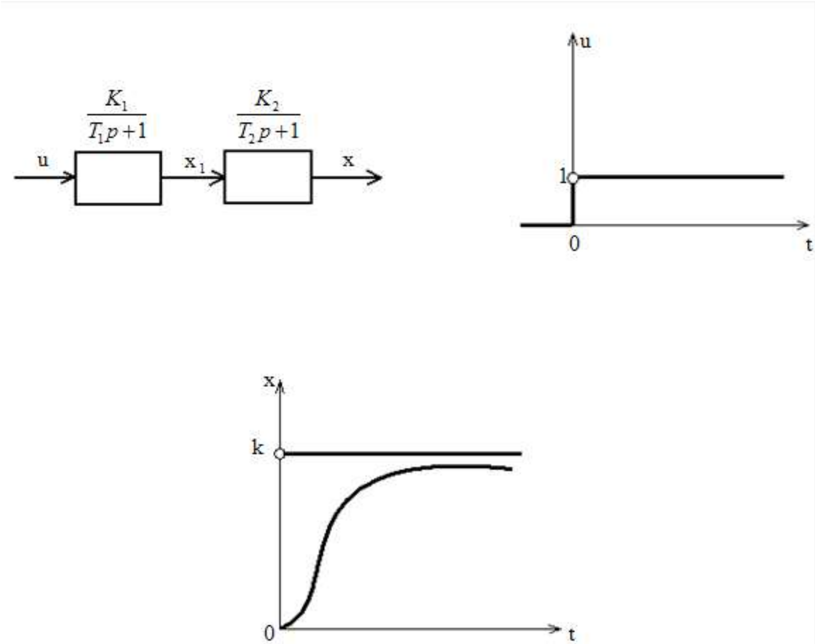
$$= k \cdot \left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right] =$$

$$= k \cdot \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin\gamma} \sin(\omega t + \gamma) \right] \qquad (17)$$

Bu ýerde:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} = \sin\gamma$$

$t \to \infty = k$ bolan ýagdaýynda bu çözüw $h_y(t) = k$ - dikeldiji baha asimptotik ymtylýar. N^0 7.w.- nji suratda geçiş funksiýanuň grafigi şekillendirlendir. Çyzgydan görşümiz ýaly onuň grafigi hemişelik ýygylygy ω - e deň bolan $x = x_y = k$ deňagramlaşdyryjynyň töwereginde yrgyldaýar (onuň periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Edil, şolar ýaly hem, deňagramlaşdyrma kanuny bolup geçýär. Hakykatdan-da, güýçlendiriji, aperiodiki we yrgyldyly düwünlere geçiş prosessi tamamlanandan soňra, olary çykyş signaly boýunça biri-birinden tapawutlandyryp bolmaýar, olar biri-birine meňzeş bolar. $\Delta = T^2 - 4T_0 > 0$ bolan ýagdaýynda (11)- deňleme boýunça berlen düwüni 2- sany inersion düwünlerden düzülen (N^0 8- nji surat) halka görnüşinde görkezip bolýar. Hakykatdan-da, goý, bu düwünde, x_1 1-nji düwüniň çykyş ululygy bolsun. Onda bu 2-nji düwüniň giriş ululygy bolýar.



w)

№ 8-nji surat.

Goý, T_1, k_1 - 1-nji dűwűniň ; T_2, k_2 - 2-nji dűwűniň parametrleri bolsun. Onda bu dűwűnleriň deňlemeleri aşakdaky görnűşe eýe bolýar.

$$\left.\begin{aligned} k_1u &= x_1 + T_1\frac{dx_1}{dt} \\ k_2u &= x_2 + T_2\frac{dx_2}{dt} \end{aligned}\right\}$$

Sistemanyň 1-nji deňlemesinden x_1- i tapyp we ony sistemanyň 2-nji deňlemesinde ornunda goýup, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{K_1K_2}{T_1T_2}u = \frac{x}{T_1T_2} + \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (18)$$

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} \qquad \text{we} \qquad \vartheta = \frac{1}{2}\cdot\frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1\cdot T_2}}; \qquad (19)$$

Şeýlelikda, bu belgilemelerden soňra (18)- deňleme (11)- görnűşdäki deňlemä getirilýär. Matematika kursundan mälim boluşy ýaly:

$$\frac{T_1+T_2}{2} > \sqrt{T_1\cdot T_2};$$

Şonuň űçin:

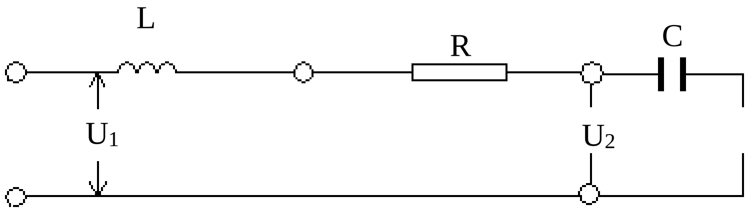
$$0 = \frac{T_1+T_2}{\alpha\sqrt{T_1T_2}} > 1;$$

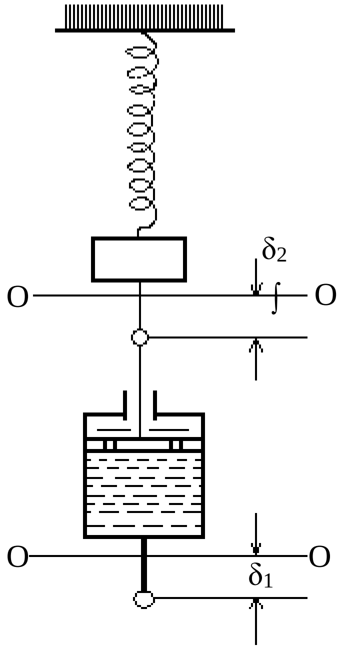
Diýmek, (14) harakteristik deňlemäniň kökleri bu ýagdaýda hakyky kökler bolýar we bu onuň çözűwi eksponentleriň jemine deň bolýar:

$$x = k\circ u + c_1\cdot e^{P_1t} + c_2\cdot e^{P_2t} \qquad (20)$$

Bu dűwűniň geçiş funksiýasy grafigi N ^{0} 8.b.- nji suratda görkezilendir.

Yrgyldyly dűwűne mysal edip N ^{0} 9- nji suratda görkezilen RC-zynjyry görkezmek bolýar.





b)

N^0 9-njy surat.

Goý, c- sygymly giriş signaly hökműnde u_1- naprýaženiýany, çykyş signaly edip bolsa, u_2- naprýaženiýany kabul edeliň. Onda, u_1- we u_2- naprýaženiýalaryň arasyndaky baglanşyk aşakdaky deňleme boýunça berilýär:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1$$

Bu ýerde:

$$LC = T_0, \quad RC = T, \quad k = 1$$

Yrgyldyly dűwűne mysal edip, bulardan başga-da N^0 9.(b)- nji suratda görkezilen gidromehaniki gurluşy görkezmek bolýar. Ol N^0 5(b)- nji suratda görkezilen gurluşdan özűniň inertly gűýji bilen tapawutlanýar. (δ_1 - giriş signaly ; δ_2 - çykyş signaly) arasyndaky baglanyşyk aşakdaky deňlik boýunça berilýär:

$$T_0\frac{d^2\delta_2}{dt^2}+T\frac{d\delta_2}{dt}+\delta_2=\delta_1$$

Bu sistema köplenç mehaniki yrgyldylary diferensirlemek űçin ulanylýar (mysal űçin maşyny göteriji (podwesnoý) hyzmat edýär). Geçiriji funksiýanyň çyzgysyndan görnűşi ýaly (N^0 7(b) - nji surat) period: $AB=\frac{2\pi}{\omega}$ - e deň. (17)- deňlikden görnűşi ýaly: $\beta=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ - gatnaşyk (geçiriji prosessiň çyzgysy boýunça kesgitlenýär) aşakdaky deňlige deňdir:

$$\beta=\frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}}=e^{\alpha(t_2-t_1)}$$

bu ýerde: $t_2-t_1=\frac{2\pi}{\omega}$;

Onda: $\beta=e^{\alpha\cdot\frac{2\pi}{\omega}}$;

Bu ýerden: $\alpha=\frac{\omega\cdot\ln_\beta}{2\pi}$

k- koeffisiýent t → ∞ bolan-da geçiş h(t)- funksiýanyň dikeldiji bahasy hökműnde kesgitlenýär. Ÿagny: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$

Şeýlelik-de, geçiş funksiýanyň grafigi arkaly sistemanyň ähli parametrlerini kesgitläp bolýar.

4. **Differensirleýji dűwűn**

Differensirleýji dűwűniň deňlemesi aşakdaky formula boýunça berilýär:

$$x = k \cdot \frac{du}{dt} \qquad (21)$$

$\frac{du}{dt} = p \cdot u$ - belgilemäni girizeliň.

Onda: x = k·p·u bolar. Bu ýerden:

$$\frac{x}{4} k \cdot p$$

Şeýlelikde, bu dűwűniň geçiriji funksiýasy:

W(t) = k·p (22) bolar.

Görşűmiz ýaly, bu ýagdaýda, h(t)- geçiş funksiýa 1(t)- birlik funksiýanyň önűmine deň. 1(t)- funksiýanyň önűmi: t ≠ 0- nokatlarda, ýagny (-∞;o) ϑ (0; +∞)- aralyklarda nula deň. t=0 bolanda onuň önűmi birjynsly űzűlýär we görşűmiz ýaly bu nokatda ol ýeterlik derejede uly bolýar (ýagny ∞-e ymtylýar). Umuman 1(t)- funksiýanyň önűmi bar we ol δ - funksiýa deň:

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t) \qquad (23)$$

Şu ýerde bir zady belläp geçmeklik örän möhűm, ýagny bu, adaty däl δ - funksiýanyň (matematika bu funksiýa umumylaşdyrlan funksiýa diýilýär) integrala (t)- funksiýa bilen gabat gelmelidir.

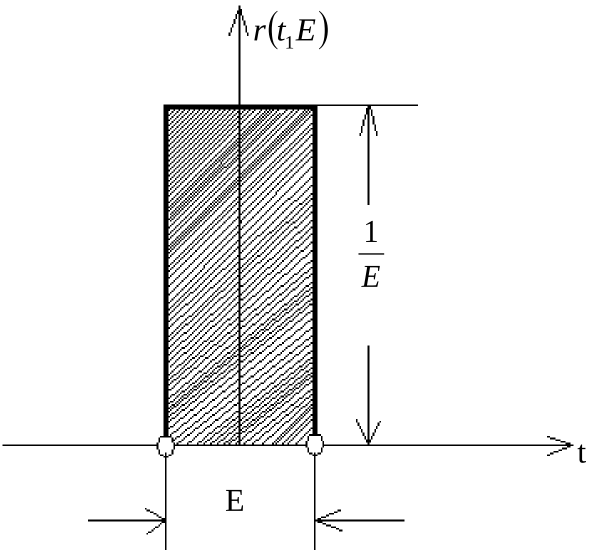
Ol aşakdaky formula deň:

$$\delta = \begin{cases} 0, eger : t \neq 0.bolsa \\ \infty, eger : t = 0.bolsa \end{cases} \qquad (24)$$

we

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1(t) \qquad (25)$$

δ - funksiýany takmynan ini ε - a deň bolan, beýikligi bolsa, $\frac{1}{\varepsilon} -$ a deň bolan (N^0 10 - nji surat) kiçi göniburçly impuls görnűşinde berip bolar. Sebäbi onuň meýdany (integraly) 1-e deň.



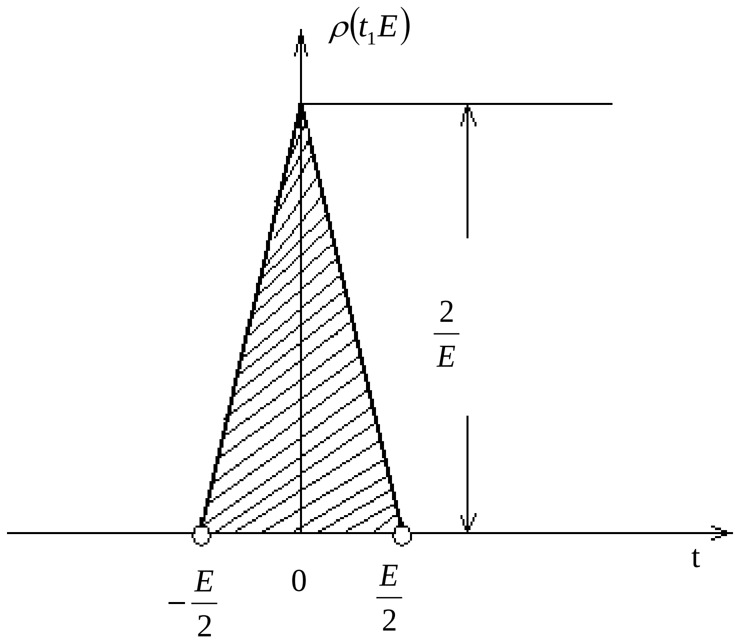
N^0 10-nji surat.

Bu göniburçly impuls r$(t_1\varepsilon)$- bilen belgilenip we $\varepsilon \to 0$ bolan predele geçip, ondan $\delta -$ funksiýany alyp bolýar. Ÿagny:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(t_1\varepsilon) \qquad (26)$$

δ - funksiýany bulardan başga-da űçburçlyk görnűşinde-de görkezip bolýar. Bu űçburçlyk $\rho(t,\varepsilon)$- bilen belgilenip, onuň ini ε - a, beýikligi bolsa $\frac{2}{\varepsilon}$- a deň bolmaly (N^0 11 - nji surat) $\rho(t,\varepsilon)$- űçburçlugyň meýdany (integraly) 1-e deň. Şonuň űçin hem, δ - funksiýany, $\varepsilon \to 0$ bolan ýagdaýynda predela geçip, $\rho(t,\varepsilon)$- funksiýa bilen çalşyryp bolýar.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho(t_1 \varepsilon) \qquad (27)$$



N^0 11-nji surat.

Bulardan başga-da, δ - funksiýany birnäçe analitik görnűşde berlen funksiýalaryň predeli bilen çalşyryp bolýar:

$$\delta(t)=\lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\cdot e^{-at^2} \qquad (28)$$

δ - funksiýanyň ýene-de bir häsiýetini belläp geçeliň. Goý, f(t)- funksiýa űznűksiz funksiýa bolsun. Onda

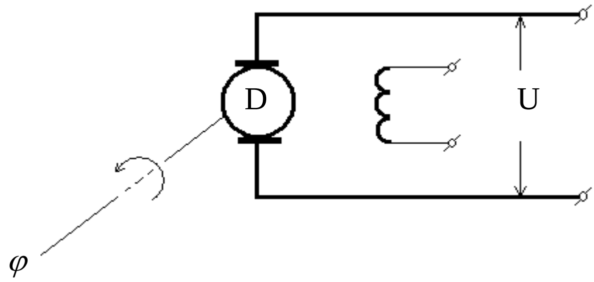
$$\int_a^b f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} f(t_0), eger, t_0\in[a,b] \\ o, eger, t_0 \bar{\in} [a,b]\end{cases} \qquad (29)$$

Bu ýerde: $a\le t_0\le b$.

Differensirleýji dűwűne mysal edip, aktiw garşylygy R=0 bolan C- kondensatory görkezmek bolar. Eger, onuň giriş signaly hökműnde U- naprýaženiýany, çykyş signaly hökműnde bolsa I- togy kabul etsek, onda I- tok bilen U- naprýaženiýanyň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky göknűşde berilýär:

$$I=\frac{cdU}{dt}$$

Differensirleýji dűwűniň geçiriji statiki koeffisienti k=c- e deňdir. Integrirleýji dűwűniň űsti bilen differensirleýji dűwűni alyp bolar. Sebäbi, integrirleýji we differensirleýji dűwűnleriň deňlemesi giriş we çykyş signallarynyň űýtgeýän ululyklary bilen gabat gelýär. Şonuň űçin hem, differensirleýji dűwűne mysal edip N^0 12 - nji suratda görkezilen dwigateli görkezip bolýar.



№ 12-nji surat.

Bu dwigatelde giriş signaly hökmünde: wagtyň φ- aýlowy kabul edilýär, çykyş signalynyň ornuna bolsa, U-napryaženiýany kabul edýärler. Şeýlelikde, seredilýän dwigatel generatoryň işleýiş tertibinde işleýär ; hem-de ol başga bir tarapdan differensirleýji düwün bolýar.

5. Real differensirleýji düwün

Ideal differensirleýji düwünler tebigatda, durmuşda ýok düwünler. Sebäbi inersiýasyz sistema bolmaýar. Şonuň üçin hem, real düwüne seredilip geçilýär we onuň deňlemesi aşakdaky görnüşde berilýär:

$$\mathrm{T}\frac{dx}{dt} + x = k \cdot \frac{du}{dt}; \qquad (30)$$

Bu ýerde $\mathrm{T} \geq 0$- hemişelige real differensirleýji düwüniň hemişeligi diýilip aýdylýar; k- koeffisiente bolsa, göterijiniň <u>güçlendiriji</u> ýa-da <u>statiki</u> koeffisienti diýilip aýdylýar.

$\frac{dx}{dt} = p \cdot x$; $\frac{du}{dt} = p \cdot u$ - şertli belgilemeleri girizeliň. Onda (30) deňlemeden, alarys:

$$\mathrm{T} \cdot px + x = k \cdot p \cdot u$$

ýa-da:

$$(Tp + 1)\, x = k \cdot p \cdot u \quad \text{bolar.}$$

Proporsiýa esasynda:

$$\frac{x}{u} = \frac{k \cdot p}{Tp + 1}$$

Şeýlelikde, real differensirleýji dűwűniň geçiriji funksiýasy:

$$\mathrm{W(p)} = \frac{k \cdot p}{Tp + 1} \qquad (31)$$

Real differensirleýji dűwűne mysal edip, N^0 5 - nji suratda şekillendirilen RC- zynjyra gökezmek bolar. Eger U_1- naprýaženiýany giriş signaly edip, I- togy çykyş signaly edip kabul etsek, onda U_2 - naprýaženiýa bilen I - toguň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky deňleme boýunça berilýär:

$$\mathrm{RC}\frac{dI}{dt} + I = C \cdot \frac{dU_1}{dt} \quad ;$$

Görşűmiz ýaly: T = R·C, k = C

Real differensirleýji dűwűniň geçiş funksiýasyny taparys. Ol gözlenýän funksiýa aşakdaky differensial deňlemäniň çözűwidir. Ÿagny, geçiş funksiýany tapmak űçin bolsa, aşakdaky differensial deňlemäni çözmeli bolýar:

$$T \cdot \frac{dx}{dt} + x = k \cdot \frac{d1(t)}{dt} = \delta(t)$$

Umumylygy kiçeltmezden nul başlangyç şerti özűmizde goýalyň ; Ÿagny $t \le 0$ bolan-da x(t) = 0 diýip kabul edeliň. Ÿokardaky differensial deňlemä δ- funksiýanyň gatnaşýanlygy zerarly ony çözmeklik örän kyn. Bu deňlemäniň iki tarapyny hem -∞ - den t- e çenli integrirläliň:

$$T\int_{-\infty}^{t} \frac{dx(\tau)}{\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau = k \cdot 1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \qquad (32)$$

Aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\ .$$

Onda, görşűmiz ýaly:

$$\frac{dz(t)}{dt}=x(t) \text{ - bolar.}$$

Bu bahalary (32)- deňlikde ornunda goýup, alarys:

$$\mathrm{T}\frac{dz}{dt}+z=k$$

Görşűmiz ýaly, z(t)- funksiýa dűwűniň geçiş funksiýasy (N^0 5 - nji surat) bilen gabat gelýär. Şonuň űçin hem (10)- gatnaşygy göz önűnde tutup, alarys:

$$z(t)=k\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

z-iň bu tapylan bahasyny ýokardaky $\frac{dz(t)}{dt}=x(t)-$ deňlikde ornunda goýup, gözlenýän x(t)-geçiş funksiýany taparys:

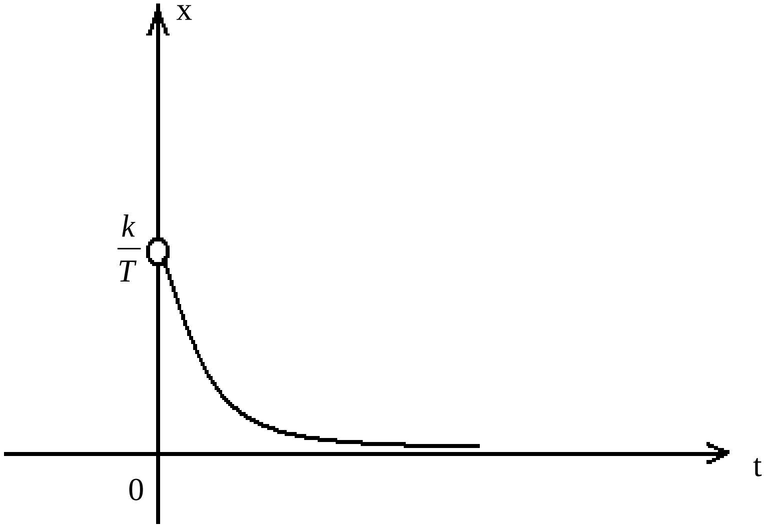
$$x(t)=\frac{dz(t)}{dt}=\frac{k}{t}\cdot e^{-\frac{t}{T}} \qquad (33)$$

Bu funksiýanyň grafigi №13-nji suratda görkezilendir.

Görşimiz ýaly, real differensirleýji dűwűniň geçiş funksiýasy

t=0 nokatda űzűlýär we t→∞ bolanda x(t)→0 boýar. Ÿagny:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0- \text{ bolýar.}$$



№ 13-nji surat.

6. **Gijä galdyryjy dűwűn**

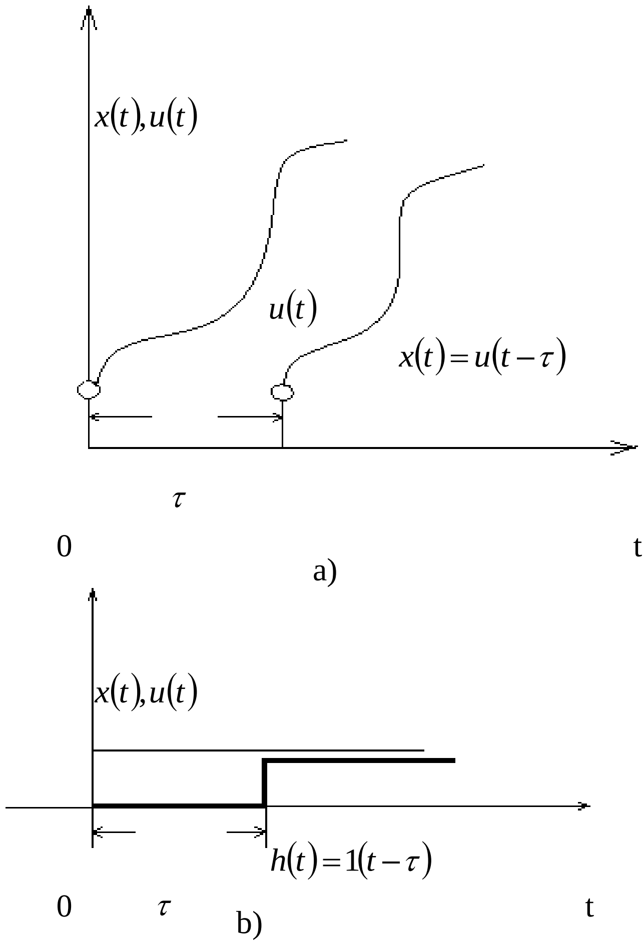
Gijä galdyryjy dűwűniň deňlemesi aşakdaky ýönekeý görnűşde berilýär:

$$x(t)=u(t-\tau), \quad \tau \geq 0 \qquad (34)$$

Bu deňleme şeýle okalýar: ýagny , u(t)- giriş signaly $\tau-$wagt boýunça yza sűýşűrilýär. Giriş signalyny $\tau-$wagt boýunça gijä galdyryp,ony çykyş signalyna deňläp bolýar

(№14 (a)-nji surat). Bu dűwűniň h(t)-geçiş funksiýasy (№14 (b)-nji surat) aşakdaky deňlik boýunça kesgitlenýär:

$$h(t) = 1(t-\tau) \quad (35)$$



$N^{\underline{0}}$ 14-nji surat.

Gijä galdyryjy dűwűniň geçiriji funksiýany tapmak űçin, u(t-τ) – funksiýany Teýlor hataryna dargadalyň:

$$u(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}u^{k}(t)\cdot(-1)^{k}\cdot\tau^{k}$$

(bu ýerde: 0!=1; $u^{(0)}(t)=u(t)$)

Aşakdaky belgilemäni girizeliň:

$$u^{!}=p\cdot u$$

Onda:

$$u^{(k)}=p^{(k)}\cdot u \text{ - bolar.}$$

Şonuň űçin hem:

$$u(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p^{k}\cdot(-1)^{k}\cdot\tau^{k}u(t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-p\tau)^{k}}{k!}\cdot u(t)=e^{-p\tau}\cdot u(t)$$

Diýmek:

$$x(t)=e^{-p\tau}\cdot u(t)$$

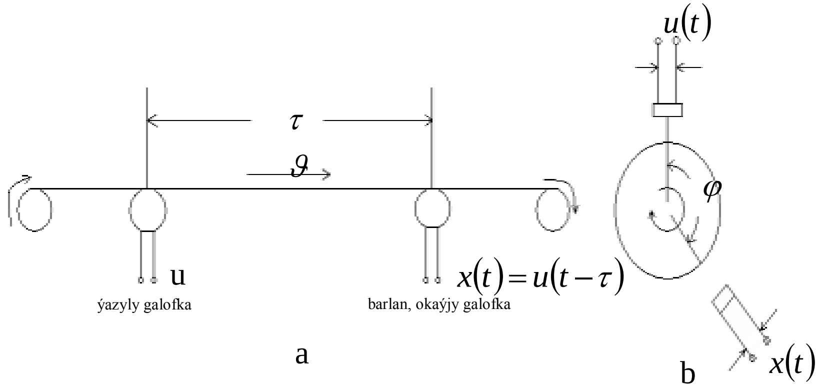
ýa-da:

$$\frac{x(t)}{u(t)}=e^{-p\tau}$$

Şeýlelikde, gijä galdyryjy dűwűniň geçiriji funksiýasy:

$$W(p)=e^{-p\tau} \qquad (36)$$

Gijä galdyryjy dűwűne mysal edip, № 15 (a)-nji suratda görkezilen lentaly magnitafony ýa-da magnitli barabany görkezmek bolar.



N$\overset{0}{=}$ 15-nji surat.

Görşűmiz ýaly, bu ýerde gijä galdyryjy koeffisient:

$$\tau = \frac{\iota}{\vartheta},$$

bu ýerde: ϑ - lentany saraýjynyň tizligi;

ι- bolsa, ýazyjy bilen okaýjy galowkalaryň arasyndaky aralyk. № 15 (b)-nji suratda bolsa, aýlow burçunyň tizligi ω - a deň bolan magnitli barabanyň çatgysy görkezilendir. Hakyky gijä galdyryjy dűwűnlere degişli birnäçe myssallary görkezip bolýar. Mysal űçin, sputnik we kosmiki korabllar bilen baglanyşykly
sistemalarda elektromagnit gijä galdyryjysy bar; uzynlygy uly bolan turbalardan gazyň basyşyny paýlanylyşynda gijä galdyryjy bolýar.

7. Jemleýji dűwűn

Bu dűwűnde $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$- giriş ululyklary bilen x- çykyş ululygynyň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky deňleme boýunça berilýär:

$$X(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \ldots + u_m(t). \quad (37)$$

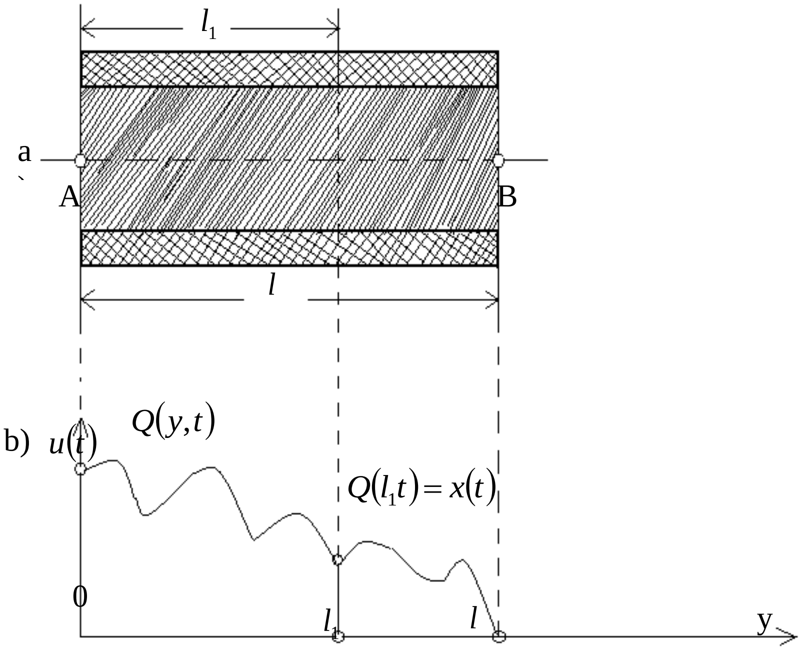
Jemleýji dűwűnleriň çatgysy käbir halatlarda gönűburçlyk görnűşinde berilmän, ol wertikal çyzgy boýunça berilýär. Onuň 1-nji tarapynda: $u_1, u_2, \ldots, u_m$- giriş ululyklary, 2-nji tarapynda bolsa, x- çykyş ululygy ýerleşdirilýär.

8. Paýlanan parametrli (köp argumentli) dűwűnler

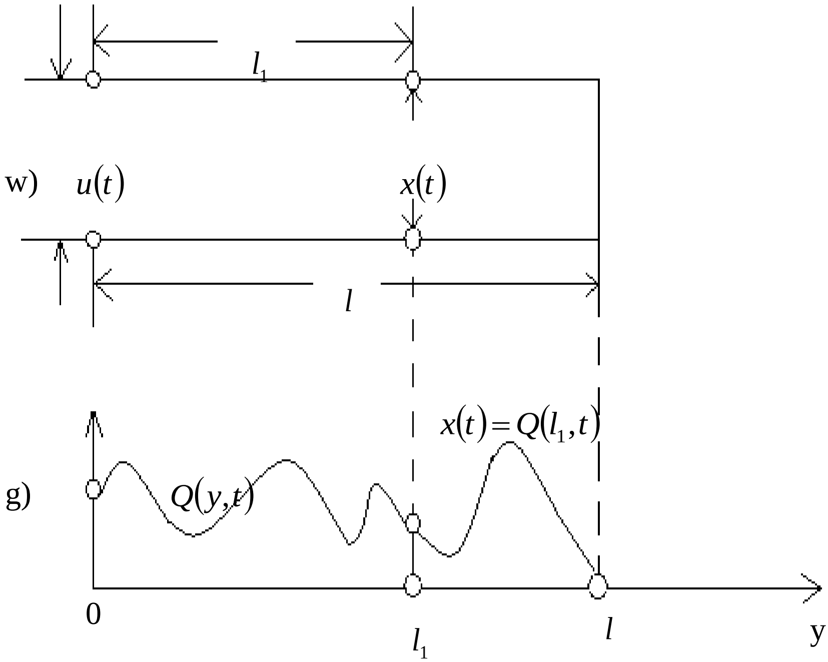
Biziň ýokarda seredip geçen dűwűnlerimiziň ählisinde giriş we çykyş signallarynyň arasyndaky baglanyşyk “adaty” (обыкновенный) differensial deňleme bilen berilýär. Ol deňlemä girýän **u(t)** we **x(t)** funksiýalar diňe bir **t-** wagt parametrinden baglydyr. Ÿöne, käbir real sistemalarda bu obýektiň ýagdaýy **t-** parametirden bagly bolmadyk giňişlikdäki funksiýalaryň űsti bilen berilýär. Ondaky her bir koeffisient hemişelik san bolman, funksiýa – görnűşinde berilýär. Bu sistemanyň ýagdaýyny ýönekeý, “adaty” differensial deňleme bilen ýazyp bolmaýar. Ol obýektler: hususy önűmli differensial deňlemeler bilen; integral deňlemeler bilen; has takygy çylşyrymly funksional deňlemeler boýunça berilýär.

Paýlanan parametrli dűwűnlere degişli ýönekeý bir mysala seredip geçeliň. Goý, uzynlygy **l** - deň bolan, gapdal taraplara tegelek görnűşinde berlen izolirlenen sterženi berlen bolsun (№ 16(a)- nji surat).

Goý, A - torsuň temperaturasyny giriş signaly hökműnde kabul edeliň, hem-de ony u(t)- bilen belgiläliň. Wagtyň űýtgemegi bilen bu temperatura hem űýtgäp bilýär (ýagny, belli bir temperaturany saklamaýar).



l1
a
A
B
l
b)
u(t)
Q(y,t)
Q(l1t) = x(t)
0
l1
l
y



№ 16-nji surat.

B- tores bolsa, temperaturasy nula deň bolan hemişelik temperaturany saklaýan bolsun. **x(t)-** çykyş signalynyň ornuna bolsa **A-** toresden $\mathbf{l_1 < l}$ – aralykda, uzaklykda ýerleşen sterženiň temperaturasyny kabul edeliň. Onda, sterženiň ýylylyk ýagdaýyny käbir **Q(y,t)-** funksiýanyň űsti bilen görkezip bolýar. Bu **Q(y,t)-** funksiýa t- wagtda (momentde) sterženiň y-nokatdaky Q- temperaturasyny görkezýär **(**$\mathbf{0} \le y \le l$**).**

Q(y,t)- funksiýa paýlanan argumentli funksiýa diýilýär (№ 16 (b)-nji surat). Bu mysalda paýlanan parametrli obýekte sterženiň temperaturasy 1- parametrli bolmaýar. Görşűmiz ýaly ol **y-** we **t-** parametrlerden bagly. Şert boýunça:

$$Q(0,t) = u(t) \quad (38)$$

$$Q(l,t) = 0 \quad (39)$$

Çyzgydan görnűşi ýaly, **x(t)-** çykyş signaly:

$$Q(l_1,t) = x(t) \quad (40)$$

Ÿylylyk geçirijiniň teoriýasynda bize mälim bolşy ýaly, Q(y,t)- paýlanan parametrli funksiýa [0,l]- kesimde ýylylyk geçirijiniň deňlemesini kanagatlandyrmalydyr:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = a\frac{\delta^2 Q}{\delta y^2}, \qquad (0 \le y \le l; t \ge 0). \quad (41)$$

Bu ýerde: a- ýylylyk geçirijiniň koeffisientidir. (41)- deňlemä Furýeniň deňlemesi diýilip aýdylýar.

[0,l]- kesimiň uçlaryna **Q(y,t)-** funksiýa (38) we (39)- şertleri kanagatlandyrýar. Şonuň űçin hem ol şertlere araçäg şertleri ýa-da gyraky şertler diýilip aýdylýar.

t- niň (t>0) islendik bahasynda **Q(y,t)-** temperatura paýlanyşygynyň dinamiki űýtgeýşini kesgitlemek űçin oňa ýene-de başlangyç şertler bermeli bolýar. Ol şert: t=0 – momentde

$$Q(y,0) = Q_0(y); \qquad (0 \le y \le l) \quad (42)$$

Bu ýerde: $Q_0(y)$- funksiýa y- den bagly, görnűşi kesgitlenen funksiýadyr. Hususy ýagdaý űçin **Q(y,t)-** nula deň hem bolup biler:

$$Q_0(y) = 0; \qquad (0 \le y \le l)$$

Gyraky (38) we (39) şertler arkaly, hem-de (41) başlangyç şertler arkaly (41)- deňlemäni çözűp bolýar.

u(t)- giriş signaly bilen, $x(t) = Q(l_1,t)$- çykyş signalynyň arasyndaky geçiriji funksiýany tapmak űçin, wagt boýunça $\frac{\delta}{\delta T}$- differensirleme operatoryny p- harpy bilen belgiläliň.

Onda, (41)- deňlikden, alarys:

$$p \cdot Q = a \cdot \frac{\delta^2 Q}{\delta y^2}; \quad (43)$$

Q- funksiýa y- parametrden bagly funksiýadyr. Bu funksiýa, görşűmiz ýaly: (38) we (39) gyraky şertleri hem-de, nul başlangyç şertleri kanagatlandyrýan, y- den bagly bolan ýönekeý adaty differensial deňlemäni kanagatlandyrmalydyr. (43)_- deňleme 2-nji tertipli differensial deňlemedir. Ol deňlemäni adaty usul boýunça aňsatlyk bilen çözüp bolýar. Bu deňlemäniň çözüwi aşakdaky görnüşde bolýar:

$$Q = \frac{\sin j\sqrt{\frac{p}{a}}(l-y)}{\sin j\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot l}\cdot u, \qquad \left(j=\sqrt{-1}\right). \quad (44)$$

Bu ýerden, u- we x- ululyklaryň arasyndaky geçiriji funksiýa aşakdaky görnüşde bolýar:

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{\sin j\sqrt{\frac{p}{a}}(l-l_1)}{\sin j\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot l} =$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(l-l_1)} - e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(l-l_1)}}{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot l} - e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot l}}; \qquad (45)$$

(45)- formula şu aşakdaky netijäni berýär: ýagny, paýlanan parametrli düwünler üçin geçiriji funksiýa bu, p- argumentden bagly bolan droply-rasional funksiýa bolup bilmeýär.

Paýlanan parametrli düwünlere mysal edip, bulardan başga-da № 17 (b)-nji suratda görkezilen uzynlygy l- deň bolan uzyn elektrik linýasy diýilip atlandyrylýan l- çyzygy görkezmek bolýar. Ol çyzygyň A- nokatdaky ujynda naprýaženiýa çeşmesi ýerleşýär, ýagny, şol ujynda tok bar, oňa elektrik simlerini tirkäňde ondan naprýaženiýa alyp bolýar. Oňa, kä halatlarda elektrik # liniýasynyň açyk ujy hem diýilip aýdylýar; beýleki B- ujy bolsa ýapyk gysga utgaşdyrlandyr. Ÿagny ol ujynda tok ýok, oňa elektrik simlerini tirkäp ondan tok alyp bolmaýar; başgaça aýdanymyzda naprýaženiýa ýok. Bu dűwűniň giriş signaly bolup, goý, A- ujynda ýerleşdirlen u(t)- naprýaženiýa hyzmat edýän bolsun; çykyş signaly bolup, A- nokatdan l_1-uzaklykda ýerleşen x(t)- naprýaženiýa hyzmat edýän bolsun.

Goý, bu uzyn elektrik linýasynda naprýaženiýanyň paýlanyşygy Q(y,t)- funksiýa boýunça ýazylýan bolsun (bu funksiýa şeýle okalýar: ýagny, y- nokatda ($0 \le y \le$ e) τ - moment ($t \ge 0$) boýunça elektrik naprýaženiýasydyr).

(0,l)- kesimde, Q(y,t)- funksiýa aşakdaky hususy önűmlerdäki differensial deňlemäni kanagatlandyrmalydyr:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta t^2} = a^2 \cdot \frac{\delta^2 Q}{\delta y^2}\ , \qquad (0<y<e;\ \ t>0) \qquad (46)$$

Bu ýerde, a- ululyk, elektrik liniýasynda naprýaženiýanyň tolkunlanma (волна)- tizligidir.
Ol aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$a = \frac{1}{\sqrt{L \cdot c}} \qquad (47)$$

bu ýerde: L- we c - çyzygyň birlik uzynlygynda induktiwlik we sygym. Mälim boluşy ýaly; aşakdaky şertler ýerine ýetmeli:

$$Q\ (0,t) = u(t) \quad (48)$$

$$Q\ (l,t) = 0 \quad (49)$$

Q(y,t)- naprýaženiýa paýlanyşygy birbahaly kesgitlemek űçin, oňa bu şertler ýeterlik däl. Oňa ýene-de hökmany başlangyç şert bermeli. Ÿagny başgaça aşakdaky başlangyç şert bermeli:

$$Q(y,o) = Q_0(y) \qquad (0 \le y \le l), \quad (50)$$

$$\frac{\delta Q(y,t)}{\delta t} \int_{t=0} Q_1(y) \qquad (0 \le y \le l) \quad (51)$$

bu ýerde Q_0(y)- we Q_1(y)- belli funksiýalardyr. (48) we (49)- gyraky hem-de (50) we (51)- başlangyç şertler bilen berlen (46)- deňleme islendik t>0 momentde Q(y,t)- funksiýany paýlanyşygyny kesgitlemäge műmkinçilik berýär. u(t)- giriş signaly bilen x(t) = $Q(l_1,t)$- çykyş signalynyň arasyndaky getiriji funksiýany tapmak űçin ýokarda seredilen mysalda ulanylan usuly peýdalanalyň. Ÿagny, (46)- deňlemede $\frac{\delta^2}{\delta t^2}$ - differensirleme operatorynyň ornuna p^2 - belgilemäni girizeliň:

$$p^2 \cdot Q = a^2 \cdot \frac{\delta^2 Q}{\delta y^2} \qquad (52)$$

Soňky deňlemäni gyraky hem-de başlangyç şertler boýunça çözűp, alarys:

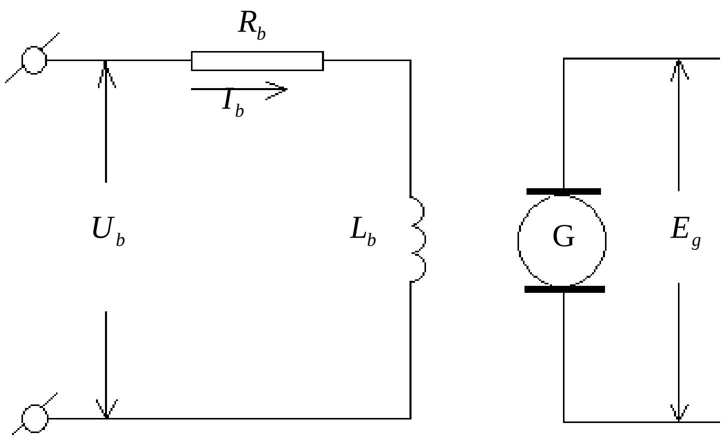
$$Q = \frac{\sin j \cdot \frac{p}{a}(l-y)}{\sin j \cdot \frac{p}{a}} \qquad (53)$$

Bu ýerden, gözlenýän geçiriji funksiýa:

$$W(p) = \frac{\sin j \cdot \frac{p}{a}(l-y)}{\sin j \cdot \frac{p}{a} \cdot l} = \frac{e^{-\frac{p}{a}(l-l_1)} - e^{\frac{p}{a}(l-l_1)}}{e^{-\frac{p}{a} \cdot l} - e^{\frac{p}{a} \cdot l}} \qquad (54)$$

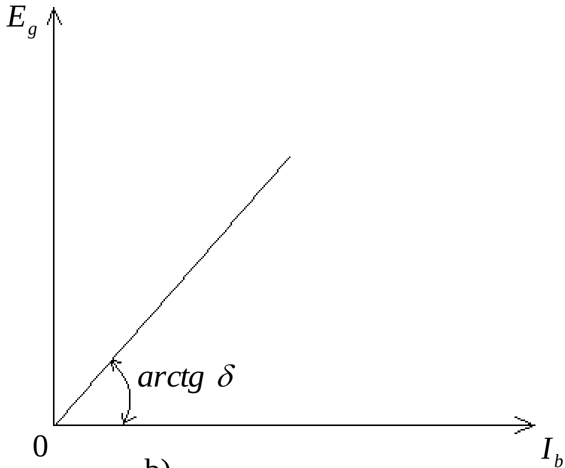
9. Elementar dűwűnlere degişli goşmaça mysallar

Awtomatiki sazlaýyş sistemasyna degişli birnäçe mysallara seredip geçeliň. Goý, aşakdaky № 18 (a)-nji suratda görkezilen G- hemişelik tok öndűriji generator berlen bolsun.



a)

№ 17-nji surat.



b)

№ 18-nji surat.

Onuň giriş elementi hökműnde: tolgundyryjy sarymynda (обмотка возбуждение) u_b- napryaženiyany kabul edeliň. Goý, umumylygy kiçeltmezden tolgundyryjy sarymda zynjyryň garşylygyny R_b- bilen öz-özűnden induktiwlenme koeffisientini bolsa, L_b- bilen belgiläliň. Dűwűniň çykyş signaly hökműnde bolsa: G- generatoryň E_G- elektrik hereketlendiriji gűýjini kabul edeliň.
Gistorezistory we tok doýgunlygyny hasaba almazdan generatoryň holostoý hodunyň häsiýetnamasy göni çyzyk diýip alsak, hem-de $E_G = \delta \cdot I_b$, (δ=const)- diýip kabul etsek № 18 (b)-nji surat) onda dűwűniň deňlemesi şu aşakdaky görnűşe eýe bolar:

$$U_b = I_b \cdot R_b + \alpha_b \frac{dI_b}{dt} = E_G \cdot \frac{R_b}{\delta} + \frac{L_b}{\delta} \cdot \frac{dE_G}{dt}$$

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\frac{\delta}{R_b} = k_1, \qquad \frac{L_b}{R_b} = T_1$$

Onda soňky deňleme şu aşakdaky görnűşe eýe bolar:

$$U_b = \frac{1}{k_1} \cdot E_G + \frac{T_1}{k_1} \cdot \frac{dE_G}{dt} \quad ,$$

Bu ýerden:

$$\mathrm{k}_1 U_b = E_G + T_1 \cdot \frac{dE_G}{dt} \qquad (1)$$

Diýmek, şeýlelikde inersion dűwűn űçin aragatnaşyk kanuny alarys.

II B A P

KOMPLEKS ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝANY DIFFERENSIRLEME.

1.Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň önümi.

Goý, $f(z)$ funksiýa käbir G ýagdaýda üznuksiz we kesgitlenen bolsun.Iki nokada z we $z+\Delta z$ seredeliň,olar G ýaýla degişlidir we $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$ gatnaşygy düzýän bolsun.

z nokatda $w=f(z)$ funksiýanyň önümi diýip,funksiýanyň ardyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň predeline aýdylýar,haçanda argumentiň artdyrmasy nola ymtylanda alarys:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Nokatda önümiň bolmagy üçin bu predeliň bolmagy we Δz-ň nola ymtylmak usulyna bagly bolmaly däl.

$f(z)$ funksiýa G ýaýlada analitik (regulýar) diýilýär,eger her bir z nokatda bu ýaýlanyň funksiýasy kesgitlenen we üznüksiz hem-de bu funksiýanyň önümi bar bolsun.

Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň önüminiň girizilen kesgitlemesi hakyky üýtgeýänli funksiýanyň önümi bilen gabat gelýär.Şonuň üçin hem hakyky üýtgeýänli funksiýa üçin,hakyky funksiýany differensirlemegi 5 düzgüni hem ýerine ýetýär.

1.Iki funksiýanyň jeminiň önümi bu funksiýalarynyň önümleriniň jemine deňdir,

$$[f(z)+g(z)]'=f'(z)+g'(z).$$

2.Iki funksiýanyň köpeltmek hasylynyň önümi birinji funksiýanyň önüminiň ikinji funksiýa köpeldilip we birinji funksiýany ikinji funksiýanyň önümine köpeldilmeginiň jemine deňdir.

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f'(z)g'(z).$$

3.Drobyň önümi ýene-de droby emele getirip sanawjyda sanawjynyň önüminiň maýdalawja köpeldip sanawjyny maýdalawjynyň önümine köpeldilip aýrylmagyna deňdir.Maýdalawjyda bolsa maýdalawjydaky funksiýanyň kwadratyna deňdir.

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2}.$$

4.Goý,$w_1=f_1(z)$, $z \in G$ we $w_2=f_2(w_1)$, $w_1 \in G_1$ funksiýalar bar bolsun, $f_1(z)$ funksiýa G ýaýlany G_1 ýaýla şekillendirýär.Goý, $f_1(z_0)=w_{10}$ we $f_2(w_{10})=w_{20}$ we $f_1'(z_0)\ f_2'(w_{10})$ önümler bar bolup,onda çylşyrymly funksiýanyň önümi,

$$\{f_2[f_1(z)]\}'_{z=z_0} = f_2'(w_{10}) \cdot f_1'(z_0).$$

5.Goý,$w=f\ (z)$, $z \in G$ funksiýa bar bolsun,ýagny bir belgili G ýaýlany z tekizlige şekillendirýär,käbir G_1 ýaýlany w tekizlige şekillendirýär.Onda ,eger $z=\varphi(w)$ ters funksiýa $w_0=f\ (z_0)$ nokatda üznçksiz bolsa we $f'(z_0)$] önüm bar bolsa, we ters funksiýanyň hem önümi bar bolup $[\varphi(w_0)]' = 1 \,/\, f'(z_0)$ bolar.

2. Koşi – Rimanyň şerti

$z=z_0$ nokatda $f\ (z)=u+jv$ funksiýanyň önüminiň bar bolmagynyň zerur we ýetrlik şertini bereliň,şeýle hem $f\ (z)$ funksiýanyň analitik şertini bereliň.

Teorema 1.
$f\ (z)=u+jv$ funksiýanyň z_0 nokadyň käbir ýaýlasynda kesgitlenen bolup,bu nokatda önümiň bolmagy zerur hem ýeterlik bolar ýaly 1) $u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalar x we y boýunça $z=z_0$ nokatda differensirlenýän bolmaly; 2) $z=z_0$ nokatda Koşi – Rimanyň şerti ýerine ýetmeli:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ we } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

Subutnama.Ilki bilen Koşi – Rimanyň şertiniň zerurlygyny subut edeliň.Goý, f (z) funksiýa $z=z_0$ nokatda önümi bar bolsun,şeýle hem predel bar bolsun,

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (3)$$

Bu predel Δz-ň nola ymtylmak usulyna bagly däldir.Goý $\Delta z=\Delta x$ bolsun,onda

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x,y_0)+jv(x_0+\Delta x,y_0)]-[(u(x_0,y_0)+jv(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$=$$

$$=\lim_{\Delta x}\frac{[u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)]+j[v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)]}{j\Delta y}=$$

$$=\frac{du}{dx}+j\frac{dv}{dx}. \qquad (4)$$

Goý,indi $\Delta z=j\Delta y$ bolsun,onda

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x_0,y_0+\Delta y)+jv(x_0,y_0+\Delta y)]-[u(x_0,y_0)+jv(x_0,y_0)]}{j\Delta y}$$

$$=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x_0,y_0+\Delta y)-u\,x_0,y_0)]+j[v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)]}{j\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{j}\left(\frac{du}{dy}+j\frac{dv}{dy}\right)=\frac{dv}{dy}-j\frac{du}{dy}. \qquad (5)$$

Şeýle hem (3)-nji predel Δz-ň nola ymtylma şertine bagly däldir,onda hakyky we hyýaly bölеklerini (4) we (5)-de deňläp alarys:

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \text{ we } \frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}.$$

Teoremanyň zerurlyk şerti subut edildi.

Indi Koşi – Rimanyň ýeterlik şertini subut edeliň.Goý,$u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalar x we y boýunça differensirlenýän bolsun we Koşi – Rimanyň şertini kanagatlandyrýan bolsun.Bu ýagdaýda $f'(z)$ önüm $z=z_0$ nokatda bar.

$u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalaryň differensirlenmeginden alarys:

$$\Delta w = \Delta u + j\Delta v = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x + \frac{dv}{dy}\Delta y\right) + o(\Delta z),$$

bu ýerde $o(\Delta z)$ – tükeniksiz kiçi bolup Δz-e seredeniňde ýokary tertipli kiçidir.

$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ gatnaşyga seredeliň:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x + \frac{dv}{dy}\Delta y\right)}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Koşi – Riman şerti boýunça alarys:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{du}{dx}\Delta x - \frac{dv}{dx}\Delta y + j\left(\frac{dv}{dx}\Delta x + \frac{du}{dx}\Delta y\right)}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\frac{du}{dx}(\Delta x + j\Delta y) + j\frac{dv}{dx}(\Delta x + j\Delta y)}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Indi $\Delta z \to 0$ predele geçeliň:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{du}{dx} + j\frac{dv}{dx} = w'(z_0),$$

bu predel bardyr we $\Delta z \to 0$ usulyna bagly däldir.Şeýlelik bilen Koşi – Riman şertiniň ýeterlik şerti ýerine ýetýär.

Koşi – Riman şertini ulanyp alarys:

$$f'(z) = \frac{du}{dx} + j\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - j\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} - j\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + j\frac{dv}{dx}. \quad (6)$$

Subutsyz Koşi – Riman şertini *f* (z) funksiýa üçin getireliň,eger *z*-trigonometrik formada berilen bolsa.Goý,

$$f(z) = f[r(cos\varphi + jsin\varphi)] = u(r,\varphi) + jv(r,\varphi).$$

$z_0=r_0$ (cosφ_0+*j*sinφ_0) nokatda önümiň bar bolmagy üçin aşakdaky şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir:

1) *u* (*r,φ*) we *v* (*r,φ*) funksiýalar *r* we *φ* boýunça differensirlenýän bolmaly;
2) z_0 nokatda Koşi – Rimanyň şerti aşakdaky görnüşde ýerine ýetmeli;

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi}; \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi}. \quad (7)$$

Mysal 1.

Funksiýanyň analitikligini kesgitläliň:

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + j2xy.$$

bu funksiýa hakyky we hyýaly bölegi: $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$ bolsun.*u* we *v* funksiýalar *x* we *y* boýunça differensirlenýän bolsun,olaryň hususy önümleri:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dv}{dy} = 2x, \frac{du}{dy} = -2y, \frac{dv}{dx} = 2y.$$

Şeýlelikde,Koşi – Rimanyň şerti z-kompleks tekizliginiň ähli nokatlary üçin ýerine ýetmeli.Şeýlelikde,f $(z)=z^2$ funksiýa kompleks tekizliginiň ähli ýerinde analitikdir.

Mysal 2.

$f(z)=|z|=r$ funksiýanyň analitikligini kesgitlemeli.

Bu funksiýa üçin $u(r,\varphi)=r,$ $v(r,\varphi)=0$ üçin $\frac{du}{dr}=1, \frac{dv}{d\varphi}=0$ hususy önümleri hasaplalyň.(7)-Koşi – Rimanyň şerti ýerine ýetmeýär,onda $f(z)=|z|$ analitik däldir.

3.Garmoniki funksiýalar

Tehnikada duş gelýän köp meseleler hususy önümleriň deňlemesine getirilýär:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0, \qquad \text{ýa} - \text{da } \Delta u=0.$$

Bu deňlemä Laplasyň deňlemesi diýilýär; Δ - Laplasyň operatory.

Kesgitleme girizeliň.x we y iki üýtgeýän deň $u(x,y)$ funksiýa garmonik diýilýär,haçanda ikinji tertipli üznüksiz önümleri bolsa we Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýan ýagdaýynda aýdylýar.Garmoniki funksiýa mysal bolup $u(x,y)=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ bolar.Hakykatdan hem

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\text{şonuň üçin } \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0.$$

$v(x,y)$ funksiýa $u(x,y)$ garmonik funksiýa gatnaşygy boýunça gatrymly garmonik garmonik funksiýa diýilýär,eger $v(x,y)$ – garmoniki funksiýa bolup $u(x,y)$ bilen Koşi – Riman deňlemesini kanagatlandyrmaly.

Teorema 2.

$f(z)$ analitik funksiýanyň hakyky $u(x.y)$ we hyýaly $v(x,y)$ bölekleri x we y-den gatrymly garmonik funksiýalar bolýar.

Subutnama.Teoremanyň subudynda $u(x,y)$ –hakyky we $v(x,y)$ hyýaly analitik funksiýalar x we y boýunça ikinji tertipli üznüksiz hususy önümlere eýedir.$u(x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalaryň ikinji tertipli hususy önümiň bar bolmagy soňrak subut ediler.

$u\ (x,y)$ we $v(x,y)$ funksiýalar Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar,ýagny olar ikinji tertipli üznüksiz hususy önüme eýedir.Koşi – Riman deňlemesini $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy};\frac{du}{dy};\frac{du}{dy}$ ýazalyň.Birinji deňlemäni x boýunça ikinjini bolsa alarys.Edil şu meňzeşlikde alarys:$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0.$ Analogly deňligi alarys: $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0.$

$u(x,y)$-garmonik funksiýany bilip,oňa gatrymly $v(x,y)$ funksiýany hemişelik köpeldijä görä takyklykda.Hakykatdan hem egriçyzykly integrala seredeliň

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy=v(z)-v(z_0),$$

bu ýerde z we z_0 – käbir x,y tekizligiň nokatlary.$\frac{dv}{dx}$ we $\frac{dv}{dy}$ -ň ýerine Koşi – Riman şertini göz öňünde tutup,alarys:

$$v(z)-v(z_0)=\int_{z_0}^{z}-\frac{du}{dy}dx+\frac{du}{dx}dy. \qquad (8)$$

Integral aşgynda doly differensial otyr.Hakykatdan hem matematiki analizden belli bolşy ýaly integral aşagyndaky aňlatma öz gezeginde doly differensialy aňladýar, $-\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dx^2}$ deňlik ýerine ýetýär.

Bu deňlik $u(x,y)$ çaklama boýunça garmonik funksiýadyr.(8) deňlikden $v(z_0)$ – hemişelik ululyk bolup z_0 nokadyň ýagdaýyna baglydyr,şeýlelikde alarys:

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{du}{dy}dx + \frac{du}{dx}dy + c. \qquad (9)$$

(9)-njy formula *f* (*z*) analitik funksiýanyň *u*(*x*,*y*) hakyky böleginden belli bolşy ýaly hemişelik köpeldijä çenli takyklykda onuň hyýaly bölegi *v*(*x*,) bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde aşakdaky formulany alarys:

$$u(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dv}{dy}dx - \frac{dv}{dx}dy + c, \qquad (10)$$

onuň kömegi bilen belli *v*(*x*,*y*) hyýaly bölegi we *u*(*x*,*y*) hakyky bölegi kesgitläp bolar.

Şeýlelikde,(9) we (10) formulalar *f* (*z*) analitik funksiýalary kesgitlemäge mümkinçilik berer.

Mysal 3.

$u\ (x,y)=x^2-y^2$ funksiýa berilen.*f* (*z*) analitik funksiýany tapalyň,onuň hakyky bölegi $u\ (x,y)=x^2-y^2$ bolar.

u (*x*,*y*)-garmonik funksiýadygyny görkezeliň.Hakykatdan hem $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 2 - 2 = 0,$ onda berilen funksiýa garmonikdir.(9)-njy formuladan peýdalanyp *f* (*z*) analitik funksiýanyň hyýaly bşlegini kesgitläliň:

$$v(x,y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{du}{dy}dx + \frac{du}{dx}dy = \int_{z_0}^{z} 2ydx + 2xdy = 2xy + c.$$

Gözlenýän *f* (*z*) analitik funksiýa aşakdaky görnüşe eýedir:

$$f(z) = x^2 - y^2 + j(2xy + c) = z^2 + jc.$$

4.Önümiň argumentiniň we modulynyň geometriki manysy.

Goý,f (z) funksiýa G ýaýlada analitik bolsun,$f'(z_0) \neq 0$ bolsun.Goý,l_{z1} egri z tekizlikde l_{w1} egri w tekizlikde bar bolsun (surat 1).Goý,M we M_1 nokatlar z tekizliginde $z=z_0$ we $z=z_0+\Delta z$ bahalara degişli bolsun,N we N_1 nokatlar bolsa w tekizlikde $w=w_0$ we $w=w_0+\Delta w$bahalara degişli bolar,onda burçuň bahasy:$\alpha=\arg\Delta z$, $\beta=\arg\Delta w$ bolar.

Bu ýerden:

$$arg\frac{\Delta w}{\Delta z} = arg\Delta w - arg\Delta z = \beta - \alpha.$$

Eger $\Delta z \to 0$,onda M_1 nokat M nokada ymtylar, N_1 nokat N-e ymtylar.MM_1 we NN_1 predelde galtaşyjynyň ýagdaýyny kesgitleýär.

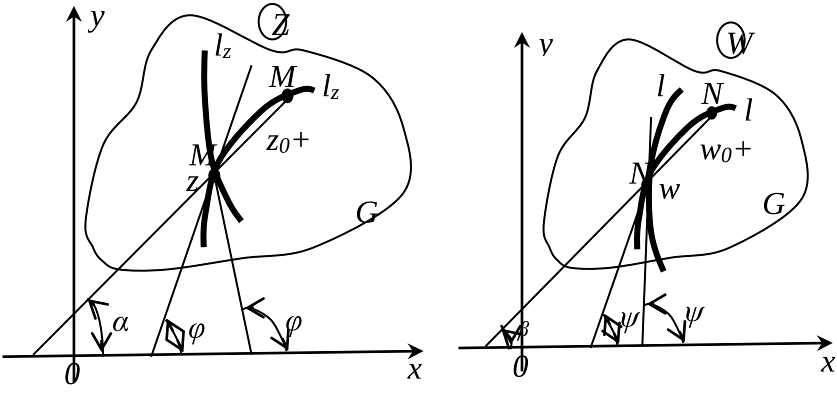
$$\lim_{\Delta z \to 0} arg\frac{\Delta w}{\Delta z} = arg f'(z_0) = \psi_1 - \varphi_1.$$

(11) aňlatmadan $f'(z)$ funksiýanyň argument z_0 nokatda l_{z1} egriniň aýlanma burçuny aňladýar,özem z_0 nokatda bu egriniň w-tekizlige f (z) funksiýanyň kömegi bilen alynýar.Bu hem $f'(z)$-ň geometrik manysydyr.

Eger başga l_{z2} egrä seretsek,onda arg $f'(z_0)=\psi_2-\varphi_2$ görnüşde ýazarys:

$$\psi_2-\psi_1=\varphi_2-\varphi_1. \quad (12)$$

Şeýlelikde,z-tekizlikde l_{z1} we l_{z2} egrileri alsak we olaryň w tekizlikde şekilini l_{w1} we l_{w2} bilen belgilesek,onda f (z) analitik funksiýanyň kömegi bilen egrileriň arasyndaky burç f $(z_0)\neq 0$ ýagdaýynda saklanýar.



Surat 1.

Indi $f'(z)$ funksiýanyň önüminiň modulynyň geometrik manysyny düşündireliň. $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ gatnaşyga seredeliň,onda alarys: $\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \frac{N_1 N}{M_1 M}$.
bolanda Δz→0-da alarys:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \left|\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)|. \qquad (13)$$

(13) deňlikden görnüşi ýaly önümiň moduly tükeniksiz kiçi wektorlaryň süýnmegini häsiýetlendirýär,ýagny ol z_0 nokatdan başlap $w=f\ (z)$ funksiýanyň kömegi bilen şekillendirilýär.Bu süýnme tükeniksiz –kiçi wektoryň ugruna bagly däldir.

Analitik funksiýanyň argumentleriniň we modulynyň geometriki häsiýetinden analitik funksiýanyň kömegi bilen şekillenme bir nokatdyr,töwereginde meňzeş ýa-da konforum bolýar.

KOMPLEKS ÜÝTGEÝÄNLI ELEMENTAR FUNKSIÝALAR.

6.Çyzykly we drob çyzykly funksiýalar.

z kompleks üýtgeýänli çyzykly funksiýa diýip,

$$f(z)=az+b \qquad (1)$$

bu ýerde a we b kompleks sanlar görnüşli funksiýa aýdylýar.Çyzykly funksiýanyň önümi $f'(z)=a$ bolar.Bu funksiýanyň kömegi bilen şekillendirme her bir z nokatda tükeniksiz – kiçi wektor $|a|$-da süýnýär we α=arg α burça aýlanýar.

Anyk şekillenmä seredeliň.Goý,funksiýa:

$$f(z)=|a|z. \qquad (2)$$

bolsun.

Bu funksiýanyň kömegi bilen $|a|$ koeffisiýent bilen meňzeşlik özgertmesi amala aşyrylýar,şeýle hem w tekizlige şekillendirmede arg z üýtgemeýär,wektoryň uzynlygy bolsa $|a|$ gezek ösýär.

$$z(z)=z(\cos\alpha+j\sin\alpha). \qquad (3)$$

bolsun.

Bu funksiýa z wektoryň α burça aýlanmasy bolýar,$|z|$ üýtgewsizdir.Funksiýa

$$z(z)=az=|a|(\cos\alpha+j\sin\alpha)\,z, \qquad (4)$$

bu ýerde α=arg a,bu hem z wektoryň α burça aýlanmasy we $|a|$ gezek süýnmesi,(2) we (3) özgertmäni hem aňladýar.

$$f(z)=z+b \qquad (5)$$

funksiýanyň kömegi bilen şekillendirme z tekizligiň ähli wektorlarynyň hemişelik b süýşmesini aňladýar.

Şeýlelikde $f(z)=az+b$ funksiýanyň kömegi bilenşekillendirme aýlanma we z tekizligiň wektorynyň süýşmesi,şeýle hem b wektora süýşmesi bolýar.(1)-nji özgertme ($a\neq0$ we $a\neq1$) iki sany hereketsiz nokatlara eýedir:

1)tükeniksiz çetleşen nokat,ýagny (1) özgertmäniň kömegi bilen *w* tekizligiň tükeniksiz çetleşdirilen nokadyna geçýär;

2)tükeniksiz z_1 hereketlenmeýän nokat öz ýerinde galdyrylýar,şeýle hem
$f(z_1)=z_1$.Bu nokat $z=az+b$ deňlemeden kesgitlenýär,onuň çözüwi $z_1=\frac{b}{1-a}$ bolar. Eger $a=1$bolsa,onda $z=\infty$ ikeldilen hereketlenmeýän nokat bolar,şeýle hem z_1 tükeniksizlige gider.Eger $a=0$ bolsa,onda $f(z)=b$ bolar we bu ýagdaýda bir hereketlenmeýän nokat ähli *z* tekizligi şekillendirer.

Drob – çyzykly funksiýa diýip

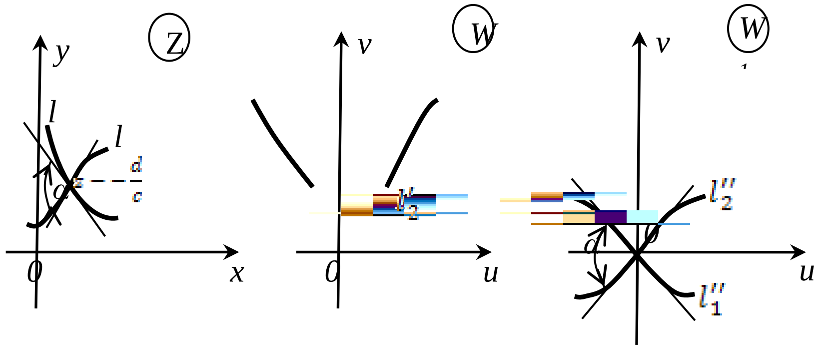
$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad (6)$$

funksiýa $|c|+|d|=0$ görnüşli funksiýa aýdylýar.Drob – çyzykly funksiýa $z=-d/c$ nokatlardan başgalarda kesgitlenendir.Drob – çyzykly funksiýanyň önümi

$$f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}. \qquad (7)$$

Eger $ad=bc\neq 0$ şert ýerine ýetse,onda $f'(z)\neq 0$ bolar.Eger $ad-bc=0$ bolsa,onda $ad-bc$ bolar,ýa-da $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\lambda$ we $f(z)$ funksiýa $f(z)=\frac{\lambda(cz+d)}{cz+d}=\lambda$ görnüşde bolar. Şeýlelikde ,eger $f(z)\neq const$ funksiýa bolsa,onda (6) şekillendirme *z* tükenikli kompleks rekizliginde komformdyr,bu ýagdaýda $z=-\frac{d}{c}$ nokat girmeýär. Gelejekde $ad-bc\neq 0$ bolar.

$f(z)=1/z$ özgertme tükeniksiz daşlaşan $z=\infty$ nokady *z* tekizlikde nola öwürýär.Şonuň üçin hem l_1'we l_2' (surat2) egriler tükeniksizlige gidip α burçy tükeniksiz daşlaşan nokatda özgerdip,eger $w_1=1/w$ özgertmeden l_1''we l_2'' şekiller w_1 tekizlikde α burçy 0 nokatda öwürýär.



Surat 2.

Indi,drob-çyzykly funksiýanyň burçy we $z=-d/c$ nokatda saklanýandygyny görkezeliň.$f_1(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$ funksiýa $z = -\frac{d}{c}$ nokady z-tekizlikde $w_1=0$ nokatda w_1 tekizlige şekillendirýär.Burçuň saklanmagy üçin $z=-d/c$ nokatdan geçmekligi talap edilýär.f_1(z) funksiýanyň bu nokatdaky önümi nolda tapawutly bolup,$f_1'(z) = \frac{cb-ad}{(az+b)^2}\Big|_{z=-d/c} \neq 0.$

Şeýlelikde,$z=-d/c$ diýip f (z) funksiýanyň polýusy diýilýär we

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} f(z) = \infty$$

häsiýete eýedir.Tükeniksiz daşlaşan nokat z tekizlikde f (z) funksiýanyň kömegi bilen $w = \frac{a}{c}$ nokada geçýär.$z=\varphi(w)$ funksiýa (6)-njy funksiýa tersdir:

$$z = \varphi(w) = -\frac{dw-b}{cw-a} \qquad (8)$$

We drobly – çyzyklydyr. $w=\frac{a}{c}$ nokat $z=\varphi(w)$ funksiýanyň polýusy bolup durýar. Ýokarda subut edilen (8)-nji funksiýanyň kömegi bilen burçy we $\frac{a}{c}$ nokatda şekillendirilýär.

Şeýlelikde,drob – çyzykly funksiýa özara bir belgili giňeldilen kompleks tekizligi özüne şekillendirýär we egrileriň arasyndaky burç saklanýar,z tekizligiň ähli ýerinde drob – çyzykly özgertme konformdyr.

Indi drob – çyzykly özgertmäniň hereketlenmeýän nokatlaryny tapalyň. Hereketsiz nokatlar $f(z)=z$ deňlemeden kesgitlenýär,ýagny (6)-njy formulany hasaba almak bilen

$$z=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{ýa}-\text{da} \qquad cz^2+z(d-a)-b=0;$$

bu deňlemäniň kökleri deňdir:

$$z_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2c}. \tag{9}$$

(9)-njy formuladan drob – çyzykly özgertmäniň ikiden köp hereketlenmeýän nokady bardyr.Eger $(a\text{-}d)^2$+4bc=0,onda ikeldilen hereketsiz nokada eýe bolýarys.

Indiki teorema biri-birinden tapawutlanýan iki sany drob – çyzykly funksiýanyň bolmaýandygyny aňladýar.Teoremany subutnamasyz geçireliň.

Teorema 1.

Eger iki sany drob – çyzykly funksiýalar üç sany dürli nokatda gabat gelseler,onda olar toždestwalydyr.

Bu getirilen teoremadan ähli drob – çyzykly funksiýalaryň üç dürli nokatda öz bahalary bilen kesgitlenýändigini görmek bolýar.

Drob – çyzykly funksiýanyň häsiýetine giňişleýin seredeliň.Goý, z-tekizliginde z_1,z_2,z_3 nokatlar we w tekizliginde w_1,w_2,w_3 nokatlar berilen bolsun.Hemişe $w(z)$ drob – çyzykly özgertmäniň z_1,z_2,z_3 nokatlar w_1,w_2,w_3 nokatlara geçýän bolsun.

Goý,ähli nokatlar tükenikli,ζ_1 (z) özgertmäni tapalyň,ýagny $\zeta_1(z_1)=0, \zeta_1(z_2)=\infty$ we $\zeta_1(z_3)=1$.Umumy halda drob – çyzykly funksiýa aşakdaky görnüşe eýedir.

$$\zeta_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$\zeta_1(z_1)=0$ şertden: $az_1+b=0$,ýagny $b= - az_1$ alarys. $\zeta_1(z_2)=\infty$ şertini hasaba alyp $cz_2+d=0, d= - cz_2$ alarys.

Tapylan bahalary b we d-ni ζ_1(z) özgertmede ornuna goýup alarys:

$$\zeta_1(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

$\frac{a}{c}$ gatnaşygy $\zeta_1(z_3)=1$ şertden peýdalanyp taparys:

$$1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}, \qquad \text{bu ýerden} \quad \frac{a}{c} = 1 : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Gutarnykly halda ζ_1(z) aşakdaky görnüşde ýazylar:

$$\zeta_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \qquad (10)$$

Edil şuňa meňzeşlikde:

$$\zeta_2(w) = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} \qquad (11)$$

özgertme w_1,w_2,w_3 nokatlary z – tekizlikde $0,\infty$ we 1nokatda ζ_2 tekizlikde özgerdýär.

Onda $w=\varphi_2(\zeta_1(z))$ özgertme,bu ýerde $\varphi_2(z)$ funksiýa $\zeta_2(z)$ funksiýanyň tersidir, z_1,z_2,z_3 nokatlary w_1,w_2,w_3 nokatlara özgerdýär.Bu özgertme $\zeta_2(w)= \zeta_1(z)$ görnüşde ýa-da

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}. \qquad (12)$$

görnüşde ýazylýar.

(12) formula haçanda z_i we w_i çetki nokatlaryň ýagdaýynda ulanylýar.

Goý,indi nokatlaryň biri,mysal üçin z_1 ∞ bilen gabat gelýän bolsun.Onda , $\zeta_1(z)$ aşakdaky görnüşde ýazarys.

$$\zeta_1(z) = \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{z - z_2} : \frac{\frac{z_3}{z_1} - 1}{z_3 - z_2}$$

z_1 nokady ∞-e ugrukdyryp $\zeta_1(z) = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$ alarys. $\zeta_1(z) = \zeta_2(w)$ özgertme bu ýagdaýda aşakdaky görnüşde bolar:

$$\frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \qquad (13)$$

Aýdylanlardan görnüşi ýaly drob – çyzykly funksiýanyň dogry gurnalyşy z_1, z_2, z_3 berilen nokatlaryň w tekizligiň w_1, w_2, w_3 nokatlaryna şekillenmegi: eger haýsydyr bir z_i ýa-da w_i nokatlar ∞ bilen gabat gelýän bolsa,onda (12)-deňlemede z_i ýa-da w_i nokatlara girýän agzalar alynýar.

Indiki teorema drob – çyzykly funksiýanyň aýlawly gurnalşyny görkezýär.

Teorema 2.

Drob – çyzykly özgertmede $w = \frac{az+b}{cz+d}$ töwerek we göni çyzyk giňeldilen z-kompleks tekizligi töwerege geçýär we w kompleks tekizligiň göni çyzygyna düşýär.Şunlukda töwerekler we göniler z tekizlikde $z = -\frac{c}{d}$ polýus arkaly geçýär we w tekizlikde göni çyzyga geçýär,galanlary bolsa töwerege geçýär.

Subutnama. z tekizlikde töweregiň umumy deňlemesi aşakdaky görnüşde bolýar:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \qquad (14)$$

hususy halda A=0 bolýar.

(14)-nji deňlemäni özgerdip, A=0 bolsa alarys:

$$A\left[\left(x^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 \frac{2C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right)\right] = \frac{B^2}{A} + \frac{C^2}{A} - D,$$

ýa-da

$$\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-AD}{A^2}, A\neq 0. \qquad (15)$$

(15)-nji deňleme töweregiň deňlemesi bolar ýaly $A\neq 0$ we $B^2+C^2-AD>0$.Eger $A=0$ we $B^2+C^2>0$ bolmagy zerur we ýeterlikdir,onda (14)-nji deňleme göni çyzygy aňladýar.

Töweregiň umumy deňlemesini kompleks formada ýazarys.Şeýle hem $x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2j}$ bolsa,onda (14)-nji deňleme aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0, \qquad (16)$$

bu ýerde $E=B+jC$.

(16)-njy deňlemäni töweregiň şerti bolmak şerti:

$$A\neq 0,\ E\bar{E}-AD=0 \qquad (17)$$

Bu ýerde A we D – hakyky sanlar.Eger:

$$A=0 \text{ we } E\neq 0, \qquad (18)$$

onda (16)-njy deňleme gönininiň deňlemesi bolar.

Goý,$w=\frac{az+b}{cz+d}$ - käbir drob – çyzykly funksiýa.

$c\neq 0$ bolan ýagdaýynda drob – çyzykly funksiýa göni çyzyga gelýär,onuň üçin bolsa töwerekleýin häsiýete eýedir.w – funksiýany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$w=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\frac{bc-ad}{cz+d}. \qquad (19)$$

(19)-njy deňlemeden w – funksiýanyň kömegi bilen üç sany özgertmäniň yzygiderliligini aňladýar:

1)Çyzykly özgertme $z_1=cz+d$;

2)Özgertme $z_2=\frac{e}{z_1}$, $bu\ ýerde\ e=\frac{bc-ad}{c}$;

3)Çyzykly özgertme $w=\frac{a}{c}+z_2$.

1) we 3) özgertmeler töwerekleýin häsiýete eýedir.Şeýlelikde $w(z)$ – funksiýanyň kömegi bilen bu häsiýetler alynýar.Diňe 2) özgertmäniň töwerekleýin häsiýete eýedigini görkezmeli.Onuň üçin:

$$w=1/z \qquad (20)$$

özgertmä seredeliň.

w – tekizlikde töwerekleýin şekillenmegi üçin aşakdaky deňleme bilen kesgitlenýär

$$Dw\bar{w} + Ew + E\bar{w} + A = 0, \qquad (21)$$

egre (16)-njy deňleme $z = \frac{1}{w}$ goýsak,onda (20)-nji deňlemäni alarys.

(21)-nji deňleme öz gezeginde töweregiň ýa-da göni çyzygyň deňlemesini aňladýar.Bu deňlemäni derňäliň.

1.Goý,$D \neq 0$ bolsun,bu bolsa berilen egriniň z-tekizlikden geçip koordinatalar başlangyjyndan geçmeýändigini aňladýar.Goý,berilen egri – töwerek,şeýle hem (17)-nji şertde ýerleşýär.Onda (21)-nji deňleme üçin $D \neq 0$ şert ýerine ýetýär,$E\bar{E}$- $AD>0$,şeýle hem (21)-nji deňleme töweregiň deňlemesini aňladýar.

Şeýlelikde, z-tekizlikde koordinatalar başlangyjyndan geçmeýän ähli töwerekler (20)-nji funksiýanyň kömegi bilen w-tekizlikde töwerege geçýär.

Goý,indi (21)-nji deňleme üçin (18)-nji şert ýerine ýetsin,onda berilen egri z-tekizlikde göni çyzyk bolar.Bu ýagdaýda $E\bar{E}$ - DA = $E\bar{E}$ > 0, $D \neq 0$,şeýle hem (21)-nji deňleme töweregiň deňlemesi bolýar.

Şeýlelikde,gönüler $w = \frac{1}{z}$ şekillenmede töwerekde w-tekizligi koordinatalar başlangyjyndan geçer.

2.Goý,$D=0$ bolsun.(21)-nji deňleme bu ýagdaýda

$$Ew + E\bar{w} + A = 0. \qquad (22)$$

görnüşde bolar.

Eger berilen egri *z*-tekizlikde töwerek bolsa,onda *A*≠0,E$\overline{\mathrm{E}}$ - *AD* >0 şert ýerine ýetýär,onda (22)-nji deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni bolýar.

Şeýlelikde,*z*-tekizlikde töwerek koordinatalar başlangyjyndan geçýär.*z*-tekizligiň gönüleri bolsa koordinatalar başlangyjyndan geçip *w*-tekizligiň gönüsine geçýär.Drob – çyzykly $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ funksiýa $z = -\frac{d}{c}$ nokadyň polýusyna eýedir, şonuň üçin ýokarda aýdylanlaryň hemmesi *z*=0 nokat üçin $z = -\frac{d}{c}$ nokat alynar.

III B A P

1. Lýapunowyň ikinji usuly

Lýapunowyň ikinji ýa-da göni usuly çyzykly däl differensial deňlemeleriniň çözgüleriniň durnuklylygyny deňlemeleriň özüni çözmezden barlamaga mümkinçilik berýär.Mundan býläk biz differensial deýlemeleriň awtomat ulgmynyň triwial çözgüsiniň durnuklylygyny barlarys, ýagny deňleme ulgamlarynyň aşakdky görnüşini,

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (1)$$

Nirede

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}; f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,...,x_n) \\ f_n(x_1,...,x_n) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Şol bir wagtda n-çakly giňişlikde bir näçe güberçek $G: \|x\| \le H$ oblastyň ähli argumentleri boýunça $f_1(x_1,...,x_n)(i = 1.2....n)$ funuksiýanyň üznüksiz hususy ýasamasynyň bardygyny çak edýär.

Bu ýagdaýda G oblastyň deňlemeleriň ulgamlary (1) barlyk teoremanyň we çözgüniň ýeketäkligini kanagatlandyrýar. Ulgamyň (1) trawial çözgüsiniň durnuklylygyna seretmezden öň käbir täze düşünjeleri girizeliň.

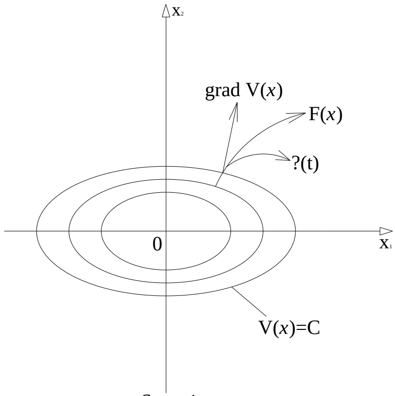
Alamaty kesgitlenen we alamaty hemişelik funuksiýalar

Bu oblastda $x_1,...,x_n$ üýtgedijiler boýunça üznüksiz hususy ýasamasy bilen $G:\|x\| \le H$ oblastda kesgitli we üznüksiz $V(x_1,...,x_n)$ funuksiýasyna seredeliň $V(x)$ funuksiýasyna görkezilen G oblastda alamaty goşmak (alamaty aýyrmak) diýilýär, egerde islendik $X \Leftarrow G V(x) \ge 0 (V(x) \le 0)$ bolsa

Egerde islendik $X \Leftarrow G$ üçin $V(x) \ge 0 (V(x) \le 0)$ galybersede $V(x) = 0$ şonda diňe, haçan $X = 0$ bolanda G-niň şol oblastyndaky $V(x)$ funuksiýasyna kesgitli položitel (kesgitli otrisatel) funuksiýasy diýilýär.

Birinji tipli $V(x)$ funuksiýasyna alamaty hemişelik ikinji tipine alamaty kesgitlenen diýilýär. Meselem, $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ funuksiýasy goşmak alamaty diýilýär, sebäbi bu funuksiýadaky köp sanly nollar $x_1 = -x_2$ göni funuksiýany görkezýär, ýagny $V(x) = 0$ funuksiýanyň $x_1 = -x_2$ göniň golaýyndaky alamaty $V(x) = (x_1 + 2x_2)^2$ funuksiýasy kesgitlenen goşmak bolar, sebäbi $V(x) = 0$, diňe $x_1 = 0$ we $x_2 = 0$ emma $x_1\, we\, x_2$ -niň başga ullugynda $V(x) \ge 0$,

Bu funuksiýalar üçin H-niň bahasy gerek ululyklarda alynyp biliner, $V(x) = (x_1^{\,2} + 2x_2)^2 - (x_2))^2$ funuksiýasy hem kesgitlenen goşmak bolar, ýöne H-iň bahasy bu ýagdaýda örän ujypsyz bolar, has takygy $x_2 \le 2$ deňsizlik berjaý edilmelidir.



Surat 1

Bu ýagdaýda $V(x)$ funuksiýany kesgitli goşmak ýa-da goşmak alamatlylygyny ýüze çykarmak kyn meseledir. Bu ýagdaýdaky kesgitlilik alamaty ýeňillik bilen hasaplanylýar, egerde $V(x)$ Funuksiýasy kwadrat şekilde bolsa,

Goý $V(x)$ funuksiýaly kwadrat formada görkezilsin, ýagny $V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$;

Egerde $V(x)$ funuksiýanyň kwadrat formasy položitel bolsa, onda bu funuksiýa goşmak kesgitlidir.

Egerde ähli diogonal minorlary we matritsalary goşmak bolsa, diňe şonda kwadrat formasy goşmak kesgitlenen bolar. $V(x)$ alamaty kesgitli funuksiýasyna geometrik interpretasiýasy bereliň. Ýönekeýlik üçin iki üýtgedijiniň $V(x_1\, x_2)$ funuksiýasyna seredeliň.

X_1, X_2 tekizlikdäki $V(x_1\, x_2) = C$ çyzygy bolup, ol ýerde C-bir näçe sandyr öz içinde koordinatyň başlangyjyny saklaýan ýapyk gytandyr. $C = 0$ bolanynda $V(x_1\, x_2) = C$ gytagy koordinatyň bşyna tarap çekilýär. Goý $\xi(t)$ başdaky $\xi(t_0) = X$

Şerti kanagatlandyrýan ulgamyň nirnäçe çözgüsi bolsun. $V(x)$ funuksiýanyň ulgayň (1) güýjine t wagt boýunça doly ýasamasyna $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}V(\xi(t))_{t=t_0}$ funuhksiýasy diýilýär ýa-da doly ýasama formulalaryny hasaba alyp;

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(X_i...X_2) \quad (4)$$

Formulada (4) görnüşi ýaly ulgam güýjiniň $\frac{dv}{dt}$ ýasama $\xi(t)$ -ň saýlanyp alynan çözgüsine bagly bolman, ol X nokadyň funuksiýasydyr,egerde şeýle belgi girizilse $\left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}...\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]$=grad V, onda aňlatma (4) şeýle edip ýaňadan ýazmak bolar:

$$\frac{dv}{dt}=gradV, f(x) \qquad (5)$$

Formula (5) ulgamyň (1) güýjine $\frac{dv}{dt}$ ýasamaly grad V, wektoryň täze tizligi $F(x)$ wektoryna skalýar köpeldilmesine deňdir. Egerde n-çendäki giňişlikdäki $V(x)=C$ üste seretsek, onda $\frac{dv}{dt}>0$ mahalynda ulgam (1) fazaly traýektoriýaly bu üsti $V(x)$ funuksiýanyň köpelýän tarapyndan, emma $\frac{dv}{dt}<0$, bolsa onda azalýan tarapyndan kesip geçýär. $V(x)$ goşmak kesgitli funuksiýanyň ulgamyň güňjine ýasamasy aýyrmak kesgitli ýada aýyrmak alamatly bolan funuksiýa **Lýapunowyň funuksiýasy diýilýär.** Indi bolsa differensiýal deňlemeleriň (1) awtonomiýa ulgamynyň triwil çözgüsiniň durnuklylygy we durnuksyzlygy baradaky Lýapunowyň teoremasyna seredeliň.

2. Durnuklylyk baradaky Lýapunowyň teoremasy

Teorema1. Egerde deňlemeleriň ulgamy (1) üçin ulgamyň güýjine (1) bolan ýasamasy aýyrmak alamatly bolsa kesgitlenen goşmakly $V(x)$ funuksiýäasy barr bolsa, onda ulgamyň (1) triwial $V(t)=0$, çözgüsi Lýapunow boýunça durnuklydyr.

Subutnama. Teorema subut edilende triwial çözgüniň durnuklylyk kesgitlemesinden ugur alarys. E>0 ýasama sanyny alalyň we $\|x\|=E$ gatnaşygy kanagatlandyrýan X-iň köp sanly bahasyna seredeliň, Belläliň

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x)=\alpha>0 \qquad (6)$$

$V(0)=0$ deňligi sebäpli $V(x)$ fuuksiýadan görnüşi ýaly n-e çenli giňişlikde $x_1,...,x_n, V(x)<\alpha$ egerde

$$\|x\|<\beta \qquad (7)$$

$\|\varepsilon(t_0)\|<\beta$ Başdaky şerti kanagatlandyrýan $\varepsilon(t)$ ulgamyň birnäçe çözgüsine seredeliň $V(\varepsilon(t))$ funuksiýasy bu çözgüniň golaýyndaky ösýän t funuksiýasy bolar, sebäbi ulgamyň güýjine $\frac{dv}{dt}$ ýasama goşmak däldir.

Diýmek, islendik $t>t_0$ deňsizlik ýerine ýetýär.

$$V(\xi(t))\le V(\xi(t_0))<\alpha \quad (8)$$

Islendik $t>t_0$ üçin

$$\|\xi(t)\|<\varepsilon \qquad (9)$$

Deňsizligiň adalatlydygyny görkezeris.

Hakykatdanda, goý birnäçe $t>t_0$ wagtyň pursatynda

$$V(\xi(t_1))\ge \inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x)=\alpha \qquad (10)$$

Deňlemesi ýerin ýetirilýär diýeliň, bu bolsa deňsizlik (8) garşy bolýar.

Teoremanyň subutnamasyndan görnüşi ýaly $t = t_0$ bolanda $\|\xi(t_0)\| < \beta$ deňsizligi adlatly bolar.Onda bu berilen $\varepsilon > 0$ san boýunça $\alpha = \inf V(x)$ kesgitleýärler soňra bolsa $\|\xi(t)\| < \beta$ şertini ähli $\varepsilon(t)$ üçin kanagatlandyrýan $V(\varepsilon(t\ )) < \alpha$ bolar ýaly edip $\beta > 0$ saýlap alýarys.

3. Asimtotiki durnuklylygy barada Lýapunowyň teoremasy

Triwial çözgüniň asimtotini durnuklylygynyň şrtini Lýapunowyň ikinji teoremasy dikeldýär.

Teorema2. Goý differensiýal deňlemeleriň ulgamlary (1) üçin ýasamaly ulgamlaryň güýjine aýyrmak kesgitli bolan goşmak kesgitli $V(x)$ funuksiýasy bar bolsun. Onda ulgam (1) triwial çözgüsi $V(t) \equiv 0$ Lýapunow boýunça asimtotiki durnuklydyr.

Subutnama. Triwial çözginiň asimptotik durnuklylygy şeýle zady aňladýar; 1) $V(t)$ çözgisi

$\|\varepsilon(t_0)\| < H$ deňsizligi kanagatlandyrsa , onda $\lim_{t\to+\infty}\|\varepsilon(t)\| = 0$;

Şeýlelikde ulgam (1) triwial çözginiň asimptotik durnuklylygyny subut etmek üçin ilki bilen bu çözginiň durnuklylygyny, ondan başgada $\lim_{t\to+\infty}\|\varepsilon(t)\| = 0$; $\varepsilon(t)$ çözginiň islendik çözgisi üçin $t = t_0$ bolanynda deňsizlik $\|\varepsilon(t_0)\| < H$ kanagatlandyrýandygyny subut etmeli;

Indi bolsa ulgam (1)-iň $t = t_0$ bolanyndaky $\|\varepsilon(t_0)\| < H$ deňsizligini kanagatlandyrýan $\varepsilon(t)$-yň ýazmaly triwial däl çözülişine seredeliň we $\lim_{t\to+\infty}\|\varepsilon(t_0)\|=0$; deňdigini görkezeliň.

Şonuň üçin $V(x)$ bu çözginiň töweregindäki tertibini öwreneliň. $V(x)$ funksiýanyň $\frac{dV}{dt}<0$; ulgamyň güýjine ýasamasy şu bolsa, onda $V(\varepsilon(t))$ funksiýasy t-ň ösen mahalynda $\varepsilon(t)$ çözginiň golaýynda ýuwaş-ýuwaşdan azalýar. Bu funksiýa aşagyndan çäklendirlendir, sebäbi teoremanyň $V(x)\geq 0$;

Her bir aşagyndan çäklendirlen, ýuwaşjadan peselýän islendik funksiýanyň belli bir çägi bardyr.

Diýmek, aşakdaky predel oňa mysalsyr:

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varepsilon(t))=\alpha\geq 0 \;; \qquad (11)$$

$\alpha=0$; deňdigini subut edeliň. Goý $\alpha>0$ onda $\|\varepsilon(t)\|\geq\beta>0$; ähli $t\geq t_0$ üçin diýeliň. Hakygatdanda, egerde $k\to\infty$ bolanynda $\|\varepsilon(t_k)\|\to 0$; $\{t_k\}\to+\infty$ yzygiderli ululygy bar bolan bolsa, onda $V(\varepsilon(t_k))\to 0$; $k\to 0$ bolar. Bu a>0 tassyknamasyna garşy bolýar.

$\|\varepsilon(t)\|\geq\beta>0$; şertden $\frac{dv}{dt}$ ýasamanyň aýyrmak kesgitliliginden ugur alyp:

$$\frac{dV(\varepsilon(t))}{dt}\leq-\varphi>0 \;; \qquad (12)$$

nirde $\varphi>0$ -birnäçe bütin san, onda

$$V(\varepsilon(t))-V(\varepsilon(t_0))=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\varepsilon(t))}{dt}dt\leq-\varphi(t-t_0); \qquad (13)$$

(13) deňsizlikden alarys:

$$V(\varepsilon(t)) \leq V(\varepsilon(t_0)) - \varphi(t - t_0) \; ; \qquad (14)$$

Has uly t-de $V(\varepsilon(t)) \leq 0$ deňsizligi adalatlydyr, bu $V(x)$ funksiýanyň goşmak kesgitlilik şertine garşy çykýar, diýmek :

$$\lim_{t\to\infty} V(\varepsilon(t)) = 0 \; ; \qquad (15)$$

$\lim \|\varepsilon\| = 0$; deňdigini subut edeliň. Goý $\{t\} \to +\infty$ yzygiderligi bar diýeli $(t \to +\infty)$bolanynda.

4. Durnuksyzlyk barada Lýapunowyň teoremasy

Ulgamyň (1) triwial çözülişiniň durnuksyzlyk teoremasyny subut edeliň.

Teorema 3. Egerde deňlemeler ulgamy (1) üçin üznüksiz $V(0) = 0$; şertini kanagatlandyrýan, ýasamasy ulgamyň güýjine alamaty kesgitli, galybersede, koordinatyň başynyň islendik ýerinde nokady bolan we ol nokatd $V(x)$ funksiýanyň alamaty onuň ýasamasynyň alamaty bilen gabat gelýän bolsa, onda ulgamyň trieial çözgisi Lýapunowyň aýdyşyna görä, durnukly däldir.

Subutnamasy. Goý $\|x\| < H$ deňsizligi kanagatlandyrýan köp sanly nokat $V(x)$ funksiýanyň ulgamyň güýjiniň $\frac{dv}{dt}$ ýasamanyň alamatly kesgitlenen (oblastdyr) $\delta > 0$ näçe az bolsada $\varepsilon(t)$ ulgamyň çözgüsiniň bardygyny görkezeliň. $\varepsilon = H$ diýip saýlalyň. Kesgitlemek üçin goý $\frac{dv}{dt} > 0$ bolsun. $\varepsilon(t_0)$ başky nokadyny $V(\varepsilon(t)) > 0$ bolar ýaly edip saýlap alalyň. Teoremanyň şertine görä şeýle saýlap almak $\varepsilon(t_0)$ elmydam mümkindir. Indi bolsa başky saýlanyp alynan şerti kanagatlandyrýan $\varepsilon(t\ )$ çözgä seredeliň. $\frac{dv}{dt} > 0$ ýasama $\varepsilon(t\ )$ çözginiň golaýynda diýeli, onda $V(\varepsilon(t))$ funksiýasy bu çözginiň uza boýuna öser. Diýmek (16) $V(\varepsilon(t)) \geq V(\varepsilon(t_0))$; haçanda $t > t_0$ bolanda;

Deňsizligi (16) $\varepsilon(t\ )$ koorddinatyň başynda ýakynlaşmaýanlygyny görýäris ýagny

$$\|\varepsilon(t)\| \geq \alpha > 0\ ; \qquad (17)$$

$\frac{dv}{dt}$-niň kesgitli goşak funuksiýalylygy zerarly $\alpha \leq \|x\| \leq H$ Oblastynda $\frac{dv}{dt}$ $\frac{dv(\varepsilon(t))}{dt} \geq \beta > 0$ deňsizligi kanagatlandyrýar.

Biz haýsy hem bolsa t_1 –iň bir momentinde $\|\varepsilon(t)\| \geq H$; deň bolup biljekdigini görkezeliň

Hakykatdanda goý $t \in [t_0, \infty]$ ähli bahalary üçin $\|\varepsilon(t)\| < H$; deňsizlik adalatly bolsun.

Ýöne

$$V(\varepsilon(t)) = V(\varepsilon(t_0)) + \int_t^t \frac{dv(\varepsilon(t))}{dt} dt \geq V(\varepsilon(t_0)) + \beta(t - t_0)$$

(18)

Görnüşi ýaly $V(\varepsilon(t))$ funuksiýasy $t \to \infty$ bolanynda çäksiz ösýär.

4. Birinji ýakynlaşmak deňlemesi boýunça durnuklulygy barlamak

1. Birinji ýakynlaşmagyň deňlemesi. Goý, awtomatiki sazlaýjy ulgamyň tertibi differensiýal deňlemeleriň ulgamlary bilen beýan edilsin.

Ondan başgada koordinatyň başlangyjy deňagramlyk ýagdaýy bolsun. Ýokarda görnüşi ýaly deňagramlylygyň islendik ýagdaýynyň durnuklulygyny bu ýagdaýa üýgedijileri laýyk çalyşmak arkaly getirip bolar. Goý, funuksiýalaryň haýsy hem bolsa bir oblastynda üznüksiz hususy ýasamasy bolsun diýeli. Wektor funuksiýasy kompinenti bolan funuksiýny koordinatyň baş golaýyndaky Teýlor setirlerine dargadalyň.

Nirede emma funuksiýalarda dargadyjy çilenleriň görä birinji üýtgedijisi bar we şonuň üçin

Ulgam (1) deňleme (2) hasaba alyp ony şeýle görnüşde ýazyp bileris.

Nirede san matritsasy wektor sütün bolar aşakdaky şerti kanagatlandyrýarlar

Hemişelik koffisýentli çyzykly differensiýal deňlemeleriň ulgamy

(4) deňleme ulgamy üçin, diýmek, ulgam (1) üçin hem birinji golaýlaşyk ulgamydyr.

5. Birinji ýakynlaşma boýunça durnuklulyk barada Lýapunowyň teoremasy

Köp halatda ulgam (1) triwial çözgüsiniň durnuklulygy barada birinji ýakynlaşma deňlemesi boýunça maglumat almak bolar.

Teorema. Egerde ulgam (4)-iň A matritsanyň häsýetnamaly deňlemesiniň ähli kökleri aýyrmak maddy bölekli, ýagny bolsa, onda ulgam (4)-iň triwial çözgüsi Lýapunow boýunça asimptotiki durnukludyr.

Subutnama. Deňlemeleriň (4) ulgamynyň triwial çözgüsiniň durunuklylygyny barlalyň. Çyzykly özgerdeliň, bu özgerdişiniň T matritsasy emele gelmedik (öwrülmedik) diýip hasap edeliň. Onda ulgam (4) aşaky görnüşe eýe bolar.

Teorema. (7) esasynda A matritsanyň takmynan dioganal görnüşe geler ýaly edip, T matritsany saýlap olar ýaly etmek bolar, ýagny

Belläliň

Onda deňlemeleriň ulgamy (7)-ni aşakdaky ýaly edip ýaňadan ňazyp bolar.

Çyzykly däl böleginiň (5) şerti kanagatlandyrýandygyny görkezeliň, ýagny

Häsýetlendiriji deňlemäniň kökleridir. Bu köklerden başgada häsýetlendiriji deňlemäniň köki hem bardyr.

Üýtgedijileri çalşyp (37) alarys.

(40) deňleme ulgamyny koordinatlar boýunça ýazalyň.

Nirede

Lýapunowyň funuksiýasyny aşakdaky görnüşde edip göçreliň.

(41) ulgamyň güýjine funuksiýanyň ýasamasy bolar.

Deňligi ýerine ýetirler ýaly edip saýlap alalyň, ýagny

Egerde bolsa koffisýentleri (45)(46) deňlemeleri

Deňsizligi (16) koorddinatyň başynda ýakynlaşmaýanlygyny görýäris ýagny

-niň kesgitli goşak funuksiýalylygy zerarly

Oblastynda deňsizligi kanagatlandyrýar.

Biz haýsy hem bolsa –iň bir momentinde deň bolup biljekdigini görkezeliň

Hakykatdanda goý ähli bahalary üçin

deňsizlik adalatly bolsun.

Ýöne

Görnüöi ýaly funuksiýasy bolanynda çäksiz ösýär.

6. Birinji ýakynlaşmak deňlemesi boýunça durnuklulygy barlamak

2. Birinji ýakynlaşmagyň deňlemesi. Goý, awtomatiki sazlaýjy ulgamyň tertibi differensiýal deňlemeleriň ulgamlary bilen beýan edilsin.

Ondan başgada koordinatyň başlangyjy deňagramlyk ýagdaýy bolsun. Ýokarda görnüşi ýaly deňagramlylygyň islendik ýagdaýynyň durnuklulygyny bu ýagdaýa üýgedijileri laýyk çalyşmak arkaly getirip bolar. Goý, funuksiýalaryň haýsy hem bolsa bir

oblastynda üznüksiz hususy ýasamasy bolsun diýeli.

Wektor funuksiýasy kompinenti bolan funuksiýny koordinatyň baş golaýyndaky Teýlor setirlerine dargadalyň.

Nirede emma funuksiýalarda dargadyjy çilenleriň görä birinji üýtgedijisi bar we şonuň üçin

Ulgam (1) deňleme (2) hasaba alyp ony şeýle görnüşde ýazyp bileris.

Nirede san matritsasy wektor sütün bolar aşakdaky şerti kanagatlandyrýarlar

Hemişelik koffisýentli çyzykly differensiýal deňlemeleriň ulgamy

(4) deňleme ulgamy üçin, diýmek, ulgam (1) üçin hem birinji golaýlaşyk ulgamydyr.

7. Birinji ýakynlaşma boýunça durnuklulyk barada Lýapunowyň teoremasy

Köp halatda ulgam (1) triwial çözgüsiniň durnuklulygy barada birinji ýakynlaşma deňlemesi boýunça maglumat almak bolar.

Teorema. Egerde ulgam (4)-iň A matritsanyň häsýetnamaly deňlemesiniň ähli kökleri aýyrmak maddy bölekli, ýagny bolsa, onda ulgam (4)-iň triwial çözgüsi Lýapunow boýunça asimptotiki durnukludyr.

Subutnama. Deňlemeleriň (4) ulgamynyň triwial çözgüsiniň durunuklylygyny barlalyň. Çyzykly özgerdeliň, bu özgerdişiniň T matritsasy emele gelmedik (öwrülmedik) diýip hasap edeliň. Onda ulgam (4) aşaky görnüşe eýe bolar.

Teorema. (7) esasynda A matritsanyň takmynan dioganal görnüşe geler ýaly edip, T matritsany saýlap olar ýaly etmek bolar, ýagny

Belläliň

Onda deňlemeleriň ulgamy (7)-ni aşakdaky ýaly edip ýaňadan ňazyp bolar.

Çyzykly däl böleginiň (5) şerti kanagatlandyrýandygyny görkezeliň, ýagny

Häsýetlendiriji deňlemäniň kökleridir. Bu köklerden başgada häsýetlendiriji deňlemäniň köki hem bardyr.

Üýtgedijileri çalşyp (37) alarys.

(40) deňleme ulgamyny koordinatlar boýunça ýazalyň.

Nirede

Lýapunowyň funuksiýasyny aşakdaky görnüşde edip göçreliň.

(41) ulgamyň güýjine funuksiýanyň ýasamasy bolar.

Deňligi ýerine ýetirler ýaly edip saýlap alalyň, ýagny

Egerde bolsa koffisýentleri (45)(46) deňlemeleri

Hakaykatdanda $\frac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} \leq \frac{\|T^{-1}\|\|\varphi(Ty)\|\|T\|\|y\|}{\|y\|\|Ty\|} = \frac{\|\varphi(Ty)\|}{\|Ty\|}$;

$\|y\| \to 0;$ bolan mahalynda deňleme (5) görä $\frac{\|\varphi(Ty)\|}{\|Ty\|} \to 0;$ deňleme (10) adalatlydyrž

Triwial çözgüniň durnuklylygyny subut etmek üçin $V(y) = y * y$, funksiýany guralyň, nirde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, y^* = [y_1, y_2, ..., y_n]^{*)}$ Şeýlelikde, $V(y) = \sum_{i=1}^{n} (yi)^2$ - goşmak kesgitlenen funksiýadyr.

Deňlemeleriň ulgamy (9) güýjini $V(y)$ funksiýanyň wagty boýunça doly ýasamasyny hasaplalyň.

$$\frac{dv}{dt} = y * \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} * y \qquad (11);$$

indi diag $[\lambda_2, ..., \lambda_n] = A$; belgini girizeliň ; onda

$$\frac{dy}{dt} = y * (\lambda^* + c^*) + \varphi^*(y); \qquad (12)$$

Deňlemeleri ulgamy (9) ikitarapynyda y^*-e köpeldeliň, deňlemeleriň ulgamy (12)- y-e köpeldip, alynan ululygy goşalyň:

$$\frac{dv}{dt} = y*(\lambda^* + \lambda^*)y + y^*(c+c)y + \left[y^*\Psi(y) + \Psi^*(y)y\right];$$

(13);

$\operatorname{Re}\lambda i = \alpha_i < 0; [i = 1,2,...,n]$ şerte boýunça, onda $\lambda + \lambda^* = 2diag\left[\alpha_{1,}...,\alpha_n\right];$ we

$$y*(\lambda + \lambda^*)y = 2\sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i y_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i |y_i|^2 \le -2aV;$$

(14)

nirde $-\alpha = \max \alpha_i$;

(13) aňlatmadaky ikinji goşulyjynyň normasy boýunça baha bereliň :

$$\left\|y^*(c+c^*)y\right\| \le y^*\left\|\{\ \|c\| + \|c^*\|\ \}\right\|\|y\| \le 2eV;$$

(15)

$\|y\| = (\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2)\frac{1}{2}$ ewklid normasy boýunça , onda $V = \|y\|^2$; Deňleme (13)-däki üçünji goşulyjynyň normasy boýunça baha bereliň, onda alarys

$$\left\|y^*\Psi(y) + \Psi^*(y)y\right\| \le \left\|y^*\|y\|\left\|\frac{\Psi(y)}{\|y\|}\right\| + \left\|\frac{\Psi*(y)}{\|y\|}\right\|\|y\|^2\right\| \le 2\varepsilon V$$

; (16)

egerde y bu şerti, ýagny $\|y\| < h$ kanagatlandyrsa: Hakykatdanda (5) şertden görnüşi ýaly islendik $\varepsilon > 0$ üçin $h > 0$-iň şeýle sanyny, ýagny $\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} < 0$ deňsizlige adalatlydyr. (14) (16) deňsizliklerden görnüşi ýaly

$$\frac{dv}{dt} \le 2V(-\alpha + 2\varepsilon) \qquad (17)$$

Ýagny $\frac{dv}{dt}$ ýasama koordinatyň başlangyjyndaky birnäçe daş-töwergindäki aýyrmak kesgitlenen funuksiýadyr. Şeýlelikde goşmak kesgitlenen funuksiýa $V(y)$ guruldy, onuň ýasamasy ulgam (7) ulgam güýji aýyrmak kesgitlenendir.

Teorema laýyklykda ulgam (7)-niň triwial çözgüsi asimptotik durnuklydyr, diýmek ulgam (4)-iň triwial çözgüsinde asimptotiki durnuklydyr.

Teorema 2: Egerde A matritsanyň häsýetlendiriji deňlemeleriniň kökleriniň içinde bolmanda biri goşmak maddy bölekleri kökli bolsa, onda ulgam (4)-iň triwial çözgüsi durnuklydyr.

Teoremany subutnamasyz getireliň. Bu teoremanyň subutnamasy edil owalky edilen subutnamamyza meňzeşdir.

Egerde häsýetnamaly deňlemeleriň kökleriniň içinde nol we arassa hyýaly kökler bar bolsa, onda birinji ýakynlaşma deňlemesi (4) boýunça triwial çözgüniň durnuklulygy barada hiç zat aýdyp bolmaz. Bu ýagdaýda triwial çözgüniň kritiki (tankydy) durnuklulygy we durnuksuzlygy diňe $\varphi(x)$ çyzyksyz bölegine bagly bolar. $\varphi(x)$ dogry almagyň üsti bilen çözgüni durnukly ýa-da durnuksyz edip bolar.

9. Çyzykly däl awtomatiki sazlaýjy ulgamlaryň durnuklulygyny Lýapunowyň ikinji usulynyň kömegi arkaly barlamak

Çyzykly däl ulgamlaryň deňlemesi. Deňagramlylyk ýagdaýy

Çyzykly däl klasly awtomatiki sazlaýjy ulgamlaryň deňagramlyk ýagdaýnyň durnuklulygynyň Lýapunowyň ikinji usuly arkaly derňelşine seredeliň. Çyzykly däl atomatiki sazlaýjy ulgam çyzykly sazlaýjy ulgamdan we çyzykly däl sazlaýjydan durýar. Sazlanýan desganyň tertibi hemişelik koffisýentli differensiýal deňlemeleriň çyzykly ulgamy arkaly beýan edilýär, ol şeýle görnüşde bolar:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by \quad ; \qquad (1)$$

nirde $x = \begin{bmatrix} x1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ sazlanýan desganyň ýagdaýyny häsiýetlendirýän wektor koordinat;

Y- bu sazlaýjynyň sazlanýan desga edýän täsirini häsiýetlendirýän skalýar koordinatdyr;

A matrisasy emele gelmedik (öwrülmedik) $(\det A \neq 0)$ hasap edilýär. Sazlaýjynyň düzüminde çerwomehanizmi bolup, onuň deňlemesini şeýle ýazmak bolar:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(\Sigma) \quad ; \qquad (2)$$

we ýalňyş signalyny döredýän duýgur elementden durýar:

$$\Sigma = c^T x - ry \, ; \qquad (3)$$

nirde , $c^T = [c_{1,} c_2, ..., c_n]$-hemişelik koefsentleriň wektory, r-ters aragatnaşygyň skalýar parametirleri;

$f(\Sigma)$ çyzykly däl funksiýasyna degişli:

$f(0) = 0$; $\Sigma f(\Sigma) > 0$; egerde $\Sigma \neq 0$;

$\Sigma \neq 0$ bolan mahalynda $f(\Sigma)$ funksiýasy üznüksiz diýilip hasaplanylýar, emma $\Sigma = 0$; nokatda birinji derejeli üzülmä rugsat berilýär.

$f(\Sigma)$ çyzykly däl funksiýasynyň bu klasy çyzyksyz elementleriň köp sanynyň stati näsazlygyny öz içine alýar.

Deňlemeler (1),(2),(3)-iň bileliginde beýan edilen çyzykly däl ASU-ň düzüm shemasy suraty;

Indi bolsa A matrisanyň häsiýetnamaly deňlemesiniň kökiniň häsiýetine baglylykdaky seredilýän çyzykly däl sazlaýjy ulgamyna aşakdaky klassifikasiýany girizeliň. Awtomatiki sazlaýjy ulgamy:

1) Hususy durnukly bolar, $\det(A-\lambda E)=0$; häsiýetlendiriji deňlemäniň ähli kökleriniň aýyrmak hakyky bölegi bolsa, ýagny , $\operatorname{Re}\lambda_i < 0 (i=1,2,...,n)$;

2) $x_1, x_2, ..., x_k$ koordinatlary boýunça garaşsyzdyr, haçanda $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = ... = \operatorname{Re}\lambda_k = 0;$ häsiýetlendiriji deňlemäniň galan kökleri aýyrmak hakyky bňleklerden durýandygydyr.

3) Hususy durnuksyzdyr, egerde häsuýetlendiriji deňlemäniň bolmanda bir kökiniň goşmak bölegi bar bolsa; Indi bolsa $\det(A-\lambda\, E)=0$; häsiýetlendiriji deňlemäniň köki ýönekeýdir we aşakdaky şerti kanagatlandyrýar: $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0 (i=1,2,...,n)$, ýagny çyzyksyz ASU-y hususy durnuklydyr ýa-da bir koordinat boýunça bitarapdyr.

Deňagramlyk ýagdaýlary çyzykly algebraik deňlemeleriň çözgüsi hökmünde seredilýär:

$$Ax + by = 0\,, \quad a_2 y = f(\Sigma), c^T x - ry = \Sigma\,; \tag{4}$$

Deňagramlyk ýagdaýy kesgitlemek üçin kömekçi deňleme ulgamlaryna seredeliň:

$$Ax + by = 0, c^T * x - ry = \Sigma \tag{5}$$

Goý ulgam (5)-iň kesgitleýjisi nula deň däl diýeli;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots, a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots, a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots, a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2\ldots, c_n & -r \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (6)$$

Bu ýagdaýda ulgam (5)-iň ýeketäk çözgisi bolar. Ony biz Krameriň düzgüni boýunça kesgitläliň:

$$x_k = A_k\Sigma(k=1,2,\ldots,n), y = B\Sigma \qquad (7);$$

Nirde

$$A_k = (-1)^{k+n+1} \frac{\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k-1}\, a_{1k+1}\ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nk-1}\, a_{nk+1}\ldots a_{nn} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\ldots, a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots, a_{nn} & b_n \\ c_1\ldots, c_n & -r \end{vmatrix}}$$

$$
B=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}\ldots, a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}\ldots, a_{nn} & b_n \\ c_1\ldots, c_n & -r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots, a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots, a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots, a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2\ldots, c_n & -r \end{vmatrix}}
$$

Egerde $a_2 = 0$, onda ulgam (φ)-iň ikinji deňlemesinden boluşy ýaly $\Sigma = 0$,

we deňleme (7)-ä laýyklykda alarys: $x_k = 0 (k = 1,2,...,n)$ we y=0;

Şeýlelikde (8) differensial deňlemeler ulgamy

$$x_k = 0;\ y = 0 \tag{8}$$

kordinataly yeketäk deňagramly haly bar bolar. Egerde $a_2 \neq 0$, onda (4) deňlemeler ulgamyň bir näçe çözgüsi bolup biler. Hakygatdanda, deňlik (7) hasaba alyp, (4) ulgamyň ikinji deňlemesini, aşakdaky ýaly edip ýaňadan ýazyp bolar:

$$Ba_2\Sigma = f(\Sigma); \tag{9}$$

Bu deňlemäniň Ba_2 ululygyň alamatyna baglylykda birnäçe çözgüsi bolar.Egerde $Ba_2 < 0$, onda (9) deňlemäniň yeketäk çözgüsi $\Sigma = 0$; bolar. Olary $\Sigma_1,...,\Sigma_m$ bilen belläliň, onda (4) deňlemeler ulgamynyň hem m çözgüsi bolar, ol çözgi deňlikler bilen kesgitlenýär:

$$X_{ki} = A_{k\Sigma i}(k = 1,2,...,n), y_i = b\Sigma_i (i = 1,2,...,m); \tag{10}$$

Şeýlelikde, $f(\Sigma)$ çyzykly däl funksiýanyň görnüşine we a_2 we B ululygyna baglylykda awtomatiki sazlaýjy ulgamda deňagramlylyk ýagdaýynyň aşakdaky görnüşiniň bolmagy mümkin:

1) (8) aňlatma bilen kesgitlenýän, deňagramlygyň yeketäk ýagdaýy;

2) (10) aňlatma bilen kesgitlenýän, deňagramlyk ýagdaýyň ahyrky sany;

Mundan beýläk triwial çözgüniň (8) durnuklylygyna seredip geçeris. Çözini ýeňilleşdirmek üçin deňleme (2)-a $a_1 = 1$; $a_2 = 0$; goýalyň . Onda çyzyksyz ASU-ň hereketi aşakdaky deňleme ulgamy bilen beýan ediler:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by, \frac{dy}{dt} = f(\Sigma),$$

$$\Sigma = c^T x - ry; \qquad (11)$$

Ýokardaky görkezilen (11) deňleme ulgamynyň $x_k = 0$, y=0; kordinatly yeketäk deňagramlyk ýagdaýy bolar;

2. Hereketleriň deňlemesini kanoniki forma getirmek

Ulgam (11)-iň triwial çözgüsiniň durnuklylygyny barlamak haçanda deňleme kanoniki forma getirilende has ýeňil bolýar. Deňlemäniň kanoniki formasy diýilip, haçanda A marisasy žordan formasyna getirilendäki görnüşine aýdylýar. Islendik A san matrisasynyň özgerdilmedik T matrisasy bar, $T^{-1}AT = j$, nirde j-A matrisanyň žaranow matrisasy;

Ulgam (11) üýtgedijileri çalyşalyň:

$$x = TU(\det T \neq 0) \qquad (12)$$

Onda (11) deňleme ulgamy şu görnýşe geler:

$$T\frac{du}{dt} = ATu + by, \frac{dy}{dt} = f(\Sigma), \qquad \Sigma = c^T Tu - ry;$$

Ýa-da

$$\frac{du}{dt} = ju + b_1 y, \frac{dy}{dt} = f(\Sigma), \qquad \Sigma = c_1^T U - ry;$$

(13)

Nirde $b = T^{-1}b$; $c_1^T = c^T T$;

(13) deňlemeler ulgamy ýönekeýleşýär, egerde ýene bir gezek üýtgedijiler çalyşsa:

$$z = ju + b_1 y, \quad \Sigma = c_1{}^T U + ry \tag{14}$$

Onda (13) deňlemeler ulgamynyň deregine aşakdaky ulgamy alarys:

$$\frac{dz}{dt} = jz + b_1 f(\Sigma), \quad \frac{d\Sigma}{dt} = c_1^T z - rf(\Sigma), \tag{15}$$

(15) deňleme ulgamy-hereketiň deňlemesiniň kanoniki formasydyr. Amatrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesiniň a köki ýönekeý diýilip çak edildi, şonuň üçin A matrisanyň Žordanow formasy diagonally bolar, ýagny j=diag A;

(11) deňleme ulgamynyň $(x_k = 0, y = 0)$ deňagramlyk ýagdaýyna (15) deňlemeler ulgamynyň $(Z_k = 0, \Sigma = 0)$ ýeketäk deňagramlylyk ýagdaýy laýyk geler ýaly (14) ulgamyň kesgitleýjisi noldan tapawutly bolmalydyr, ýagny aşakdaky deňsizlik berjaý edilmeli $\begin{vmatrix} j & b_1 \\ c_1{}^T & -r \end{vmatrix}$; ony aşakdaky deňsizik

$$r + c_1^T j^{-1} b_1 \neq 0; \tag{16}$$

$$j^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1}T, b_1 = T^{-1}b, c_1^T = c^T * T;$$

hasaba alyp (16) deňlemäni aşakdaky formada ýazyp bolar:

$$r + c^T A^{-1} b \neq 0; \tag{17}$$

9. Deňagramlyk ýagdaýyň durnuklylygynyň ýeterlik şertleri

(15) deňleme ulgamynyň triwial çözgüsiniň nanonikitorma getirlen durnuklyly-gyny barlalyň. Durnuklylygy barlamak üçin ýörite görnüşli Lýapunowyň funksiýasyny guralyň. (Furýe tarapyndan hödürlenen).

Bu funksiýanyň kömegi bilen (15) deňleme ulgamynyň triwial çözgüsi, diýmek (11) ulgamyň hem triwial çözgüsi ýerine ýetirlende sazlaýjynyň parametrleriniň öňünde goýulýan şertlerini taparys. Ilki bilen det(Δ-ΔE)=0 häsiýet-lendiriji deňlemäniň ähli kökleriniň ýönekeý we çep ýarym tekizlikde ýerleşýän Re λ_i <0 (i=1,2,...,n) ýagdaýyna seredeliň.

Lýapunowyň aşakdaky görnüşdäki funksiýasyny agtaralyň:

$$V(z,\varepsilon) = Z^T Bz + \int_0^{\varepsilon} t(\varepsilon)d\varepsilon \tag{18}$$

$V(z,\varepsilon)$ funksiýasy kesgitli goşmak bolmagy üçin, bu deňlemäniň sag bölegindäki birinji goşulmanyň kesgitli goşmak kwadratik formasynyň bolmagy zerurdyr.

Bu ýagdaýda $\|z\| \neq 0$ şerti kanagatlandyrýan ähli z-ler üçin birinji goşulyjy pugta goşmak bolar.

Şeýlelikde $V(z,\varepsilon)$ funksiýasy kesgitlenen goşmak bolar, egerde Z^T Bz kwad-ratik formasyny goşmak kesgitli bolsa, $V(z,\varepsilon)$ funksiýanyň t wagty boýunça ulga-myň gçýji (15) doly ýasamasyny düzeliň:

$$\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt} = \frac{dz^z}{dt}Bz + z^T B\frac{dz}{dt} + f(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dt} =$$

$$= Z^t(j^T B + Bj)z - rf^2(\varepsilon) + f(\varepsilon)(b_1^T Bz + Z^T Bb_1) + f(\varepsilon)C_1^T Z;$$

Kwadratik formadaky B matrisasy simmetrikdir, ýagny B^T=B, onda alarys:

$$b_1^T Bz + Z^T Bb_1 = b_1^T Bz + (Bb_1)^T z = 2(Bb_1)^T z;$$

Indi matrisany girizeliň:

$$C = -(j^T B + Bj); \tag{19}$$

C matrisasy simmetrikidir. Hakykatdanda,

$$C^T = -(j^T B + Bj)^T = -(B^T j + j^T B^T) = -(Bj + j^T B) = C$$

Ulgam (18) güýjine V(z,ε) funksiýanyň doly ýasamasyny aşakdaky (16) görnüşde ýazyp bolar:

$$\frac{dv}{dt} = -Z^T Cz - rf^2(\varepsilon)(Bb_1 + \frac{1}{2}C_1)^T z; \quad \textbf{(20)}$$

Aňlatma (20)-den görnüşi ýaly (15) ulgam güýjine V(z,ε) funksiýadan t wagt boýunça doly ýasamaly z,...,Z_n f(ε) üýtgedijisine görä kwadratik formada bolar.

Indi bolsa B matrisasy we formula (19) bilen kesgitlenýän C matrisasynyň arasyndaky gatnaşyga düşüneliň.

Eger A matrisanyň häsiýetlendiriji sany $\lambda_j + \lambda_i \neq 0$ (i,j=1,2,...,n) şerti kana-gatlandyrýan bolsa, onda berilen simmetrik C matrisasy boýunça bir näçe B matri-sa şübnesiz kesgitlener.

Hakykatdanda, j=diag A bolsa, onda gatnaşyk (19) şeýle görnüşde ýazyp bileris:

$$C_{ij} = -(\lambda_i b_{ij} + \lambda_j b_i)(i, j = 1,2,...,n);$$

ol ýerde $b_{ij} = -\frac{C_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}$ (21) bu bolsa biziň çakymyzy subut edýär. Bu seredilen ýag-daýda, matrisa A üçin $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ (i,j=1,2,...n) şert ýerine ýetirilýär, sebäbi matrisa A-nyň çaklama görä häsiýetlendiriji sany Re λ_i <0 şerti kanagatlandyrýar.

$\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt}$ ýasamanyň aýyrmak kesgitlenen şertini çykarmak üçin aşakdaky subut-namasyz getiriljek teorema gerek bolýar.

Teorema1 Goý A matrisasy durnukly ýagny, onuň häsiýetlendiriji sany çepdäki ýarym tekizlikde ýatyr diýeliň. Onda, egerde C –matrisasy bir näçe goşmak kesgit-lenen kwadratik formanyňky bolsa, onda (21) formula bilen kesgitlenýär B matrisasyda goşmak kesgitlenen kwadratik formanyňky bolar.

V(z,ε) funksiýasy Lýapunowyň funksiýasy bolar ýaly sazlandyryjy ulgamyň parametrlerine tabşyrylýan şertlerini alarys.

Goşmak kesgitlenen kwadratik formaly birnäçe C matrisasyny (meselem C=E) alalyň we ony deňleme (21) kömegi bilen kesgitlenýän B matrisa bilen belläliň.

Ýokarda döredilen teorema görä B matrisasyda birnäçe goşmak kesgitlenen kwadratik formanyň matrisasy bolar, Bu ýagdaýda, ýokarda gökezilişi ýaly V(z,ε) funksiýa goşmak kesgitlenen bolar.

V(z,ε) funksiýasy Lýapunowyň funksiýasy bolar ýaly, onuň $\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt}$ ulgam (15) güýjine aýyrmak kesgitlenen funksiýa bolmaklygy talap edilýär.

Ýokarda görkezilişi ýaly $\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt}$ üýtgedijilere $z_1,...,z_n$ we f(ε) görä kwadratik bolar.

$\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt}$ funksiýanyň goşmak kesgitliligi üçin Silwesteriň kriteriýasy boýunça kwadratly formanyň ba diagonl minorlarynyň matrisalarynyň goşmk bolmaklygy talap edilýär. Matrisa C –iň goşmak kesgitli kwadratik formanyň matrisasydy zerarly, Silwesteriň kriteriýasynyň birinji n deňsizligi ýerine ýetirilýär we iň soňky deňsizlik galýar:

$$\begin{vmatrix} C & -\left(Bb_1+\frac{1}{2}c_1\right) \\ -\left(Bb_1+\frac{1}{2}c_1\right)^T & r \end{vmatrix} \quad (22)$$

(22) şert $\frac{dv(z,\varepsilon)}{dt}$ ýasamanyň aýyrmak kesgitlilik şerti üçin hökmanydyr we ýeterlikdir.

Egerde kesgitleýjini deňsizlik (22) –niň çep tarapyna soňky setiriň elementleri we soňky sütün boýunça dargatsak, onda (22) –nji şerti aşakdaky görnüşde ýaňadan ýazyp bolar:

$$r > (Bb_1+\frac{1}{2}C_1)^T C^{-1}(Bb_1+\frac{1}{2}C_1); \qquad \textbf{(23)}$$

Egerde sazlaýjynyň parametri (23) –nji deňsizligi kanagatlandyrsa, onda V(z,ε) -iň goşmak kesgitli funksiýasy bolar, onuň ýasamasy bolsa, (15) deňlemeler ulga-mynyň güýji aýyrmak kesgitlenendir. Ulgam (15) –iň (Z_k=0, ε=0) deňagramlylyk ýagdaýynyň asimptotik durnyklylygy baradaky teorema 2 asimptotik durnuklydyr.

Deňsizlik (17) ýerine ýetirilen mahalynda, ony şeýle görnüşde göçüreliň:

$r \neq -C^T A^{-1} b$ (24) – bu (11) deňleme ulgamynyň (X_k=0, Y=0) triwial çözgüsiniň asimptotik durnuklylygyny aňladar.

Şeýlelikde (23) we (24) deňsizlikleri (11) ulgamyň deňagramlylyk ýagdaýynyň asimptotik durnuklylygynyň ýeterlik şerti bolup gulluk edýärler.

Indi bolsa A matrisanyň häsiýetnamalaýjy deňlemesiniň bir nolly köki bolan halyndakysy üçin Lýapunowyň funksiýasyny gurmaga geçeliň. Galan kökleri ýönekeý we çep ýarym tekizlikde ýerleşen diýip hasap edýäris.

A matrisanyň häsiýetnamalaýjy deňlemesiniň nolly kökine laýyk gelýän Z wektor –funksiýanyň Z_1 komponentini bolup alalyň, başgaça aýdylanda, Z wektoryny aşakdaky görnüşde $Z = \left[\frac{Z}{Z_1}\right]$ alalyň. Onda (15) eňleme ulgamynyň şu görnüşde ýazyp bileris:

$$\frac{dz}{dt} = jz + b_1 f(\varepsilon), \frac{dz_1}{dt} = b_0 f(\varepsilon), \frac{d\varepsilon}{dt} = C_1^T Z + C_0 Z_1 - rf(\varepsilon) \qquad \mathbf{(25)}$$

(25) deňlemeler ulgamynda aşakdaky belgiler kabul edildi:

z-n-1 –çenli wektor –funksiýasy; j -(n-1) (n-1) tertipli diagonal matrisasy; $b_1$we c_1-n-1 çenli wektor –sütüni; $b_0$we c_0 – skalýar ululyklary;

Ýokardaky subutnamalara görä j matrisanyň ähli häsiýetnamalaýjy sanlary çepýarymtekizlikde ýerleşýärler. Şu ýagdaý üçin Lýapunowyň funksiýasyny aşak-daky görnüşde ýazyp bolar:

$V(z, z_1, \varepsilon) = az_1^2 +$

Şertli (figuraly) skobkadaky aňlatmany A matrisanyň häsiýetnamaly deňlemesi-niň ähli kökeriniň çep ýarym tekizlikde ýerleşen ýagdaýynda Lýapunowyň funksiýasy hökmünde ulanmak bolar. Egerde Z+Bz kwadratik formasy goşmak kesgitlenen we a>0 bolsa, onda $V(\bar{z}, z, \varepsilon)$ funksivasy $(\bar{z}, z_1, \varepsilon)$ giňişlikde kesgitlenen. Goşmak funuksiýasy bolar. $V(\bar{z}, z, \varepsilon)$ funuksiýanyň (25) ulgamyň güýjine t- wagty boýunça doly ýasamasyny hasaplalyň.

$$\frac{dv(\bar{z},z_1,\varepsilon)}{dt} = 2ab_0 z_1 f(\varepsilon) + \frac{d\bar{z}^T}{dt} B\bar{z} + \bar{z}^T B \frac{d\bar{z}}{dt} + f(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dt} =$$

$$= \left\{ -\bar{z}^T C\bar{z} + 2f(\varepsilon)\left(B\bar{b}_1 + \frac{1}{2}\bar{c}_1 \right)^T \bar{z} - rf^2(\varepsilon) \right\} +$$

$$+ 2z_1\left(ab_0 + \frac{c_0}{2} \right) f(\varepsilon). \qquad (27)$$

Şekilli ýaýdaky aňlatma A matritsanyň häsýetnamaly deňlemesiniň ähli kökleri çep ýarym tekizlikde ýakan ýagdaýyndaky pursatlarda ulanmak ýeterlikdir. Şonuň üçin şekilli ýaýdaky aňlatmanyň aýyrmak kegitli kwadratik formasy bolmagy üçin

$$r > \left(\bar{B}b_1 + \frac{1}{2}\bar{c}_1 \right)^T C^{-1} \left(\bar{B}b_1 + \frac{1}{2}\bar{c}_1 \right) \qquad (28)$$

Deňsizligiň ýerine ýetirilmegi gerek we ýeterlikdir.

Egerde $b_0 c_0 < 0$ bolsa, onda $ab_0 + \frac{c_0}{2} = 0$ deňsizligiň ýerine ýetirilmegi üçin şeýle goşmak a-ny saýlap almak mümkin bolar. Onda $\frac{dv(\bar{z},z_1,\varepsilon)}{dt}$ ýasama aýyrmak alamaty funuksiýa bolar. Hakykatdanda, egerde $ab_0 + \frac{c_0}{2} = 0$ onda $\frac{dv(\bar{z},z_1,\varepsilon)}{dt} < 0$ haçanda $\bar{z} \neq 0$, $f(\varepsilon) = 0$ we $z_1 \neq 0$ bolan mahalynda, şeýlelikde, sazlaýjynyň parametrleri (28) deňsiligi we we $b_0 c_0 < 0$ şerti kanagatlandyrsa, onda $V(\bar{z}, z, \varepsilon)$ goşmak kesgitlenen funuksiýasy bardyr, onuň ýasamasy bolsa, ulgam (15) güýjine aýyrmak alamatlydyr. Ulgam (15)-iň triwial çözgüsi ($Z_k = 0,\ \varepsilon = 0$) durnuklulygy baradaky teorema laýyklykda durnukly bolar. Deňsizlik (24) ýerine ýetirilse, onda ol (11)-nji deňleme ulgamynyň $\left(X_k = 0, \quad y = 0\right)$ triwial çözgüniň durnuklulygyny aňladýar.

Mysal 1. Dikligine hereket edýän uçujy operatoryň awtomatiki sazlaýjy ulgamynyň durnuklulygynyň derňewni geçirmeli. Onuň düzüm çatgysy surat 55-de görkezlip ol aşakdaky elementlerden durýar: sazlanýan desgadan, onuň geçiş funuksiýasy tangaž burçy boýunça

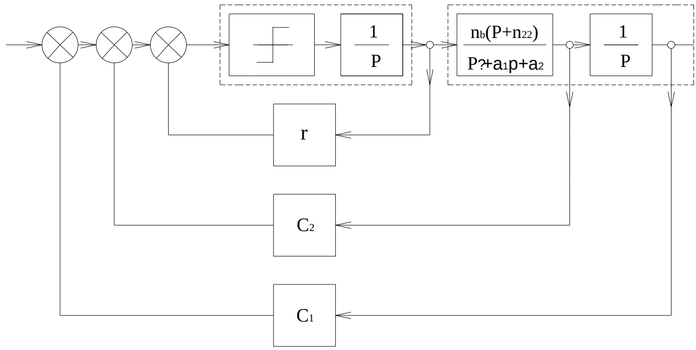
$$W(p) = \frac{n_b(p + n_{22})}{p(p^2 + a_1 p + a_2)} \tag{29}$$

$n_b > 0, n_{22} > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ *we* $a_1^2 > 4a_2$ rele tipli awtopilot operatiw formadaky differensiýal deňleme bilen bean edilýär:

$$py = f(\varepsilon) \tag{30}$$

Aşakdaky deňlemeli duýgur element

$$\varepsilon = g - c_1 x - c_2 px - ry \tag{31}$$



Surat 3

Sazlanylýan desganyň differensiýal deňlemesi:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{dx}{dt}=n_b\frac{dy}{dt}+n_bn_{22}y \qquad (32)$$

Egerde täze üýtgedijiler girizilse:

$$x_1=x_2,\quad x_2=\frac{dx}{dt},\ x_3=\frac{d^2x}{dt^2}-n_by \qquad (33)$$

we girişdäki täsiri g=0, diýilse onda dolandyryjy ulgamyň asuda hereketi aşakdaky deňleme bilen beýan edilýär:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+by,\ \frac{dy}{dt}=f(\varepsilon),\ \varepsilon=c^Tx-ry \qquad (34)$$

Nirede $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-a_2&-a_1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, $c\begin{bmatrix}-c_1\\-c_2\\0\end{bmatrix}$,

$$b_2 = n_b, b_3 = n_b(n_{22} - a_1)$$

Mundan beýläkde ýönekeýleşdirek üçin üýtgedijileri çalyşalyň:

$$u = Ax + by, \quad \varepsilon = c^T x - ry \tag{35}$$

Onda (34) deňleme ulgmy aşakdaky görnüşde bolar:

$$\frac{du}{dt} = Au + bf(\varepsilon), \ \frac{d\varepsilon}{dt} = c^T u - rf(\varepsilon) \tag{36}$$

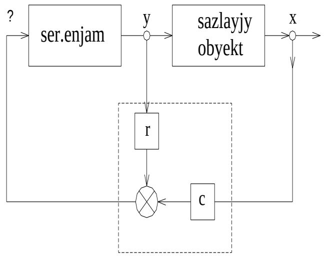
(34) deňleme ulgamynyň ýeketäk ($x = 0, \ y = 0$) deňagramly ýagdaýy bar, diýmek, ulgam (36)-yň hem $u = 0, \ \varepsilon = 0$ ýeketäk deňagramly ýagdaýy bolar. Bu deňagramly ýagdaýyň durnuklulygny derňäliň. (36) ulgamy kononiki forma getirmek üçin üýtgedijileri çalşalyň.

$$u = Tz \tag{37}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & -\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

T matritsasyna ters matritsa bolar.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 - & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1\lambda_2 & -(\lambda_1 - \lambda_2) & 1 \end{bmatrix} \qquad (39)$$



E D E B I Ý A T L A R

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. Основы вычислительной техники и программирования. В.В. Стрыгин. Л. С. Щарев.
10. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы. С. В. Якубовский. Н. А. Барканов. Л. И. Ниссельсон и др. Под ред. С. В. Якубовского. М. 1985.
11. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральный микросхем. Справочник. Под ред. В. А. Шахнова. М. 1988.

12. Применение интегральных микросхем в электронной вычислительной технике. Справочник. Р. В. Данилов. С. А. Ельцова. Ю. п. Иванов и др. под ред. Б. Н. Файзулаева. Б. В. Тарабрина. М. 1987

M A Z M U N Y